

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Збірник задач з теоретичної механіки



Львів
2011

УДК [531](075.8)

З 41

ББК 22.21я73

Автори: *М. В. Блажиевська, А. А. Ровенчак, Н. А. Сідлецька, М. М. Стецко, В. М. Ткачук, Т. В. Фітьо*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук **О. В. Держко**
зав. відділу теорії модельних спінових систем
(Інститут фізики конденсованих систем НАН України);

канд. фіз.-мат. наук, доц. **Г. В. Понеділок**
зав. кафедри інженерного матеріалознавства
та прикладної фізики
(Національний університет “Львівська Політехніка”)

Рекомендовано до друку

Вченою радою фізичного факультету

Львівського національного університету імені Івана Франка.

Протокол №7 від 17 листопада 2010 р.

Збірник задач з теоретичної механіки / М. В. Блажиевська, А. А. Ровенчак, Н. А. Сідлецька та ін. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 68 с.

Збірник складається з восьми розділів. Початок кожного розділу супроводжується коротким теоретичним вступом, у якому викладені основні означення, твердження та необхідні формули. Збірник містить відповіді до усіх задач. Складніші задачі супроводжуються вказівками та подекуди повними розв'язками.

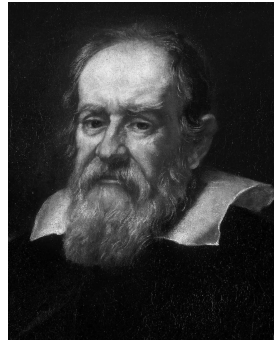
Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів.

© Блажиевська М. В., Ровенчак А. А.,
Сідлецька Н. А., Стецко М. М.,
Ткачук В. М., Фітьо Т. В., 2011

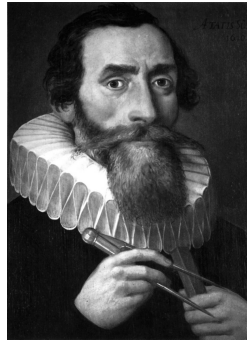
ISBN 978-966-613-797-8

Зміст

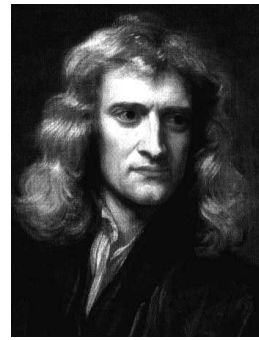
I. Кінематика	5
II. Динаміка. Закони збереження	10
III. Лагранжевий формалізм	15
IV. Гамільтоновий формалізм	20
V. Теорія Гамільтона–Якобі	25
VI. Малі коливання	27
VII. Рух твердого тіла	35
VIII. Неперервні системи	41
Відповіді, вказівки, розв’язки	45
Література	64
Програма курсу лекцій “Теоретична механіка”	65



Галілео Галілей
(1564–1642)



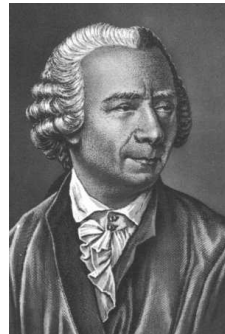
Йоган Кеплер
(1571–1630)



Ісаак Ньютон
(1643–1727)



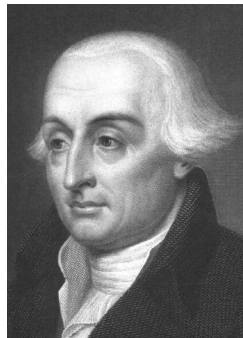
Даніель Бернуллі
(1700–1783)



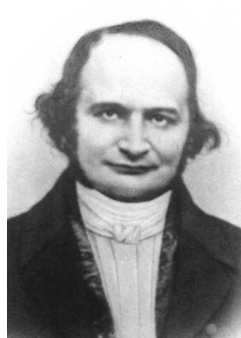
Леонард Ейлер
(1707–1783)



Жан-Батист Д'Аламбер
(1717–1783)



Жозеф-Луї Лагранж
(1736–1813)



Карл Якобі
(1804–1851)



Вільям Рован Гамільтон
(1805–1865)

I. Кінематика

千里之行始於足下

*Шлях завдовжки тисячу лі починається
з першого кроку.*

Лао-цзи

Матеріальною точкою будемо називати тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі. Для того, щоб задати положення матеріальної точки в просторі, потрібно три параметри (координати). Система координат — це спосіб, з допомогою якого ми визначаємо положення точки в просторі. У декартовій системі координат положення матеріальної точки визначається радіус-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\text{I.1})$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — одиничні базисні вектори декартової системи координат.

Якщо координати точки залежать від часу: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, тоді миттєва швидкість точки визначається так:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (\text{I.2})$$

а прискорення матеріальної точки:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (\text{I.3})$$

Коли рух точки відбувається по криволінійній траєкторії, то швидкість і прискорення точки можна розкласти на дві складові: тангенціальну (дотичну до траєкторії) та нормальну (перпендикулярну до дотичної):

$$\mathbf{v} = v_\tau \mathbf{n}_\tau + v_n \mathbf{n}_n, \quad (\text{I.4})$$

$$\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{n}_\tau + a_n \mathbf{n}_n, \quad (\text{I.5})$$

де \mathbf{n}_τ — напрямний одиничний дотичний вектор, \mathbf{n}_n — напрямний одиничний нормальний вектор, $a_\tau = \dot{v}$ — тангенціальне прискорення, $a_n = \frac{v^2}{R}$ — нормальне прискорення, $R = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}$ — радіус кривини траєкторії. Зауважимо, що внаслідок ортогональності \mathbf{n}_τ та \mathbf{n}_n виконується $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$

Квадрат віддалі між двома безмежно близькими точками

$$(dr)^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{I.6})$$

Величину g_{ij} називають **метричним тензором**. Зокрема, для декартової системи координат метричний тензор є одиничною матрицею.

До криволінійних систем координат належать, зокрема, циліндрична і сферична системи координат. У циліндричній системі координат положення точки визначається відстанню $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ точки до осі z , кутом φ між проекцією \mathbf{r} на площину XOY і віссю x та координатою z . У сферичній — модулем r радіус-вектора, кутом φ між проекцією \mathbf{r} на площину XOY і віссю x та кутом θ між \mathbf{r} і віссю z . набір криволінійних координат позначимо ξ^i ($i = 1, 2, 3$). Нехай декартові координати є функціями криволінійних координат $x = x(\xi^i)$, $y = y(\xi^i)$, $z = z(\xi^i)$, які своєю чергою є функціями часу $\xi^i = \xi^i(t)$.

Квадрат віддалі між двома безмежно близькими точками в криволінійній системі координат

$$(d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) d\xi^i d\xi^j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j; \quad (\text{I.7})$$

$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}$, $i = 1, 2, 3$ — локальна трійка векторів криволінійної системи координат; $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$ — компоненти метричного тензора у криволінійній системі координат. Тут і далі застосовується так зване **правило сум Айнштейна**: за індексами, які повторюються, відбувається підсумовування, хоча знак суми явно не виписуємо.

Швидкість та прискорення в криволінійних координатах ξ^i :

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_i \dot{\xi}^i, \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{\xi}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j) \mathbf{e}_k, \quad (\text{I.9})$$

де Γ_{ij}^k — символи Крістоффеля другого роду, який пов'язаний з метричним тензором так:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^s} \right). \quad (\text{I.10})$$

- I.1. Два мисливці йдуть назустріч один одному зі швидкостями u_1 та u_2 відповідно. Між ними бігає пес зі швидкістю $v > u_1$, $v > u_2$. Який шлях пробіжить пес до моменту зустрічі мисливців, якщо у початковий момент часу відстань між ними рівна ℓ ?
- I.2. У вершинах квадрата зі стороною a сидять чотири жуки. В момент часу $t = 0$ вони починають повзти зі сталими швидкостями v , які спрямовані на сусіда за годинниковою стрілкою. За який час і де вони зустрінуться?
- I.3. Матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням g , спрямованим вертикально вниз. Визначити швидкість точки v на висоті h , якщо на висоті 0 вона мала швидкість v_0 , спрямовану під кутом α до горизонту.
- I.4. Камінь, кинутий під кутом α до горизонту, двічі побував на одній і тій же висоті h через проміжки часу t_1 і t_2 після початку руху. Визначити початкову швидкість v_0 і висоту h , якщо камінь рухається зі сталим прискоренням g , спрямованим вертикально вниз.

- I.5. Знайти траєкторію точки ободу колеса радіуса R , яке котиться по горизонтальній поверхні.
- I.6. Корабель йде на захід зі швидкістю v . Відомо, що вітер дме з південного заходу. Швидкість вітру, виміряна на палубі корабля, дорівнює u_1 . Знайти швидкість вітру u відносно землі.
- I.7. Матеріальна точка рухається в площині. Знайти рівняння траєкторії точки, якщо
- (а) її тангенціальне прискорення $a_\tau = \text{const}$, нормальне прискорення $a_n = 0$;
 - (б) її тангенціальне прискорення $a_\tau = 0$, нормальне прискорення $a_n = \text{const}$.
- В початковий момент часу швидкість точки рівна u і напрямлена вздовж осі ординат.
- I.8. Точка рухається по сфері, причому в довільний момент часу вектор швидкості точки утворює постійний кут α з меридіаном. Знайти рівняння траєкторії точки.
- I.9. Точка рухається в площині з постійною за величиною швидкістю v_0 , при цьому кут між радіус-вектором точки і вектором її швидкості рівний $\pi\omega t/6$. Знайти рівняння траєкторії точки, якщо в початковий момент часу $\mathbf{r}(0) = 0$.
- I.10. Точка рухається по еліпсу $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ так, що кутова швидкість радіус-вектора, проведеного з центру еліпса до точки, постійна і рівна ω . Визначити швидкість точки, якщо в початковий момент часу $x(0) = a$.
- I.11. Точка рухається по еліпсу з півсями a, b з постійною за величиною швидкістю v_0 . Визначити прискорення і швидкість точки як функції координат.

- I.12. Точка рухається в площині з постійною за величиною швидкістю v_0 і постійною кутовою швидкістю ω . Знайти $\mathbf{v}(t)$.
- I.13. Кіт наздоганяє м'яч, що котиться зі сталою швидкістю v . В початковий момент часу відстань між ними становила ℓ . За який час кіт наздожене м'яч, якщо швидкість kota рівна $u > v$ і весь час спрямована на м'яч? У початковий момент часу швидкість kota перпендикулярна до напрямку руху м'яча. Знайти рівняння траєкторії kota.
- I.14. Знайти нормальне a_n , тангенціальне a_τ прискорення та радіус кривини траєкторії, якщо точка рухається по закону:
- (a) $x = b \cos \omega t, y = b \sin \omega t, z = v_0 t;$
 - (b) $x = b \cos \omega t, y = b \sin \omega t, z = \gamma t^n;$
 - (c) $x = \frac{t - t_0}{t_0} r \cos \omega t, y = \frac{t - t_0}{t_0} r \sin \omega t, z = v_0 t;$
 - (d) $x = a(1 + \cos \omega t), y = a \sin \omega t, z = 2a \sin \frac{\omega t}{2};$
 - (e) $x = (b + vt) \cos \omega t, y = (b + vt) \sin \omega t, z = \gamma t^2.$
- I.15. Матеріальна точка рухається в площині. Її тангенціальне і нормальне прискорення сталі та відповідно рівні a_τ і a_n . Знайти залежність між пройденим шляхом та кутом, який утворює вектор швидкості частинки з віссю абсцис. Початкова швидкість рівна u і спрямована вздовж осі абсцис.
- I.16. Матеріальна точка рухається по колу з радіусом R зі сталим тангенціальним прискоренням a_τ . Через який час t після початку руху нормальне прискорення a_n буде більшим від a_τ в n раз?
- I.17. Точка рухається по параболі $y = kx^2$ так, що її прискорення паралельне до осі y і рівне a . Знайти компоненти a_τ, a_n прискорення точки як функції координати x .

- I.18. Колесо радіуса R котиться по горизонтальній поверхні зі сталою швидкістю v . Знайти залежність нормального, тангенціального прискорення та радіуса кривини виділеної точки на ободі колеса від часу. В початковий момент часу ця точка доторкалася поверхні.
- I.19. Порахувати для циліндричної системи координат
 (а) метричний тензор, (б) символи Крістоффеля,
 (с) лапласіан.
- I.20. Порахувати для сферичної системи координат
 (а) метричний тензор, (б) символи Крістоффеля,
 (с) лапласіан.

II. Динаміка. Закони збереження

Кінь діє на воза з такою ж силою, як і віз на коня. Так чому ж кінь тягне воза, а не навпаки?

Відома задача

Перший закон Ньютона стверджує: якщо на тіло не діють інші тіла, то існують такі системи відліку, відносно яких воно перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Такі системи відліку називаються *інерціальними*.

Зміна координат матеріальних точок з часом в інерціальній системі відліку визначається **другим законом Ньютона**:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{II.1})$$

де \mathbf{F}_i — сила, яка діє на i -ту матеріальну точку масою m_i .

Третій закон Ньютона стверджує: сила, з якою одна матеріальна точка діє на іншу, рівна за величиною і протилежна за напрямом силі, з якою друга матеріальна точка діє на першу. Сила взаємодії між матеріальними точками напрямлена вздовж прямої, яка сполучає ці точки.

Виходячи з законів Ньютона, можна показати, що імпульс системи матеріальних точок $\mathbf{p} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ задовольняє рівнянню

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{зовн}}, \quad (\text{II.2})$$

де $\mathbf{F}_{\text{зовн}}$ — рівнодійна (векторна сума) всіх зовнішніх сил. Якщо ця рівнодійна рівна нулю, то $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$, звідки випливає, що

$$\mathbf{p} = \text{const}. \quad (\text{II.3})$$

Останнє твердження називають **законом збереження імпульсу**.

У багатьох задачах зручно використовувати такі величини: момент імпульсу $\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$ та момент сил $\mathbf{N} = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]$, для яких виконується рівність:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}_{\text{зовн}}. \quad (\text{II.4})$$

Якщо момент зовнішніх сил рівний нулю, то момент імпульсу зберігається (**закон збереження моменту імпульсу**).

Якщо силу, яка діє на i -ту частинку, можна записати у вигляді $\mathbf{F}_i = -\nabla_i U$, то таку силу називають **потенціальною**. Для потенціальних сил, якщо U не залежить від часу, виконується закон збереження енергії

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0, \quad T + U = \text{const}, \quad (\text{II.5})$$

де $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ — кінетична енергія, а U — потенціальна. Використання законів збереження часто суттєво спрощує інтегрування законів руху (II.1).

-
- П.21. Кулька масою m вертикально впала на горизонтальну плиту, маючи в момент удару швидкість v . Визначити зміну імпульсу кульки в разі абсолютно пружного й абсолютно непружного ударів.
- П.22. М'яч масою m , що летів зі швидкістю v , вдарився об горизонтальну площину. Кут падіння дорівнює α . Визначити зміну імпульсу, якщо удар абсолютно пружний.
- П.23. Кулька масою m налітає зі швидкістю v на перпендикулярно розташовану плиту маси M , пружно вдаряючи її по центру. Визначити швидкості кульки та плити після зіткнення.
- П.24. Кулька летить зі швидкістю \mathbf{v} і вдаряється в площину, що рухається зі швидкістю \mathbf{u} . Знайти швидкість кульки після удару. Удар абсолютно пружний.
- П.25. Куля масою m , що рухалася зі швидкістю \mathbf{v} , налетівши на кулю масою M , що перебувала у спокої, після пружного удару змінила напрямок свого руху на кут α . З якими швидкостями рухалися кулі відразу після удару?
- П.26. На судні масою M відкорковують шампанське. На скільки зміниться швидкість судна, якщо корок масою m вилетів у напрямі протилежному до руху судна, під кутом α до горизонту і зі швидкістю v відносно судна?
- П.27. Знайти закон руху, рівняння траєкторії та її параметри (максимальна висота, час польоту, дальність польоту) для частинки, кинутої під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 .

- II.28. Знайти швидкість падіння частинки в однорідному полі з тертям, пропорційним квадрату її швидкості, якщо початкова швидкість рівна нулю. Знайти встановлену швидкість руху.
- II.29. Знайти закон руху, рівняння траєкторії та її параметри (максимальна висота, час польоту, дальність польоту) для частинки маси m , кинуті під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 , якщо сила опору повітря пропорційна до швидкості частинки: $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$.
- II.30. З якою початковою швидкістю v_0 треба кинути вниз м'яч з висоти h , щоб він підстрибнув на висоту $2h$? Вважати, що удар об землю абсолютно пружний.
- II.31. М'яч вільно падає з висоти H на горизонтальну площину. При кожному відскакуванні швидкість його зменшується в $n = 2$ рази. Знайти пройдений м'ячем шлях з початку падіння до зупинки.
- II.32. Мішень маси M підвішена на нитці і може вільно коливатися. Знайти швидкість мішені після попадання в неї кулі маси m , яка горизонтально летіла зі швидкістю v , якщо куля
- (a) застрягне в мішені;
 - (b) горизонтально відіб'ється від мішені;
 - (c) проб'є мішень і вилетить з неї зі швидкістю u .
- II.33. Частинка маси m і зарядом q влітає із швидкістю \mathbf{v} в однорідне магнітне поле напруженістю \mathbf{H} . Знайти закон руху частинки.
- II.34. Проінтегрувати рівняння руху:
- (a) $m\ddot{x} = \alpha$, $\dot{x}(0) = -1$, $x(0) = 1$;

- (b) $m\ddot{x} = kx$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 0$;
 (c) $m\ddot{x} = kx + \alpha$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 0$;
 (d) $m\ddot{x} = -\beta\dot{x}$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 1$;
 (e) $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} + kx$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$.

П.35. Проінтегрувати рівняння руху $m\ddot{x} = F(t)$, якщо

- (a) $F(t) = at$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 0$;
 (b) $F(t) = at^2$, $\dot{x}(0) = -1$, $x(0) = 1$;
 (c) $F(t) = a \sin \omega t$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 2$;
 (d) $F(t) = ae^{-\alpha t}$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = -1$;
 (e) $F(t) = ate^{-\alpha t}$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$;
 (f) $F(t) = ae^{-\alpha t} \cos \omega t$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = -1$.

П.36. Знайти закон руху частинки маси m в потенціальному полі $U(x)$, якщо

- (a) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$; (b) $U(x) = mgx$;
 (c) $U(x) = -\frac{\alpha}{x}$; (d) $U(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$;
 (e) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\beta}{x^2}$; (f) $U(x) = -\frac{U_0}{\cos^2 \alpha x}$;
 (g) $U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$; (h) $U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{sh}^2 \alpha x}$;
 (i) $U(x) = U_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$; (j) $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \beta x$.

П.37. Проінтегрувати рівняння руху $\ddot{x} = k \sin(x/a)$, $k > 0$, $a > 0$. Початкові умови: $x(0) = \pi a$, $\dot{x}(0) = 2\sqrt{ka}$.

П.38. Знайти в квадратурах період коливань математичного маятника довжини ℓ в залежності від амплітуди кута відхилення стрижня від вертикалі.

- П.39. Тіло без початкової швидкості падає на Землю з дуже великої висоти $h > R_0$ (R_0 — радіус Землі). Знайти закон руху тіла.
- П.40. Знайти час, за який частинка маси m досягне силового центру, що притягає її з силою $F = \alpha mr^n$, де r — віддаль до центру. В початковий момент частинка нерухома, а віддаль її до центру дорівнює r_0 . Розглянути випадки:
- (а) $n = 1$; (б) $n = 0$; (с) $n = -2$; (д) $n = -3$.

III. Лагранжевий формалізм

My work has always tried to unite the true with the beautiful and when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

В моїй науковій роботі я весь час пробував об'єднати істину та красу. Коли я стояв перед вибором, то переважно вибирав красу

Германн Вейль

Координати та швидкості тіл часто пов'язані між собою певними співвідношеннями. Існує широкий клас так званих **голономних в'язей**, тобто таких обмежень на координати \mathbf{r}_i , які можна виразити рівностями:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{III.1})$$

Як приклад розглянемо систему, що складається з двох частинок, які з'єднані нерозтяжним стрижнем довжини ℓ . Тоді рівняння в'язі буде мати такий вигляд:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - \ell^2 = 0.$$

При наявності в'язей рух тіл зручно описувати **рівняннями Лагранжа I роду**

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha}, \quad (\text{III.2})$$

де $\lambda_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, s$ — множники Лагранжа. При розв'язуванні рівнянь (III.2) необхідно враховувати в'язі (III.1). Величина $\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha}$ називається силою реакції в'язей.

N тіл, на які накладено s зв'язків, мають $n = 3N - s$ ступенів вільності. Можна ввести n узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_n , таких, що $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, а підстановка їх в рівняння в'язей (III.1) перетворює їх у тотожності. Узагальнені координати задовольняють **рівняння Лагранжа II роду**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{III.3})$$

Функція $L = T - U$ називається **лагранжіаном** і залежить від узагальнених координат, швидкостей та часу:

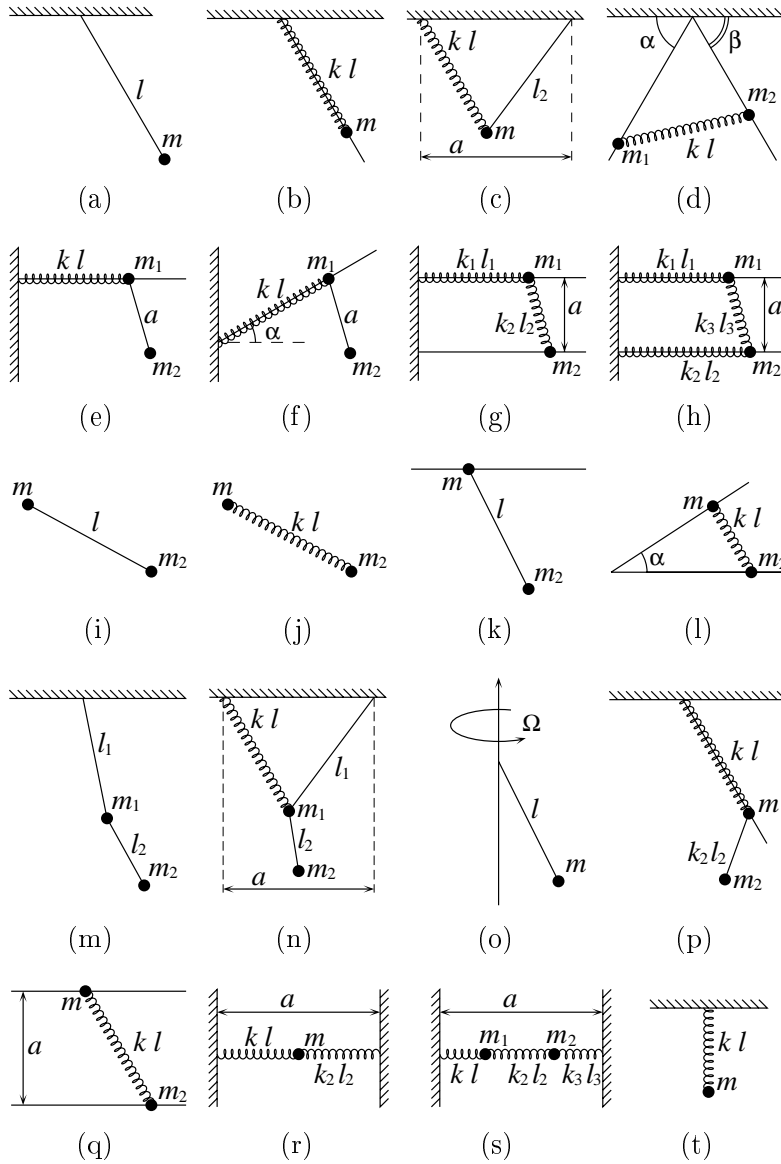
$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Зауважимо, що рівняння Лагранжа I та II родів є еквівалентними до рівнянь Ньютона.

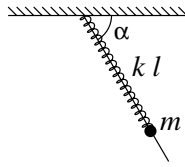
- III.41. Використовуючи рівняння Лагранжа I роду, знайти закон руху матеріальної точки, що рухається по похилій площині, кут нахилу якої до горизонту становить α . Знайти реакцію площини.
- III.42. Записати рівняння Лагранжа I роду математичного маятника маси m , який кріпиться до нерозтяжного стрижня завдовжки ℓ . Знайти реакцію стрижня, якщо в найнижчій точці траєкторії швидкість маятника u .

- III.43. Матеріальна точка зісковзує з гладкої нерухомої кулі радіуса R . В початковий момент часу точка знаходилася на вершині кулі, а її початкова швидкість була рівна нулю. На якій висоті точка відірветься від поверхні кулі?
- III.44. Точка рухається по поверхні гладкого нерухомого еліпсоїда з півосями a , b , c під дією сили $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{r}$ (початок радіус-вектора співпадає з центром еліпсоїда). Знайти реакцію зв'язку як функцію координат і швидкості.
- III.45. Записати рівняння Лагранжа I роду кульки масою m , що рухається по дротині, яка має форму параболи $y = kx^2$. Знайти реакцію дротини, якщо в точці $x = 0$ кулька має швидкість u .
- III.46. Записати лагранжіан вільної частинки в таких системах координат
(а) сферичній; (б) циліндричній; (с) параболічній.
- III.47. Записати лагранжіан та відповідні рівняння Лагранжа II роду для математичного маятника маси m , довжини ℓ , якщо точка підвісу здійснює
(а) горизонтальні коливання за законом $x = a \cos \Omega t$;
(б) вертикальні коливання за законом $y = a \cos \Omega t$;
(с) рівномірний рух по колу радіуса a з частотою Ω .
- III.48. Матеріальна точка маси m рухається без тертя по дротині, що має форму параболи $y = \frac{x^2}{a}$. Знайти лагранжіан системи та записати рівняння Лагранжа II роду.
- III.49. Записати рівняння Лагранжа II роду для системи з N матеріальних заряджених точок маси m та заряду q кожна, якщо ці точки ковзають без тертя на колі радіуса R .

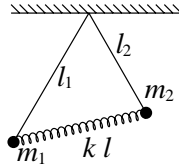
П.50. Побудувати лагранжіан та записати рівняння Лагранжа II роду. На рисунках задана довжина пружин у нерозтягнутому стані.



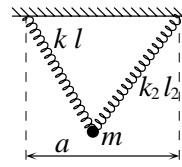
III.51. Побудувати лагранжіан та записати рівняння Лагранжа II роду. На рисунках задана довжина пружин у нерозтягнутому стані.



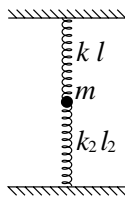
(a)



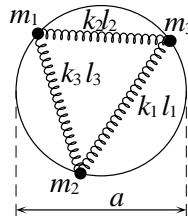
(b)



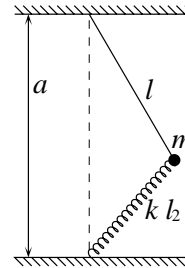
(c)



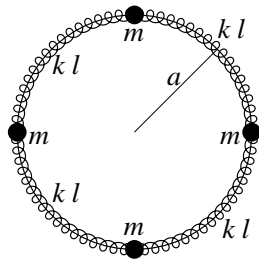
(d)



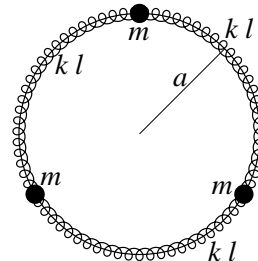
(e)



(f)



(g)



(h)

IV. Гамільтоновий формалізм

The truth always turns out to be simpler than you thought

Істина завжди виявляється простішою, ніж можна було б подумати

Річард Фейнман

У багатьох випадках зручно перейти від лагранжевого формалізму до гамільтонового. Гамільтоновий формалізм широко використовується у квантовій та статистичній фізиці. **Функцію Гамільтона**, або **гамільтоніан**, визначають як пертворення Лежандра функції Лагранжа:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (\text{IV.1})$$

де узагальнений імпульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{IV.2})$$

Наголосимо, гамільтоніан є функцією від координат та імпульсів. Тому, щоб отримати гамільтоніан, потрібно виконати два кроки:

- 1) з системи рівнянь (IV.2) виразити швидкості \dot{q}_i як функції імпульсів та координат;
- 2) отримані залежності $\dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ підставити у вираз (IV.1).

Рівняння руху мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

$i = 1, \dots, n$, і називаються **канонічними рівняннями Гамільтона**

Легко показати, що довільна функція $f = f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (\text{IV.4})$$

де символом $\{f, H\}$ позначено дужку Пуассона, яка задається так:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (\text{IV.5})$$

З допомогою дужок Пуассона, використовуючи формулу (IV.4), зручно досліджувати, чи функція f є інтегралом руху, тобто чи f зберігається з часом. Легко обчислити дужки Пуассона від координат та імпульсів:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (\text{IV.6})$$

Ці дужки Пуассона називаються **фундаментальними**.

Серед перетворень координат та імпульсів, що зберігають вигляд канонічних рівнянь (IV.3), існують перетворення, які залишають незмінними фундаментальні дужки Пуассона, так звані **канонічні перетворення**. Канонічне перетворення зручно визначати за допомогою твірної функції. Задавши довільну функцію $F_1(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$, можна показати, що перетворення, задане такими співвідношеннями

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (\text{IV.7})$$

залишає рівняння (IV.3) без змін. Тут H' — новий гамільтоніан.

IV.52. Побудувати гамільтоніани та записати канонічні рівняння руху для таких лагранжіанів:

$$(a) L = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$(b) L = \frac{\dot{x}^2}{6} - \frac{x\dot{x}}{2};$$

$$(c) L = \frac{\dot{x}^2}{4} - \frac{x\dot{x}}{3} - \frac{x^2\dot{x}}{5};$$

$$(d) L = \frac{m(\dot{x} + x)^2}{2} - \alpha x^2;$$

$$(e) L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2};$$

$$(f) L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \alpha x;$$

$$(g) L = \frac{m(\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r})^2}{2} - \alpha yz;$$

$$(h) L = m \frac{e^x \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}}{2};$$

$$(i) L = m \frac{(\dot{x} - 2\dot{y})^2 + \dot{x}\dot{y}}{2}.$$

IV.53. Побудувати гамільтоніани та записати канонічні рівняння руху для релятивістських лагранжіанів (\mathbf{A} , φ — функції координат та часу)

$$(a) L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}};$$

$$(b) L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}};$$

$$(c) L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{r}}) - e\varphi.$$

IV.54. Побудувати гамільтоніани та записати канонічні рівняння руху для:

(a) математичного маятника;

(b) подвійного математичного маятника;

(c) математичного маятника, точка підвісу якого здійснює вертикальні коливання за законом $a \cos \omega t$;

(d) математичного маятника, точка підвісу якого здійснює горизонтальні коливання за законом $a \cos \omega t$.

IV.55. Яка залежність від узагальнених координат та узагальнених швидкостей повинна бути у лагранжіана, щоб гамільтоніан можна було представити як суму кінетичної та потенціальної енергій?

IV.56. Порахувати такі дужки Пуассона

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $\{x, e^x\};$ | (b) $\{x^2, p^2\};$ |
| (c) $\{x + p^3, e^x\};$ | (d) $\{xp^3, e^x\};$ |
| (e) $\{xy, p_x^4 \cos p_y\};$ | (f) $\{xe^y, p_x^2 + \cos(xp_y)\};$ |
| (g) $\{x + y, p_x^4 \cos p_y\};$ | (h) $\{e^x \sin p_y, x^2 y^2\};$ |
| (i) $\{e^{xy} p_x, p_x \tan p_y\};$ | (j) $\{xp_y p_z, yp_x\};$ |
| (k) $\left\{ \frac{y + z^3}{x}, p_x p_y + \sin p_x \right\}.$ | |

IV.57. Порахувати такі дужки Пуассона

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|---|
| (a) $\{M_i, M_j\};$ | (b) $\{x_i, M_j\};$ | (c) $\{p_i, M_j\};$ |
| (d) $\{p^2, M_i\};$ | (e) $\{r^2, M_i\};$ | (f) $\{M^2, M_i\};$ |
| (g) $\{(\mathbf{ar}), M_i\};$ | (h) $\{(\mathbf{ar}), p_i\};$ | (i) $\{(\mathbf{ar}), (\mathbf{bp})\};$ |

де M_i — i -та компонента моменту кількості руху $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$, а \mathbf{a} , \mathbf{b} — сталі вектори.

IV.58. Перевірити, чи задні нижче величини є інтегралами руху для системи, еволюція якої описується гамільтоніаном $H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{r}$ у трьохвимірному просторі:

- | | | |
|--|------------|------------------------------|
| (a) $p_x;$ | (b) $M_x;$ | (c) $p_x z + p_z x;$ |
| (d) $M_y^2;$ | (e) $r^2;$ | (f) $e^{p^2 - \frac{z}{r}};$ |
| (g) $[\mathbf{p}, \mathbf{M}] - \frac{\mathbf{r}}{r}$. Це — вектор Рунге-Ленца. | | |

IV.59. Для величин з попередньої задачі, які виявилися інтегралами руху, переконатися, що дужка Пуассона від двох інтегралів руху теж є інтегралом руху.

IV.60. Гамільтоніан системи: $H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$. Використовуючи дужки Пуассона, знайти закон зміни з часом таких фізичних величин:

- | | | |
|----------|------------|-----------|
| (a) $x;$ | (b) $p^2;$ | (c) $xp.$ |
|----------|------------|-----------|

IV.61. Знайти канонічне перетворення, що відповідає твірній функції:

$$(a) F_1(q, Q) = \sum q_i Q_i;$$

$$(b) F_2(q, P, t) = qP + (bq - aP)t, \text{ де } a, b - \text{ сталі.}$$

IV.62. Знайти твірну функцію виду $F_3(p, Q)$, що приводить до того ж канонічного перетворення, що й $F_2(q, P) = q^2 e^P$.

IV.63. До гамільтоніану $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ застосовують канонічне перетворення, що описується твірною функцією $F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q$. Знайти:

$$(a) H(P, Q); \quad (b) \{Q, P\}_{qp}; \quad (c) \{q, p\}_{QP};$$

(d) твірні функції $F_2(q, P)$, $F_3(p, Q)$, $F_4(p, P)$, які ведуть до того самого канонічного перетворення.

IV.64. Відома функція Гамільтона системи з двома ступенями вільності

$$H = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + q_2^2].$$

Знайти коефіцієнти a_1, a_2 твірної функції канонічного перетворення

$$F_1 = a_1^2 (q_1 + q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_1 + a_2^2 (q_1 - q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_2,$$

при якому гамільтоніан набуває вигляду $H = P_1 + \sqrt{3}P_2$.

IV.65. Показати, що перетворення

$$x = X \cos \lambda + \frac{P_y}{m\omega} \sin \lambda, \quad y = Y \cos \lambda + \frac{P_x}{m\omega} \sin \lambda,$$

$$p_x = -m\omega Y \sin \lambda + P_x \cos \lambda, \quad p_y = -m\omega X \sin \lambda + P_y \cos \lambda$$

є канонічним. Знайти нову функцію Гамільтона $H(X, Y, P_x, P_y)$, якщо гамільтоніан у старих змінних

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

IV.66. Показати, що перетворення, записане нижче, є канонічним:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2), & y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2), \\ p_x &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2), & p_y &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2). \end{aligned}$$

IV.67. Довести, що при канонічному перетворенні виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{qp} &= -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{QP}; & \text{(b)} \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{qp} &= \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{QP}; \\ \text{(c)} \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{qp} &= \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{QP}; & \text{(d)} \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{qp} &= -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{QP}. \end{aligned}$$

V. Теорія Гамільтона–Якобі

Patience, persistence and perspiration make an unbeatable combination for success

Терпіння, наполегливість і ніт — переможна комбінація, що створює успіх

Наполеон Гілл

Функцію дії, або дію, означають так:

$$S = \int_{t_0}^t L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt. \quad (\text{V.1})$$

Нехай у початковий момент часу t_0 узагальнені координати мали фіксовані значення q_1^0, \dots, q_n^0 . Система еволюціонує відповідно до рівнянь Лагранжа протягом часу $t - t_0$ до координат q_i . Зрозуміло, що величина S залежить від значень координат q_i та часу t . Таким чином, дію можна розглядати як функцію від координат та часу $S = S(q_1, \dots, q_n, t)$.

Якщо заданий гамільтоніан системи $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$, то виконуються рівняння Гамільтона–Якобі:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0. \quad (\text{V.2})$$

Розв'язок цього рівняння, який містить n незалежних сталих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, називається **повним інтегралом**. Повний інтеграл $S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задовольняє теоремі Якобі, яка стверджує, що похідна від повного інтеграла за сталою теж стала:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{V.3})$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно координат, знаходять $q_i = q_i(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, тобто закон руху.

У багатьох важливих випадках повний інтеграл рівняння (V.2) можна знайти методом розділення змінних:

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = S_0(t) + S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n).$$

V.68. Виходячи з означення функції дії, знайти її для одновимірної вільної частинки, яка в момент часу t_0 мала координату x_0 . Перевірити виконання теореми Якобі.

V.69. Виходячи з означення функції дії, знайти її для одновимірного гармонічного осцилятора, який в момент часу t_0 мав координату x_0 . Перевірити виконання теореми Якобі.

V.70. Використовуючи рівняння Гамільтона–Якобі, знайти закон руху частинки в одновимірному потенціалі:

$$(a) U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad (b) U(z) = mgz$$

V.71. Використовуючи рівняння Гамільтона–Якобі, знайти закон руху частинки в полі $U(x, y, z)$, яке рівне

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{x^2}{2} + \frac{y}{2}; & \text{(b)} 2x^2 + 3y^2 - 4z^2; & \text{(c)} x - 2y + z^2; \\ \text{(d)} \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}; & \text{(e)} \frac{1}{x^2} + 2y + z^2; & \text{(f)} \frac{1}{x^2} + 2y^2 - z. \end{array}$$

V.72. Переходячи до сферичних координат і застосовуючи метод Гамільтона–Якобі, знайти закон руху для таких тривимірних потенціалів.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{m\omega^2 r^2}{2}; & \text{(b)} -\frac{\alpha}{r}; & \text{(c)} -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}. \end{array}$$

V.73. Використовуючи метод Гамільтона–Якобі знайти закон руху тіла, що рухається по гладкій похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом.

VI. Малі коливання

It requires a very unusual mind to undertake the analysis of the obvious
Аналіз очевидного вимагає надзвичайного розуму

Альфред Н. Вайтгед

Поширеним типом рухів механічних систем є так звані малі коливання — рухи, які система здійснює в околі положення стійкої рівноваги. Розкладемо в ряд потенціальну енергію в околі положення стійкої рівноваги у точці $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots \quad (\text{VI.1})$$

Обмеження квадратичними по відхиленню доданками називається гармонічним наближенням, для широкого класу задач достатньо обмежитися цим наближенням. У положенні стійкої рівноваги q_0 потенціальна енергія набуває мінімального значення,

$$\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0. \quad (\text{VI.2})$$

Вводячи змінну $x = q - q_0$, перепишемо лагранжیان одновимірної системи у вигляді:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad k = \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0}. \quad (\text{VI.3})$$

Відповідне рівняння руху легко розв'язується:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad \text{або} \quad x(t) = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (\text{VI.4})$$

де $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота малих коливань, $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ — амплітуда, а α — початкова фаза.

При дослідженні коливань осцилятора, на який діє довільна сила $F(t)$ зручно ввести змінну $\xi(t) = x + i\omega x$, розв'язок для якої має вигляд:

$$\xi(t) = e^{i\omega t} \left(\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \xi_0 \right) \quad (\text{VI.5})$$

Тоді енергія осцилятора $E(t) = \frac{m}{2} |\xi(t)|^2$. Якщо в момент часу t_0 осцилятор перебував у спокої, то енергія, яку набув осцилятор під дією зовнішньої сили $F(t)$, є така:

$$E(t) = \frac{1}{2m} \left| \int_{t_0}^t F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2. \quad (\text{VI.6})$$

Якщо система має s ступенів вільності, то лагранжیان можна представити у вигляді

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j), \quad (\text{VI.7})$$

де $x_i = q_i - q_i^0$ — відхилення узагальненої координати q_i від її значення в положенні стійкої рівноваги q_i^0 . Рівняння Лагранжа II роду виглядають так:

$$\sum_j (m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j) = 0 \quad (\text{VI.8})$$

і за допомогою підстановки $x_j = A_j e^{i\omega t}$ зводяться до однорідної системи алгебраїчних рівнянь відносно сталих коефіцієнтів A_j . Ненульові розв'язки можливі лише за умови

$$\det |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0. \quad (\text{VI.9})$$

З цього рівняння знаходять частоти малих коливань ω_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$). Далі для кожного фіксованого ω_α знаходять зв'язки між коефіцієнтами A_j^α . Тоді розв'язки рівнянь руху (VI.8) запишуться як лінійна комбінація коливань з різними частотами:

$$x_i(t) = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^s A_i^\alpha e^{i\omega_\alpha t}.$$

Метод Боголюбова-Крилова стосується розв'язування нелінійних рівнянь методом теорії збурень. Розглянемо для прикладу одновимірне нелінійне рівняння:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \alpha x^2, \quad (\text{VI.10})$$

причому α вважається малим параметром.

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) x + \alpha x^2 \quad (\text{VI.11})$$

де ω — шукана частота малих коливань.

Розв'язки останнього рівняння шукаємо у вигляді ряду за параметром α :

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots, \quad (\text{VI.12})$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\omega_1 + \alpha^2\omega_2 + \dots \quad (\text{VI.13})$$

Підставляємо шукані розв'язки у (VI.11) і прирівнюємо у лівій і правій частині співвідношення доданки при однакових степенях α . У результаті отримуємо рівняння для x_0, x_1, x_2, \dots , поправки до частоти $\omega_1, \omega_2, \dots$ знаходимо з умови, щоб у системі не було саморезонансів, тобто права частина не повинна містити гармонічних функцій частоти ω .

Рух частинки у швидкоосцилюючому полі описується рівнянням:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + f, \quad (\text{VI.14})$$

де $f = f_1(x) \cos \Omega t + f_2(x) \sin \Omega t$ — швидкоосцилююча сила.

Розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді суми плавної та швидкоосцилюючої частин:

$$x(t) = X(t) + \xi(t). \quad (\text{VI.15})$$

Плавна частина $X(t)$ описується рівнянням з ефективним потенціалом:

$$m\ddot{X} = -\frac{\partial U_{eff}(X)}{\partial X}, \quad (\text{VI.16})$$

де

$$U_{eff}(X) = U(X) + \frac{1}{4m\Omega^2} (f_1^2(X) + f_2^2(X)). \quad (\text{VI.17})$$

VI.74. Знайти загальні розв'язки таких диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \ddot{x} + \omega^2 x &= 0; & \text{(b)} \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x &= 0; \\ \text{(c)} \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x &= \alpha \cos \Omega t. \end{aligned}$$

VI.75. Знайти положення рівноваги та частоту малих коливань частинки в потенціальному полі $U(x)$ (вважати, що сталі α, β, U_0 — додатні):

- | | |
|--|---|
| (a) $m\frac{\omega^2 x^2}{2};$ | (b) $U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x;$ |
| (c) $-U_0 e^{-\beta x^2};$ | (d) $U_0 e^{-\beta x^2};$ |
| (e) $U_0 e^{-\alpha x + \beta x^2};$ | (f) $-U_0 e^{-\alpha x^2 + \beta x};$ |
| (g) $U_0 \cos \alpha x;$ | (h) $U_0 \cos^2 \alpha x;$ |
| (i) $U_0 \operatorname{tg} \alpha x;$ | (j) $U_0 (e^{2\alpha x} + 2e^{-\alpha x});$ |
| (k) $U_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x});$ | (l) $\alpha x^2 + \beta x + U_0.$ |

VI.76. Знайти частоту малих коливань математичного маятника довжини ℓ та маси m .

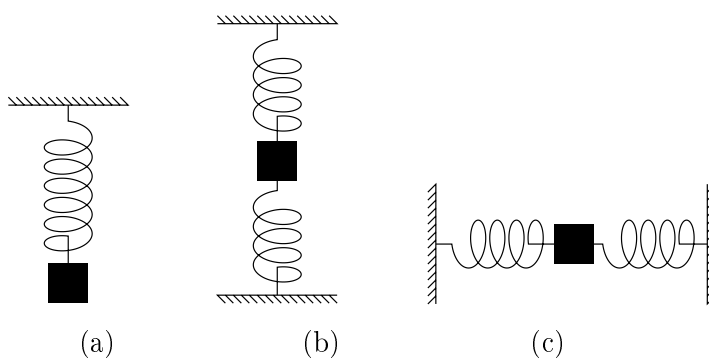
VI.77. Точка підвісу математичного маятника (маса — m , довжина стрижня — ℓ) здійснює горизонтальні коливання за законом $a \cos(\Omega t)$. Знайти часову залежність кута відхилення стрижня від вертикалі. Вважати, що коливання точки підвісу малі ($a \ll \ell$) та повільні ($\Omega \ll \sqrt{g/l}$).

VI.78. Знайти частоту малих коливань однорідного поплавка густини ρ в рідині з густиною $\rho_0 > \rho$, якщо поплавок має форму

- (a) вертикально розміщеного куба зі стороною a ;
- (b) кулі радіуса a ;
- (c) вертикально розміщеного циліндра висоти a та з радіусом основи b .

Рухом рідини знехтувати.

VI.79. Знайти частоту малих коливань таких систем:



Жорсткості всіх пружин k , довжини в нерозтягнутому стані — a , маса тягарця m . У прикладах (b) і (c) відстань між точками кріплення пружин ℓ .

VI.80. Знайти частоти малих коливань, якщо задано лагранжіан системи:

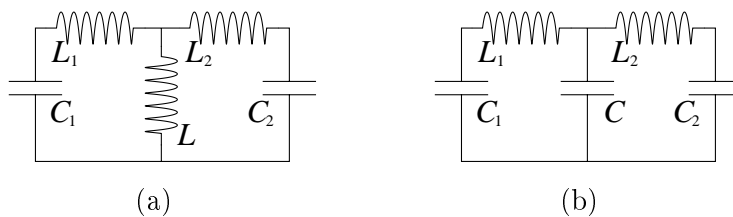
$$(a) L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \alpha xy;$$

$$(b) L = \frac{(\dot{x} - \dot{y})^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

$$(c) L = \frac{m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2}{2} + \beta \dot{x} \dot{y} - \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

VI.81. Знайти частоти малих коливань подвійного математичного маятника. Довжини стрижнів — ℓ_1, ℓ_2 ; маси вантажів m_1, m_2 .

VI.82. Знайти частоти малих коливань таких систем:



VI.83. Система складається з N матеріальних точок маси m кожна, розміщених на одній горизонтальній прямій. Точки з'єднані між собою однаковими пружинами жорсткості k , які в нерозтягнутому стані мають довжину ℓ . Знайти частоти малих коливань такої системи, якщо

(a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$;

(d) $N = 3$, крайня ліва точка закріплена;

(e) $N = 4$, обидві крайні точки закріплені.

VI.84. Знайти закон руху одновимірного гармонічного осцилятора, якщо сила, що діє на нього, має вигляд:

(a) $F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$ (b) $F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$

(c) $F(t) = \begin{cases} F_0 (1 - \frac{t}{\tau}), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$

В початковий момент часу $t = 0$ осцилятор знаходився в стані спокою. Знайти також повну передану осцилятору енергію.

VI.85. Визначити енергію, передану одновимірному гармонічному осцилятору під дією сили $F(t)$, якщо

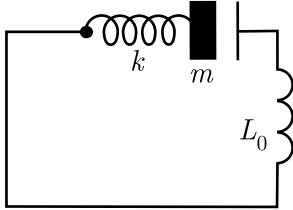
(a) $F = \frac{F_0}{1 + (\frac{t}{\tau})^2}$; (b) $F = F_0 e^{-(t/\tau)^2}$; (c) $F = F_0 e^{-|t|/\tau}$.

В момент часу $t = -\infty$ осцилятор перебував в стані спокою.

VI.86. Застосовуючи метод Боголюбова–Крилова знайти частоту малих коливань в другому наближенні, якщо рівняння руху виглядає так

(a) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x^2$; (b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \beta x^3$;

(c) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x^2 + \beta x^3$.

- VI.87. Методом Боголюбова–Крилова знайти першу ненульову поправку до частоти коливань математичного маятника.
- VI.88. Електричне коло, зображене на рисунку, складається з котушки індуктивністю L_0 і плоского конденсатора, одна з пластин якого має масу m і прикріплена до пружини жорсткістю k . У стані рівноваги відстань між пластинами конденсатора дорівнює d_0 , а ємність конденсатора — C_0 . Методом Боголюбова–Крилова знайти першу ненульову поправку до закону руху і частоти коливань цієї пружини, а також до закону зміни заряду на конденсаторі і відповідної частоти.
- 
- VI.89. Точка підвісу математичного маятника здійснює швидкі вертикальні коливання за законом $y = a \cos \Omega t$, $\Omega \gg \sqrt{g/l}$. Знайти ефективну потенціальну енергію маятника, положення стійкої рівноваги та частоти малих коливань.
- VI.90. Точка підвісу математичного маятника здійснює швидкі горизонтальні коливання за законом $y = a \cos \Omega t$, $\Omega \gg \sqrt{g/l}$. Знайти ефективну потенціальну енергію маятника, положення стійкої рівноваги та частоти малих коливань.

VII. Рух твердого тіла

Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt

Кожна людина має певний горизонт погляду. Коли він звужується і стає безмежно малим, то перетворюється в точку. Тоді людина каже: "Це моя точка зору".

Давид Гільберт

Під абсолютно твердим тілом будемо розуміти систему матеріальних точок, відстані між якими сталі. Рух абсолютно твердого тіла можна розглядати як композицію поступального руху центра мас та обертального навколо певної осі, що проходить через центр мас. Координати центра мас \mathbf{R} системи матеріальних точок визначаються так:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum \mathbf{r}_i m_i, \quad (\text{VII.1})$$

де \mathbf{r}_i та m_i — координати та маса i -ї матеріальної точки. Для суцільного твердого тіла маємо:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (\text{VII.2})$$

У знаменниках обидвох формул стоїть повна маса твердого тіла $M = \sum_i m_i = \int \rho(\mathbf{r}) dV$, де $\rho(\mathbf{r})$ — густина речовини в твердому тілі.

Нехай \mathbf{r} — радіус-вектор точки твердого тіла відносно центра мас. Тоді швидкість цієї точки відносно нерухомої системи координат

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}], \quad (\text{VII.3})$$

де \mathbf{V} — швидкість центра мас, $\boldsymbol{\Omega}$ — кутова швидкість обертання.

Кінетична енергія твердого тіла може бути представлена як сума кінетичних енергій поступального руху центра мас $\frac{1}{2}MV^2$

та обертання твердого тіла навколо центра мас. Кінетична енергія обертання твердого тіла рівна

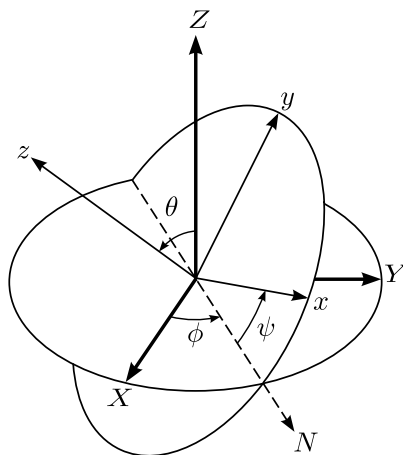
$$T = \frac{1}{2} I^{jk} \Omega_j \Omega_k, \quad (\text{VII.4})$$

де

$$I^{jk} = \sum m_i (\mathbf{r}_i^2 \delta^{jk} - x_i^j x_i^k) = \int (\mathbf{r}^2 \delta^{jk} - x^j x^k) \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{VII.5})$$

— тензор інерції. При певному виборі системи координат тензор інерції діагоналізується. В цьому випадку діагональні компоненти тензора називають **головними моментами інерції**, а прямі, на яких лежать відповідні орти, — **головними осями обертання**. Якщо тіло має вісь симетрії, то вона збігається з однією з головних осей обертання, а дві інші осі є ортогональними до неї.

Для опису обертання твердого тіла зручно користуватися трьома кутами, які визначають орієнтацію системи координат, пов'язаної з тілом, відносно нерухомої системи координат — так званими **кутами Ейлера**. Щоб визначити кути Ейлера, введемо дві системи координат: нерухома, яка характеризується координатами X, Y, Z та рухома — з координатами x, y, z . Початки обох координатних систем збігаються, рухома площина xy перетинає нерухома площину XY по деякій прямій (N), яка називається **лінією вузлів**. Напрямок цієї осі збігається із напрямком векторного добутку $[\mathbf{Z}, \mathbf{z}]$ (поворот від осі Z до осі z виглядає з кінця вектора \mathbf{N} як поворот проти годинникової стрілки). Кути вводяться так: кут θ між осями Z та z , кут ϕ між осями x та N , кут ψ між осями N та X . Кут θ пробігає значення від нуля до π , а кути ϕ і ψ — від нуля до 2π .



Компоненти вектора кутової швидкості Ω виражаються через кути Ейлера та їх похідні так:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (\text{VII.6})$$

Система координат, яка нерівномірно рухається відносно інерціальної зі швидкістю \mathbf{V} або обертається з кутовою швидкістю Ω , називається *неінерціальною*. Рух матеріальної точки відносно такої системи координат описується рівнянням:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla U - m \frac{d\mathbf{V}}{dt} + m[\mathbf{r}, \dot{\Omega}] + 2m[\mathbf{v}, \Omega] + m[\Omega, [\mathbf{r}, \Omega]]. \quad (\text{VII.7})$$

Перший член $-\nabla U$ такий самий, як у другому законі Ньютона. Решта членів називаються *силами інерції*. Сила $-m \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ виникає внаслідок нерівномірності поступального руху системи відліку. Три останні сили пов'язані з її обертанням. Перша з них виникає як наслідок нерівномірності обертання, а дві інші є і при сталій кутовій швидкості. Сила $2m[\mathbf{v}, \Omega]$ називається *коріолісовою*, а $m[\Omega, [\mathbf{r}, \Omega]]$ — *відцентровою*.

- VII.91. Знайти головні моменти інерції системи двох матеріальних точок з масами m_1 та m_2 , якщо відстань між ними a .
- VII.92. Знайти моменти інерції однорідного тонкого дроту маси m відносно головних осей інерції, якщо він має форму:
- (a) стрижня довжини $2a$;
 - (b) квадрата зі стороною $2a$;
 - (c) правильного трикутника зі стороною $2a$;
 - (d) кола радіуса a .
- VII.93. Знайти головні моменти інерції однорідної тонкої пластини маси m , яка має форму:
- (a) квадрата зі стороною $2a$;
 - (b) прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$;
 - (c) круга радіуса a ;
 - (d) правильного трикутника зі стороною $2a$;
 - (e) еліпса з великою піввіссю a і малою піввіссю b ;
 - (f) сфери радіуса a ;
 - (g) поверхні куба зі стороною $2a$.
- VII.94. Знайти головні моменти інерції однорідного тіла маси m , яке має форму:
- (a) кулі радіуса a ;
 - (b) паралелепіпеда з ребрами завдовжки $2a$, $2b$ і $2c$;
 - (c) півкулі радіуса a ;
 - (d) циліндра висоти h з радіусом основи R ;
 - (e) еліпсоїда з півосями a , b та c ;
 - (f) конуса висоти h з радіусом основи R ;
 - (g) порожнистого циліндра: радіус внутрішньої циліндричної поверхні рівний r , зовнішньої — R , висота — h .

- VII.95. Обчисліть головні моменти інерції диска радіуса R з вирізаним отвором радіуса $R/2$. Маса диска m .



- VII.96. Знайти тензор інерції однорідного куба зі стороною $2a$ та маси m . Використовуючи властивості тензорів, знайти момент інерції відносно осі, що проходить через діагональ куба.
- VII.97. Знайти момент інерції однорідного зрізаного конуса маси m з висотою h і радіусами основ r та R відносно осі обертання.
- VII.98. Для D -вимірного конуса з радіусом основи R і висотою h знайти положення центра мас і момент інерції відносно осі обертання. Маса конуса — m .
- VII.99. Сформулювати та довести теорему Штайнера.
- VII.100. Записати вираз для кінетичної енергії обертання симетричної дзиги ($I_x = I_y \neq I_z$), представляючи його через кути Ейлера.
- VII.101. Записати лагранжіан симетричної дзиги маси m у полі тяжіння з однією закріпленою точкою, виразивши його через кути Ейлера.
- VII.102. Доведіть, що для головних моментів інерції твердого тіла довільної форми виконується правило трикутника: сума двох із них не менша за третій.
- VII.103. Знайти час скочування однорідного циліндра з похилої площини (кут нахилу до горизонту — α). Порівняти цей час з часом зісковзування циліндра з площини. В початковий момент відстань від циліндра до підлоги — h .
- VII.104. Знайти час скочування однорідної кулі з похилої площини (кут нахилу до горизонту — α). Порівняти цей час з часом зі-

сковзування кулі з площини. В початковий момент відстань від кулі до підлоги — h .

- VII.105. Людина масою $M = 70$ кг стоїть з випростаними руками по середині легкого диска, який обертається з кутовою швидкістю $\Omega = 1 \text{ c}^{-1}$. В обох руках людина тримає по гантелі маси $m = 5$ кг. Оцініть зміну кутової швидкості диска, якщо людина притисне руки до грудей. Яку роботу при цьому потрібно виконати?
- VII.106. Знайти частоту малих коливань однорідного тіла маси m , яке розташована на горизонтальній поверхні, якщо воно має форму:
(а) півсфери радіуса R ; (б) півкулі радіуса R ;
(с) півциліндра радіуса R .
- VII.107. Симетрична дзига закріплена в одній точці. Відстань від точки закріплення до центра мас дзиги рівна ℓ . Знайти лагранжіан дзиги та записати рівняння Лагранжа II роду.
- VII.108. Точку підвісу математичного маятника рухають з прискоренням \mathbf{a} . Знайдіть частоту малих коливань маятника, якщо його маса становить m , а довжина — ℓ .
- VII.109. Оцініть величину відхилення від вертикалі, спричиненого обертанням Землі, для тіла, що вільно падає з малої висоти h . Широта точки спостереження φ .
- VII.110. Оцініть величину відхилення від вертикалі, спричиненого обертанням Землі, для тіла, яке підкинули вертикально вгору зі швидкістю v . Широта точки спостереження φ .
- VII.111. Визначіть вплив, спричинений обертанням Землі на малі коливання математичного маятника.

VIII. Неперервні системи

... πάντα χωρεῖ, καὶ οὐδὲν μένει...
 ... все тече, все змінюється...

Геракліт Ефеський (за Платоном)

В цьому розділі ми розглядаємо два типи неперервних систем, а саме, пружне середовище та рідину.

При дослідженні пружного середовища вводять поле зміщення деякої фізичної характеристики середовища $\psi = \psi(x, t)$ від певного положення. Тут $x = (x_1, \dots, x_n)$ описує просторові змінні. Функція дії в цьому випадку буде

$$S = \iint \mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, \frac{\partial \psi}{\partial t}, x_1, \dots, x_n, t \right) dx_1 \dots dx_n dt, \quad (\text{VIII.1})$$

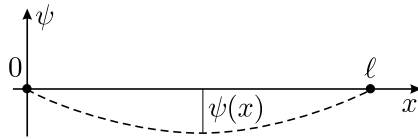
підінтегральну функцію \mathcal{L} називають *густиною лагранжіана*. Рівняння Лагранжа II роду набудуть такого вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial t)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0. \quad (\text{VIII.2})$$

Як приклад, наведемо у гармонічному наближенні густину лагранжіана для одновимірної струни ($n = 1$), яка натягнута з силою F :

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{F}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2,$$

де ρ — лінійна густина струни, а ψ — відхилення струни від прямої (див. рис.).



Перший доданок у формулі для \mathcal{L} описує густину кінетичної енергії, а другий — густину потенціальної енергії розтягнутої струни.

Рух рідини описують за допомогою полів швидкості \mathbf{v} , густини ρ та тиску p . Виконуються рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{VIII.3})$$

та рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (\text{VIII.4})$$

Якщо рідина знаходиться в гравітаційному полі, то на кожну одиницю її об'єму діє сила $\rho \mathbf{g}$, де \mathbf{g} — прискорення вільного падіння, яке необхідно додати до правої частини рівняння (VIII.4). Система рівнянь (VIII.3)–(VIII.4), доповнена рівнянням термодинамічного процесу, стає замкнутою. Наприклад, для ідеального газу при адіабатичному процесі додаткове рівняння має вигляд $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$, де γ — показник адіабати, чи для нестисливої рідини: $\rho = \text{const}$.

У стаціонарному випадку ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$), для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) рівняння Бернуллі має вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p - (\mathbf{g} \mathbf{r})\rho = \text{const}. \quad (\text{VIII.5})$$

Якщо рідина тече повільно, без завихрень, то виконується так звана умова ламінарності:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

У цьому випадку швидкість можна представити як градієнт певного потенціалу $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. При дослідженні обтікання нерухомого тіла слід користатися граничною умовою, що нормальна компонента швидкості рівна нулю на поверхні тіла.

Рух рідини з урахуванням тертя описується рівнянням Нав'є–Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \xi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (\text{VIII.6})$$

де η — коефіцієнт в'язкості зсуву, а ξ — коефіцієнт об'ємної в'язкості. При розгляді нестисливої рідини, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, останній доданок у рівнянні Нав'є–Стокса зникає і зручно ввести коефіцієнт кінематичної в'язкості $\nu = \eta/\rho$.

Зауважимо, що граничною умовою для руху рідини з тертям є $\mathbf{v} = 0$ на нерухомих твердих поверхнях.

- VIII.112. Знайти закон провисання однорідної струни маси m , відстань між точками підвісу якої ℓ . Сила натягу — F .
- VIII.113. Знайти частоти коливань однорідної струни маси m , відстань між точками підвісу якої ℓ . Сила натягу — F .
- VIII.114. Знайти частоти коливань однорідної струни маси m , відстань між точками підвісу, якої ℓ , якщо до неї посередині прикріплено точкову масу M . Сила натягу — F .
- VIII.115. Знайти частоти коливань струни, перша половина має густину ρ_1 , друга — ρ_2 . Сила натягу струни — F , довжина — ℓ .
- VIII.116. Записати Лагранжіан та знайти частоти власних коливань однорідно зарядженої струни в однорідному магнітному полі, напрямленому вздовж струни. Довжина струни — ℓ , сила натягу — F , лінійна густина — ρ , лінійна густина заряду σ , напруженість поля — B .

- VIII.117. Знайти Лагранжів мильної плівки, натягнутої на квадратну рамку зі стороною a . Коефіцієнт поверхневого натягу плівки становить σ , густина ρ . Товщину плівки вважати сталою.
- VIII.118. Побудувати Лагранжів малих повздовжніх коливань однорідного стрижня довжиною ℓ та густиною ρ . Знайти:
- (а) швидкість поширення звуку в стрижні;
 - (б) власні частоти малих повздовжніх коливань, якщо обидва кінці стрижня закріплені;
 - (в) власні частоти малих повздовжніх коливань, якщо один із кінців стрижня закріплений.
- Модуль Юнга дорівнює E . Площу поперечного перерізу стрижня вважати сталою.
- VIII.119. З крану вертикально вниз витікає струмінь рідини з початковою швидкістю u . Знайти форму профілю струменя, якщо площа перерізу крану дорівнює S .
- VIII.120. Вертикально розташований циліндр радіуса R частково заповнений рідиною. Якої форми набуде поверхня рідини, якщо циліндр почне обертатися навколо своєї осі з частотою Ω ?
- VIII.121. Куля радіуса R рухається зі сталою швидкістю v в ідеальній нестисливій рідині. Знайти розподіл швидкостей в рідині.
- VIII.122. Обчислити кількість рідини, яка протікає через круглу трубу радіуса R , довжини ℓ , якщо різниця тисків на кінцях труби становить ΔP , а коефіцієнт кінематичної в'язкості дорівнює ν .

Відповіді, вказівки, розв'язки

Nothing shocks me. I'm a scientist

Ніщо не може шокувати мене. Я — науковець

Індіана Джонс

I.1. $s = \frac{v}{u_1 + u_2} \ell.$

I.2. $t = \frac{a}{v}$, в центрі квадрату.

I.3. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$

I.4. $v_0 = \frac{g}{2 \sin \alpha} (t_1 + t_2), h = g \frac{t_1 t_2}{2}.$

I.5. $x = R(\varphi - \sin \varphi), y = R(1 + \cos \varphi).$

I.6. $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v + \sqrt{2u_1^2 - v^2} \right)$

I.7. (a) Пряма $x = 0$. (b) Коло $\left(x \pm \frac{u^2}{a_n} \right)^2 + y^2 = \frac{u^4}{a_n^2}.$

I.8. $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} e^{\pm(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha}$ — локсодрома.

I.9. $x^2 + \left(y - \frac{3v_0}{\pi\omega} \right)^2 = \left(\frac{3v_0}{\pi\omega} \right)^2.$

I.10. $\mathbf{v} = \left(\frac{ab\omega(b^2 - a^2) \sin 2\omega t}{2(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}; \frac{ab\omega}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2}} \right).$

I.11. $\dot{x} = -\frac{v_0 a y}{b \left\{ \left(\frac{bx}{a} \right)^2 + \left(\frac{ay}{b} \right)^2 \right\}^{1/2}}, \dot{y} = \frac{v_0 b x}{a \left\{ \left(\frac{bx}{a} \right)^2 + \left(\frac{ay}{b} \right)^2 \right\}^{1/2}},$
 $\ddot{x} = -\frac{v_0^2 b^2 x}{\left\{ \left(\frac{bx}{a} \right)^2 + \left(\frac{ay}{b} \right)^2 \right\}^2}, \ddot{y} = -\frac{v_0^2 a^2 y}{\left\{ \left(\frac{bx}{a} \right)^2 + \left(\frac{ay}{b} \right)^2 \right\}^2}.$

I.12. $\mathbf{v} = (v_0 \cos \omega(t - t_0); v_0 \sin \omega(t - t_0))$.

I.13. Спрямуємо вісь абсцис вздовж лінії руху м'яча, тоді його координати $(vt, 0)$. Нехай (x, y) — координати kota в момент часу t , s — шлях пройдений котом. Тоді $\frac{ds}{dt} = u$. Так як $ds = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ (знак “мінус” відповідає зменшенню y при зростанні шляху s), то $u = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \frac{dy}{dt}$.

Оскільки кіт рухається на м'яч, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{vt - x}$. За умов, коли $vt - x \neq 0$ та $y \neq 0$, отримаємо еквівалентне рівняння $y \frac{dx}{dy} = -vt + x$, яке продиференціюємо по y :

$$\frac{dx}{dy} + y \frac{d^2x}{dy^2} = -v \frac{dt}{dy} + \frac{dx}{dy}, \quad y \frac{d^2x}{dy^2} = -v \frac{dt}{dy} = \frac{v}{u} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Отримали таке диференціальне рівняння: $y \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{v}{u} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$.

Звідки $\frac{dx}{dy} = \frac{C_1}{2} y^{v/u} - \frac{1}{2C_1} y^{-v/u}$ та

$x = \frac{C_1}{2} \frac{u}{u+v} y^{1+v/u} - \frac{1}{2C_1} \frac{u}{u-v} y^{1-v/u} + C_2$. Константи C_1, C_2 визначаємо з початкових умов: $x|_{y=\ell} = 0$, $\frac{dx}{dy}|_{y=\ell} = 0$. Остаточню отримаємо

$$x = \frac{y^{1+v/u}}{2\ell^{v/u}} \frac{u}{u+v} - \frac{u\ell^{v/u}}{2(u-v)} y^{1-v/u} + \frac{uv\ell}{u^2 - v^2} \quad (\text{IX.7})$$

— рівняння траєкторії kota.

Точка зустрічі kota з м'ячем визначається умовами: $y = 0$, $x = C_2$ (віддаль, на яку прокотиться м'яч до зустрічі з котом). Час погоні

$$T = \frac{C_2}{v} = \frac{u\ell}{u^2 - v^2}.$$

I.14. (а) $a_\tau = 0$; $a_n = b\omega^2$; $R = \frac{\omega^2 b^2 + v_0^2}{b\omega^2}$.

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad a_\tau &= \frac{(n-1)n^2\gamma^2 t^{2n-3}}{(\omega^2 b^2 + n^2\gamma^2 t^{2(n-1)})^{1/2}}, \\
a_n &= b\omega \left(\frac{\omega^4 b^2 + n^2(n-1)^2\gamma^2 t^{2n-4} + \omega^2 n^2\gamma^2 t^{2(n-1)}}{\omega^2 b^2 + n^2\gamma^2 t^{2(n-1)}} \right)^{1/2}, \\
R &= \frac{(\omega^2 b^2 + n^2\gamma^2 t^{2(n-1)})^{3/2}}{b\omega(\omega^4 b^2 + n^2(n-1)^2\gamma^2 t^{2n-4} + \omega^2 n^2\gamma^2 t^{2(n-1)})^{1/2}}. \\
\text{(c)} \quad a_\tau &= \frac{\omega^2 r^2 \Delta t}{t_0(r^2 + \omega^2 r^2 \Delta t^2 + t_0^2 v_0^2)^{1/2}}, \quad \text{де } \Delta t = t - t_0; \\
a_n &= \frac{r\omega}{t_0} \left(\frac{4r^2 + 4\omega^2 \Delta t^2 r^2 + 4v_0^2 t_0^2 + r^2 \omega^4 \Delta t^4 + \omega^2 v_0^2 t_0^2 \Delta t^2}{r^2 + \Delta t^2 r^2 \omega^2 + v_0^2 t_0^2} \right)^{1/2}, \\
R &= \frac{(r^2 + r^2 \omega^2 \Delta t^2 + v_0^2 t_0^2)^{3/2}}{rt_0\omega[4r^2 + 4\omega^2 r^2 \Delta t^2 + 4v_0^2 t_0^2 + \omega^4 r^2 \Delta t^4 + \omega^2 v_0^2 t_0^2 \Delta t^2]^{1/2}}. \\
\text{(d)} \quad a_\tau &= -\frac{a\omega^2}{4} \frac{\sin \omega t}{(1 + \cos^2(\omega t/2))^{1/2}}, \\
a_n &= \frac{a\omega^2}{2} \sqrt{\frac{5 + 3 \cos^2(\omega t/2)}{1 + \cos^2(\omega t/2)}}, \quad R = \frac{2a\omega(1 + \cos^2(\omega t/2))^{3/2}}{\sqrt{5 + 3 \cos^2(\omega t/2)}}. \\
\text{(e)} \quad a_\tau &= \frac{v\omega^2(b + vt) + 4\gamma^2 t^2}{\sqrt{v^2 + \omega^2(b + vt)^2 + 4\gamma^2 t^2}}, \\
a_n &= \sqrt{\frac{A}{v^2 + \omega^2(b + vt)^2 + 4\gamma^2 t^2}}, \\
R &= \frac{(v^2 + \omega^2(b + vt)^2 + 4\gamma^2 t^2)^{3/2}}{\sqrt{A}}, \\
\text{де } A &= 4\omega^2[v^4 + (b + vt)^2(\omega^2 v^2 + \omega^2 \gamma^2 t^2 + \gamma^2) + 4\gamma^2 v^2 t^2 - 2\gamma^2 tv(b + vt)] + \omega^6(b + vt)^4 + 4\gamma^2 v^2.
\end{aligned}$$

$$\text{I.15. } s = C e^{\frac{2a_\tau}{a_n} \varphi}.$$

$$\text{I.16. } t = \sqrt{\frac{nR}{a_\tau}}.$$

$$\text{I.17. } a_\tau = \frac{2kax}{(1 + 4k^2 x^2)^{1/2}}, \quad a_n = \frac{a}{(1 + 4k^2 x^2)^{1/2}}.$$

$$\text{I.18. } a_\tau = \frac{v^2}{R} \cos \frac{v}{2R} t, \quad a_n = \frac{v^2}{R} \sin \frac{v}{2R} t, \quad R_c = 4R \sin \frac{v}{2R} t.$$

I.19. (a) Метричний тензор є діагональним:

$$g_{rr} = g_{zz} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2$$

(b) $\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r$, $\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}$. Решта компонент символів Кристоффеля рівні нулеві.

$$(c) \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

I.20. (а) Метричний тензор є діагональним:

$$g_{rr} = 1, g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, g_{\theta\theta} = r^2.$$

$$(b) \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2} \sin 2\theta. \quad \text{Решта компонент символа Крістоффеля рівні нулеві.}$$

$$(c) \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

II.21. $\Delta p = 2mv, \Delta p = mv.$ **II.22.** $\Delta p = 2mv \sin \alpha.$

$$\text{II.23. } v_1 = \frac{v(m-M)}{m+M}, u = \frac{2vm}{m+M}.$$

II.24. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{n})$, де \mathbf{n} — вектор нормалі до площини.

$$\text{II.25. } v = \frac{(m-M)v}{(m+M)\cos\alpha}, u = \frac{2vm}{m+M}.$$

$$\text{II.26. } \Delta u = -\frac{m}{M} v \cos \alpha.$$

$$\text{II.27. } x = v_0 t \cos \alpha, y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, x_m = \frac{v_0 \sin^2 2\alpha}{g}.$$

$$\text{II.28. } v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{gk}{m}} t, v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

$$\text{II.29. } x = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \cos \alpha,$$

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k} t,$$

$$y = x \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}\right) \frac{1}{v_0 \cos \alpha} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{mv_0 \cos \alpha} x\right),$$

$$y_m = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \ln \frac{mg}{mg + kv_0 \sin \alpha}\right).$$

$$\text{II.30. } v = \sqrt{2gh}. \quad \text{II.31. } S = \frac{5}{3}H_0.$$

$$\text{II.32. (a) } V = \frac{mv}{m+M}, \quad \text{(b) } V = \frac{2mv}{m+M}, \quad \text{(c) } V = \frac{m(v-u)}{M}.$$

II.33. Вибираємо вісь z вздовж напрямку вектора \mathbf{H} , який буде мати координати $(0, 0, H)$. А вісь x так, що вектор початкової швидкості буде лежати в площині $x-z$ і мати координати $(v_{x0}, 0, v_{z0})$. Тоді: $x(t) = \frac{v_{x0}}{\omega} \sin \omega t$, $y(t) = \frac{v_{x0}}{\omega} (\cos \omega t - 1)$, $z(t) = v_{z0}t$, де $\omega = \frac{gH}{mc}$. Частинка буде рухатися по спіралі.

$$\text{II.34. (a) } x(t) = \frac{\alpha}{m} \frac{t^2}{2} - t + 1,$$

$$\text{(b) } x(t) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \left(e^{t\sqrt{k/m}} - e^{-t\sqrt{k/m}} \right),$$

$$\text{(c) } x(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \left(e^{t\sqrt{k/m}} - e^{-t\sqrt{k/m}} \right) - \frac{\alpha}{k},$$

$$\text{(d) } x(t) = 1,$$

$$\text{(e) } x(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m + \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4km}} \right) \exp \left(-\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4km}}{2m} t \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2m + \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4km}} \right) \exp \left(-\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4km}}{2m} t \right).$$

$$\text{II.35. (a) } x(t) = \frac{\alpha}{m} \frac{t^3}{6} + t, \quad \text{(b) } x(t) = \frac{\alpha}{m} \frac{t^4}{12} - t + 1,$$

$$\text{(c) } x(t) = -\frac{a}{m\omega^2} \sin \omega t + \frac{a}{m\omega} t + 2,$$

$$\text{(d) } x(t) = \frac{a}{\alpha^2 m} e^{-\alpha t} + \left(3 + \frac{a}{\alpha m} \right) t - \frac{a}{\alpha^2 m} - 1,$$

$$\text{(e) } x(t) = \frac{a}{\alpha^2 m} \left(t + \frac{2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \left(1 + \frac{a}{\alpha^2 m} \right) t + 1 - \frac{2}{\alpha^3 m},$$

$$\text{(f) } x(t) = \frac{a}{m} \frac{(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\omega \sin \omega t}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} e^{-\alpha t} + \left(2 + \frac{a\alpha}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \right) t - 1 - \frac{a}{m} \frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}.$$

$$\text{II.36. (a) } x(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{(b) } t = -\frac{2}{m} \frac{\sqrt{E - mgx}}{g} + \varphi,$$

$$(c) \pm t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{E^{3/2}} [\sqrt{Ex(Ex + \alpha)} - \alpha \ln(\sqrt{Ex} + \sqrt{Ex + \alpha})] + \varphi,$$

$$(d) \pm t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + \alpha x - \beta} - \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\alpha}{2E^{3/2}} \ln \left(\sqrt{E} \left(x + \frac{\alpha}{2E} \right) + \sqrt{Ex^2 + \alpha x - \beta} \right) + \varphi,$$

$$(e) \pm t = \frac{1}{2\omega} \arcsin \left(\frac{m\omega^2 x^2 - E}{\sqrt{E - 2\beta m\omega^2}} \right) + \varphi,$$

$$(f) \pm t = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{E}{E + U_0}} \sin \alpha x \right) + \varphi,$$

$$(g) \pm t = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E}} \ln(\operatorname{sh} \alpha x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha x + 1 + U_0/E}) + \varphi,$$

$$(h) \pm t = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E}} \ln(\sqrt{E} \operatorname{ch} \alpha x + \sqrt{E \operatorname{ch}^2 \alpha x + U_0 - E}) + \varphi,$$

$$(i) \pm t = \sqrt{\frac{2m}{\alpha^2 E}} \ln \left[\sqrt{E} \left(e^{\alpha x} + \frac{U_0}{E} \right) + \sqrt{E e^{2\alpha x} + 2U_0 e^{\alpha x} - U_0} \right] + \varphi.$$

$$(j) \pm t = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{m}{2(E + U_0)}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{E + U_0}{E}} \sin \beta x \right) + \varphi,$$

$$\text{II.37. } x(t) = 4a \operatorname{arctg} e^{t\sqrt{k/a}}$$

$$\text{II.38. } T = 2\sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

$$\text{II.39. } t = \sqrt{\frac{(h + R_0)^3}{2GM}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z + R_0}{h - z}} + \frac{\sqrt{(z + R_0)(h - z)}}{h + R_0} \right)$$

$$\text{II.40. } \text{При } n > -1 \text{ час падіння } t = \sqrt{\frac{\pi r_0^{1-n}}{2\alpha(n+1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right)},$$

$$\text{при } n < -1: t = \sqrt{-\pi \frac{n+1}{2\alpha} r_0^{1-n}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

В часткових випадках відповіді такі:

$$(a) t = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$(b) t = \sqrt{\frac{2r_0}{\alpha}}$$

$$(c) t = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} r_0^{3/2}$$

$$(d) t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} r_0^2$$

$$\text{III.41. } x(t) = \frac{t^2}{4}g \sin 2\alpha + C_1 t + C_2, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} \sin^2 \alpha + C_3 t + C_4, \\ R_x = \frac{mg}{2} \sin 2\alpha, \quad R_y = mg \cos^2 \alpha.$$

$$\text{III.42. } m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \lambda\nabla f, \quad f = x^2 + y^2 - \ell^2, \quad \mathbf{R} = -\frac{m}{\ell^2}\mathbf{r}(u^2 + 3\mathbf{g}\mathbf{r} - 2g\ell)$$

$$\text{III.43. } z = \frac{2}{3}R.$$

$$\text{III.44. } \mathbf{R} = -m \frac{\dot{x}^2/a^2 + \dot{y}^2/b^2 + \dot{z}^2/c^2 - \kappa/m}{x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4} \left(\frac{x}{a^2}\mathbf{i} + \frac{y}{b^2}\mathbf{j} + \frac{z}{c^2}\mathbf{k} \right).$$

$$\text{III.45. } m\ddot{x} = -2kx\lambda, \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda, \quad \mathbf{R} = \frac{g + 2ku^2}{1 + 8ky} (\mathbf{j} - 2kx\mathbf{i})$$

$$\text{III.46. (a) } L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2}{2}(\dot{\Theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta).$$

$$\text{(b) } L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

$$\text{(c) } L = \frac{m}{2} \left\{ \frac{1}{4}(\xi + \eta) \left(\frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right) + \xi\eta\dot{\varphi}^2 \right\}.$$

$$\text{IV.52. (a) } H = \frac{p^2}{2m}, \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = 0.$$

$$\text{(b) } H = 3 \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}px + \frac{1}{8}x^2 \right), \quad \dot{x} = 3p + \frac{3}{2}x, \quad \dot{p} = -\frac{3}{2}(p + \frac{1}{2}x).$$

$$\text{(c) } H = p^2 + \frac{2}{5}x^2p + \frac{2}{3}xp + \frac{1}{25}x^4 + \frac{2}{15}x^3 + \frac{1}{9}x^2,$$

$$\dot{x} = 2 \left(p + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 \right), \quad \dot{p} = -2 \left(\frac{2}{25}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{2}{5}xp + \frac{1}{3}p \right).$$

$$\text{(d) } H = \frac{p^2}{2m} - xp + \alpha x^2, \quad \dot{x} = \frac{p}{m} - x, \quad \dot{p} = p - 2\alpha x.$$

$$\text{(e) } H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0.$$

$$\text{(f) } H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha x, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{p}_x = -\alpha, \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0.$$

$$\text{(g) } H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{r}\mathbf{p} + \alpha yz,$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} - x, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} - y, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} - z,$$

$$\dot{p}_x = p_x, \quad \dot{p}_y = p_y - \alpha z, \quad \dot{p}_z = p_z - \alpha y.$$

$$(h) H = \frac{2p_x}{m} (p_y - p_x e^x),$$

$$\dot{x} = \frac{2}{m} (p_y - 2p_x e^x), \dot{y} = \frac{2p_x}{m}, \dot{p}_x = \frac{2p_x^2 e^x}{m}, \dot{p}_y = 0.$$

$$(i) \frac{2}{7m^2} (4p_x^2 + p_y^2 + 3p_x p_y),$$

$$\dot{x} = \frac{2}{7m} (8p_x + 3p_y), \dot{y} = \frac{2}{7m} (3p_x + 2p_y), \dot{p}_x = \dot{p}_y = 0.$$

$$\text{IV.53. (a)} H = c^2 \sqrt{m^2 + \frac{p_x^2}{c^2}}, \dot{x} = \frac{p_x}{\sqrt{m^2 + \frac{p_x^2}{c^2}}}, \dot{p}_x = 0.$$

$$(b) H = c^2 \sqrt{m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{c^2}}, \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{c^2}}}, \dot{\mathbf{p}} = 0.$$

$$(c) H = c^2 \sqrt{m^2 + \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{c^2}} + e\varphi, \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{c^2}}}, \dot{\mathbf{p}} = -\nabla\varphi.$$

$$\text{IV.56. (a)} 0. \quad (b) 4xp. \quad (c) -3p^2 e^x. \quad (d) -3xp^2 e^x.$$

$$(e) 4yp_x^3 \cos p_y - xp_x^4 \sin p_y. \quad (f) 2p_x e^y - x^2 e^2 \sin(xp_y).$$

$$(g) 4p_x^3 \cos p_y - p_x^4 \sin p_y. \quad (h) -2yx^2 e^x \cos p_y.$$

$$(i) \left(\frac{xp_x^2}{\cos^2 p_y} + yp_x \operatorname{tg} p_y \right) e^{xy}. \quad (j) yp_y p_z - xp_z p_x.$$

$$(k) -\frac{y+z^3}{x^2} p_y - \frac{y+z^3}{x^2} \cos p_x + \frac{p_x}{x}.$$

$$\text{IV.57. (a)} \varepsilon_{ijk} M_k. \quad (b) \varepsilon_{ijk} x_k. \quad (c) \varepsilon_{ijk} p_k.$$

$$(d) 0. \quad (e) 0. \quad (f) 0.$$

$$(g) [\mathbf{r}, \mathbf{a}]_i. \quad (h) a_i. \quad (i) (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

$$\text{IV.58. (a)} \text{ні} \quad (b) \text{так} \quad (c) \text{ні}$$

$$(d) \text{так} \quad (e) \text{ні} \quad (f) \text{так}$$

$$(g) \text{так}$$

$$\text{IV.60. (a)} x = a \cos(t + \varphi_0). \quad (b) p^2 = -a \sin 2t + b \cos 2t + c.$$

$$(c) xp = a \cos(2t + \varphi_0).$$

$$\text{IV.61. (a)} p_i = Q_i, \quad P_i = -q_i, \quad \tilde{H} = H.$$

$$(b) Q = q - at, \quad p = P - ap, \quad \tilde{H} = H + bQ - aP + abt.$$

$$\text{IV.62. } F_3(Q, p) = 3Q + Q \ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right).$$

$$\text{IV.63. (a) } \omega P. \quad \text{(b) } 1. \quad \text{(c) } 1.$$

$$\text{(d) } F_2(q, P) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \sqrt{\frac{2P}{m \omega q^2} - 1} - P \arcsin \sqrt{\frac{m \omega q^2}{2P}},$$

$$F_3(p, Q) = -\frac{1}{2} \frac{p^2}{m \omega \cot Q},$$

$$F_4(p, P) = P \arccos \frac{p}{\sqrt{2m\omega P}} - \frac{p}{2m\omega} \sqrt{2m\omega P - p^2}.$$

$$\text{IV.64. } a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}.$$

IV.65. Перетворення є канонічним, якщо воно задовольняє наступні співвідношення:

$$\{x, y\}_{X, Y, P_x, P_y} = 0, \quad \{x, p_x\}_{X, Y, P_x, P_y} = 1, \quad \{y, p_y\}_{X, Y, P_x, P_y} = 1,$$

$$\{p_x, p_y\}_{X, Y, P_x, P_y} = 0, \quad \{x, p_y\}_{X, Y, P_x, P_y} = 0, \quad \{y, p_x\}_{X, Y, P_x, P_y} = 0.$$

$$H(X, Y, P_x, P_y) = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (X^2 + Y^2).$$

$$\text{V.68. } S = \frac{m}{2} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}.$$

$$\text{V.69. } S = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t - t_0)} ((x^2 + x_0^2) \cos \omega(t - t_0) - 2xx_0).$$

$$\text{V.70. (a) } x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + \beta)),$$

$$\text{(b) } z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{g}{2}(\beta^2 + 2\beta t + t^2).$$

$$\text{V.71. (a) } x = \sqrt{\alpha_1} \sin(t + \beta_1), \quad y = 2\alpha_2 - \frac{(t + \beta_2)^2}{4m}, \quad z = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m}t.$$

$$\text{(b) } x = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \sin \left\{ \frac{4}{\sqrt{2m}}(t + \beta_1) \right\}, \quad y = \sqrt{\frac{\alpha_2}{3}} \sin \left\{ \frac{6}{\sqrt{2m}}(t + \beta_2) \right\},$$

$$z = \frac{\sqrt{\alpha_3}}{2} \operatorname{sh} \left\{ \frac{8}{\sqrt{2m}}(t + \beta_3) \right\}.$$

$$\text{(c) } x = \alpha_1 - \frac{(t + \beta_1)^2}{2m}, \quad y = \frac{1}{m}(t + \beta_2)^2 - \frac{\alpha_2}{2},$$

$$z = \sqrt{\alpha_3} \sin \left\{ \frac{2}{\sqrt{2m}}(t + \beta_3) \right\}.$$

$$(d) t = \beta_1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\alpha_1} \left(\sqrt{\alpha_1 x - 1} + \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\alpha_1 x}}{\sqrt{\alpha_1}} \right),$$

$$y = \left(\frac{2\alpha_2}{m} (\beta_2 + t)^2 + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{1/2}, \quad z = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m} t.$$

$$(e) x = \left(\frac{2\alpha_1}{m} (\beta_1 + t)^2 + \frac{1}{\alpha_1} \right)^{1/2}, \quad y = \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{m} (\beta_2 + t)^2,$$

$$z = \sqrt{\alpha_3} \sin \left\{ \frac{2}{\sqrt{2m}} (t + \beta_3) \right\}.$$

$$(f) x = \left(\frac{2\alpha_1}{m} (\beta_1 + t)^2 + \frac{1}{\alpha_1} \right)^{1/2}, \quad y = \sqrt{\frac{\alpha_2}{2}} \sin \left\{ \frac{2}{\sqrt{2m}} (t + \beta_2) \right\},$$

$$z = \frac{1}{2m} (\beta_3 + t)^2 - \alpha_3.$$

$$\mathbf{V.72. (a)} \quad \beta_r + t = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{m\omega r^2 - E}{\sqrt{E^2 - \alpha_\theta^2}},$$

$$\beta_\varphi = \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\alpha_\varphi^2 - (\alpha_\varphi^2 + \alpha_\theta^2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta (\alpha_\varphi^2 - \alpha_\theta^2)},$$

$$\beta_\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\alpha_\theta^2 - Emr^2}{mr^2 \sqrt{E^2 - \omega^2 \alpha_\theta^2}} - \arcsin \frac{\alpha_\theta \cos \theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}}.$$

$$(b) \quad \beta_r + t = \frac{1}{2E} \left\{ \sqrt{2Emr^2 + 2m\alpha r + \alpha_\theta^2} - \alpha \sqrt{\frac{m}{2E}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{m(2Er + \alpha)^2}{2E\alpha_\theta^2 - m\alpha^2}} \right\},$$

$$\beta_\varphi = \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\alpha_\varphi^2 - (\alpha_\varphi^2 + \alpha_\theta^2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta (\alpha_\varphi^2 - \alpha_\theta^2)},$$

$$\beta_\theta = \arcsin \frac{\alpha_\theta^2 - \alpha mr}{r \sqrt{2Em\alpha_\theta^2 + \alpha^2 m^2}} - \arcsin \frac{\alpha_\theta \cos \theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}}.$$

$$(c) \quad \beta_r + t = \frac{1}{2E} \sqrt{2m(Er^2 + \alpha r - \beta) - \alpha_\theta^2} - \alpha \sqrt{\frac{m}{2E}} \operatorname{arch} \frac{\sqrt{m}(2Er + \alpha)}{\sqrt{2E(2E\beta + \alpha_\theta^2) + m\alpha^2}},$$

$$\beta_\varphi = \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\alpha_\varphi^2 - (\alpha_\varphi^2 + \alpha_\theta^2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta (\alpha_\varphi^2 - \alpha_\theta^2)},$$

$$\beta_\theta = \frac{\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 + 2m\beta}} \arcsin \frac{\alpha_\theta^2 + 2m\beta - m\alpha r}{r\sqrt{2Em(\alpha_\theta^2 + 2m\beta) + m^2\alpha^2}} - \arcsin \frac{\alpha_\theta \cos \theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}}.$$

V.73. $x = \frac{\beta_1}{2\alpha_1} + \frac{1}{2m}t, \quad y = \frac{g \sin \alpha}{2}(\beta_2 + t)^2 - \frac{\alpha_2}{mg \sin \alpha}.$

VI.74. (a) $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ або $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$

(b) $x(t) = e^{-\gamma t} \left[C_1 \exp\left(t\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) + C_2 \exp\left(-t\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) \right];$

якщо $\gamma < \omega$, то зручно розв'язок рівняння писати в такому вигляді:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(B_1 \sin t\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} + B_2 \cos t\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right)$$

або $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} + \varphi_0\right).$

(c) $x(t) = e^{-\gamma t} \left[C_1 \exp\left(t\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) + C_2 \exp\left(-t\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) \right] + \alpha \frac{(\omega^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\gamma\Omega \sin \Omega t}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2},$

якщо $\gamma < \omega$, то зручно розв'язок рівняння писати в такому вигляді:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} + \varphi_0\right) + \alpha \frac{(\omega^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\gamma\Omega \sin \Omega t}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}.$$

VI.75. (a) $x_0 = 0, \omega,$

(b) $x_0 = 0, \omega = \alpha\sqrt{\frac{2U_0}{m}},$

(c) $x_0 = 0, \omega = \sqrt{\frac{2\beta U_0}{m}},$

(d) коливання відсутні,

(e) $x_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \omega = \sqrt{\frac{2\beta U_0}{m}} e^{-\alpha^2/8\beta},$

(f) $x_0 = \frac{\beta}{2\alpha}, \omega = \sqrt{\frac{2\alpha U_0}{m}} e^{\beta^2/8\alpha},$

(g) $x_0 = \frac{\pi}{\alpha}, \omega = \alpha\sqrt{\frac{U_0}{m}},$

(h) $x_0 = \frac{\pi}{2\alpha}, \omega = \alpha\sqrt{\frac{2U_0}{m}},$

(i) коливання відсутні,

(j) $x_0 = 0, \omega = \alpha\sqrt{\frac{6U_0}{m}},$

(k) $x_0 = 0, \omega = \alpha\sqrt{\frac{2U_0}{m}},$

(l) $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}.$

$$\text{VI.76. } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\text{VI.77. } \varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \alpha\right) + \frac{a\Omega^2}{g - \ell\Omega^2} \cos \Omega t$$

$$\text{VI.78. (a) } \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho a}}$$

$$\text{(b) } \omega = \sqrt{\frac{3\rho_0 g}{4\rho R} \left[2 \cos \frac{2}{3} \arcsin\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right) - 1 \right]}.$$

Примітка: рівняння $x^3 - 3x = 2 \sin \alpha$, де $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, має один дійсний корінь $x = -2 \sin \frac{\alpha}{3}$.

$$\text{(c) } \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho a}}$$

$$\text{VI.79. (a) } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(b) } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{(c) } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\text{VI.80. (a) } \Omega_{1,2} = \sqrt{\omega^2 \pm \alpha}, \text{ якщо } \omega^2 > \alpha, \text{ інакше: } \Omega = \sqrt{\omega^2 + \alpha}$$

$$\text{(b) } \Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \omega$$

$$\text{(c) } \Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4\beta^2}}{2(m_1 m_2 - \beta^2)}}$$

$$\text{VI.81. } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{2\ell_1 \ell_2 m_1} \left[\ell_1 + \ell_2 \pm \sqrt{(\ell_1 - \ell_2)^2 + \frac{4m_2 \ell_1 \ell_2}{m_1 + m_2}} \right]},$$

в границі $m_1 \rightarrow \infty$ отримуємо $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{\ell_{1,2}}}$

$$\text{VI.82. (a) } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + 4L^2 C_1 C_2}}{2(L_1 L_2 + L L_1 + L L_2) C_1 C_2}},$$

де $A = (L + L_2)C_2$, $B = (L + L_1)C_1$.

$$\text{(b) } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + 4L_1 L_2}}{2L_1 L_2 C}},$$

де $A = L_1 \left(1 + \frac{C}{C_2}\right)$, $B = L_2 \left(1 + \frac{C}{C_1}\right)$.

В границі $L \rightarrow \infty$ для пункту (а) та $C \rightarrow 0$ для пункту (б) отримуються еквівалентні схеми з тією самою частотою власних коливань $\omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 (L_1 + L_2)}}$.

$$\text{VI.83. (a) } \omega = \sqrt{2 \frac{k}{m}} \qquad \text{(b) } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{3 \frac{k}{m}}$$

$$\text{(c) } \omega_1 = \sqrt{2 \frac{k}{m}}, \omega_{2,3} = \sqrt{\left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{k}{m}}$$

$$\text{(d) } \omega_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \frac{k}{m}} \qquad \text{(e) } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{3 \frac{k}{m}}$$

$$\text{VI.84. (a) } E = \frac{F_0^2}{m\omega^2}(1 - \cos \omega\tau),$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t), & \text{при } 0 < t < \tau \\ \frac{F_0}{m\omega^2}[\cos \omega(t - \tau) - \cos \omega t], & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

$$\text{(b) } E = \frac{F_0^2}{2m\tau^2\omega^4}(\omega^2\tau^2 + 2 - 2\cos \omega\tau - 2\omega\tau \sin \omega\tau),$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\tau\omega^3}(\omega t - \sin \omega t), & \text{при } 0 < t < \tau \\ \frac{F_0}{m\tau\omega^3}[\omega\tau \cos \omega(t - \tau) + \sin \omega(t - \tau) - \sin \omega t], & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

$$\text{(c) } E = \frac{F_0^2}{2m\tau^2\omega^4}(\omega^2\tau^2 + 2 - 2\cos \omega\tau - 2\omega\tau \sin \omega\tau),$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\tau\omega^3}(\omega\tau - \omega\tau \cos \omega t + \sin \omega t - \omega t), & \text{при } 0 < t < \tau \\ \frac{F_0}{m\tau\omega^3}[\sin \omega t - \omega\tau \cos \omega t - \sin \omega(t - \tau)], & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

$$\text{VI.85. (a) } E = \frac{(\pi\tau F_0)^2}{2m} e^{-2\omega\tau} \qquad \text{(b) } E = \pi \frac{(\tau F_0)^2}{2m} e^{-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2}$$

$$\text{(c) } E = \frac{2(\tau F_0)^2}{m(1 + \omega^2\tau^2)^2}$$

VI.86. Нехай a — амплітуда першої гармоніки. Тоді

$$(a) \omega \approx \omega_0 - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} a^2 \qquad (b) \omega \approx \omega_0 + \frac{3\beta}{8\omega_0} a^2$$

$$(c) \omega \approx \omega_0 - \left(\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} - \frac{3\beta}{8\omega_0} \right) a^2$$

VI.87. $\omega \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right)$, де φ_0 — максимальний кут відхилення маятника від рівноваги.

VI.88. Лагранжیان цієї електромеханічної системи дорівнює

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{L_0\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C(x)},$$

де ємність $C(x) = \frac{C_0}{1 + x/d_0}$, x — відхилення рухомої пластини від положення рівноваги. У результаті матимемо систему двох рівнянь:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\frac{\lambda}{2mC_0d_0} q^2, \\ \ddot{q} + \Omega_0^2 q &= -\frac{\lambda}{L_0C_0d_0} qx, \end{aligned}$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\Omega_0^2 = \frac{1}{L_0C_0}$. Параметр λ введено для зручності, за його допомогою точні (шукані) результати можна подати як розклади: $x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 \dots$, $q = q_0 + \lambda q_1 + \lambda^2 q_2 \dots$, $\omega = \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots$, $\Omega = \Omega_0 + \lambda \Omega_1 + \dots$

Застосовуючи метод Боголюбова–Крилова, для перших поправок матимемо рівняння

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 2\omega\omega_1 X \cos \omega t - \frac{1}{2md_0C_0} Q^2 \cos^2 \Omega t \\ \ddot{q}_1 + \Omega^2 q_1 &= 2\Omega\Omega_1 Q \cos \Omega t - \frac{1}{d_0C_0L_0} QX \cos \omega t \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Приймаємо, що розв'язки “нульової” задачі мають вигляд $x_0(t) = X \cos \omega t$, $q_0(t) = Q \cos \Omega t$, тобто початкова фаза коливань дорівнює нулеві.

Визначаючи поправки ω_1 , Ω_1 з умови відсутності резонансу, зауважимо, що за співвідношення частот $\omega = 2\Omega$ (що, зрозуміло, означає $\omega_0 \approx 2\Omega_0$) матимемо ненульові перші поправки до частот:

$$\omega_1 = \frac{Q^2}{8\omega_0 m d_0 C_0 X}, \quad \Omega_1 = \frac{\Omega_0 X}{4d_0}.$$

Якщо ж між частотами ω і Ω немає такого співвідношення (тобто $\omega_0 \not\approx 2\Omega_0$), то перші поправки дорівнюють нулеві: $\omega_1 = 0$, $\Omega_1 = 0$.

Перші поправки до законів зміни координати $x_1(t)$ і заряду $q_1(t)$ легко знайти як часткові розв'язки відповідних неоднорідних диференціальних рівнянь.

VI.89. $U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos\varphi + \frac{a^2\Omega^2}{4gl} \sin^2\varphi \right)$. Положення стійкої рівноваги: $\varphi = 0$ (вертикально вниз) — завжди, частота малих коливань $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\frac{a^2\Omega^2}{2gl} + 1 \right)}$. За умови $a^2\Omega^2 > 2gl$ стійким також буде положення $\varphi = \pi$ (вертикально вгору) з частотою малих коливань $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\frac{a^2\Omega^2}{2gl} - 1 \right)}$.

VI.90. $U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos\varphi + \frac{a^2\Omega^2}{4gl} \cos^2\varphi \right)$. Положення стійкої рівноваги: $\varphi = 0$ (вертикально вниз) за умови $a^2\Omega^2 < 2gl$, частота малих коливань $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(1 - \frac{a^2\Omega^2}{2gl} \right)}$. Якщо $a^2\Omega^2 > 2gl$, то стійкими будуть два положення, для яких $\cos\varphi = 2gl/a^2\Omega^2$, частота малих коливань $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\frac{a^2\Omega^2}{2gl} - \frac{2gl}{a^2\Omega^2} \right)}$.

VII.91. $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2$.

VII.92. (a) $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = \frac{ma^2}{3}$.

(b) $I_1 = I_2 = \frac{2}{3}ma^2$, $I_3 = \frac{4}{3}ma^2$.

(c) $I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{3}$, $I_3 = \frac{2}{3}ma^2$.

$$(d) I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{2}, I_3 = ma^2.$$

$$\text{VII.93. (a)} I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{3}, I_3 = \frac{2}{3}ma^2.$$

$$(b) I_1 = \frac{ma^2}{3}, I_2 = \frac{mb^2}{3}, I_3 = m\frac{a^2 + b^2}{3}.$$

$$(c) I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{4}, I_3 = \frac{ma^2}{2}.$$

$$(d) I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{6}, I_3 = \frac{ma^2}{3}.$$

$$(e) I_1 = \frac{ma^2}{4}, I_2 = \frac{mb^2}{4}, I_3 = m\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

$$(f) I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}ma^2.$$

$$(g) I_1 = I_2 = I_3 = \frac{10}{9}ma^2.$$

$$\text{VII.94. (a)} I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}ma^2.$$

$$(b) I_1 = m\frac{b^2 + c^2}{3}, I_2 = m\frac{a^2 + c^2}{3}, I_3 = m\frac{a^2 + b^2}{3}.$$

$$(c) I_1 = \frac{2}{5}ma^2, I_2 = I_3 = \frac{83}{320}ma^2.$$

$$(d) I_1 = I_2 = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), I_3 = \frac{1}{2}mR^2.$$

$$(e) I_1 = m\frac{b^2 + c^2}{5}, I_2 = m\frac{a^2 + c^2}{5}, I_3 = m\frac{a^2 + b^2}{5}.$$

$$(f) I_1 = \frac{3}{10}mR^2, I_2 = I_3 = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

$$(g) I_1 = I_2 = \frac{m}{4}\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3}\right), I_3 = m\frac{R^2 + r^2}{2}.$$

$$\text{VII.95. } I_1 = \frac{5}{16}mR^2, I_2 = \frac{29}{144}mR^2, I_3 = \frac{37}{72}mR^2.$$

$$\text{VII.96. } I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}, I = \frac{2}{3}ma^2.$$

$$\text{VII.97. } I_z = \frac{3}{10} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

VII.98. Під D -вимірним конусом розуміємо фігуру, в основі якої лежить $(D - 1)$ -вимірна куля, усі точки якої з'єднані з вершиною, розміщеною на відстані h від центра кулі у напрямку D -того виміру. Задачу зручно розв'язувати в системі координат, аналогічній до циліндричної. Елемент об'єму в цих змінних має вигляд $d\Omega_{D-1} r^{D-2} dr dz$, де Ω_{D-1} — тілесний гіперкут (його значення несуттєве для розв'язування цієї задачі). Розв'язуючи далі задачу аналогічно до задачі VII.94(f) про тривимірний конус, отримаємо: відстань від вершини до центра мас $h_c = \frac{D}{D+1}h$,

$$I = \frac{D(D-1)}{(D+1)(D+2)} mR^2.$$

При $D = 3$ отримуємо результат задачі VII.94(f), при $D = 2$ маємо випадок рівнобедреного трикутника з основою $2R$ та висотою h , а при $D = 1$ — стрижня довжиною h відносно осі, що проходить через сам стрижень.

$$\text{VII.100. } T = \frac{I_x}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_z}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2.$$

$$\text{VII.101. } L = \frac{I_x}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_z + ml^2}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta,$$

де l — відстань від точки закріплення до центру інерції.

$$\text{VII.103. } \text{Час скочування } t = \frac{\sqrt{3h/g}}{\sin \alpha} \text{ більший за час зісковзування.}$$

$$\text{VII.104. } \text{Час скочування } t = \frac{\sqrt{14h/5g}}{\sin \alpha} \text{ більший за час зісковзування.}$$

VII.105. Вважатимемо, що людину можна наближено розглядати як однорідний циліндр радіуса R , а відстань від осі обертання до гантелей нехай дорівнює r . Тоді спочатку момент інерції системи дорівнюватиме $I_1 = \frac{MR^2}{2} + 2mr^2$, а після притискання гантелей до грудей — $I_2 = \frac{MR^2}{2} + 2mR^2$. За законом збереження моменту імпульсу частота обертання Ω' у другому випадку визначатиметься зі співвідношення $I_1\Omega = I_2\Omega'$, а роботу A на притискання гантелей до грудей задає закон збереження енергії: $A + \frac{I_1\Omega^2}{2} = \frac{I_2\Omega'^2}{2}$. Для отримання числових оцінок виберемо

більш-менш реалістичні й водночас зручні для розрахунків значення параметрів: $R = 0.32$ м, $r = 1$ м. Тоді відношення частот $\Omega'/\Omega \simeq 3$, $A \simeq 13$ Дж.

$$\text{VII.106. (a) } \omega = \sqrt{\frac{3g}{4R}}, \quad (\text{b) } \omega = \sqrt{\frac{15g}{26R}}, \quad (\text{c) } \omega = \sqrt{\frac{8g}{(9\pi - 16)R}}.$$

$$\text{VII.108. } \omega = \sqrt{\frac{|\mathbf{g} - \mathbf{a}|}{\ell}}.$$

$$\text{VII.109. } y = \frac{2}{3}h\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi, \text{ де } \Omega \text{ — частота обертання Землі.}$$

$$\text{VII.110. } y = \frac{4v^3}{3g^2}\Omega\cos\varphi, \text{ де } \Omega \text{ — частота обертання Землі.}$$

VII.111. Фігура, яку описує маятник в горизонтальній площині, повертається з кутовою швидкістю $\Omega \sin \varphi$, де Ω — кутова швидкість обертання Землі, φ — широта точки спостереження.

$$\text{VIII.112. } \psi(x) = \frac{mg}{2F\ell}x(x - \ell).$$

$$\text{VIII.113. } \omega_n = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho}}n, \quad n = 1, 2, \dots$$

VIII.114. Частоти коливань є розв'язками рівняння

$$\omega = \frac{2\sqrt{\rho F}}{M} \operatorname{ctg} \frac{\ell\omega}{2} \sqrt{\frac{\rho}{F}}, \text{ а також } \omega_n = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{F}{\rho}}n, \quad n = 1, 2, \dots$$

VIII.115. Частоти коливань є розв'язками рівняння

$$\sqrt{\rho_1} \operatorname{ctg} \frac{\omega\ell}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{F}} + \sqrt{\rho_2} \operatorname{ctg} \frac{\omega\ell}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{F}} = 0.$$

$$\text{VIII.116. } \omega_n = n\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho \pm \sigma^2 B^2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{VIII.118. (a) } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{b) } \omega_n = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\text{c) } \omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

VIII.119. Радіус горизонтального перерізу струменя

$r(z) = \sqrt{\frac{S}{\pi} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2gz}}}$, де z — відстань від місця витоку рідини з крана.

VIII.120. $z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2$.

VIII.121. $\mathbf{u} = \frac{R^3}{2r^3} \left(3(\mathbf{vr}) \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{v} \right)$.

VIII.122. $Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\nu \ell}$.

Література

- [1] *Айзерман М. А.* Классическая механика / М. А. Айзерман. — Москва : Наука, 1974. — 368 с.
- [2] *Глауберман А. Ю.* Лекції з теоретичної фізики. Теоретична механіка / А. Ю. Глауберман, М. Т. Сеньків. — Львів : Вид-во Львів. ун-ту, 1960. — 220 с.
- [3] *Голдстейн Г.* Классическая механика / Г. Голдстейн. — Москва : Наука, 1975. — 415 с.
- [4] *Коткин Г. Л.* Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. — 2-е изд, испр. и доп.— Москва : Наука, 1977. — 320 с.
- [5] *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: Учеб. пособие.— В 10-ти т. Т. 1. Механика.— 4-е изд, испр. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1988. — 216 с.
- [6] *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: Учеб. пособие.— В 10-ти т. Т. 6. Гидродинамика.— 3-е изд, перераб. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1986. — 736 с.
- [7] *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. — Москва : Издательство Московского университета, 1974. — 570 с.
- [8] *Ольховский И. И.* Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. — Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1977. — 395 с.
- [9] *Павленко Ю. Г.* Лекции по теоретической механике / Ю. Г. Павленко. — Москва : Изд-во МГУ, 1991. — 336 с.
- [10] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1966. — 724 с.
- [11] *Федорченко А. М.* Теоретична фізика. Механіка / А. М. Федорченко. — Київ : Вища школа, 1975. — 316 с.
- [12] *тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики / Д. тер Хаар. — Москва : Наука, 1974. — 224 с.

Програма курсу лекцій “Теоретична механіка”**I. Кінематика точки [7, 9]**

- (1) Швидкість і прискорення в криволінійних координатах.
- (2) Природній спосіб задання руху точки. Тангенціальне, нормальне прискорення. Радіус кривизни траєкторії.

II. Динаміка [3]

- (1) Принцип Галілея. Закони Ньютона. Закони змін і збереження імпульсу, момент імпульсу та кінетичної енергії матеріальної точки.
- (2) Закони зміни і збереження імпульсу, моменту імпульсу та кінетичної енергії системи матеріальних точок.

III. Інтегрування рівнянь Ньютона [3, 5]

- (1) Одновимірний рух. Рух у центральному полі.
- (2) Задача двох тіл. Задача Кеплера.

IV. Принцип Даламбера. Рівняння Лагранжа [3, 7]

- (1) В'язі. Класифікація в'язей. Основна задача динаміки невільної точки.
- (2) Принцип Даламбера. Рівняння Лагранжа I роду.
- (3) Рівняння Лагранжа II роду. Узагальнена сила. Рівняння Лагранжа II роду для потенціальної сили. Лагранжіан.
- (4) Узагальнений потенціал. Приклад електромагнітного поля. Сили тертя. Дисипативна функція Релея.

V. Варіаційний принцип Гамільтона (принцип найменшої дії) [1, 3, 5]

- (1) Деякі задачі варіаційного числення. Елементи варіаційного числення. Основні поняття варіаційного числення. Функціонал. Варіація функції. Варіація функціоналу.

- (2) Рівняння Лагранжа–Ейлера для однієї змінної. Узагальнення рівняння Лагранжа–Ейлера на випадок багатьох змінних.
- (3) Варіаційний принцип Гамільтона і рівняння Лагранжа. Варіаційний принцип Гамільтона при наявності зв'язків. Коваріантність рівнянь Лагранжа.
- (4) Закони збереження та їх зв'язок з властивостями простору і часу. Однорідність часу та закон збереження енергії. Однорідність простору та закон збереження імпульсу. Ізотропність простору та закон збереження моменту кількості руху.
- (5) Механічна подібність.
- (6) Теорема віріала.

VI. Канонічні рівняння [1, 3, 5]

- (1) Рівняння Гамільтона. Функція Гамільтона. Функція Рауса.
- (2) Дужки Пуассона. Властивості дужок Пуассона.
- (3) Принцип Мопертюї. Канонічні перетворення. Твірна функція канонічного перетворення.
- (4) Інваріантність дужок Пуассона відносно канонічних перетворень. Рух системи як канонічне перетворення.
- (5) Теорема Ліувілля.
- (6) Рух фазової рідини. Рівняння Ліувілля.

VII. Теорія Гамільтона–Якобі [3, 5]

- (1) Дія як функція координат.
- (2) Рівняння Гамільтона–Якобі. Теорема Якобі. Знаходження розв'язку задачі про рух механічної системи методом Гамільтона–Якобі.
- (3) Метод розділення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі.
- (4) Геометрична інтерпретація дії.

VIII. Малі коливання [3, 5]

- (1) Вільні одновимірні коливання.
- (2) Вимушені коливання.
- (3) Коливання при наявності сил тертя. Загасаючі коливання.
- (4) Вимушені коливання при наявності тертя.

- (5) Коливання систем з багатьма ступенями вільності.
- (6) Коливання одновимірного ланцюжка атомів.
- (7) Ангармонічні коливання.
- (8) Параметричний резонанс.
- (9) Рух в швидко осцилюючому полі.

IX. Рух твердого тіла [3, 5]

- (1) Кутова швидкість. Тензор інерції.
- (2) Момент імпульсу твердого тіла. Рівняння руху твердого тіла.
- (3) Кути Ейлера.
- (4) Рівняння Ейлера для руху твердого тіла.
- (5) Рух в неінерціальній системі відліку.

X. Неперервні системи [2, 3, 6, 10, 11, 12]

- (1) Приклади Лагранжіанів неперервних систем.
- (2) Рівняння Лагранжа для поля.
- (3) Рівняння Гамільтона для поля.
- (4) Дужки Пуассона для поля.
- (5) Рівняння руху ідеальної рідини.
- (6) Поширення звуку в газах. Нестислива рідина. Стационарний рух. Рівняння Бернуллі.
- (7) Рівняння Нав'є–Стокса.

Навчальне видання

Блажиєвська Мар'яна Владиславівна,
Ровенчак Андрій Адамович,
Сідлецька Наталія Амбросіївна,
Стецько Микола Миколайович,
Ткачук Володимир Михайлович,
Фітьо Тарас Володимирович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Текст надруковано в авторській редакції

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$
Умовн. друк. арк. 3.9
Зам. . Наклад 300 прим.

Видавець і виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.