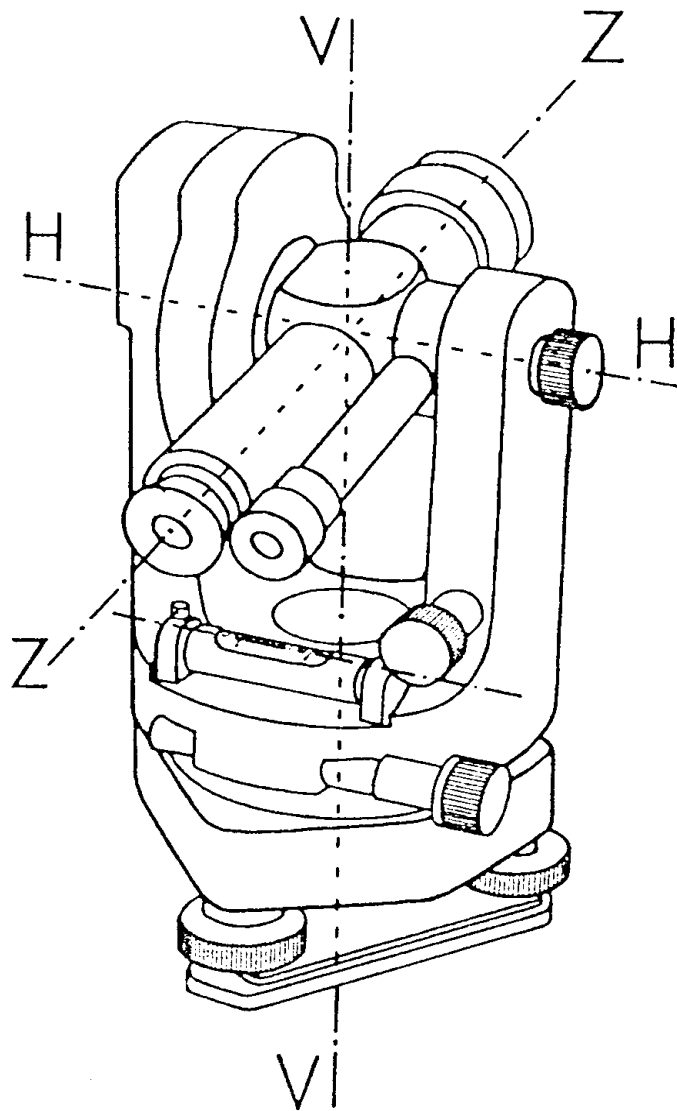


# VERMESSUNGSKUNDE II (BA Verm)

Skript für das 2. Semester

Wilfried Korth

Stand: 31. März 2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Fehlerlehre</b>	<b>5</b>
1.1 Linearisierung nichtlinearer Funktionen . . . . .	5
1.2 Varianzfortpflanzungsgesetz in allgemeiner Form . . . . .	5
1.3 Ausgleichung von Beobachtungen über Summgleichungen . . . . .	7
<b>2 Theodolit und Winkelmessung</b>	<b>9</b>
2.1 Die Achsen des Theodolits . . . . .	9
2.2 Kreisteilungsfehler . . . . .	15
2.3 Exzentrizitätsfehler . . . . .	15
2.4 Horizontalwinkelmessung . . . . .	15
2.5 Die einfache Richtungs- und Winkelmessung . . . . .	15
2.6 Die repetitionsweise Winkelmessung . . . . .	17
2.7 Winkelmessung mit Horizontschluß . . . . .	17
2.8 Winkelmessung in allen Kombinationen . . . . .	17
2.9 Sektorenmethode . . . . .	18
2.10 Vertikalwinkelmessung . . . . .	18
2.10.1 Vertikalwinkelmessung und Indexabweichung . . . . .	18
<b>3 Trigonometrische Höhenmessung</b>	<b>21</b>
3.1 Grundlagen/Prinzip . . . . .	21
3.2 Die Reichenbachschen Distanzfäden . . . . .	24
3.3 Turmhöhenbestimmung . . . . .	25
3.3.1 Turmhöhenbestimmung mit horizontalem Hilfsdreieck . . . . .	26
3.3.2 Turmhöhenbestimmung mit vertikalem Hilfsdreieck . . . . .	27
3.4 Trigonometrisches Nivellement . . . . .	29
3.5 Trigonometrische Höhenübertragung über große Distanzen . . . . .	30
3.5.1 Höhenunterschiede aus einseitig beobachteten Zenitdistanzen . . . . .	30
3.5.2 Höhenunterschiede aus gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen . . . . .	31
3.5.3 Fehlerbetrachtung zur Höhenübertragung über große Distanzen . . . . .	31
3.6 Bestimmung der Refraktion . . . . .	32
3.7 Exzentrische Zenitdistanzmessung . . . . .	33

---

<b>4</b>	<b>GRUNDLAGEN DER GEODÄSIE</b>	<b>34</b>
4.1	Vorbemerkungen . . . . .	34
4.2	Begriffsbestimmungen . . . . .	34
4.3	Grundlegende geodätische Koordinatensysteme . . . . .	36
4.3.1	Kartesisches 3D-System . . . . .	36
4.3.2	Polares 3D-System . . . . .	36
4.3.3	Ellipsoidisches Koordinatensystem . . . . .	36
4.3.4	Verschiedene Breiten und Längen . . . . .	37
4.3.5	Beispiele für Koordinatenumformungen . . . . .	37
4.4	Anwendung verschiedener Koordinatensysteme . . . . .	37
4.5	Grundbeziehungen für das Rotationsellipsoid . . . . .	38
4.5.1	Geometrie . . . . .	38
4.5.2	Hilfsgrößen und Funktionen . . . . .	38
4.5.3	Koordinatenrechnung für einen Punkt $P$ . . . . .	39
4.6	Bezugssysteme . . . . .	41
4.7	Verebnete Koordinaten . . . . .	42
4.7.1	Gauß-Krüger Koordinaten . . . . .	43
4.7.2	UTM-Koordinaten . . . . .	44
4.7.3	Soldner-Koordinaten . . . . .	44
4.8	Lagefestpunktfelder im Berliner Raum . . . . .	45
4.8.1	Koordinaten- und Bezugssysteme . . . . .	45
4.8.2	Lagefestpunktfelder . . . . .	48
4.9	Datumstransformationen . . . . .	49
4.9.1	Vorbemerkungen . . . . .	49
4.9.2	Transformationsgleichungen . . . . .	51
4.9.3	Parametrisierung und Ausgleichsmodell für die 3-D-Transformation (Allgemeiner Fall) . . . . .	52
4.9.4	Beispiele für Transformationsparameter (Datumsdifferenzen) . . . . .	53
<b>5</b>	<b>EINFÜHRUNG SATELLITENGEODÄSIE</b>	<b>54</b>
5.1	Grundlagen des NAVSTAR-GPS . . . . .	55
5.1.1	Systemkomponenten . . . . .	55
5.2	Anwendungen in der Geodäsie . . . . .	58
5.2.1	Fehlereinflüsse und Genauigkeiten . . . . .	58
5.2.2	Überblick über die geodätischen GPS-Meßverfahren . . . . .	62
5.2.3	Statische Messungen (Static) . . . . .	62
5.2.4	Schnelle Statische Messungen (Fast Static / Rapid Static) . . . . .	62

---

5.2.5	Kinematische Messungen	63
5.2.6	Real Time Kinematic (RTK)	63
5.2.7	Planung/Erkundung von GPS-Messungen	63
5.3	Auswertung von GPS-Messungen	64
5.3.1	Auswertung von Code-Beobachtungen (Navigationslösung)	65
5.3.2	Auswertung von Phasen-Beobachtungen	66
5.3.3	Linearkombinationen der $L_1$ und $L_2$ Trägerphasen	68
5.3.4	Lösung der Mehrdeutigkeiten	69
5.4	GPS-Landesdienste	69
5.4.1	Echtzeit-Positionierungsservice (EPS)	70
5.4.2	Hochpräziser Echtzeit-Positionierungsservice (HEPS)	71
5.4.3	Geodätischer Präziser Positionierungsservice (GPPS)	71
5.4.4	Geodätischer Hochpräziser Positionierungsservice (GHPS)	71
5.5	Andere GPS-Dienste	72
5.5.1	ascos-Referenzdienst (Ruhrgas)	72
5.5.2	Trimble VRS Now	74

# 1 Fehlerlehre

## 1.1 Linearisierung nichtlinearer Funktionen

Da z.B. das Varianzfortpflanzungsgesetz (siehe Vorlesung VK, 1. Semester) nur auf lineare Funktionen anwendbar ist, müssen nichtlineare Zusammenhänge linearisiert werden. Dies erreicht man durch Entwicklung der Funktion in eine Taylorreihe.

$$F(x_i) = F(x_i)_0 + \left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1} \right)_0 dx_1 + \dots + \left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_n} \right)_0 dx_n + \text{Glieder höherer Ordnung} \quad (1)$$

Entwickelt wird die Taylorreihe am Nullpunkt. Je besser die Anpassung an den Nullpunkt erfolgt, desto kleiner sind die Glieder höherer Ordnung.

Anstelle der Differentialquotienten in (1), die mit den Werten im Nullpunkt berechnet werden, können auch Differenzenquotienten genutzt werden, die mit gegen Null gehenden Differenzen berechnet werden.

$$\left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_j} \right)_0 = \left( \frac{F(x_i + dx_j) - F(x_i)}{dx_j} \right)_0 \quad (2)$$

**Beispiel:**

$$F(s, \zeta) = s \cot(\zeta) \quad \text{mit } s = 30.78 \pm 0.02 \text{ m} \quad \text{und} \quad \zeta = 80.753 \pm 0.002^{\text{gon}}$$

Linearisierung nach Taylor:

$$F(s, \zeta) = (s \cot(\zeta))_0 + \left( \frac{\partial F(s, \zeta)}{\partial s} \right)_0 ds + \left( \frac{\partial F(s, \zeta)}{\partial \zeta} \right)_0 d\zeta + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

$$\begin{aligned} F(s, \zeta) &= 9.600 \text{ m} + (\cot(\zeta))_0 ds + \left( \frac{-s}{\sin^2(\zeta)} \right)_0 d\zeta + \text{Glieder höherer Ordnung} \\ &= 9.600 \text{ m} + 0.3119 ds - 33.7742 \text{ m} d\zeta + \text{Glieder höherer Ordnung} \end{aligned}$$

Berechnung über Differenzenquotienten:

$$F(s, \zeta) = F(s = 30.78 \text{ m}, \zeta = 80.753^{\text{gon}}) = 9.600046026 \text{ m}$$

$$F(s + ds, \zeta) = F(s = 30.80 \text{ m}, \zeta = 80.753^{\text{gon}}) = 9.606283873 \text{ m}$$

$$F(s, \zeta + d\zeta) = F(s = 30.78 \text{ m}, \zeta = 80.755^{\text{gon}}) = 9.598984989 \text{ m}$$

$$\left( \frac{\partial F(s, \zeta)}{\partial s} \right)_0 = \left( \frac{F(s+ds, \zeta) - F(s, \zeta)}{ds} \right)_0 = \frac{9.606283873 \text{ m} - 9.600046026 \text{ m}}{0.02 \text{ m}} = 0.3119$$

$$\left( \frac{\partial F(s, \zeta)}{\partial \zeta} \right)_0 = \left( \frac{F(s, \zeta+d\zeta) - F(s, \zeta)}{d\zeta} \right)_0 = \frac{9.598984989 \text{ m} - 9.600046026 \text{ m}}{0.002^{\text{gon}}} \frac{200^{\text{gon}}}{\pi} = -33.7739 \text{ m}$$

Wichtig ist bei der letzten Berechnung, daß auf die richtige Dimensionierung geachtet wird (Winkel in Bogenmaß umrechnen!) und daß die Forderung nach gegen Null gehenden Differenzen eingehalten wird.

## 1.2 Varianzfortpflanzungsgesetz in allgemeiner Form

Aus der Definition der Varianz läßt sich die Varianz einer *linearen* Funktion von Zufallsveränderlichen bestimmen.

Eine lineare Funktion sei allgemein in folgender Form definiert:

$$F(x_i) = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n \quad (3)$$



Nichtlineare Funktionen von Zufallsvariablen werden durch Taylorentwicklung (siehe Abschnitt 1.1) linearisiert.

$$s_F^2 = \left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1} \right)^2 s_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_2} \right)^2 s_{x_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_n} \right)^2 s_{x_n}^2 \quad (10)$$

**Beispiel:**

Fortsetzung des Beispiels aus Abschnitt 1.1 für unabhängige Zufallsvariablen:

$$s_F^2 = (0.3119)^2 (0.02 \text{ m})^2 + (-33.774 \text{ m})^2 (0.002^{\text{gon}} \frac{\pi}{200^{\text{gon}}})^2 = 4.0030 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$s_F^2 = \pm 0.006 \text{ m} = \pm 6 \text{ mm}$$

Darstellung in Matrixschreibweise:

$$s_F^2 = \mathbf{f}' \mathbf{K}_{\mathbf{xx}} \mathbf{f} = (0.3119 \quad -33.774 \text{ m}) \begin{pmatrix} 0.0004 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0.00004^{\text{gon}^2} \left( \frac{\pi}{200^{\text{gon}}} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3119 \\ -33.774 \text{ m} \end{pmatrix}$$

### 1.3 Ausgleichung von Beobachtungen über Summgleichungen

(Ausgleichung bei nur einer Summenbedingung)

Wenn nur eine Nivellementsline oder nur eine Schleife ausgeglichen werden soll (kein Netz!) müssen die Messungen nur einer einzigen mathematischen Bedingung (Abschluß bzw. Schleifenschluß) genügen. Ein ähnliches Problem tritt z.B. bei der Ausgleichung einer Summe von den gesamten Horizont füllenden Winkeln auf.

Das Prinzip des gewogenen arithmetischen Mittels kann auch in einem solchen Fall angewandt werden.

Ist  $S$  der Sollwert und  $[L]$  die Summe der Ergebnisse der  $n$  die Summe bildenden Messungen, so wird der Widerspruch  $w = [L] - S$  proportional zu den reziproken Gewichten  $1/p_i$  auf die Einzelmessungen verteilt. Bei gleichgewichtigen Messungen ergibt dies eine Gleichverteilung. Die Standardabweichung der Gewichtseinheit, die einer ursprünglichen Einzelmessung  $L_i$  und die einer ausgeglichenen Messung  $x_i$  ergeben sich wie folgt:

$$\hat{s}_0 = \frac{w}{\sqrt{[1/p]}} \quad \hat{s}_i = \frac{\hat{s}_0}{\sqrt{p_i}} \quad \hat{s}_{x_i} = \frac{\hat{s}_0}{\sqrt{p_i}} \sqrt{1 - \frac{1/p_i}{[1/p]}}$$

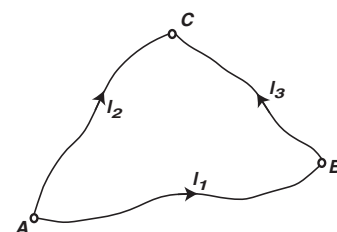
Bei gleichgewichtigen Messungen vereinfachen sich die Formeln entsprechend:

$$\hat{s}_0 = s_i = \frac{w}{\sqrt{n}} \quad \hat{s}_{x_i} = \hat{s}_i \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

**Beispiel:**

Nivellementsschleife eines geometrischen Nivellements mit unabhängigen Beobachtungen

$$\begin{aligned} \text{gegeben: } l_1 &= 1.015 \text{ m} & S_1 &= 0.625 \text{ km} \\ l_2 &= 12.570 \text{ m} & S_2 &= 0.470 \text{ km} \\ l_3 &= 11.563 \text{ m} & S_3 &= 0.395 \text{ km} \end{aligned}$$



Widerspruch:  $w = l_1 - l_2 + l_3 = 0.008 \text{ m}$

Verbesserungen:  $-v_i = \frac{1/p_i}{[1/p]} \cdot w = \frac{S_i}{[S]} \cdot w$

$$\mathbf{v}' = (-0.00336 \text{ m} \quad 0.00252 \text{ m} \quad -0.00212 \text{ m})$$

ausgeglichene Höhenunterschiede :  $x_i = l_i + v_i$

$$\mathbf{x}'_i = (1.0116 \text{ m} \quad 12.5725 \text{ m} \quad 11.5609 \text{ m})$$

Standardabweichung der Gewichtseinheit:  $\hat{s}_0 = \frac{w}{\sqrt{[1/p]}} = \frac{w}{\sqrt{[S]}} = \pm 0.00655 \text{ m}$

Standardabweichung der gemessenen Höhenunterschiede:  $\hat{s}_i = \frac{\hat{s}_0}{\sqrt{p_i}}$

$$\hat{\mathbf{s}}'_i = (\pm 0.00518 \text{ m} \quad \pm 0.00449 \text{ m} \quad \pm 0.00412 \text{ m})$$

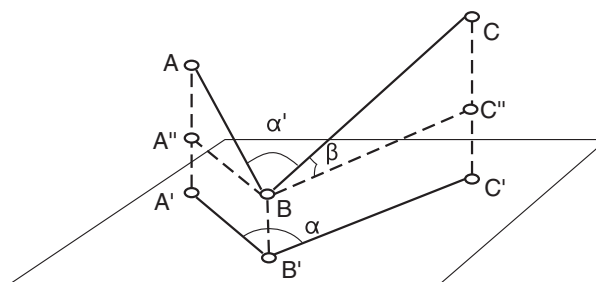
Standardabweichung der ausgeglichenen Höhenunterschiede:  $\hat{s}_{x_i} = \hat{s}_i \sqrt{1 - \frac{1/p_i}{[1/p]}} = \hat{s}_i \sqrt{1 - \frac{S_i}{[S]}}$

$$\hat{\mathbf{s}}'_{\mathbf{x}_i} = (\pm 0.0039 \text{ m} \quad \pm 0.0037 \text{ m} \quad \pm 0.0035 \text{ m})$$



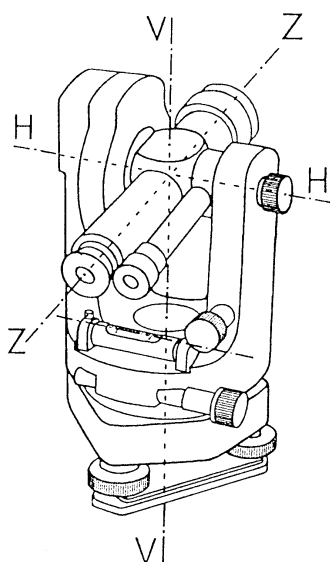
## 2 Theodolit und Winkelmessung

- drei beliebige Punkte A, B, C im Raum spannen eine Ebene auf
- der Winkel (A,B,C) in dieser Ebene heißt Positionswinkel  $\alpha'$   
er ist i.a. nicht mit dem Horizontalwinkel  $\alpha$  identisch (nur wenn Ebene(A,B,C) und Horizontalebene parallel)
- $\alpha$  ist die Projektion des Winkels  $\alpha'$  in die Horizontalebene
- der Höhenwinkel  $\beta$  ist der Winkel zwischen einer horizontalen Zielung und der zu einem beliebigen Punkt



Das Instrument zum Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln ist der Theodolit.

### 2.1 Die Achsen des Theodolits



#### Abbildung:

Schematische Darstellung der Achsen eines Theodolites.

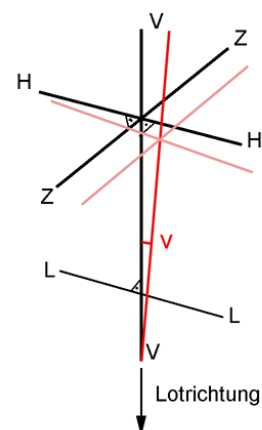
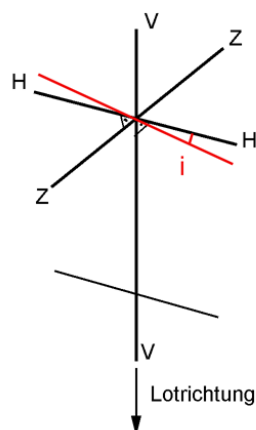
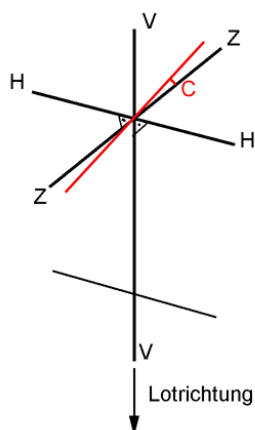
$\overline{Z \ Z}$	Zielachse
$\overline{H \ H}$	Kippachse
$\overline{V \ V}$	Stehachse
$\overline{L \ L}$	Libellenachse

#### Forderungen:

1. Zielachse senkrecht zur Kippachse  $\overline{Z \ Z} \perp \overline{H \ H}$
2. Kippachse senkrecht zur Stehachse  $\overline{H \ H} \perp \overline{V \ V}$
3. Stehachse streng lotrecht  $(\overline{V \ V} \perp \overline{L \ L})$

### Achsenfehler

1. Wenn Zielachse **nicht** senkrecht zur Kippachse  $\Rightarrow$  **Zielachsenfehler**  $c$
2. Wenn Kippachse **nicht** senkrecht zur Stehachse  $\Rightarrow$  **Kippachsenfehler**  $i$
3. Wenn Stehachse **nicht** lotrecht  $\Rightarrow$  **Stehachsschiefe**  $v$



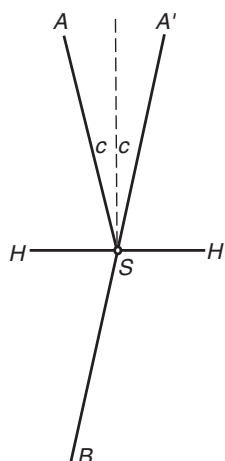
### Sekundäre Achsenfehler

- zu 2. kleine Fehler in der Kippachslagerung  $\Rightarrow$  *sekundärer Kippachsfehler* („Taubelbewegung“ der Kippachse) (*Zapfenfehler*)
- zu 3. kleine Fehler in der Stehachslagerung  $\Rightarrow$  *sekundäre Stehachsschiefe* („Taubelbewegung“ der Stehachse) (*Taubelfehler*)

Nachfolgend werden Zielachsenfehler, Kippachsenfehler und Stehachsschiefe bezüglich

- Bestimmung im Rahmen einer Geräteuntersuchung und
- Einfluß auf die Horizontalwinkelmessung
- Möglichkeiten der Kompensation

betrachtet.



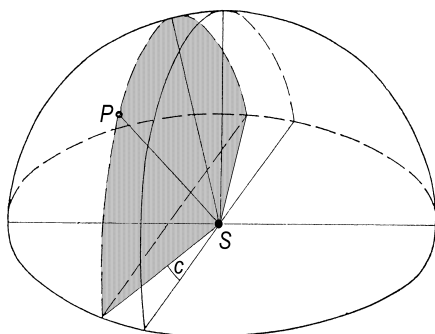
### ZIELACHSENFEHLER

$\Rightarrow$  Winkel  $c$  zwischen Zielachse und Normalebene zur Kippachse

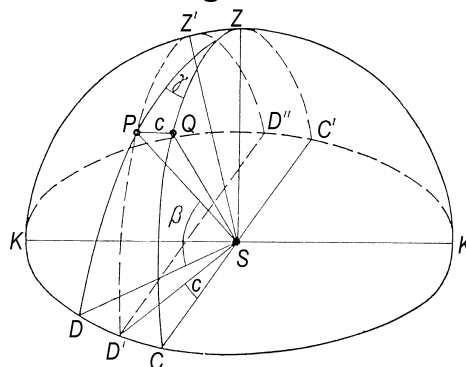
**Bestimmung: (bei horizontaler Visur!):**

- Anzielung eines Punktes  $A$
- Kreisablesung
- Durchschlagen des Fernrohrs
- Drehung um genau 200 gon in Richtung  $A'$
- Winkel  $A'SA = 2c$

**Einfluß des Zielachsenfehlers**



**Korrektion wegen Zielachsenfehler**



Korrektion:  $k_c = \frac{c}{\cos \beta} = \frac{c}{\sin \zeta}$   
 $c = \frac{R^{II} - 200 - R^I}{2}$

**Kompensation des Zielachsenfehlers**

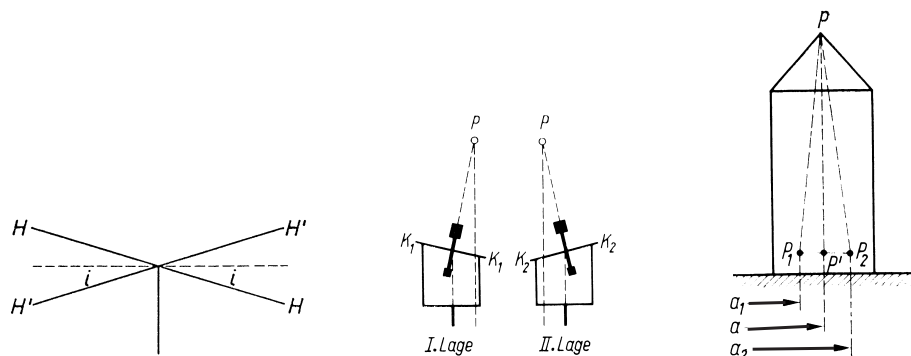
- **MESSUNG IN 2 FERNROHRLAGEN!**
- „klassische“ Instrumente:  
Bestimmung im Rahmen einer Geräteuntersuchung  
Justierung durch Verschiebung der Strichplatte
- moderne digitale Theodolite oder Tachymeter:  
Bestimmung im Rahmen einer Geräteuntersuchung  
Speicherung im Instrument und  
rechnerische Berücksichtigung bei der Messung

**Zahlenbeispiel (Zielachsenfehler)**

Zenitwinkel [gon]		Strecke [m]				
		100	200	300	400	500
99	101	3,2	1,6	1,1	0,8	0,6
98	102	3,2	1,6	1,1	0,8	0,6
95	105	3,2	1,6	1,1	0,8	0,6
90	110	3,1	1,6	1,0	0,8	0,6
80	120	3,0	1,5	1,0	0,8	0,6

Zielachsenfehler in mgon, die eine Querabweichung von 5mm hervorrufen

**KIPPACHSENFEHLER**



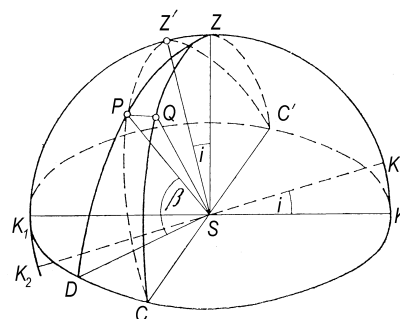
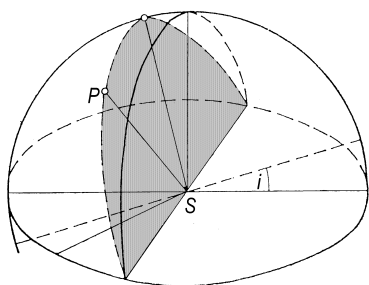
⇒ Winkel  $i$  zwischen Kippachse und Normalebene zur Stehachse

**Bestimmung (Nach Beseitigung des Zielachsenfehlers!):**

- Anzielung eines hochgelegenen Punktes  $P$
- Kreisablesung oder Herablotung auf einen Maßstab
- Durchschlagen des Fernrohrs und Drehung um 200 gon
- nochmalige Kreisablesung oder Herablotung auf einen Maßstab
- Differenz der Kreisablesungen (minus 200 gon) ist der Einfluß des Kippachsenfehlers

**Korrektion wegen Kippachsenfehler**

**Einfluß des Kippachsenfehlers**



Korrektion:  $k_i = i \cdot \tan \beta = i \cdot \cot \zeta$   
 $i = \left( \frac{R^{II} - 200 - R^I}{2} - \frac{c}{\sin \zeta} \right) \tan \zeta$

**Kompensation des Kippachsenfehlers**

- **MESSUNG IN 2 FERNROHRLAGEN!**
- „klassische“ Instrumente:  
Bestimmung im Rahmen einer Geräteuntersuchung  
Justierung durch Heben oder Senken der Achslager
- moderne digitale Theodolite oder Tachymeter:  
Bestimmung im Rahmen einer Geräteuntersuchung (im Labor durch Hersteller)  
Speicherung im Instrument und rechnerische Berücksichtigung bei der Messung

## Zahlenbeispiel (Kippachsenfehler)

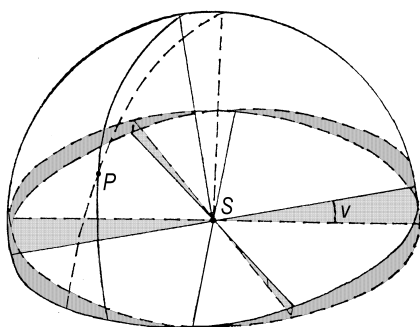
Zenitwinkel [gon]		Strecke [m]				
		100	200	300	400	500
99	101	202,6	101,3	67,5	50,6	40,5
98	102	101,3	50,6	33,8	25,3	20,2
95	105	40,4	20,2	13,5	10,1	8,1
90	110	20,1	10,0	6,7	5,0	4,0
80	120	9,8	4,9	3,3	2,4	2,0

Kippachsenfehler in mgon, die eine Querabweichung von 5mm hervorrufen

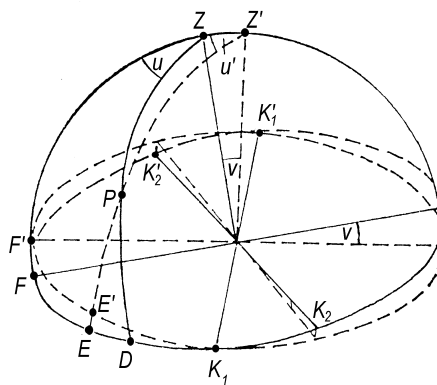
## STEHACHSENSCHIEFE

- die Stehachsenschiefe ist kein Instrumentalfehler, sondern ein **Aufstellfehler!**
- er entsteht, wenn die Stehachse schief steht
- „Justierung“ ist nicht möglich
- Vermeidung durch strenge Lotrechtstellung mit Hilfe von Libellen

## Einfluß der Stehachsenschiefe



## Korrektur wegen Stehachsenschiefe



Korrektur:

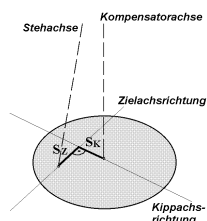
$$k_v = v \cdot \tan \beta \cdot \sin u' = v \cdot \cot \zeta \cdot \sin u'$$

## Kompensation der Stehachsenschiefe

- **KEINE TILGUNG DURCH MESSUNG IN 2 FERNROHRLAGEN!**
- „klassische“ Instrumente:  
strenge Horizontierung des Instrumentes, d.h. Lotrechtstellung der Stehachse insbesondere bei steilen Zielungen (Faktor  $\cot \zeta$ )
- moderne digitale Theodolite oder Tachymeter:  
Messung mittels Kompensatoren und rechnerische Berücksichtigung bei der Messung  
→ Restneigung nach Horizontierung muß im Arbeitsbereich des Kompensators liegen!

## 2-Achs-Kompensatoren

⇒ Winkel  $v_K$  ist Stehachsenschiefe in Kippachsrichtung



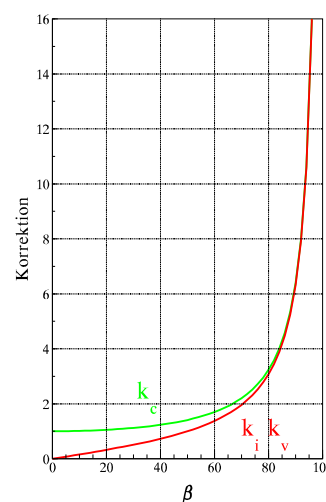
- Messung der Stehachsenschiefe z.B. durch Zweiachskompensator
- Bestimmung der Komponente in Kippachsrichtung  
 $s_K, \rightarrow v_K = s_K$
- gemeinsame rechnerische Berücksichtigung der Achsenfehler  
 $k_{ges} = \frac{c}{\sin \zeta} + (v_K + i) \cot \zeta \quad R_{korr} = R_{gem} + k_{ges}$

### ZUSAMMENFASSUNG (ACHSENFEHLER)

- Zielachsenfehler  $k_c = \frac{c}{\cos \beta}$
- Kippachsenfehler  $k_i = i \cdot \tan \beta$
- Stehachsenschiefe  $k_v = v \cdot \tan \beta \cdot \sin u'$

### Reihenfolge der Untersuchung/Justierung:

- exaktes Lotrechtstellen des Instrumentes (Justierung der Libellen)
- Bestimmung und Justierung des Zielachsenfehlers
- Bestimmung und Justierung des Kippachsenfehlers



- Die Auswirkung von Achsenfehlern des Theodolites ist bei der Messung unbedingt zu beachten. Das gilt insbesondere
  - bei Messungen in nur einer Fernrohrlage (Absteckungen) und
  - bei steilen Zielungen.
  - bei höchsten Genauigkeitsansprüchen
- Zielachsen- und Kippachsenfehler können durch Messung **in zwei Fernrohrlagen** eliminiert werden.  
 Sie wirken aber als systematischer Fehler in beiden Fernrohrlagen (→ Fehlerrechnung)
- Die Stehachsenschiefe wird **NICHT** durch Messung in zwei Fernrohrlagen eliminiert.  
 Es muß eine exakte Lotrechtstellung der Stehachse erfolgen.
- Instrumente sind entsprechend der geforderten Genauigkeit zu überprüfen und ggf. zu justieren.
  - Bei modernen elektronischen Instrumenten erfolgt häufig eine Speicherung der Fehler im Gerät und
  - Berücksichtigung bei der Messung durch rechnerische Korrekturen.
  - Justierung insbesondere von Präzisionsgeräten ggf. durch den Hersteller.

- Die Kompensation des Einflusses der Stehachsenschiefe ist bei elektronischen Instrumenten ebenfalls möglich.  
⇒ z.B. Zweiachskompensatoren  
Es verbleibt nur der Einspielfehler des Kompensators.

## 2.2 Kreisteilungsfehler

- systematischer oder zufälliger Fehler in den Teilungen des (Horizontal-)kreises
- Eliminierung durch Messung des gleichen Winkels an verschiedenen Stellen des Teilkreises (Verstellung des Teilkreises zwischen den Sätzen)

## 2.3 Exzentrizitätsfehler

- Kreisteilungsexzentrizität:  
Achse des Teilkreises und Achse der Stütze (Alhidade, Kippachse) fallen nicht zusammen  
Eliminierung durch Messung in zwei Fernrohrlagen
- Zeigerarmknickung:  
tritt bei Ablesung an zwei Kreisstellen auf, wenn diese nicht genau diametral gegenüberliegen  
Eliminierung durch Messung in zwei Fernrohrlagen
- Zielachsenexzentrizität: tritt auf, wenn die Schnittpunkte Zielachse/Kippachse und Stehachse/Kippachse nicht zusammenfallen (z.B. exzentrisches Fernrohr)  
Eliminierung durch Messung in zwei Fernrohrlagen (nur bei Horizontalwinkeln!)

## 2.4 Horizontalwinkelmessung

Folgende Meßverfahren können unterschieden werden:

- einfache Richtungs- und Winkelmessung
- repetitionsweise Winkelmessung
- Winkelmessung mit Horizontschluß
- Winkelmessung in allen Kombinationen
- Sektorenmethode

## 2.5 Die einfache Richtungs- und Winkelmessung

Da die Winkelmessung lediglich ein Sonderfall der Richtungssatzmessung mit nur zwei Zielen darstellt, wird nachfolgend nur die Richtungssatzmessung behandelt.

**Messung:**

1. Zentrierung und Horizontierung (Stehachsneigung!) des Instruments
2. Anzielung der einzelnen Ziele im Uhrzeigersinn in I. FRL
3. Durchschlagen des Fernrohres und Anzielung der Ziele rückläufig entgegen dem Uhrzeigersinn
4. Zur Genauigkeitssteigerung Wiederholung der Messung (2. u. 3.)  $n$ -mal mit Teilkreisverstellung um  $(200/n)$ gon zur Eliminierung von Teilkreisfehlern

**Auswertung:**

1. Mittelbildung der beiden Fernrohrlagen
2. Reduzierung auf die Anfangsrichtung in jedem Satz
3. Mittelung der „reduzierten Satzmittel“ der  $n$  Sätze zum Gesamtmittel

**Fehlerrechnung für  $s$  Ziele und  $n$  Sätze:**

- Bildung der Differenz  $d_i$  der Satzmittel und der endgültigen Richtung für jede Richtung in jedem Satz
- Bildung der Verbesserungen mit dem Wert der satzweisen Summe  $[d]$  nach  $v_i = d_i - [d]/s$  dadurch wird erreicht, daß die Summe  $[v]$  bis auf Rundungsfehler Null ergibt (Probe!)
- Berechnung der Standardabweichungen einer in einem Satz gemessenen und einer aus  $n$  Sätzen gemittelten Richtung:

$$s_r = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}} \qquad \hat{s}_r = \frac{s_r}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)(s-1)}}$$

**Zahlenbeispiel (aus Kahmen 1997):**

Ziel	FRL I	FRL II	Mittel aus I u. II	red. Mittel	endg. Richtung	$d$	$v$	$vv$
	gon	gon	gon	gon	gon	0.1mgon		
TP 815	0.577	200.579	0.5780	0.0000	<b>0.0000</b>	0	+2	4
PP 1	55.618	255.623	55.6205	55.0425	<b>55.0420</b>	-5	-3	9
PP 3	95.341	295.345	95.3430	94.7650	<b>94.7640</b>	-10	-8	64
Kirche	266.489	66.491	266.4900	265.9120	<b>265.9127</b>	+7	+9	81
					187	-8	0	
					$[d]_1/s=$	-2		
TP 815	67.506	267.513	67.5095	0.0000		0	+2	4
PP 1	122.548	322.553	122.5505	55.0410		+10	+12	144
PP 3	162.270	362.279	162.2745	94.7650		-10	-8	64
Kirche	333.422	133.424	333.4230	265.9135		-8	-6	36
					$[d]_2/s=$	-8	0	
						-2		
TP 815	134.150	334.158	134.1540	0.0000		0	-4	16
PP 1	189.194	389.199	189.1965	55.0425		-5	-9	81
PP 3	228.913	28.919	228.9160	94.7620		+20	+16	256
Kirche	<u>0.064</u>	<u>200.069</u>	<u>0.0665</u>	<u>265.9125</u>		+2	-2	4
	592	652	6220	560	560/3=187	+17	+1	763
		(I+II)/2=622			$[d]_3/s=$	+4		

$$s_r = \sqrt{\frac{763}{(3-1)(4-1)}} = \pm 1.1 \text{ mgon} \qquad \hat{s}_r = \frac{\pm 1.13 \text{ mgon}}{\sqrt{3}} = \pm 0.6 \text{ mgon}$$

Anzahl der Beobachtungen:  $n \cdot s = 12$

Anzahl der Unbekannten:  $s - 1 = 3$  unbekannte Winkel,  $n = 3$  Orientierungsunbekannte

Freiheitsgrad:  $n_f = n_{Beob} - n_u = 12 - (3 + 3) = 6$  oder  $n_f = (s - 1)(n - 1) = 6$



## 2.6 Die repetitionsweise Winkelmessung

- bei Theodoliten niederer und mittlerer Genauigkeit erfolgt die Zieleinstellung um den Faktor 3 bis 4 genauer, als die Teilkreisablesung  
die Schärfe der Zieleinstellung geht durch die Ungenauigkeit der Zieleinstellung verloren
- Lösungsmöglichkeit: Repetitionsverfahren mit  $k$  aufeinanderfolgenden Messungen des Winkels mit „mechanischer Addition“ (Repetition)
- die Differenz der Kreisablesungen ergibt  $k$ -fachen Winkel  
bei der Division dieses Wertes durch  $k$  erhält man den einfachen Winkel  
der Ablesefehler geht dabei auf den  $k$ -ten Teil seines Wertes zurück

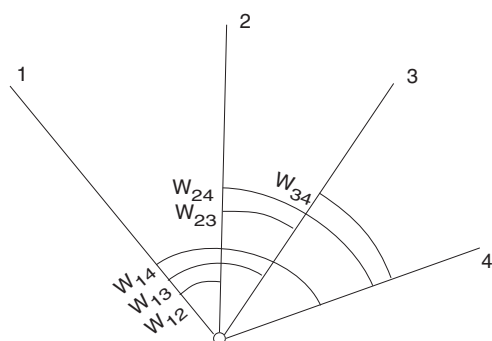
### Messvorgang:

- linkes Ziel in FRL I anzielen
  - rechtes Ziel in FRL I anzielen (Rohablesung sinnvoll)
  - Teilkreis klemmen (feststellen) und auf linkes Ziel zurückdrehen
  - Teilkreis lösen und Vorgang  $k$ -mal wiederholen
  - Fernrohr durchschlagen und Arbeitsschritte a bis d mit rechtem Ziel beginnend in FRL II wiederholen
  - $k$ -fachen Winkel aus beiden Lagen addieren und durch  $2k$  dividieren
- Bedeutung der repetitionsweisen Winkelmessung heute nur noch bei parallaktischer Winkelmessung (z.B. Basislatte)  
⇒ hohe Genauigkeiten sind mit einfachen Instrumenten erreichbar

## 2.7 Winkelmessung mit Horizontschluß

- Beobachtung aller Winkel zwischen zwei Zielen bis der Horizont geschlossen ist
- Winkelsumme: Soll=400 gon, Verteilung des Widerspruchs gleichmäßig auf die Winkel
- Anwendung z.B. wenn sich Beobachtungspfeiler infolge Sonneneinstrahlung drehen bzw. bewegen

## 2.8 Winkelmessung in allen Kombinationen



Zweck:

- bessere Fehlerverteilung erreichen

Messung aller  $s(s-1)/2$  Winkel in einem Strahlenbüschel mit  $s$  Richtungen

Beispiel:  $s = 6$ , Winkel 12, 13, 14, 23, 24, 34

Berechnung der unbekannt Winkel 12, 13, 14 nach dem Prinzip des allgemeinen arithmetischen Mittels:

direkt gemessener Winkel → Gewicht=2

Winkel aus Summen oder Diff. → Gewicht=1

Ergebnis (mit z.B. (12) → ausgeglichener Winkel und 12 → gemessener Winkel)<sup>1</sup>:

$$(12) = 1/4 \cdot (2 \cdot 12 + 1 \cdot (13 - 23) + 1 \cdot (14 - 24))$$

$$(13) = 1/4 \cdot (2 \cdot 13 + 1 \cdot (12 + 23) + 1 \cdot (14 - 34))$$

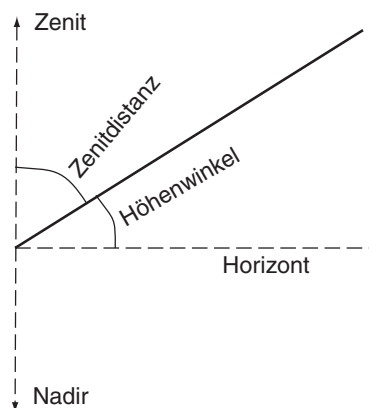
$$(14) = 1/4 \cdot (2 \cdot 14 + 1 \cdot (12 + 24) + 1 \cdot (13 + 34))$$

Die Methode kommt (kam) bei der Messung von Triangulationsnetzen zur Anwendung. Heute nur noch in Spezialanwendungen (spezielle Präzisionsrichtungsnetze). Verständnis der Methode wichtig zum Verständnis „historischer“ (Landes-)vermessungen.

## 2.9 Sektorenmethode

- Anwendung, wenn von einem Punkt Strahlen verschiedener Ordnung abgehen
- Beobachtung von Hauptrichtungen mit Horizontschluß (s.o.)
- Beobachtung der Richtungen niederer Ordnung innerhalb der Sektoren mit Summenbedingung

## 2.10 Vertikalwinkelmessung

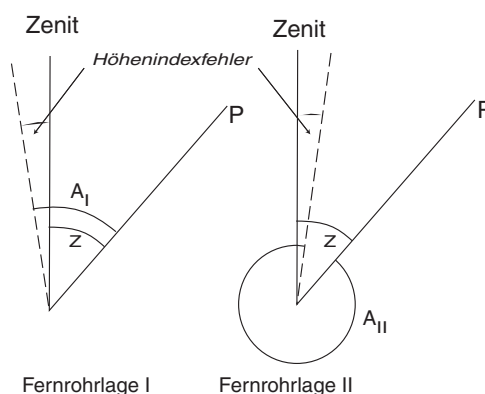


- Messung von Zenit- oder Höhenwinkeln mit Theodoliten, die mit Höhenindexlibelle oder Höhenindexkompensator ausgestattet sind.
- Messung in zwei Fernrohrlagen zur Eliminierung von Instrumentalfehlern

### 2.10.1 Vertikalwinkelmessung und Indexabweichung

- Zur Bestimmung von Zenitwinkeln muß der Höhenzeiger bezüglich der Visirachse so orientiert sein, daß eine Zielung zum Zenit die Ablesung „0“ ergibt.
- Eine Abweichung von diesem Sollwert bezeichnet man als Höhenindexfehler oder Höhenindexabweichung  $\zeta$ .
- $\zeta$  ist ein Nullpunktsfehler, der alle Zielungen in gleicher Art und Weise beeinflusst (in den beiden Fernrohrlagen mit unterschiedlichem Vorzeichen).
- $\implies$  Eliminierung durch Messung in beiden Fernrohrlagen

<sup>1</sup>Die Gewichtssetzung läßt sich nach dem Varianzfortpflanzungsgesetz beweisen. Hier wurde auf den Beweis verzichtet.



Berechnung des Zenitwinkels:

$$\text{FRL I: } z + \zeta = A_I$$

$$\text{FRL II: } z - \zeta = 400^{\text{gon}} - A_{II}$$

$$z = \frac{A_I + (400^{\text{gon}} - A_{II})}{2}$$

$$\zeta = \frac{(A_I + A_{II}) - 400^{\text{gon}}}{2}$$

Standardabweichung der Zenitdistanz und des Höhenindexfehlers berechnet aus dem Beobachtungsfehler  $s$  in beiden Fernrohrlagen

(Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes auf obige Formeln):

$$s_z = s_\zeta = \sqrt{\frac{s_{A_I}^2 + s_{A_{II}}^2}{4}} = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Bei Messung von  $s$  Zenitwinkeln in  $n$  Sätzen auf einem Standpunkt ergeben sich:

- der mittlere Höhenindexfehler aus den  $n \cdot s$  Beobachtungen:

$$\bar{\zeta} = \sum_{i=1}^{n \cdot s} \zeta_i / (n \cdot s)$$

- mit den Verbesserungen  $v_i = \bar{\zeta} - \zeta_i$

Standardabweichung für  $z$  bzw.  $\zeta$

$$\hat{s}_z = \hat{s}_\zeta = \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot s - 1}}$$

Kontrolle für  $[vv]$

$$[vv] = [\zeta\zeta] - \frac{[\zeta]^2}{n \cdot s}$$

Standardabweichung für  $\bar{\zeta}$

$$\hat{s}_{\bar{\zeta}} = \frac{\hat{s}_\zeta}{\sqrt{n \cdot s}}$$

Standardabweichung für die aus  $n$  Sätzen gemittelten Zenitdistanzen

$$\hat{s}_z = \frac{\hat{s}_z}{\sqrt{n}}$$

- Die Genauigkeit der Zenitwinkelmessung hängt vor allem davon ab, wie gut die Höhenindexlinse eingespielt wird bzw. wie gut der Kompensator zur Ruhe kommt.
- Für einen Ingenieurtheodoliten kann von einer Genauigkeit von  $\pm 2\text{mgon}$  für eine in beiden Lagen gemessene Zenitdistanz ausgegangen werden.  
(entspricht  $\pm 1\text{mm}$  Höhe bei 30 m Zielentfernung)

- zusätzlich treten systematische Fehler (z.B. Teilkreisexzentrizitätsfehler) auf, die nicht durch Messung in 2 Fernrohrlagen eliminiert werden können.

**Beispiel**

Ziel	Satz	Lage	Ablesung [gon]	Index- Verb. [mgon]	$z$ $400 - z$ [gon]	Mittel [gon]	$v$ [mgon]	$vv$ [mgon <sup>2</sup> ]
Kirche	1	I	97.3820	-2	97.3800	<b>97.3802</b>	-0.8	0.64
		II	<u>302.6220</u> 400.0040	-2	<u>302.6200</u> 400.0000			
	2	I	97.3830	-2.5	97.3805		-0.3	0.09
		II	<u>302.6220</u> 400.0050	-2.5	<u>302.6195</u> 400.0000			
Rathaus- turm	1	I	97.8880	-3.5	97.8845	<b>97.8842</b>	-0.7	0.49
		II	<u>302.1190</u> 400.0070	-3.5	<u>302.1155</u> 400.0000			
	2	I	97.8870	-3	97.8840		-0.2	<u>0.04</u>
		II	<u>302.1190</u> 400.0060	-3	<u>302.1160</u> 400.0000			
			Mittel:	<u>-2.8</u>				

$$\text{Kontrolle für } [vv] \quad [vv] = [\zeta\zeta] - \frac{[\zeta]^2}{n \cdot s} = 31.5 \text{mgon}^2 - \frac{(11 \text{mgon})^2}{4} = 1.25 \text{mgon}^2$$

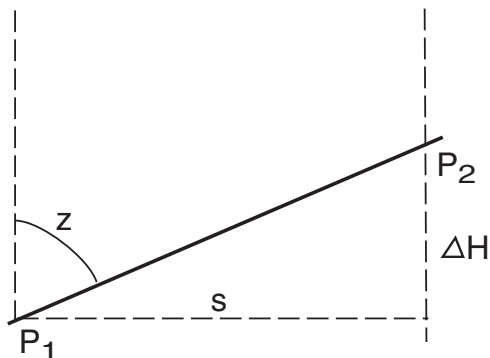
$$\text{Standardabweichung für } z \text{ bzw. } \zeta \quad \hat{s}_z = \hat{s}_\zeta = \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot s - 1}} = \sqrt{\frac{1.26 \text{mgon}^2}{2 \cdot 2 - 1}} = \pm 0.65 \text{mgon}$$

$$\text{Standardabweichung für } \bar{\zeta} \quad \hat{s}_{\bar{\zeta}} = \frac{\hat{s}_\zeta}{\sqrt{n \cdot s}} = \pm \frac{0.65 \text{mgon}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \pm 0.32 \text{mgon}$$

$$\text{Standardabweichung für die aus } n \text{ Sätzen gemittelten Zenitdistanzen} \quad \hat{s}_{\bar{z}_{Kirche}} = \hat{s}_{\bar{z}_{Rath}} = \frac{\hat{s}_z}{\sqrt{n}} = \pm \frac{0.65 \text{mgon}}{\sqrt{2}} = \pm 0.46 \text{mgon}$$

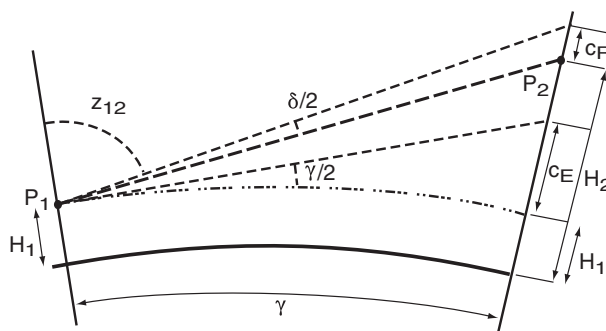
### 3 Trigonometrische Höhenmessung

#### 3.1 Grundlagen/Prinzip



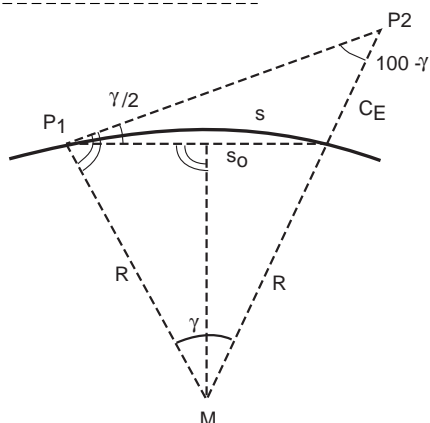
$$\Delta h = s \cot z$$

- Ermittlung von Höhenunterschieden aus Entfernungen und Vertikalwinkeln
- im Gegensatz zum geometrischen Nivellement erfolgt die Messung nicht aus der Mitte, sondern von einem Entpunkt des Höhenunterschiedes aus
- die Einflüsse von Erdkrümmung und Refraktion (gekrümmter Lichtweg) sind daher unbedingt zu beachten



- $c_E$  ist der Einfluß der Erdkrümmung auf die trigonometrische Höhenübertragung
- $c_R$  ist der Einfluß des gekrümmten Lichtweges

#### Einfluß der Erdkrümmung



$$s \approx s_0 \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{2R}$$

$$\frac{c_E}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{s}{\sin(100 - \gamma)}$$

$$\frac{c_E \cdot 2R}{s} = \frac{s}{\cos \gamma}$$

$$c_E = \frac{s^2}{2R \cos \gamma} \approx \frac{s^2}{2R}$$

Näherung für  $R$ : 6370 km

Beispielwerte für den Einfluß der Erdkrümmung:

$s$ [km]	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
$c_E$	0.8mm	3.1mm	19.6mm	78.5mm	32cm	1.96m	7.9m

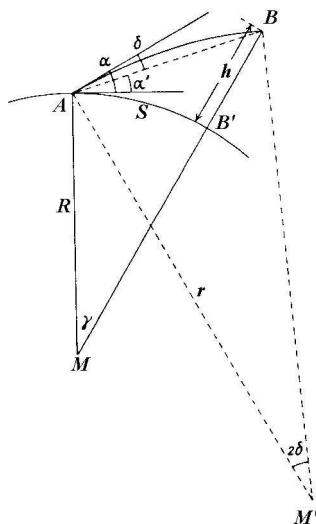
### Einfluß des gekrümmten Lichtweges (Refraktion)

- die (optische) Dichte der Luft nimmt mit zunehmender Höhe ab  
dadurch kommt es zu einer kontinuierlichen Brechung des Zielstrahls
- Der Einfluß des gekrümmten Lichtweges läßt sich analog berechnen, wenn der Lichtweg im Raum als Kreisbogen mit dem Radius  $r$  angenommen wird
- Das Verhältnis der Radius der Lichtkurve zum Erdradius wird als Refraktionskoeffizient  $k$  bezeichnet

$$k = R/r$$

der Wert für  $k$  beträgt etwa  $k \approx 0.125$ , da  $r \approx 8R$  (für Zielungen außerhalb der bodennahen Luftschicht!)

- der Refraktionskoeffizient kann stark variieren:
  - durch Variationen von Luftdruck und Temperatur entlang des Zielstrahls (vertikaler Temperaturgradient!)
  - in Bodennähe Beeinflussung durch verschiedene lokale Effekte schwer faßbare Reflektion/Absorbtion der Sonneneinstrahlung (Bewuchs, Asphalt/Beton, Wasserflächen, ...)
  - $k$  ist örtlichen und zeitlichen Schwankungen unterworfen
- Erfassung der Refraktionseinflüsse auf die Vertikalwinkelmessung ist sehr schwierig  
Korrekturen sind meist unsicher zu berechnen  $\Rightarrow$  Eliminierung durch Messungsanordnung



$$c_R \approx -\frac{s^2}{2r}$$

und mit  $k = R/r$   $r = R/k$

$$c_R \approx -\frac{k \cdot s^2}{2R}$$

Beispielwerte für den Einfluß der Refraktion:  
(mit  $k=0.125$ )

$s$ [km]	0.1	0.2	0.5	1	5	10
$c_E$	0.1mm	0.4mm	2.5mm	9.8mm	24.5cm	0.981m

Damit läßt sich der Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten  $P_1$  und  $P_2$  berechnen:

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \cdot \cot z + i_{P_1} - z_{P_2} + \frac{s^2}{2R} - \frac{k \cdot s^2}{2R}$$

$$\Delta h = s \cdot \cot z + i_{P_1} - z_{P_2} + (1 - k) \frac{s^2}{2R}$$

( $i_{P_1}$  Instrumentenhöhe in  $P_1$ ,  $z_{P_2}$  Zielpunkthöhe in  $P_2$ )

- Der Korrektions-term für Erdkrümmung und Refraktion kann für kurze Zielweiten (<100m) vernachlässigt werden (entsprechend den Genauigkeitsforderungen!)
- Eliminierung der Einflüsse von Erdkrümmung und Refraktion durch gegenseitige zeitgleiche Messung möglich!

$$\Delta h = s \cdot \tan \left( \frac{z_{21} - z_{12}}{2} \right)$$

Fehlerbetrachtung zur einseitigen trigonometrischen Höhenübertragung:

1. Linearisierung des nichtlinearen Zusammenhangs („Totales Differential“)

$$d\Delta h = \frac{\partial F}{\partial s} ds + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial k} dk + \frac{\partial F}{\partial i_{P_1}} di_{P_1} + \frac{\partial F}{\partial z_{P_2}} dz_{P_2}$$

$$d\Delta h = \left( \cot z + (1 - k) \frac{s}{R} \right) ds + \left( \frac{-s}{\sin^2 z} \right) dz + \left( \frac{-s^2}{2R} \right) dk + di_{P_1} + dz_{P_2}$$

2. Standardabweichung für  $\Delta h$ :

$$s_{\Delta h}^2 = \left( \cot z + (1 - k) \frac{s}{R} \right)^2 s_s^2 + \left( \frac{-s}{\sin^2 z} \right)^2 s_z^2 + \left( \frac{-s^2}{2R} \right)^2 s_k^2 + s_{i_{P_1}}^2 + s_{z_{P_2}}^2$$

*Beispielwerte in [mm] für verschiedene (kurze) Zielweiten und Zenitwinkel:*

(mit  $s_{i_{P_1}} = \pm 2\text{mm}$ ,  $s_{z_{P_2}} = \pm 2\text{mm}$ ,  $s_k = \pm 0.04$ ,  $s_z = \pm 1.5\text{mgon}$ ,  $s_s = \pm 0.0015 \cdot s$ )

	Anteil aus der Strecke			Anteil aus dem Zenitwinkel			Gesamtfehler für den Höhenunterschied		
	100m	200m	500m	100m	200m	500m	100m	200m	500m
90gon	2.4	3.4	5.3	2.4	4.8	12.1	3.9	6.2	13.4
70gon	7.6	10.8	17.1	3.0	5.9	14.8	8.4	12.5	22.7
50gon	15.0	21.2	33.5	4.7	9.4	23.6	15.8	23.3	41.0

- Der Fehleranteil aus dem Refraktionskoeffizienten beträgt für den ungünstigsten Fall  $z = 50\text{gon}$  und  $s = 500\text{m}$  nur etwa 1mm  
→ Vernachlässigung möglich
- der Anteil aus der Streckenmessgenauigkeit steigt mit steilen Visuren stark an
- der Anteil aus der Zenitwinkelmessgenauigkeit steigt mit der Entfernung am stärksten an
- für große Entfernungen wird  $z \approx 100\text{gon}$   
Damit wirken nur noch die Fehlereinflüsse aus der Zenitwinkelmessung, der Refraktion und der Standpunkt- und Zielpunkthöhe aus aus ( $\cot z \approx 0 \Rightarrow$  Einfluß von  $s_s \approx 0$ )

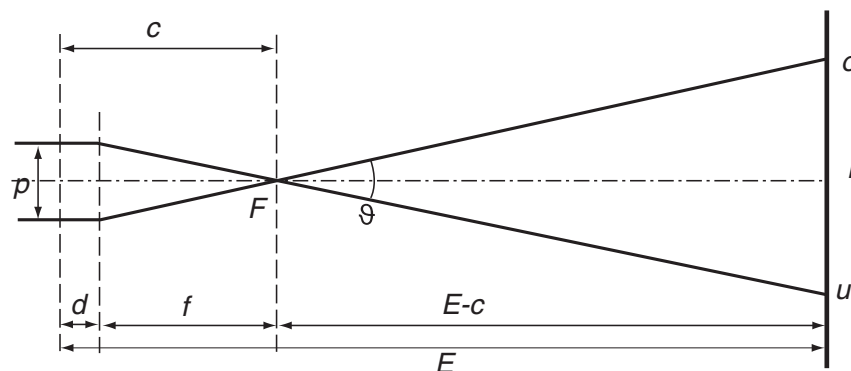
Beispielwerte in [cm] für verschiedene (lange) Zielweiten:  
(mit  $s_{i_{P_1}} = \pm 10\text{mm}$ ,  $s_{z_{P_2}} = \pm 20\text{mm}$ ,  $s_k = \pm 0.04$ ,  $s_z = \pm 1.0\text{mgon}$ )

s [km]	Fehleranteil aus Zenitwinkel	Fehleranteil aus Refraktion	Fehleranteil aus Stand- und Zielpunkthöhe	Gesamtfehler
2	4	1.3	2.3	4.8
3	6	2.9	2.3	7.0
4	8	5.8	2.3	10.1
5	10	9.0	2.3	13.6
6	12	13.0	2.3	17.8
8	16	23.0	2.3	28.1
10	20	40.0	2.3	44.8

- der Fehleranteil aus der Zenitdistanz steigt bedeutend schwächer mit der Entfernung an, als der aus der Refraktion
- $\Rightarrow$  besondere Behandlung der Refraktion insbesondere bei langen Zielweiten!

### 3.2 Die Reichenbachschen Distanzfäden

- mitunter werden nur Streckenmessungen mit geringer Genauigkeit von nur einigen Dezimetern benötigt
- z.B. zur Berechnung von Höhenunterschieden  $\Delta h$  aus Horizontaltreckenmessungen  $s$  und Vertikalwinkeln  $z$  sind oft nur Strecken mit geringer Genauigkeit ausreichend (Wenn  $\Delta h \ll s$ )
- Um ein Meßfernrohr zum Distanzmesser zu machen, werden zusätzlich zwei gleich weit vom Horizontalstrich entfernte sog. Distanzstriche im Abstand  $p$  mit in die Messung einbezogen (siehe nachstehende Skizze)



Entfernung  $E$   
Fernrohrbrennweite  $f$   
Lattenabschnitt  $l = l_o - l_u$

$$\frac{E - (d + f)}{l_o - l_u} = \frac{f}{p} \quad \text{mit} \quad \frac{f}{p} = k \quad \text{und} \quad l = l_o - l_u$$

$$\Rightarrow \quad E = c + k \cdot l$$

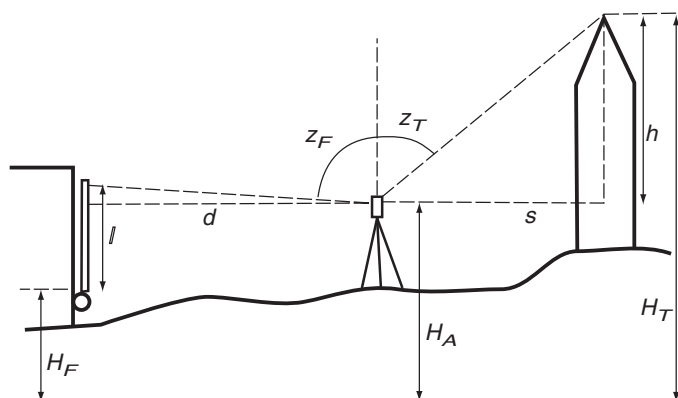


- es handelt sich damit um eine Entfernungsmessung mit festem parallaktischen Winkel  $\delta$  im Standpunkt
- für moderne geodätische Instrumente wird die Additionskonstante  $c$  im Bereich weniger Zentimeter liegen
- der Faktor  $k$  (Multiplikationskonstante) beträgt meist 100 (Abstimmung von Brennweite  $f$  und Abstand der Distanzstriche  $p$ )
- damit lassen sich bei horizontalen Visuren (z.B. bei Nivellieren oder optischen Tachymetern) aus Ablesungen an vertikalen Latten Entfernungen bestimmen

### 3.3 Turmhöhenbestimmung

- Die Bestimmung der Höhe von hohen Gebäuden erfolgt über die Messung von Zenitwinkeln (und Strecken)
- Berechnung der Höhe nach der Formel für trigonometrische Höhenübertragung (meist unter Vernachlässigung der Korrekturterme für Erdkrümmung und Refraktion)
- im einfachsten Fall:

$$H_T = H_A + s \cdot \cot z_T \quad H_A = H_F + l - d \cdot \cot z_F$$



$$H_T = H_F + l - d \cdot \cot z_F + s \cdot \cot z_T$$

Standardabweichung für  $H_T$ :

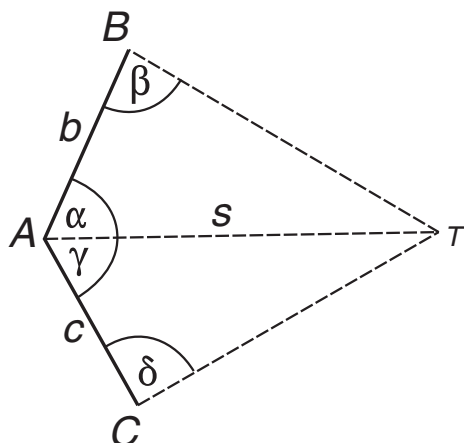
$$s_{H_T}^2 = s_{H_F}^2 + s_l^2 + \cot^2(z_F) s_d^2 + \frac{d^2}{\sin^4(z_F)} s_{z_F}^2 + \cot^2(z_T) s_s^2 + \frac{s^2}{\sin^4(z_T)} s_{z_T}^2$$

bzw.

$$s_{H_T}^2 = s_{H_A}^2 + \cot^2(z_T) s_s^2 + \frac{s^2}{\sin^4(z_T)} s_{z_T}^2 = s_{H_A}^2 + \cot^2(z_T) s_s^2 + \frac{4h^2}{\sin^2(2z_T)} s_{z_T}^2$$

- i.a. wird sich die Strecke  $s$  nicht direkt messen lassen, da ein Endpunkt in das Innere des Gebäudes fällt
- Bestimmung der Strecke erfolgt über horizontale oder vertikale Hilfsfiguren

## 3.3.1 Turmhöhenbestimmung mit horizontalem Hilfsdreieck



$$\frac{s}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin(200 - \alpha - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$s = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

bzw.

$$\frac{s}{c} = \frac{\sin \delta}{\sin(200 - \gamma - \delta)} = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$s = \frac{c \cdot \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

Standardabweichung für die Strecke  $s$ :

$$s_s^2 = \left( \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2 s_b^2 + \left( \frac{b \cdot \sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^2 s_\alpha^2 + \left( \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^2 s_\beta^2$$

$$s_s^2 = \left( \frac{s}{b} \right)^2 s_b^2 + (s \cdot \cot(\alpha + \beta))^2 s_\alpha^2 + \left( b \frac{\sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^2 s_\beta^2$$

bzw.

$$s_s^2 = \left( \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \right)^2 s_c^2 + \left( \frac{c \cdot \sin \delta \cdot \cos(\gamma + \delta)}{\sin^2(\gamma + \delta)} \right)^2 s_\gamma^2 + \left( \frac{c \cdot \sin(\gamma + \delta) \cos \delta - \cos(\gamma + \delta) \sin \delta}{\sin^2(\gamma + \delta)} \right)^2 s_\delta^2$$

$$s_s^2 = \left( \frac{s}{c} \right)^2 s_c^2 + (s \cdot \cot(\gamma + \delta))^2 s_\gamma^2 + \left( b \frac{\sin \gamma}{\sin^2(\gamma + \delta)} \right)^2 s_\delta^2$$

**Beispiel:**

gegeben:  $b = 31.231\text{m} \pm 10\text{mm}$   $\alpha = 76.143\text{gon} \pm 2\text{mgon}$   
 $\beta = 71.672\text{gon} \pm 2\text{mgon}$   $H_A = 35.796\text{m} \pm 1\text{mm}$   
 $z_T = 79.524\text{gon} \pm 2\text{mgon}$

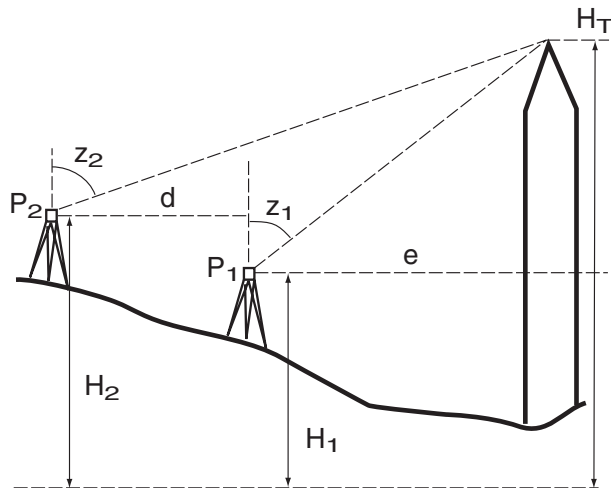
gesucht:  $s, s_s, H_T, s_{H_T}$

Ergebnis:  $s = 38.566\text{m} \pm 12.5\text{mm}$   
 $H_T = 48.646\text{m} \pm 4.5\text{mm}$

- das Hilfsdreieck soll geometrisch günstig gewählt werden
  - $b \approx s$  : günstige Schnittbedingung zur indirekten Streckenberechnung
  - $z > 70\text{gon}$  d.h.  $s \approx 2h$
- zur Genauigkeitssteigerung kann die Messung der Vertikalwinkel von beiden Eckpunkten des Hilfsdreiecks aus durchgeführt werden

### 3.3.2 Turmhöhenbestimmung mit vertikalem Hilfsdreieck

- mitunter ist die Anlage eines horizontalen Hilfsdreiecks im Gelände nicht möglich (z.B. Turmhöhenbestimmung von einer schmalen Strasse aus)



- $\Rightarrow$  Anlage einer vertikalen Hilfsfigur

$$H_T = H_1 + e \cdot \cot z_1 = H_2 + (d + e) \cdot \cot z_2$$

$$e = \frac{d \cdot \cot z_2 + H_2 - H_1}{\cot z_1 - \cot z_2}$$

Durch Addition der Gleichungen für  $H_T$  und Einsetzen der für  $e$  erhält man nach einigen Umformungen den nachfolgenden geschlossenen Ausdruck für  $H_T$ :

$$H_T = \frac{d + H_2 \tan z_2 - H_1 \tan z_1}{\tan z_2 - \tan z_1}$$

Messungsablauf:

1. Auswahl der Hilfspunkte  $P_1$  und  $P_2$  in einer Vertikalebene mit dem zu bestimmenden Hochpunkt
2. Messung der horizontalen Hilfsstrecke  $d$
3. Bestimmung der Höhen der Kippachsen der beiden Instrumente (Instrumentenhorizonte)
4. Messung der Zenitwinkel  $z_1$  und  $z_2$
5. Berechnung der Entfernung  $e$
6. Berechnung von  $H_T$
7. Kontrollmessung mit etwas veränderter Höhenlage der Instrumente

Die Turmhöhenbestimmung mit vertikalem Hilfsdreieck ist ungenauer als die mit horizontalem Hilfsdreieck.

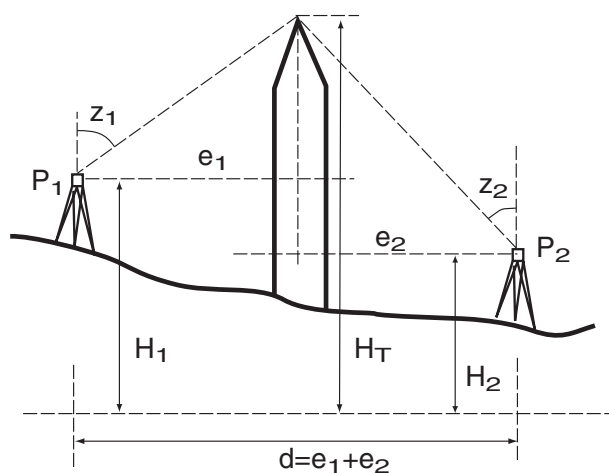
Ursache: ungünstiger Schnittwinkel der Visuren von  $P_1$  und  $P_2$  aus

Daher:

- Punkt  $P_1$  möglichst dicht an den Hochpunkt legen ( $z_1 \approx 50\text{gon}$ ,  $e \approx$  Turmhöhe)
- $d$  soll etwa zwei Turmhöhen betragen ( $z_2 \approx 80\text{gon}$ )
- $d$  sehr genau messen

- Zenitwinkel in  $P_2$  genauer messen als in  $P_1$  (doppelte Satzzahl)

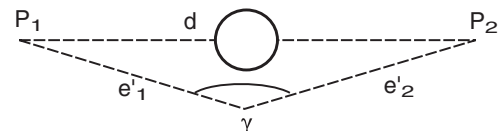
Eine günstigere Geometrie erhält man, wenn die Instrumentenstandpunkte auf den beiden Seiten des Turmes angeordnet werden können.



$$H_T = H_1 + e_1 \cdot \cot z_1 = H_2 + (d - e_1) \cdot \cot z_2$$

$$e_1 = \frac{d \cdot \cot z_2 + H_2 - H_1}{\cot z_1 + \cot z_2}$$

$$e_2 = d - e_1$$



Indirekte Bestimmung von  $d$

$$d = \sqrt{e_1'^2 e_2'^2 - 2e_1' e_2' \cos \gamma}$$

In Ausnahmefällen wird eine direkte Messung von  $d$  möglich sein (Durchfahrt im Turm)

Wenn  $P_1$  und  $P_2$  auf verschiedenen Seiten des Turmes liegen, haben die Zenitdistanzen  $z_1$  und  $z_2$  gegenläufigen Richtungssinn und es gilt  $d = e_1 + e_2$ . Es kann ebenfalls ein geschlossener Ausdruck für  $H_T$  angegeben werden:

$$H_T = \frac{d + H_1 \tan z_1 + H_2 \tan z_2}{\tan z_1 + \tan z_2}$$

Standardabweichung für  $H_T$  mit vertikalem Hilfsdreieck:

(a) beide Instrumentenstandpunkte auf einer Seite des Turmes

$$\begin{aligned} s_{H_T}^2 &= \left( \frac{1}{\tan z_2 - \tan z_1} \right)^2 s_d^2 \\ &+ \left( \frac{\tan z_2}{\tan z_2 - \tan z_1} \right)^2 s_{H_2}^2 + \left( \frac{\tan z_1}{\tan z_2 - \tan z_1} \right)^2 s_{H_1}^2 \\ &+ \left( \frac{H_1 \tan z_2}{\cos^2 z_1 (\tan z_2 - \tan z_1)^2} \right)^2 s_{z_1}^2 + \left( \frac{H_2 \tan z_1}{\cos^2 z_2 (\tan z_2 - \tan z_1)^2} \right)^2 s_{z_2}^2 \end{aligned}$$

(b) beide Instrumentenstandpunkte auf verschiedenen Seiten des Turmes

$$\begin{aligned} s_{H_T}^2 &= \left( \frac{1}{\tan z_1 + \tan z_2} \right)^2 s_d^2 \\ &+ \left( \frac{\tan z_1}{\tan z_1 + \tan z_2} \right)^2 s_{H_1}^2 + \left( \frac{\tan z_2}{\tan z_1 + \tan z_2} \right)^2 s_{H_2}^2 \\ &+ \left( \frac{H_1 \tan z_2}{\cos^2 z_1 (\tan z_1 + \tan z_2)^2} \right)^2 s_{z_1}^2 + \left( \frac{H_2 \tan z_1}{\cos^2 z_2 (\tan z_1 + \tan z_2)^2} \right)^2 s_{z_2}^2 \end{aligned}$$

**Beispiel:**

gegeben:  $d = 60.234\text{m} \pm 5\text{mm}$   
 $H_1 = 30.115\text{m} \pm 2\text{mm}$   $H_2 = 30.823\text{m} \pm 2\text{mm}$   
 $z_1 = 50.2347\text{gon} \pm 1\text{mgon}$   $z_2 = 78.8146\text{gon} \pm 1\text{mgon}$

gesucht:  $H_T, s_{H_T}$

Ergebnis:  $H_T = 63.141\text{m} \pm 4.9\text{mm}$

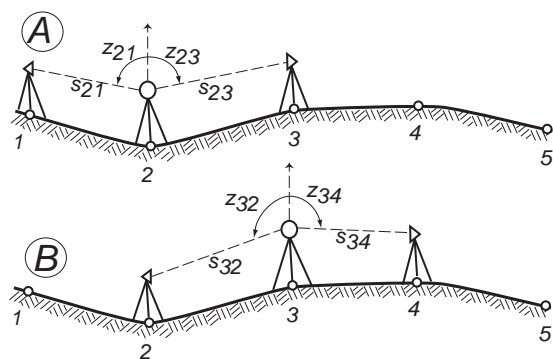
Um mit einem vertikalen Hilfsdreieck die gleiche Genauigkeit zu erreichen, wie mit einem horizontalen HD, müssen die Beobachtungen deutlich genauer ausgeführt werden.

#### Hinweis:

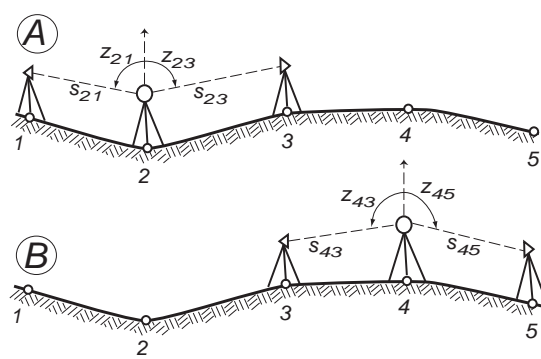
Berechnung der Fehlermaße über Differenzenquotienten anstelle der Ableitung der Differentialquotienten kann effektiver sein, wenn die Funktion mittels Programm berechnet wird.

### 3.4 Trigonometrisches Nivellement

- schrittweises Aneinanderreihen von trigonometrischen Höhenübertragungen (ähnlich geometrischem Nivellement)
- Möglichkeit der Wahl größerer Zielweiten als beim geom. Niv. ( $> 100\text{m}$ )  
 $\Rightarrow$  weniger Instrumentenstandpunkte bei großen Höhenunterschieden
- günstig und effektiv beim Einsatz elektronischer Tachymeter
- Anwendung z.B. bei Trassierung von Verkehrsanlagen, Paßpunktbestimmungen, Polygonzügen



Trigonometrisches Nivellement mit gegenseitiger Zenitwinkelmessung



Trigonometrisches Nivellement mit Sprungständen

- Messung zwischen den Endpunkten einer Strecke zweimal (Hin- und Rückmessung), dadurch Eliminierung von Erdkrümmung und (zum Teil) Refraktion  
*gegenseitige Zenitwinkelmessung!*
- oder Messung in Sprungständen  
*gleiche Zielweiten zwischen den „Vor-“ und „Rückblicken“ auf einem Standpunkt erforderlich!*

#### kurzzeitiges trigonometrisches Nivellement:

- Zielweiten  $< 200\text{m}$
- Visuren meist parallel zur Erdoberfläche
- Refraktionsfeld relativ homogen und bei Hin- und Rückmessung weitgehend konstant (kurzer zeitlicher Abstand!)

⇒ Erdkrümmung und Refraktion beeinflussen Ergebnis kaum, auch bei Messung in Sprungständen

#### langseitiges trigonometrisches Nivellement:

- Zielweiten 200 bis 600 m
  - Abstände der Zielstrahlen zur Erdoberfläche variabel, variable Bodenverhältnisse
  - Refraktionsfeld inhomogen; durch Hin- und Rückmessung für jede Strecke weitgehend eliminerbar
- ⇒ Erdkrümmung und Refraktion beeinflussen Ergebnis wenig; bei Messung in Sprungständen gleiche Zielweiten erforderlich
- Bei sehr langen Zielweiten ( $> 1\text{km}$ ) ist nicht nur gegenseitige sondern auch zeitgleiche Messung notwendig!

Die Berechnung der Höhenunterschiede erfolgt nach der bereits bekannten Formel (einschließlich der Glieder zur Berücksichtigung von Erdkrümmung und Refraktion):

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \cdot \cot z + (1 - k) \frac{s^2}{2R} + h_i - h_z$$

bzw. für steile Zielungen:

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \cdot \cot z + \left(1 - \frac{k}{\sin z}\right) \frac{s^2}{2R} + h_i - h_z$$

mit:  $h_i$  Instrumentenhöhe  
 $h_z$  Zieltafel- bzw. Reflektorhöhe

### 3.5 Trigonometrische Höhenübertragung über große Distanzen

- bei den nachfolgenden Betrachtungen wird die Erde als Kugel angenommen (mittlerer Radius 6371 km)  
in den meisten Fällen ist diese Näherung ausreichend
- für genauere Annäherungen an die tatsächliche Erdfigur können andere (zusätzliche) Annahmen getroffen werden (ellipsoidische Gestalt, Geometrie des Geoides)

⇒ siehe Vorlesung Landesvermessung (7. Semester)

#### 3.5.1 Höhenunterschiede aus einseitig beobachteten Zenitdistanzen

Für genauere Bestimmungen bei großen Höhenunterschieden wird die horizontale Entfernung auf die mittlere Höhe  $H_m$  reduziert.

$$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}$$

es ergibt sich:

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \cot z + \left(1 - \frac{k}{\sin z}\right) \frac{s^2}{2R} + h_i - h_z$$

Wenn  $s$  nicht gemessen sondern aus Koordinaten der Endpunkte eines Höhenunterschiedes gerechnet wird, ist zusätzlich die Projektionsverzerrung des Koordinatensystems zu berücksichtigen.

### 3.5.2 Höhenunterschiede aus gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen

Bei gegenseitig gleichzeitig beobachteten Zenitdistanzen ergibt sich entsprechend:

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \tan\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2}\right) + \frac{h_{i1} + h_{z1} - h_{z2} - h_{i2}}{2}$$

und mit  $h_{i1} = h_{z1}$  und  $h_{i2} = h_{z2}$ :

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \tan\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2}\right) + h_{i1} - h_{z2}$$

### 3.5.3 Fehlerbetrachtung zur Höhenübertragung über große Distanzen

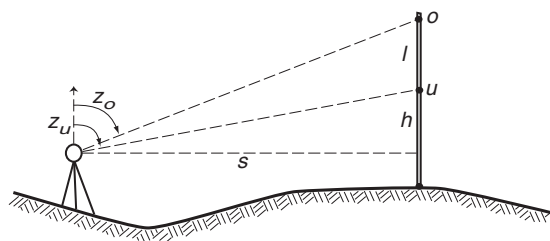
Einseitige Zenitwinkelmessung:

$$s_{\Delta h}^2 = \left( \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cot z - \frac{k \cdot s}{R \sin z} \right)^2 s_s^2 + \left( -\frac{s \left(1 + \frac{H_m}{R}\right)}{\sin^2 z} + \frac{\Delta h \cdot k \cdot s}{\sin z \cdot 2R} \right)^2 s_z^2 + \left( -\frac{s^2}{\sin z \cdot 2R} \right)^2 s_k^2 + s_{h_i}^2 + s_{h_z}^2$$

Gegenseitige Zenitwinkelmessung:

$$s_{\Delta h}^2 = \left( \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \tan\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2}\right) \right)^2 s_s^2 + \left( \frac{\left(1 + \frac{H_m}{R}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2}\right)} \right)^2 s_{z_{21}}^2 + \left( -\frac{\left(1 + \frac{H_m}{R}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2}\right)} \right)^2 s_{z_{12}}^2 + s_{h_i}^2 + s_{h_z}^2$$

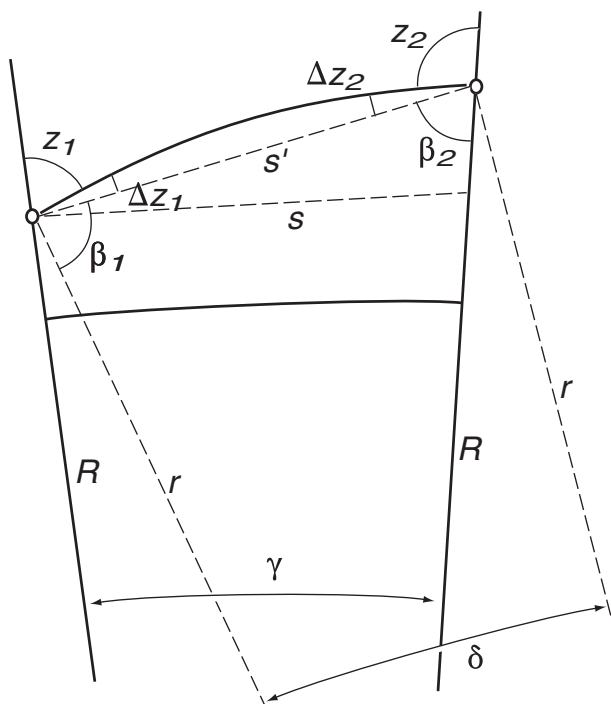
- die Fehler der mittleren Höhe und des Erdradius können i.d.R. vernachlässigt werden
- bei Zenitdistanzen  $\approx 100^\circ$  geht der Einfluß des Streckenfehlers stark zurück (bei  $z \approx 97^\circ$  geht  $s_s$  nur noch mit ca. 5% in das Ergebnis für  $\Delta h$  ein)
- Strecken können aus Koordinaten gerechnet werden (wenn Messung schwierig)
- die Strecken können auch aus Zenitdistanzmessungen zu einem vertikalen Maßstab abgeleitet werden:



$$\begin{aligned} l + h &= s \cdot \cot z_o & h &= s \cdot \cot z_u \\ \Rightarrow s &= \frac{l}{\cot z_o - \cot z_u} = \frac{o - u}{\cot z_o - \cot z_u} \end{aligned}$$

Streckenmessung aus Ablesungen an vertikaler Latte

### 3.6 Bestimmung der Refraktion



aus gegenseitigen Zenitwinkelmessungen kann auch der Refraktionskoeffizient bestimmt werden:

$$z_1 + \Delta z_1 + \beta_1 = 200\text{gon}$$

$$z_2 + \Delta z_2 + \beta_2 = 200\text{gon}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \gamma = 200\text{gon}$$

$$z_1 + \Delta z_1 + z_2 + \Delta z_2 = 200\text{gon} + \gamma$$

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \Delta z = \frac{1}{2}\delta$$

$$\gamma = \frac{s}{R} \quad \delta = \frac{s'}{r} \quad \Delta z = \frac{s'}{2r}$$

$$k = \frac{R}{r} \quad r = \frac{R}{k}$$

$$\Delta z = \frac{s'}{2R}k \approx \frac{s}{2R}k$$

$$z_1 + z_2 + 2\Delta z = 200\text{gon} + \gamma$$

$$z_1 + z_2 + \frac{s}{R}k = 200\text{gon} + \frac{s}{R}$$

$$z_1 + z_2 - 200\text{gon} = \frac{s}{R}(1 - k)$$

$$k = 1 - (z_1 + z_2 - 200\text{gon})\frac{R}{s}$$

Nach dem Varianzfortpflanzungsgesetz erhält man für die Standardabweichung  $s_k$ :

$$s_k^2 = \left(\frac{R}{s}\right)^2 s_{z_1}^2 + \left(\frac{R}{s}\right)^2 s_{z_2}^2 + \left((z_1 + z_2 - 200\text{gon})\frac{R}{s^2}\right)^2 s_s^2$$

#### Beispiel:

gegeben:  $s = 1578.12\text{m} \pm 20\text{mm}$   
 $z_1 = 98.8638\text{gon} \pm 2\text{mgon}$   
 $H_1 = 35.623\text{m} \pm 2\text{mm}$

$z_2 = 101.1510\text{gon} \pm 2\text{mgon}$

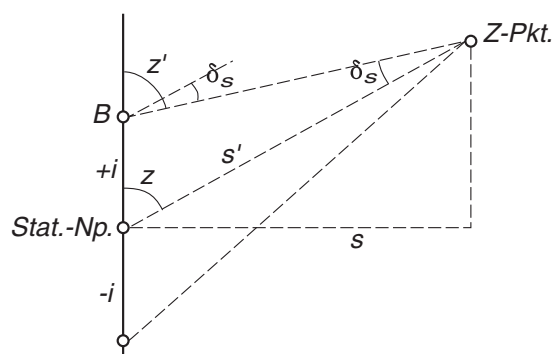
gesucht:  $H_2 \approx 64\text{m}$ ,  $s_{H_2}$ ,  $k$ ,  $s_k$

Ergebnis:  $\Delta h = 28.352\text{m} \pm 35.0\text{mm}$   
 $H_2 = 63.975\text{m} \pm 35.1\text{mm}$   
 $k = 0.062 \pm 0.179$



### 3.7 Exzentrische Zenitdistanzmessung

- bei Zenitdistanzmessungen von oder zu Hochpunkten (Türmen) kann häufig nicht der gleiche Standpunkt bzw. Zielpunkt verwendet werden
- es erfolgt daher eine Reduktion der Zenitdistanzen auf einen einheitlichen Stationsnullpunkt



Zentrierung am Standpunkt

$$z = z' - \delta_S$$

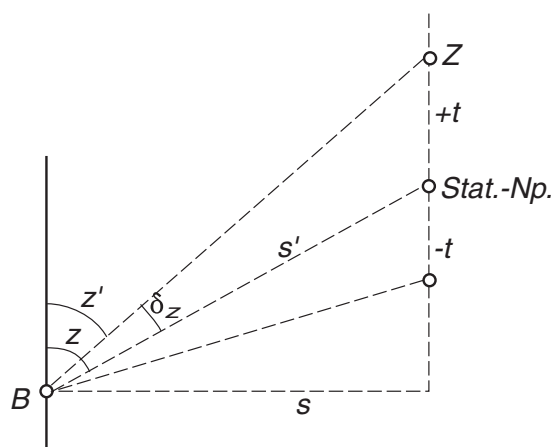
$$\frac{\sin \delta_S}{i} = \frac{\sin z'}{s'}$$

$$\sin \delta_S = \frac{i}{s'} \sin z'$$

mit  $s' = s / \sin z$  folgt:

$$\sin \delta_S = \frac{i}{s} \sin z' \sin z$$

$$\Rightarrow \delta_S \approx \frac{i}{s} \sin^2 z$$



Zentrierung am Zielpunkt

$$z = z' + \delta_Z$$

$$\frac{\sin \delta_Z}{t} = \frac{\sin z'}{s'}$$

$$\sin \delta_Z = \frac{t}{s'} \sin z'$$

mit  $s' = s / \sin z$  folgt:

$$\sin \delta_Z = \frac{t}{s} \sin z' \sin z$$

$$\Rightarrow \delta_Z \approx \frac{t}{s} \sin^2 z$$

Im Flachland wird  $\sin^2 z \approx 1$  und damit können die Reduktionsgrößen näherungsweise folgendermaßen berechnet werden:

$$\delta_S \approx \frac{i}{s} \quad \delta_Z \approx \frac{t}{s}$$

## 4 GRUNDLAGEN DER GEODÄSIE

### 4.1 Vorbemerkungen

- Informationen in geodätischen, kartographischen oder GIS-Produkten liegen normalerweise georeferenziert vor.
- Georeferenzierung bedeutet, daß einzelnen Punkten Koordinaten zugewiesen sind bzw. zugewiesen werden können.
- Das Referenz- bzw. Bezugssystem kann sich dabei für einzelne Produkte erheblich unterscheiden:
  - globale Bezugssysteme, die mit Satellitenverfahren (z.B. GPS) realisiert werden können WGS 84, GRS 80, ITRF, ...
  - regionale Referenzsysteme für einzelne Länder (oder Erdteile) DHDN (Deutsches Hauptdreiecksnetz), System 42/83 (früher Osteuropa), ...
  - lokale (ebene) Systeme z.B. für Ingenieurvermessungen
- Es können verschiedenste Koordinatensysteme (Abbildungsvorschriften) verwendet werden
- Zu jeder Koordinatenangabe ist daher auch die Kenntnis von **Referenzsystem und Koordinatensystem** notwendig!
- Auf amtlichen Karten der deutschen Landesvermessung sind z.B. derartige Angaben in der Legende enthalten.

Der nachfolgende Stoff soll helfen, den richtigen Umgang mit Koordinaten und Referenzsystemen ermöglichen.

Es werden Grundlagen zu verschiedenen Abbildungen des Ellipsoids in die Ebene (Gauß-Krüger-Koordinaten, UTM) und zu Umformungen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen sowie Transformationen zwischen Bezugssystemen dargestellt.

### 4.2 Begriffsbestimmungen

- **Bezugssystem / Referenzsystem**  
*Physikalisch definiertes grundlegendes Bestimmungssystem. Zur Erfassung, Speicherung, Darstellung und Nutzung von topographischen Sachverhalten in Verbindung mit thematischen Informationen auf, unter oder über der Erdoberfläche wird es als Ordnungssystem benötigt. Es gestattet die gegenseitige räumliche Zuordnung von Informationen zueinander.*

$$(a, b, \alpha, \text{Maßstab}, GM, \omega, \dots)$$

z.B. GRS 80

Die praktische Realisierung erfolgt durch die Festlegung der Koordinaten von (vermarkten) Punkten.

(engl.: *reference system* [Definition])

bzw. *referenz frame* [Realisierung])

- **Koordinatensystem**

*Mathematische Abbildungsvorschrift zur Beschreibung der Lage von Punkten im Raum.* Jedes Bezugssystem kann in unendlich viele krummlinige Koordinatensysteme abgebildet werden.

Innerhalb eines Bezugssystems kann zwischen verschiedenen Koordinatensystemen beliebig umgerechnet werden

( $\Rightarrow$  Koordinatenumformung)

Punkte eines Festpunktfeldes, die ein bestimmtes Referenzsystem realisieren, werden in ein Koordinatensystem abgebildet.

- **Geodätisches Datum**

*Positionierung und Orientierung eines geodätischen Festpunktfeldes (und damit der Realisierung eines Bezugssystems) im Raum.*

Es sind sieben Parameter erforderlich:

$$X_0, \alpha, \beta, \gamma, \text{Maßstab}$$

Beispiele für Datumsbezeichnungen: Datum Rauenberg (Bessel)  
(= Potsdam Datum)  
Datum Pulkowo (Krassowski)

- **Koordinatentransformation**

*Umrechnung von Punktkoordinaten von einem Bezugssystem in ein anderes.*

- **Koordinatenumformung**

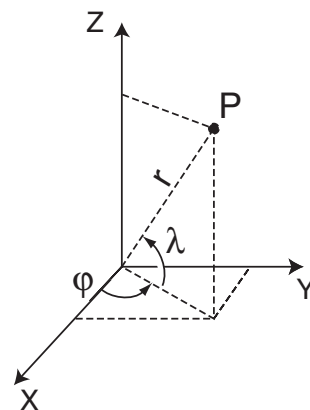
*Umrechnung von Punktkoordinaten von einem Koordinatensystem in ein anderes innerhalb eines Bezugssystems mittels a-priori per Definition bekannter Beziehungen und Formeln.*

## 4.3 Grundlegende geodätische Koordinatensysteme

### 4.3.1 Kartesisches 3D-System

Kartesische Koordinaten eines Punktes  $P$ :

$$P(x, y, z)$$



**Abb.:** Kartesische und polare Koordinaten.

### 4.3.2 Polares 3D-System

Kugelkoordinaten eines Punktes  $P$ :

$$P(\varphi, \lambda, r)$$

### 4.3.3 Ellipsoidisches Koordinatensystem

Ellipsoidische (oder geodätische) Koordinaten eines Punktes  $P$ :

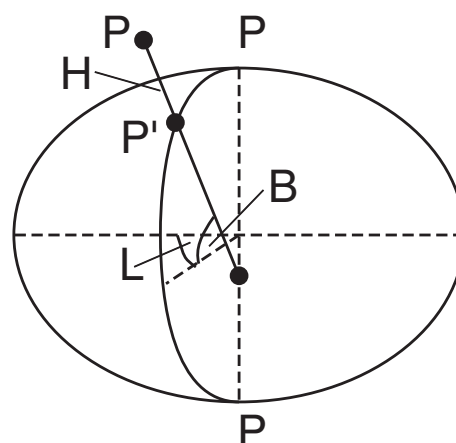
$$P(B, L, H)$$

Die ellipsoidische Breite  $B$  ist der Winkel zwischen Ellipsoidnormale in  $P$  und Äquatorebene. Die ellipsoidische Länge  $L$  ist der Winkel zwischen Nullmeridian und Meridian von  $P$ .

Die ellipsoidische Höhe ist der metrische Abstand des Punktes  $P$  von der Ellipsoidoberfläche ( $P'$ ) entlang der Ellipsoidnormalen.

Die Ellipsoidnormale in  $P$  enthält i.a. **nicht** den Ellipsoidmittelpunkt! (Ausnahmen: Pole und Äquator)

Ellipsoidnormalen sind i.a. windschief zueinander.



**Abb.:** Ellipsoidische Koordinaten.

#### 4.3.4 Verschiedene Breiten und Längen

ellipsoidische Koordinaten	$B, L, H$	sind i.a. nicht direkt meßbar (Ausnahme: GPS)
astronomische Koordinaten	$\Phi, \Lambda$	astronomisch bestimmbar ( $B \neq \Phi, L \neq \Lambda$ )
Kugelkoordinaten	$\varphi, \lambda$	

#### 4.3.5 Beispiele für Koordinatenumformungen

- Umformung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten

$$P(x, y, z) \iff P(\phi, \lambda, r)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)^{(1/2)} \\ \tan \varphi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \tan \lambda &= y/x \end{aligned}$$

- Umformung zwischen kartesischen und ellipsoidischen Koordinaten

$$P(x, y, z) \iff P(B, L, H)$$

- Umformung zwischen ellipsoidischen und Gauß-Krüger-Koordinaten

$$P(B, L, H) \iff P(H_o, R_e, H)$$

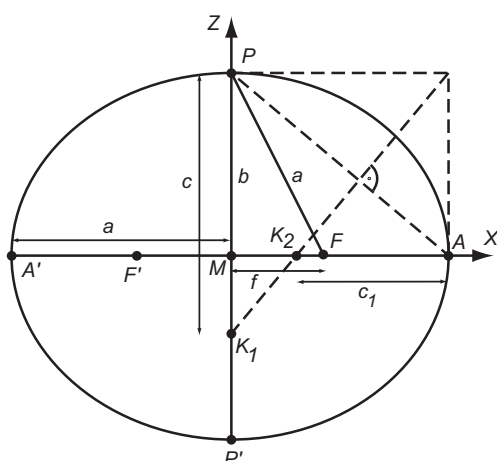
#### 4.4 Anwendung verschiedener Koordinatensysteme

einfache ebene Systeme (2D):	lokale Vermessungen z.B. im Ingenieurbereich (bis max. 10 km Ausdehnung)
3D-kartesisches System:	globale Aufgabenstellungen (GPS)
ellipsoidische Koordinaten:	Landesvermessung, globale Aufgabenstellungen (GPS)
verebnete ellipsoidische Koordinaten:	Landesvermessung; amtliche Systeme in Deutschland (Gauß-Krüger-Koordinaten, UTM-Koordinaten, Soldner-Koordinaten, ...)

## 4.5 Grundbeziehungen für das Rotationsellipsoid

Es werden in diesem Abschnitt keine vollständigen Ableitungen geliefert. Z.T. erfolgen nur Mitteilung und Definition von Zusammenhängen und Beziehungen. Ausführlichere Herleitungen erfolgen im Rahmen der Vorlesung Landesvermessung.

### 4.5.1 Geometrie



**Abb.:** Geometrische Grundbeziehungen der Ellipse.

	Beziehung für die Ellipse (bzw. das Ellipsoid)	Beziehung für den Kreis (bzw. die Kugel)
Hauptgrößen (Halbachsen)	$a$ und $b$	$r$
Gleichung (Ellipse)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	$x^2 + z^2 = r^2$
Gleichung (Ellipsoid)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
wenn $a \sim b \rightarrow$ Formparameter	$\alpha = \frac{a-b}{a}$	
lineare Exzentrizität	$f = \sqrt{a^2 - b^2}$	
1. numerische Exzentrizität	$e = f/a \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	
2. numerische Exzentrizität	$e' = f/b \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$	
Polkrümmungsradius	$c = \overline{PK_1} = a^2/b$	
Äquatorkrümmungsradius	$c_1 = \overline{AK_2} = b^2/a$	

### 4.5.2 Hilfsgrößen und Funktionen

Die nachfolgenden Hilfsgrößen ( $W, V, \eta, t, m, n$ ) und Funktionen sind für die spätere Vereinfachung (bzw. Verkürzung) von Ableitungen und Reihenentwicklungen sinnvoll bzw.

gebräuchlich und werden hier ohne Herleitung angegeben.

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B \quad aW = bV$$

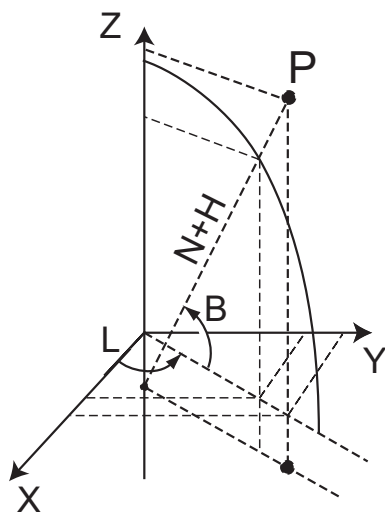
Eine geometrische Veranschaulichung von  $W$  und  $V$  ist möglich, an dieser Stelle wird aber darauf verzichtet ( $\Rightarrow$  Literatur).

$$\eta = e' \cos B \quad t = \tan B \quad m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad n = \frac{a - b}{a + b}$$

### 4.5.3 Koordinatenrechnung für einen Punkt $P$

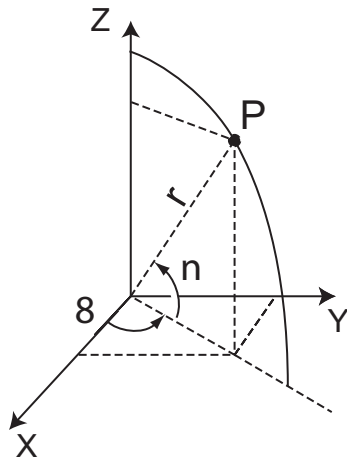
Umformung zwischen kartesischen und ellipsoidischen Koordinaten

$$P(x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad P(B, L, H)$$



Ellipsoid:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{aligned}$$



Kugel zum Vergleich:

$$X = r \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = r \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = r \sin \varphi$$

### Krümmungsradien

Querkrümmungsradius  $N \Rightarrow$  Querkrümmung

(Meridiankrümmungsradius  $M \Rightarrow$  Meridiankrümmung)

Berechnung von  $M$  und  $N$ :

$$M = \frac{c}{V^3} = \frac{a}{W^3}(1 - e^2) \quad N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \quad \frac{N}{M} = V^2$$

Inverse Lösung, Umrechnung von kartesischen in ellipsoidische Koordinaten:

Berechnung der ellipsoidischen Länge nach:

$$L = \arctan \frac{Y}{X}$$

Herleitung für die Breite:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (N + H)^2 \cos^2 B & \text{da} & \quad \cos^2 L + \sin^2 L = 1 \\ \sqrt{X^2 + Y^2} &= (N + H) \cos B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B \\ &= (N + H) \sin B - Ne^2 \sin B \\ &= (N + H) \cos B \tan B - Ne^2 \sin B \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \tan B - Ne^2 \sin B$$

$$B = \arctan \left( \frac{Z + Ne^2 \sin B}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)$$



Das Ergebnis ist eine nichtlineare ellipsoidische Gleichung für  $B$ . Eine Lösung ist durch Iteration möglich, wobei als Startwert die sphärische Näherung  $B_0$  ausreicht:

$$B_{i+1} = \arctan \frac{Z + e^2 N_i \sin B_i}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_0 = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Die ellipsoidische Höhe ergibt (nach Berechnung von  $B$ ) sich aus:

$$H = \frac{X}{\cos B \cos L} - N \quad \text{oder} \quad H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos B} - N$$

## 4.6 Bezugssysteme

(Ein Bezugssystem ist ein *physikalisch definiertes grundlegendes Bestimmungssystem*. Es gestattet die gegenseitige räumliche Zuordnung von Informationen zueinander.)

Welches Bezugssystem ist für Vermessungen der Erde (Erdmessung) sinnvoll?

- für kleine Ausschnitte der Erdoberfläche  $\implies$  Ebene
- für Gebiete bis zu maximal 100 km Durchmesser  $\implies$  Kugel (wäre möglich !)
- **für ganze Erde oder Landesterritorien**  $\implies$  sich möglichst gut anpassende mathematisch „einfache“ Figur nötig

Eine solcher mathematisch einfacher Körper, der sich der Erde bzw. größeren Teilen der Erdoberfläche optimal (nach bestimmten Kriterien) anpaßt, ist ein **Rotationsellipsoid**.

Es entsteht durch Rotation einer Ellipse (Meridianellipse) um die Achse, die Nord- und Südpol verbindet.

Es könne Ellipsoide für die gesamte Erdoberfläche oder nur für Teile von ihr optimal angepaßt werden.

Anpassung an den gesamten Erdkörper  $\implies$  mittleres Erdellipsoid

Anpassung nur an ein Landesterritorium oder einen größeren Teil der Erdoberfläche  $\implies$  Referenzellipsoid

Das mittlere Erdellipsoid ist heute in seiner Geometrie und in seiner Lagerung relativ zum Erdkörper sehr gut bekannt (GRS80, ITRF??).

Es gibt eine riesige Zahl von Realisierungen für Referenzellipsoide und deren Lagerung zur optimalen Anpassung an ein Landesterritorium. Sie unterscheiden sich durch ihr geodätisches Datum.

**Geodätisches Datum:** *Positionierung und Orientierung eines Referenzellipsoides im Raum.*

### Parameter einiger Rotationsellipsoide

Ellipsoid	große Halbachse	kleine Halbachse	Abplattung
<b>GRS-80</b>	$a = 6378137.0$	$b = 6356752.31414$	$1/\alpha = 298.257222101$
WGS-60	$a = 6378165.0$	$b = 6356783.28696$	$1/\alpha = 298.3$
WGS-66	$a = 6378145.0$	$b = 6356759.76949$	$1/\alpha = 298.25$
WGS-72	$a = 6378135.0$	$b = 6356750.52002$	$1/\alpha = 298.26$
<b>WGS-84</b>	$a = 6378137.0$	$b = 6356752.31424$	$1/\alpha = 298.257223563$
Bessel	$a = 6377397.155$	$b = 6356078.96282$	$1/\alpha = 299.15281285$
Krassowski	$a = 6378245.0$	$b = 6356863.01877$	$1/\alpha = 298.3$
ED-50	$a = 6378388.0$	$b = 6356911.94613$	$1/\alpha = 297.0$
International	$a = 6378388.0$	$b = 6356911.94613$	$1/\alpha = 297.0$
NAD-83	$a = 6378137.0$	$b = 6356752.31414$	$1/\alpha = 298.257222101$
NAD-27	$a = 6378206.4$	$b = 6356583.8$	$1/\alpha = 294.9786982$
SAD69	$a = 6378160.0$	$b = 6356774.71920$	$1/\alpha = 298.25$

Parameter von Ellipsoiden und Informationen zum geodätischen Datum einzelner Bezugssysteme bzw. zu Datumsdifferenzen sind z.B. im Internet verfügbar.

#### WWW-Adressen (Stand April 2009):

[http://de.wikipedia.org/wiki/Geodätisches\\_Datum](http://de.wikipedia.org/wiki/Geodätisches_Datum)

<http://www.mapref.org/>

<http://www.pdana.com>

<http://www.Colorado.EDU/geography/gcraft/notes/coordsys/coordsys.html>

<http://www.Colorado.EDU/geography/gcraft/notes/datum/datum.html>

<http://www.kowoma.de/gps/geo/mapdatum/mapdatums.php>

<http://earth-info.nima.mil/GandG/geotrans/>

Übergänge zwischen verschiedenen Referenz-(Bezugs-)systemen können **nur(!)** durch Koordinatentransformation realisiert werden.

Transformationsparameter (Datumsdifferenzen) müssen bekannt sein oder aus identischen Punkten berechnet werden.

## 4.7 Verebnete Koordinaten

Für die praktische Verwendung als (amtliches) Gebrauchssystem sind ellipsoidische Koordinaten nicht geeignet.

Es erfolgt daher eine geeignete *VEREBNUNG* der ellipsoidischen Koordinaten ( $\rightarrow$  Koordinatenumformung).

Problem: Es treten bei einer Verebnung zwangsläufig Verzerrungen auf!

## 4.7.1 Gauß-Krüger Koordinaten

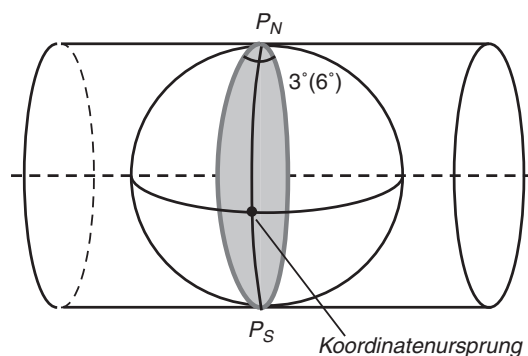


Abb.: Prinzip der GK-Abbildung

- querachsiger elliptischer Zylinder (Meridinaellipse)
- Mittelmeridian (Berührungsmeridian) wird längentreu abgebildet  
→ X-Achse
- GK-Abbildung ist winkeltreu (konform)

Als Koordinaten werden Hochwert und Rechtswert bezüglich des Ursprungs eingeführt.

Zum Rechtswert werden 500 km addiert, um negative Koordinaten zu vermeiden. Bei Punkten auf der Südhalbkugel werden aus gleichem Grund zusätzlich 10000 oder 20000 km zum Hochwert addiert.

Die Gesamtfläche des Ellipsoides wird in mehrere 3° oder 6° breite Streifen abgebildet, die mittels einer Streifenkennzahl unterschieden werden, die dem Rechtswert vorangestellt wird.

Mittelmeridian	$L_0 = 0^\circ$	$3^\circ$	$6^\circ$	$9^\circ$	$12^\circ$	$15^\circ$
Streifenkennziffer $z$	0	1	2	3	4	5
	$z = 1/3 L_0$					

Bildung der Streifenkennziffern für das 3°-System

Mittelmeridian	$L_0 = 3^\circ$	$9^\circ$	$15^\circ$	$21^\circ$	$27^\circ$	$33^\circ$
Streifenkennziffer $z$	0	1	2	3	4	5
	$z = 1/6 (L_0 + 3^\circ)$					

Bildung der Streifenkennziffern für das 6°-System

<u>Geschichtliches:</u>	1816–1820	Gauß,	theoretische Arbeiten
	1866	Schreiber	Weiterentwicklung für Belange der Praxis
	1912	Krüger	Weiterentwicklung für Belange der Praxis

In der deutschen Landesvermessung sind/waren Gauß-Krüger-Koordinaten als amtliche Koordinaten in Gebrauch.

Sie sollen in der Zukunft durch UTM-Koordinaten abgelöst werden.

Gauß-Krüger-Koordinaten sind aus ellipsoidischen Koordinaten **streng** berechenbar! Systemübergänge zwischen verschiedenen Ellipsoiden nicht.

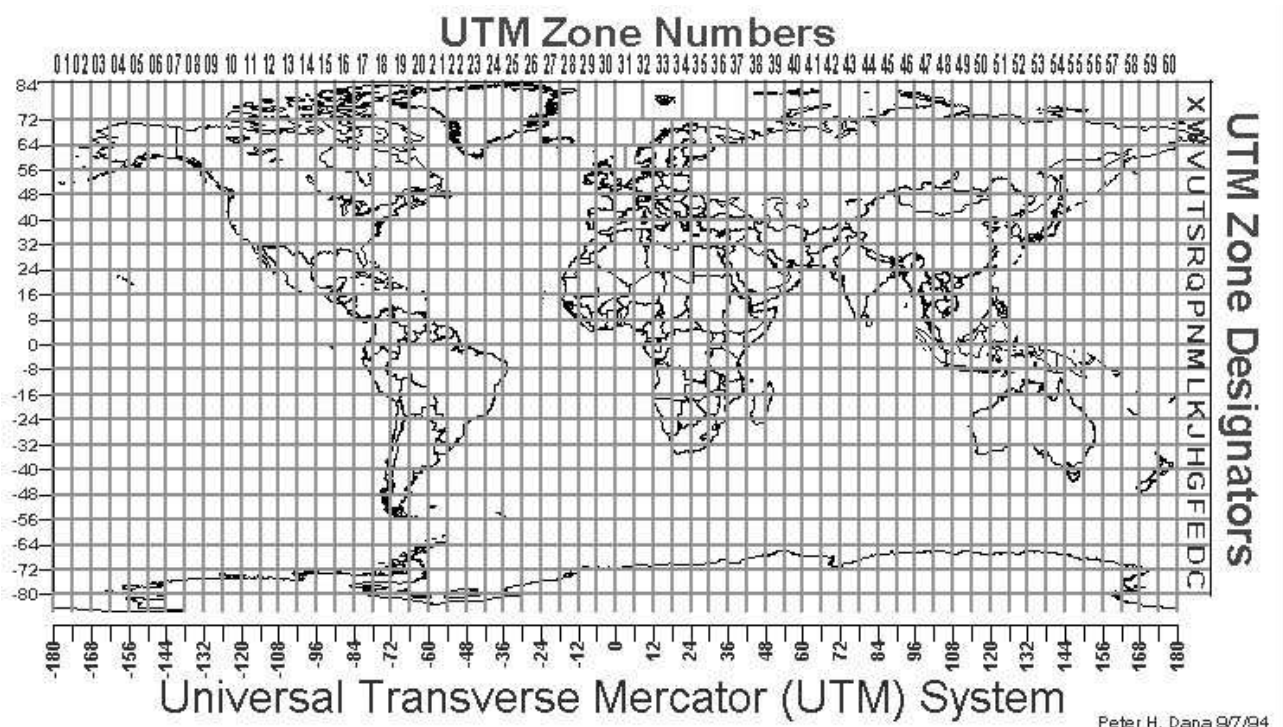
Mitteilung der Umformungsgleichungen (Reihenentwicklungen) in der Vorlesung Landesvermessung (7. Semester) oder in der Literatur.

Geodätische Software enthält meist die wichtigsten Umformungen.  
(in englischsprachiger Literatur: GKK  $\equiv$  Transverse Mercator Projection)

#### 4.7.2 UTM-Koordinaten

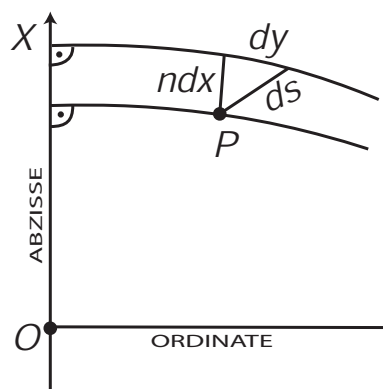
(engl.: **U**niversal **T**ransverse **M**ercator Coordinates)

- entspricht in den mathematischen Abbildungsgleichungen einer  $6^\circ$ -Gauß-Krüger-Abbildung
- Unterschied: Maßstabsfaktor  $m = 0.9996$  (-40 cm pro Kilometer!)
- Der Maßstabsfaktor wird angebracht, um die zum Rand eines Meridianstreifens hin steigenden Verzerrungen im gesamten Streifen gleichmäßig zu verteilen.
- bei UTM-Koordinaten erfolgt keine Unterteilung in Meridianstreifen, sondern eine Angabe von „Zonen“ (siehe Abbildung)



#### 4.7.3 Soldner-Koordinaten

Rechtwinklige ellipsoidische Oberflächenkoordinaten:  
Soldnersche Koordinaten (Johann Georg von Soldner, 1776–1833)



**Abb.:** Rechtwinklige ellipsoidische Koordinaten

Koordinatenursprung:

$O \rightarrow$  TP 1. Ordnung

X-Achse: Meridian durch  $O$

Ordinatentreue Abbildung

Koordinatenlinien:

Normalen zum Grundmeridian ( $\rightarrow$  geodätische Linien)

geodätische Parallelen (keine geodätischen Linien)

$\Rightarrow$  ordinatentreue Abbildung

$$ds^2 = n^2 dx^2 + dy^2$$

$n$  – Verjüngungsfaktor der geodätischen Parallelen

$$n \sim 1 - \frac{y^2}{2N_0^2}$$

Bei  $y = 50\text{km}$  wird  $n = 1 - 0,00003$ , d.h. bei  $\Delta x = 1\text{km}$   $\rightarrow$  3cm Verzerrung.

Verwendung: ältere Katastersysteme  
Koordinatensystem in Berlin  
amtliches Landessystem in Baden-Württemberg vor 1990

Formeln zur Berechnung von  $x, y$  aus  $B, L$  z.B. in:

*W. Großmann: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung.*

## 4.8 Lagefestpunktfelder im Berliner Raum

### 4.8.1 Koordinaten- und Bezugssysteme

- die Unterscheidung der verschiedenen Koordinaten- und Bezugssysteme erfolgt durch den „Lagestatus“
- für Lagekoordinaten sind folgende Systeme mit den zugehörigen Lagestatusangaben in Berlin und in den meisten anderen Bundesländern in gleicher Art und Weise definiert (bis auf einige wenige Berliner Besonderheiten)

Lagestatus	Koordinatensystem
0	vorläufige Gauß-Krüger-Koordinaten; erneuertes Lagefestpunktfeld (Bessel-Ellipsoid, Zentralpunkt Rauenberg)
50	vorläufige Soldner-Koordinaten; erneuertes Festpunktfeld (Bessel-Ellipsoid, Zentralpunkt Rauenberg)
100	Gauß-Krüger-Koordinaten; erneuertes Lagefestpunktfeld (Bessel-Ellipsoid, Zentralpunkt Rauenberg)
130	Gauß-Krüger-Koordinaten im System 40/83; 3°-Streifen (Bessel-Ellipsoid, Zentralpunkt Rauenberg)
140	Gauß-Krüger-Koordinaten im System 42/83; 6°-Streifen (Krassowski-Ellipsoid, Zentralpunkt Pulkowo)
150	Gauß-Krüger-Koordinaten im System 42/83; 3°-Streifen (Krassowski-Ellipsoid, Zentralpunkt Pulkowo)
200	Gauß-Krüger-Koordinaten; altes Lagefestpunktfeld (Bessel-Ellipsoid, Zentralpunkt Rauenberg)
384	dreidimensionale Koordinaten (hier X,Y) im WGS84
389	dreidimensionale Koordinaten (hier X,Y) im ETRS89
400	UTM-Koordinaten (Hayford-Ellipsoid)
489	UTM-Koordinaten (GRS80-Ellipsoid)
500	Soldner-Koordinaten; erneuertes Lagefestpunktfeld (bezogen auf einen fiktiven Koordinatennullpunkt 40000 m westlich und 10000 m südlich vom Koordinatenanfangspunkt Müggelberg)
600	Soldner-Koordinaten; altes Lagefestpunktfeld (bezogen auf Müggelberg)
610	konforme Koordinaten im System S 18/1
620	konforme Koordinaten im System S 18/2
630	konforme Koordinaten im System S 18/3
640	konforme Koordinaten im bezogen auf Müggelberg (Reinickendorf/Pankow)
650	Soldner-Koordinaten im bezogen auf Götzer Berg
660	konforme Koordinaten im bezogen auf Rathausturm
700	örtliches System
850	geographische Koordinaten auf dem Bessel-Ellipsoid
834	geographische Koordinaten auf dem GRS80-Ellipsoid
900	historische Gauß-Krüger-Koordinaten
950	historische Soldner-Koordinaten

Weitere Angaben zu den Koordinatensystemen:

Lage-status	Ellipsoid	Koordinaten-art	Abbildung	weitere Berechnungen
100	Bessel	eben	konformes 3°-System	Verschiebung im Rechtswert
130	Bessel	eben	konformes 3°-System	Verschiebung im Rechtswert
140	Krassowski	eben	konformes 6°-System	Verschiebung im Rechtswert
150	Krassowski	eben	konformes 3°-System	Verschiebung im Rechtswert
200	Bessel	eben	konformes 3°-System	Verschiebung im Rechtswert
384		geozentrisch	-	
389		geozentrisch	-	
400	Hayford	eben	konformes 6°-System	Verschiebung im Rechtswert
489	GRS80	eben	konformes 6°-System	Verschiebung im Rechtswert
500	Bessel	eben	ordinatentreues Soldner-System	Nullpunktverschiebung, dekadische Ergänzung
600	Bessel	eben	ordinatentreues Soldner-System	Nullpunktverschiebung, dekadische Ergänzung
610	Krassowski	eben	konformes System	Nullpunktverschiebung, Verdrehung und Maßstab
620	Krassowski	eben	konformes System	Nullpunktverschiebung, Verdrehung und Maßstab
630	Krassowski	eben	konformes System	Nullpunktverschiebung, Verdrehung und Maßstab
640	Bessel	eben	konformes System	dekadische Ergänzung
640	Bessel	eben	ordinatentreues System	dekadische Ergänzung
640	Bessel	eben	konformes System	dekadische Ergänzung
700				
850	Bessel	geographisch		
834	GRS80	geographisch		

Bemerkung:

Ausführliche Angaben zu den Höhensystemen finden sich in der Vorlesung „Vermessungskunde für das 2. Semester“

Die *wichtigsten* Höhenstatusangaben für Berlin & Brandenburg sind nachfolgend angegeben:

Höhen-status	Höhensystem
0	vorläufige Höhe im erneuerten Höhenfestpunktfeld (normalorthometrische Höhe bezogen auf NN)
16	vorläufige Normalhöhe im System DHHN 92
<b>100</b>	<b>Höhe im System DHHN 92</b>
140	Normalorthometrische Höhe im System des DHHN 85
150	Normalhöhe im System des SNN 76
160	Normalhöhe im System des DHHN 92
384	dreidimensionale Koordinaten (hier Z) im WGS84
389	dreidimensionale Koordinaten (hier Z) im ETRS89
(500)	ellipsoidische Höhe auf dem Bessel-Ellipsoid
(589)	ellipsoidische Höhe auf dem GRS80-Ellipsoid
800	örtliches System

### 4.8.2 Lagefestpunktfelder

- amtliche Festpunktfelder werden von den Vermessungsverwaltungen angelegt und laufend gehalten (heute teilweise auf dem Wege der Vergabe von Leistungen)
- das amtliche Lagefestpunktfeld ist hierarchisch gegliedert (Netz I. Ordnung → ... → Aufnahmenetz)
- das Aufnahmenetz stellt die Anschlußpunkte für Lagemessungen zur Verfügung  
**Bisher/früher:**
  - in den alten Bundesländern Gauß-Krüger-Koordinaten bezogen auf das Bessel-Ellipsoid (Lagestatus 100)
  - in den neuen Bundesländern weitgehend Gauß-Krüger-Koordinaten bezogen auf das Krassowski-Ellipsoid (Lagestatus 150)  
Ausnahmen: Thüringen und Sachsen
  - in Berlin Soldner-Koordinaten (Lagestatus 500 und 600)  
Ausnahme Lagestatus 610, 620, 630 im alten Lagefestpunktfeld
- **Zukünftig:** nach Beschluß der Arbeitsgemeinschaften der Vermessungsverwaltungen (AdV) einheitlich für Gesamtdeutschland **UTM-Koordinaten** bezogen auf das GRS80-Ellipsoid (Lagestatus 489)  
Grundlage dieses neuen Systems sind hierarchische GPS-Netze (EUREF, DREF, C-Netze)

### Gliederung des Deutschen Hauptdreiecksnetzes (DHDN):

Ordnung	Punktabstände	Vermarkung
1.	durchschnittlich 30 bis 50 km	Pfeiler
2.	durchschnittlich 10 bis 20 km	Pfeiler
3.	durchschnittlich 3 bis 10 km	unterschiedlich
4.	durchschnittlich 1 bis 3 km	unterschiedlich (in Brandenburg: Pfeiler)

### Vermarkung trigonometrischer Punkte:

- trigonometrische Punkte des DHDN sind aufwendig durch oberirdische Pfeiler und unterirdische Vermarkungen (Platten) vermarkt
- zusätzlich sind unterirdische Sicherungsvermarkungen eingebracht

Die Punktnummerierung erfolgt in Nummerierungsbezirken nach den topographischen Karten.

### Das Berliner Lagefestpunktfeld:

- Gliederung in Übergeordnetes Lagefestpunktfeld und Aufnahmefestpunktfeld
- Vermarkung der Örtlichkeit angepaßt und durch Maße in der Örtlichkeit gesichert
- Nachweis in den Vermessungsvordrucken 39 (VV 39) oder 49 (VV 49), Netzübersichten



- Zuständigkeit liegt bei den bezirklichen Vermessungsämtern
- Genauigkeit: mindestens  $\pm 15$  mm in der Standardabweichung des Punktes (mittlerer Punktfehler) für Lagestatus 500  
(in weiten Teilen der Stadt liegt jedoch nur das alte Lagefestpunktfeld (Lagestatus 600, 610, 620, 630) mit deutlich geringerer Genauigkeit vor)
- Punktnumerierungen (unterhalb der trigonometrischen Punkte) wie bei Katasterpunkten  
⇒ Benutzung des Blattschnittes 1:1000
- Punktarten:
  - Punktart 0 → trigonometrischer Punkt
  - Punktart 1 → Aufnahmefestpunkt
  - Punktart 6 → übergeordneter Lagefestpunkt (Besonderheit in Berlin)

**Aktuell:** Ablösung des amtlichen Lagefestpunktfeldes durch GPS-Referenzstationen.  
seit 1.1.06 Die Stationen realisieren das Referenznetz in den Datumsfestlegungen.  
Koordinatenbestimmungen können an beliebigen Orten mit relativen GPS-Messungen erfolgen. Dazu werden auf den GPS-Referenzstationen permanent GPS-Messungen ausgeführt und den Nutzern (in Echtzeit oder nachträglich) zur Verfügung gestellt.  
<http://www.stadtentwicklung.berlin.de/geoinformation/sapos/>  
Der SAPOS-Dienst der Landesvermessungsverwaltungen steht in den meisten Ländern zur Verfügung; alternativ gibt es den ascos-Dienst der Ruhrgas-AG

⇒ Siehe Abschnitt „EINFÜHRUNG SATELLITENGEODÄSIE“

## 4.9 Datumstransformationen

### 4.9.1 Vorbemerkungen

- Koordinatenumformungen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen können mathematisch streng berechnet werden. Dabei erfolgt **kein** Übergang auf ein anderes Referenzsystem!
- Soll das Referenzsystem gewechselt werden, **muß** eine Datumstransformation erfolgen.
- Koordinaten aus verschiedenen Referenz-(Bezugs-)systemen dürfen **nie** gemeinsam verwendet werden.

**Koordinatensysteme:**

- kartesische Koordinaten
- ellipsoidische Koordinaten
- Gauß-Krüger-Koordinaten
- UTM-Koordinaten
- Soldner-Koordinaten
- ...

**Bezugssysteme:**

- Potsdam-Datum
- RD 83
- 40/83  
(Bessel-Ellipsoid)

- WGS 84, (ETRF 89)

- Pulkovo-Datum
- 42/83  
(Krassowski-Ellipsoid)

- ED 50, (NATO)

- ...

○ natürliche (astronomische) Koordinaten sind anholonom! <sup>2</sup>

Zwischen verschiedenen Bezugssystemen sind Datumtransformationen erforderlich!

Koordinatenumformungen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen sind streng realisierbar!

- meist nur näherungsweise über identische (Paß-)Punkte möglich
- Transformation mit bekannter Datumsdifferenz

**Problem:**

In der Praxis liegen häufig Koordinaten in verschiedenen Bezugssystemen bzw. deren Realisierungen vor!

$$P(X^I, Y^I, Z^I) \Leftarrow ? \Rightarrow P(X^{II}, Y^{II}, Z^{II})$$

**Lösung:**

Koordinatentransformationen als rechnerische Verknüpfung zwischen verschiedenen Bezugssystemen.

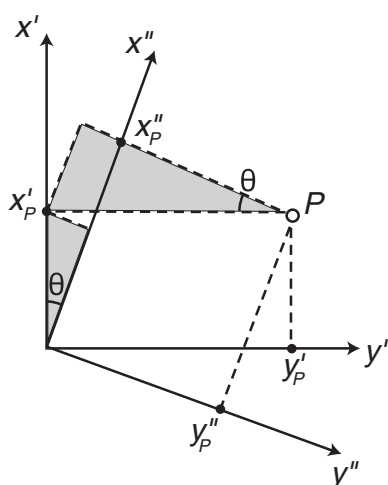
$$P(X^I, Y^I, Z^I) \Leftarrow \text{TRANSFORMATION} \Rightarrow P(X^{II}, Y^{II}, Z^{II})$$

**Transformationsparameter:**

- a) a-priori bekannte Parameter (geodätisches Datum der Systeme bzw. Datumsdifferenzen)
- b) Bestimmung mittels identischer (homologer) Punkte als Ausgleichungsproblem

<sup>2</sup>Anholonom bedeutet, daß die geodätischen Grundaufgaben der Koordinatenrechnung nicht eindeutig analytisch lösbar sind, d.h. aus Strecke und Richtung lassen sich von einem Punkt aus z.B. nicht die Koordinaten eines anderen bestimmen. Anholonome Systeme sind für den praktischen Gebrauch ungeeignet.

## 4.9.2 Transformationsgleichungen



Beispiel: Rotation um die Z-Achse um den Winkel  $\Theta$  (vgl. Abb. links).

$$\begin{aligned} X^{II} &= X^I \cos \Theta + Y^I \sin \Theta \\ Y^{II} &= -X^I \sin \Theta + Y^I \cos \Theta \\ Z^{II} &= Z^I \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^{II} = \mathbf{R}(\Theta) \cdot \mathbf{X}^I$$

Rotationsmatrizen  $\mathbf{R}(\gamma)$  (Drehung um die Z-Achse),  $\mathbf{R}(\beta)$  (Drehung um die Y-Achse) und  $\mathbf{R}(\alpha)$  (Drehung um die X-Achse):

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

und entsprechend für kleine Winkel ( $\cos(\omega) = 1$  und  $\sin(\omega) = \omega$  (in Bogenmaß)), mit  $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ ):

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Zusammenfassung der drei Rotationsmatrizen liefert:

$$\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\gamma) = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Vollständige 3-D-Transformationsgleichung einer Datumstransformation (Ähnlichkeitstransformation):

$$\mathbf{X}^{II} = \mathbf{X}_0 + m \cdot \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{R}(\beta) \cdot \mathbf{R}(\gamma) \cdot \mathbf{X}^I$$

Die Bestimmung von  $\mathbf{X}_0$ ,  $m$ ,  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  ist durch Ausgleichung möglich, wenn mehr identische Punkte als notwendig vorliegen.

Bei großen Rotationsbeträgen sind Näherungswerte für die Winkel (aus Koordinaten berechenbar) und/oder ggf. eine iterative Bestimmung der Transformationsparameter erforderlich. Die

Transformation von Koordinaten muß dann ohne die Näherungen  $\cos(\omega) = 1$  und  $\sin(\omega) = \omega$  erfolgen. Dabei muß unbedingt die Reihenfolge der Drehungen beachtet werden. Z.B.:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\gamma) \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(\gamma)\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha)$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

#### 4.9.3 Parametrisierung und Ausgleichungsmodell für die 3-D-Transformation (Allgemeiner Fall)

Transformationsgleichungssystem ohne Berücksichtigung von Scherungen:

$$\mathbf{X}^{II} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{mR}\mathbf{X}^I$$

$$\begin{aligned} X^{II} &= X_0 + m_x(X^I + \gamma Y^I - \beta Z^I) \\ Y^{II} &= Y_0 + m_y(-\gamma X^I + Y^I + \alpha Z^I) \\ Z^{II} &= Z_0 + m_z(\beta X^I - \alpha Y^I + Z^I) \end{aligned}$$

Alternative Parametrisierung:

$$\begin{bmatrix} X^{II} = X_0 + aX^I + bY^I + cZ^I \\ Y^{II} = Y_0 + dX^I + eY^I + fZ^I \\ Z^{II} = Z_0 + gX^I + hY^I + iZ^I \end{bmatrix}$$

Designmatrix  $\mathbf{A}$  für  $m = m_x = m_y = m_z \approx 1$  und  $\alpha \approx \beta \approx \gamma \approx 0$  sowie  $m_0 = 1$  und  $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X^I & 0 & -Z^I & Y^I \\ 0 & 1 & 0 & Y^I & Z^I & 0 & -X^I \\ 0 & 0 & 1 & Z^I & -Y^I & X^I & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

und entsprechend für  $m_x \neq m_y \neq m_z$  und  $\alpha \approx \beta \approx \gamma \approx 0$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X^I & 0 & 0 & -Z^I & Y^I \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Y^I & 0 & Z^I & -X^I \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Z^I & -Y^I & X^I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

und Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Entsprechend lassen sich auch die Normalgleichungen für eine Auswahl von Parametern (z.B. Transformation ohne Maßstab) aufstellen.

#### 4.9.4 Beispiele für Transformationsparameter (Datumsdifferenzen)

Es sind nur einige wenige Beispiele für Datumsdifferenzen angegeben. Weitere Angaben können der einschlägigen Literatur entnommen werden (Z.B. Maarten Hooijberg: „Practical Geodesy“, Springer 1997). Sehr viele Informationen über Datumstransformationen können auch im Internet gefunden werden (Z.B. Seiten der Universität Colorado, siehe Seite 42).

Ellipsoidparameter:

(Die definierten Parameter sind fettgedruckt, die abgeleiteten kursiv)

Ellipsoid (Datum)	große Halbachse <i>a</i>	kleine Halbachse <i>b</i>	Abplattung <i>1/f</i>
1 GRS 80	<b>6 378 137,000</b>	<b>6 356 752,31414</b>	<i>298,257222101</i>
2 WGS 84	<b>6 378 137,000</b>	<b>6 356 752,31424</b>	<i>298,257223563</i>
3 Krassowski (42/83)	<b>6 378 245,000</b>	<i>6 356 863,01877</i>	<b>298,3</b>
4 Bessel (Rauenberg, 40/83)	<b>6 377 397,155</b>	<i>6 356 078,96282</i>	<b>299,15281285</b>
5 SAD 69 (südam. Datum)	<b>6 378 160,000</b>	<i>6 356 774,71919</i>	<b>298,25</b>

Datumsdifferenzen (Beispiele):

Bem.	$\Delta x$ m	$\Delta y$ m	$\Delta z$ m	$\alpha_x$ "	$\beta_y$ "	$\gamma_z$ "	$\Delta m$ ppm
4 $\Rightarrow$ 1 a	+582,0	+105,0	+414,0	-1,04	-0,35	+3,08	+8,3
4 $\Rightarrow$ 1 b	+585,663	+86,978	+409,184	-0,52431	-0,15492	+2,82162	+8,777
3 $\Rightarrow$ 1 a	+24,0	-123,0	-94,0	-0,02	+0,25	+0,13	+1,1
5 $\Rightarrow$ 1 c	-60,0	-2,0	-41,0	-0,0	+0,0	+0,0	0,0(?)

- a Quelle: Zfv 04/95, S. 192ff, Ihde&Lindstrot: „Datumstransformation zwischen den Bezugssystemen ETRF/WGS, DHDN und System 42“  
 b Quelle: Transformationsfunktion der GIBS-Internetseite des BKG in Leipzig (abgeleitet)  
 c Quelle: Trimble GPS-Software *GPSurvey*

### Wiederholungsfragen

1. Definieren Sie die Begriffe Referenzsystem, Koordinatensystem, Koordinatentransformation und Koordinatenumformung.
2. Was versteht man unter dem „Geodätischen Datum“
3. Welche Bezugsfläche wird für geodätische Berechnungen für große Gebiete verwendet und warum?
4. Erläutern Sie das System der ellipsoidischen (geodätischen) Koordinaten.
5. Welche Verebnungen der Ellipsoidoberfläche kennen Sie? Erläutern Sie diese genauer.
6. Wie können Datumstransformationen zwischen verschiedenen Referenzsystemen erfolgen? Sind solche Problemstellungen in der Praxis denkbar? Wenn ja, wo?
7. Geben Sie die Dimensionen eines Erdellipsoides an. Wie groß ist die Abplattung?
8. Warum gibt es so viele verschiedene Ellipsoide?

## 5 EINFÜHRUNG SATELLITENGEODÄSIE

⇒ Start des ersten künstlichen Erdsatelliten *SPUTNIK-1* am 4.10.57

- zwei verschiedene Grundkonzepte der Nutzung von Satelliten in der Geodäsie:
  1. Satellit wird als „Hochziel“ verwendet  
**geometrische Methode** der Satellitengeodäsie  
→ weltumspannende dreidimensionale Netze sind möglich  
(Johann Euler [1734-1800]: Können Mondbeobachtungen für die Bestimmung der Dimensionen der Erde (Gradmessungen) genutzt werden? „Urvater der Satellitengeodäsie“)
  2. Satellit wird als Sensor im Schwerfeld der Erde aufgefaßt **dynamische Methode** der Satellitengeodäsie  
→ Analysen von Bahnstörungen werden zur Bestimmung des Schwerfeldes der Erde genutzt  
(Laplace [1749-1827]: Untersuchung von Mondbahn und Mondbahnstörungen „Vater der dynamischen Satellitengeodäsie“)
- heute meist Kombination beider Methoden
- Anwendungen der Satellitengeodäsie in der Erdmessung:
  - (Groß-)Formen von Figur und Schwerfeld der Erde
  - Dimensionen des mittleren Erdellipsoides (globales geodätisches Datum)
  - detailliertes Geoid (Höhenbezugsfläche)
  - Verbindung von verschiedenen Datumsfestlegungen
  - Verbindung nationaler Bezugssysteme mit dem globalen Datum
- Anwendungen der Satellitengeodäsie in der Landesvermessung:
  - Schaffung, Erhaltung und Kontrolle von Grundlagennetzen
  - dreidimensionale **homogene** Punktfelder
  - Verdichtung und Ergänzung von Punktfeldern
  - Höhenanschluß von Inseln (mit zusätzlicher Geoidinformation)
- Anwendungen der Satellitengeodäsie in der praktischen Geodäsie:
  - Detailaufnahmen (Kataster)
  - Sonder- und Kontrollnetze im Ingenieurbereich
  - photogrammetrische Paßpunktbestimmung
  - Orientierung photogrammetrischer Meßkammern
  - Kontrollpunkte für kartographische Aufnahmen
- Sonstige Anwendungen der Satellitengeodäsie:
  - Navigation, globale präzise Positionsbestimmung
  - Geodynamik (Tektonik, Deformationen), Glaziologie, Ozeanographie, . . .

## 5.1 Grundlagen des NAVSTAR-GPS

Für alle Bereiche der Geodäsie heute von ausschlaggebender Bedeutung:

**G**lobal **P**ositioning **S**ystem  $\Rightarrow$  (**G**eneral **P**roblem **S**olver)

- seit 1960 Verwendung von Satelliten(systemen) für Positionierung und Navigation
- Messung von Entfernungen und Entfernungsänderungen zu Satelliten
- kinematische (Flugzeuge, Fahrzeuge, Schiffe,...) und statische (Festpunktfelder, Objektpunkte,...) Anwendungen
- in den sechsziger Jahren: „TRANSIT Navigation Satellite System“ (US Navy)
- heute/zukünftig u.a.: NAVSTAR/GPS (US Militär), GLONASS (Russland), GALILEO (Europa, *PLANUNG*), COMPASS (China), IRNSS (Indian Regional Navigational Satellite System, regional), QZSS (Quasi-Zenith Satellite System, Japan, regional)

$\Rightarrow$  Hier nur Betrachtung des GPS!

### 5.1.1 Systemkomponenten

- primär für militärische Zwecke (Navigation) entwickelt  
Drei Komponenten: **Raumsegment (Satelliten)**  
**Kontroll-Segment**  
**Nutzer-Segment**

#### RAUMSEGMENT:

- seit 1993 vollständig ausgebaut: 24 Satelliten, 6 Bahnebenen
  - 24 Satelliten, 6 Bahnebenen, Bahnneigung  $55^\circ$
  - ca. 20000 km hoch  $\rightarrow$  Umlaufzeit etwa 12 Stunden
- an jedem Punkt der Erde sind mindestens 4 Satelliten sichtbar
- Erprobungsphase (1978-1985),... , Einsatz der voll operationsfähigen Satelliten und offizielle Freigabe (1995)
- Systemzeit unterscheidet sich von der UTC (Universal Time Coordinated) (GPS-Zeit ist UTC z.Z. 13 s voraus; 06/2000)
- die Satelliten senden kontinuierlich auf 2 Frequenzen im sog. L-Band
  - $L_1 = 1575,42 \text{ MHz} = 154 \cdot 10,23 \text{ MHz}$
  - $L_2 = 1227,60 \text{ MHz} = 120 \cdot 10,23 \text{ MHz}$

Satellitenkonstellation:	
Satelliten	21 Satelliten und drei Reservesatelliten (16.10.2000: 28 Satelliten) Satelliten senden kontinuierlich und automatisch
Bahnen	6 Bahnebenen mit je (mindestens) 4 Satelliten 55° Inklination, 20231 km Höhe, nahezu Kreisbahnen, 12 Stunden Umlaufzeit
Signalstruktur:	
Frequenzen	L-Band ( $L_1 = 1575,42$ MHz, $L_2 = 1227,60$ MHz)
digitale Signale	Spread Spectrum PRN, C/A-Code 1,023 MHz, P-Code 10,23 MHz, Datensignal 50 Hz
Genauigkeit:	
Position	SPS (Standard Positioning Service): $\pm 50$ m (zweidim.) PPS (Precise Positioning Service): $\pm 8$ m (zweidim.)
Geschwindigkeit	$\pm 0,1 \frac{m}{s}$
Zeit	$\pm 50$ ns

- den Trägerwellen  $L_1$  und  $L_2$  sind weitere Signale aufmoduliert:
  - $L_1$ : Precise-Code (P-Code), Coarse/Acquisition-Code (C/A-Code), Datensignal
  - $L_2$ : Precise-Code (P-Code), Datensignal
- die Codes dienen zur Bestimmung der (Pseudo-)Strecke zwischen Satellit und Empfänger
- das Datensignal enthält weitere Informationen, die an den Nutzer übermittelt werden (Aktualisierung alle 60 Minuten):
  1. Uhrkorrekturen, atmosphärische Korrekturen
  2. Broadcast-Ephemeriden
  3. Spezielle Nachrichten
  4. Almanach (Kepler-Elemente)
- für Zivile Nutzer steht der Standard Positioning Service (SPS) zur Verfügung  
Genauigkeit  $\pm 50$  m horizontal und  $\pm 100 \dots 150$  m vertikal
- die Signalqualität kann durch den Systembetreiber künstlich verschlechtert werden  
→ sog. „Anti Spoofing“ (p-Code → Y-Code), „ Selective Availability“ (Verrauschen der Signale)
- **Für Geodäsie reicht die Echtzeit Einzelpunktbestimmung nicht aus!**  
*LÖSUNG:* spezielle Messungsanordnungen und/oder andere Messgrößen



**KONTROLL-SEGMENT:**

Operational Control Segment (OCS)

Aufgaben:

- Kontrolle des Satellitensystems
- Bestimmung der GPS-Systemzeit
- Vorausberechnung der Ephemeriden und des Satellitenuhrverhaltens
- Einspeisen der Satelliten-Navigationsdaten in den Datenspeicher jedes Satelliten

Aufbau:

- Hauptkontrollstation, Master Control Station (MCS); Colorado Spings
- Monitorstationen und Bodenantennen; Kwajalein, Ascension, Diego Garcia
- weitere Monitorstationen; Colorado Springs, Hawaii

**NUTZER-SEGMENT:**

Summe aller Empfangsgeräte, die zu Navigation, Positionierung, Zeitübertragung,..., Vermessung verwendet werden.

Bestandteile einer Satellitemempfangsanlage:

- Antenne
- Empfänger (mit Bedienfeld)
- Stromversorgung

Arten von GPS-Empfängern:

- Navigationsempfänger (nur Code)
- Zeitempfänger (Code)
- Geodätische Empfänger (Trägerphasenmessungen)  
z.B.: C/A-Code +  $L_1$ ; C/A-Code +  $L_1, L_2$ ; C/A-Code + P-Code +  $L_1, L_2$ ;

Prinzipielle Arbeitsweise eines GPS-Empfängers:

- Signalempfang und Decodierung
- Code-Phasenvergleichsverfahren  $\implies$  Rohdistanzen zum Satelliten
- Datenspeicherung/-übertragung

- das Phasenvergleichsverfahren entspricht im Prinzip dem der elektrooptischen Entfernungsmesser, basierend auf nachfolgenden Wellenlängen:

GPS-Signale:				
Signal		Frequenz	Wellenlänge	Genauigkeit der Einzelmessung
Träger	$L_1$	1575,42 MHz	19,05 cm	<0,2 bis 2,5 mm
	$L_2$	1227,60 MHz	24,45 cm	<0,2 bis 2,5 mm
PRN-Codes	P	10,23 MHz	29,31 m	<0,03 bis 0,3 m
	C/A	1,023 MHz	293,1 m	<0,3 bis 3 m

- Bestimmung der Entfernung Satellit-Empfänger auf ca. 1% der Wellenlänge möglich  
Unsicherheit als ein Vielfaches der Wellenlänge: Vieldeutigkeit (engl. Ambiguity)  
→ spezielle statistische Auswerteverfahren
- Code-Empfänger nur für Navigation  
(mit speziellen Techniken Metergenauigkeiten möglich)
- geodätische Einfrequenzempfänger ( $L_1$ ) für geringere Genauigkeitsanforderungen und/oder kurze Distanzen
- geodätische Zweifrequenzempfänger für höchste Präzision über große Entfernungen  
(troposphärische Effekte, Einfluß der Ionosphäre!)

## 5.2 Anwendungen in der Geodäsie

- Koordinaten eines GPS-Empfängers können nur bei bekannten Satellitenpositionen (Ephemeriden) bestimmt werden
- absolute Einzelpunkt-Positionierung (wie räumlicher Bogenschlag) ist i.d.R nicht genau genug  
(Bem: Es gibt spezielle Software, die auch absolute Einzelpunktbestimmung mit geodätischer Genauigkeit ermöglicht.)
- Prinzipielle Lösungsmöglichkeiten:
  - a) Modellierung aller unbekanntes/gesuchten Parameter
  - b) spezielle Messungsanordnung zur Eliminierung von Parametern
- Häufigste LÖSUNG: differentielle Verfahren (relative Punktbestimmung bzgl. Referenzpunkt)  
mit Differenzbildung von Beobachtungen zur Eliminierung/Reduzierung von Fehlereinflüssen → Bestimmung von dreidimensionalen Vektoren

### 5.2.1 Fehlereinflüsse und Genauigkeiten

Zuordnung der Fehlereinflüsse zu drei Gruppen:

- Fehler von Satellitenposition/-eigenschaften

- Signalausbreitungsfehler
- Fehler durch Empfängereigenschaften

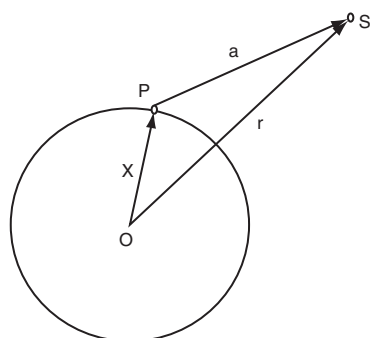
Ursache		Auswirkung auf die Entfernungsmessung
Satelliten	- Bahnfehler	1,0 bis 5,0 m (<5 cm!)
	- Uhrfehler	3,0 m
	- Selective Availability	<b>32,3 m</b>
Signalausbreitung	- Ionosphäre	5,0 m
	- Troposphäre	1,5 m
	- Mehrwegeausbreitung	2,5 m
Empfänger	- Rauschen	1,5 m
	- Empfängeruhrfehler	0,5 m

### Satellitengeometrie:

- das Meßprinzip ist dem räumlichen Bogenschnitt vergleichbar  
aber: keine Entfernungsmessungen sondern Pseudoentfernungsmessungen
- sog. „gefährliche“ Konfigurationen sind möglich

Grundzusammenhang zwischen den Vektoren  $\underline{x}$ ,  $\underline{r}$  und  $\underline{a}$

$$\underline{a} = \underline{r} - \underline{x}$$



Die gemessene Strecke zwischen einer Station  $i$  und einem Satelliten  $j$  ergibt sich:

$$|\underline{a}_{ij}| = |\underline{r}_j - \underline{x}_i| = \left( (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Unbekannte: 3 Komponenten des Stationsvektors  $\underline{x}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$   
 $\Rightarrow$  drei Beobachtungen (Strecken) sind zur Lösung des Problems nötig

- zusätzlich muß eine Uhrstandsdifferenz  $\Delta t$  zwischen Satelliten- und Empfängeruhr bestimmt werden

$$|\underline{a}_{ij}| = |\underline{r}_j - \underline{x}_i| + c\Delta t$$

- mindestens vier Beobachtungen (Strecken) sind nötig
- bei mehr als vier Beobachtungen  $\Rightarrow$  System von Fehlergleichungen mit der (nichtlinearen) Funktion  $\Psi$  als Lösung:

$$\underline{L} + \underline{v} = \underline{\Psi}(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{\Psi}(\underline{x}_0)$$

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{l} = \underline{Q} \cdot \underline{A}^T \underline{l}$$

$$\text{mit } \underline{x}^T = (X_i Y_i Z_i \Delta t_i) \text{ und } \underline{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xt} \\ Q_{tx} & Q_{tt} \end{pmatrix} \text{ und } \text{PDOP} = \sqrt{\text{spur}(\underline{Q}_{xx})}$$

DOP bedeutet: Dilution of Precision (engl. „Genauigkeitsverschlechterung“) es handelt sich um einen „Fehlervergrößerungsfaktor“

Weitere DOP-Werte neben dem PDOP sind:

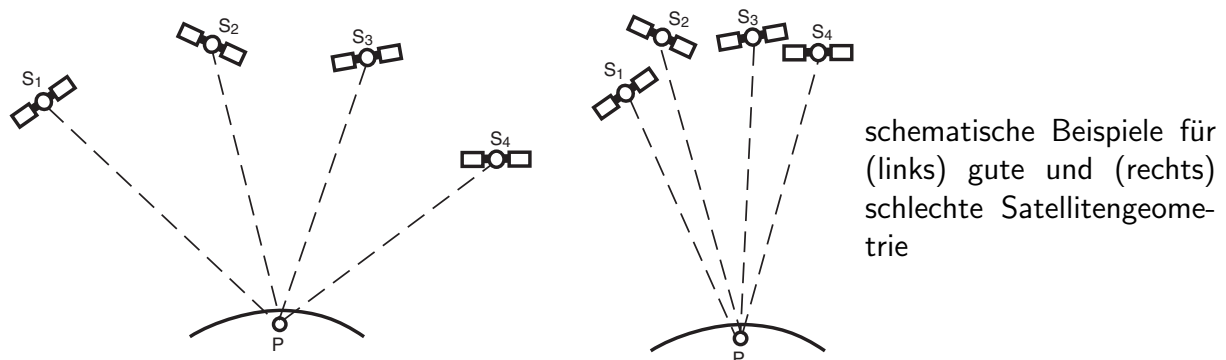
- **PDOP**... Position Dilution of Precision (3D-Position)
- **GDOP**... Geometrical Dilution of Precision (3D-Position und Zeit)
- **HDOP**... Horizontal Dilution of Precision (2D-Position)
- **VDOP**... Vertical Dilution of Precision (Höhe)
- **TDOP**... Time Dilution of Precision (Zeit)

**Regel:** kleiner DOP-Wert  $\rightarrow$  hohe Genauigkeit  
Extremwertaufgabe für  $\sqrt{\text{spur}(Q_{xx})}$

**Lösung:** GDOP ist umgekehrt proportional dem Volumen des Körpers, der durch die Satellitenpositionen und den Empfänger gebildet wird

**Problem:** „gefährlicher Ort“ wenn alle Satellitenpositionen auf einem Kegelmantel (Sat.-Pos. bilden Kreis an scheinbarer Himmelskugel)  
 $\rightarrow$  Analogie zum gefährlichen Kreis beim Rückwärtseinschneiden

**Bei GPS-Punkterkundung und Beobachtungplanung beachten!**



Weitere Fehler sind (a) durch die Messungsanordnung zu berücksichtigen bzw. zu eliminieren oder (b) bei der Auswertung zu beachten.

Zu (b) gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Differenzbildung von Beobachtungen
2. Modellierung und Parametrisierung im Auswerteprogramm

Wichtige zu beachtende Fehlereinflüsse sind:

- Bahnfehler
  - die mit den Satellitensignalen ausgesendeten Bahnen können Fehler von mehreren Zehnermetern aufweisen (Extrapolation!)
  - präzise Bahndaten sind im Nachhinein verfügbar (vom International GPS Service, IGS)  
Genauigkeit z.Z. etwa  $\pm 5$  cm !

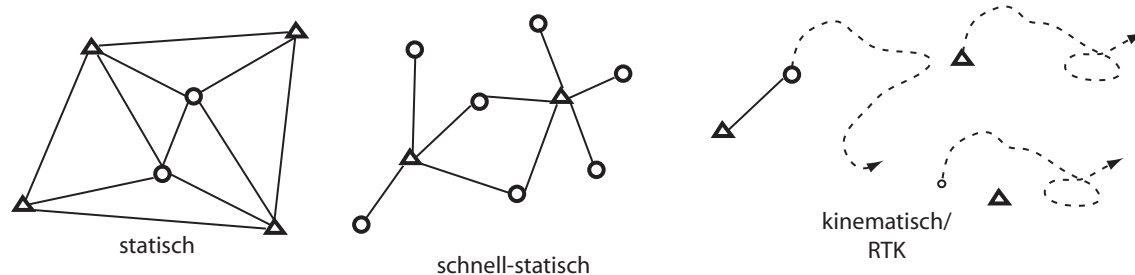
- Auswirkung auf die Basislinienlänge:  $\frac{db}{b} = \frac{dr}{r}$   
d.h. Fehler geht mit dem Faktor  $b/r$  in das Ergebnis ein
- Uhrfehler
  - Modellierung im Rahmen der Auswertung (z.B. durch Polynomansätze)
- Einfluß der Ionosphäre (50 bis 1000 km Höhe)
  - Ionosphäre ist für Mikrowellen ein dispersives Medium  
d.h. Refraktionseinfluß (Ausbreitungsgeschwindigkeit) ist proportional der Wellenlänge
  - Einfluß abhängig vom TEC (Total Electron Content) in der Ionosphäre; extrem variabel!  
enger Zusammenhang zur Sonnenaktivität und zum Magnetfeld der Erde
  - „ionosphärenfreie“ Linearkombination der beiden Frequenzen ist möglich  
$$L_3 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_2$$
  - Einfrequenzmessungen können nur durch Modellierung des Einflusses korrigiert werden (kurze Basislinien)
- Einfluß der Troposphäre
  - Troposphäre ist für Mikrowellen nicht (!) dispersiv
  - theoretisch sind meteorologische Daten für den gesamten Signalweg nötig
  - trockener Anteil 2,3 m im Zenit
  - feuchter Anteil 10% des trockenen Anteils; Problem: schwer modellierbar!
  - Modellierung der Troposphäre durch zeitlich begrenzt gültige sog. „Mapping“-Funktionen; einfachste Variante:
 
$$k_R = -2.3 \frac{1}{\cos z}$$
- Mehrwegeausbreitungsfehler (Multipath) und Beugung der Signale
  - Empfang von Signalen über zusätzliche Reflexionen an Metallflächen, feuchten Oberflächen, ...
  - Abhilfe: speziell geformte Abschirmungen der Antenne (Ground Plane, Choke Ring, ...)
  - wenn möglich ungünstige Messpunkte vermeiden
- Antennenfehler
  - das Phasenzentrum ist kein fester geometrischer Punkt
  - Variationen des Phasenzentrums können mit Modellen berücksichtigt werden  
Antennen immer streng gleichartig (nach Norden) ausrichten

**Wichtig:** Alle entsprechenden Besonderheiten bei der Punkterkundung und Messung sind gewissenhaft in Protokollen zu erfassen!

### 5.2.2 Überblick über die geodätischen GPS-Meßverfahren

Verfahren	Meßgröße	Basislänge	Meßdauer	Genauigkeit
<b>Statisch</b>	Trägerphasen	<10 km	>1 h ( $\geq 4$ SV's)	1,5... 5 mm+0,01... 1 ppm
	2 Frequenzen	20... 40 km	6... 24 h ( $\geq 4$ SV's)	1,5... 5 mm+0,01... 1 ppm
<b>Schnell Statisch</b>	Trägerphasen	<5 km	5... 8 min ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm
	2 Frequenzen	<15 km	8... 20 min ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm
<b>Kinematisch</b>	Trägerphasen	<5 km	kontinuierlich ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm
	2 Frequenzen	<15 km	kontinuierlich ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm
<b>DGPS</b> in Echtzeit!	Codephasen	<100 km	kontinuierlich ( $\geq 4$ SV's)	0,5... 5 m
<b>RTK</b> in Echtzeit!	Trägerphasen	<5 km	kontinuierlich ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm
	2 Frequenzen	<15 km	kontinuierlich ( $\geq 5$ SV's)	5... 20 mm+1 ppm

Außerdem sind auch REAL-Time-Anwendungen (RT-DGPS) möglich!



### 5.2.3 Statische Messungen (Static)

- Verfahren für größere Punktabstände und hohe Genauigkeitsanforderungen
- Beobachtungszeiten sehr variabel (1 h bis mehrere Tage)
- für Grundlagentetze in der LV, Netzverdichtungen, Spezialnetze, Deformatinsanalysen,...

### 5.2.4 Schnelle Statische Messungen (Fast Static / Rapid Static)

- für geringere Genauigkeitsforderungen und Punktabstände bis 15 km
- Beobachtungszeiten sehr kurz (wenige Minuten)
- Mehrdeutigkeitslösung bei der Auswertung mit Suchalgorithmen  
→ möglichst viele Satelliten & kurze Basislinien
- für Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung, Netzverdichtungen, Paßpunktbestimmungen, Katastervermessungen (in Verbindung mit Tachymetrie)

### 5.2.5 Kinematische Messungen

- für verschiedenste Anwendungen, wenn kontinuierliche Positionsbestimmung nötig
- kontinuierliche Messung z.B. für präzise Fahrzeug-, Schiffs- und Flugzeugnavigation
- „Stop & Go“-Konzept möglich (wie Fast Static)

### 5.2.6 Real Time Kinematic (RTK)

- für verschiedenste Anwendungen, wenn präzise kontinuierliche Positionsbestimmung in Echtzeit erforderlich
- Datenübertragung von einer Referenzstation nötig (Telemetrie/Funk, GSM, Internet/NTRIP)
- Mehrdeutigkeitslösung im Empfänger in Echtzeit!

### 5.2.7 Planung/Erkundung von GPS-Messungen

#### Statische Verfahren:

Bei der Planung von GPS-Messungen und der Punkterkundung sind folgende Gesichtspunkte zu beachten:

- Anzahl der zur Verfügung stehenden Empfänger
- Einbeziehung von Referenzstationen?
- Genauigkeitsforderung
- Zuverlässigkeit der Ergebnisse

Es sind im Rahmen der Planung Angaben zu folgenden Kriterien zu machen:

- Mindest Höhenwinkel (Elevation)
- Aufzeichnungsintervall
- Beobachtungsdauer
- Häufigkeit der Punktbesetzung
- Anzahl und Auswahl von Verknüpfungspunkten
- Anzahl und Auswahl von Paßpunkten/Festpunkten
- Art und Umfang der Dokumentation der Vermessung
- Art und Umfang der Datenhaltung
- Geräte Ausstattung der Vermessungstrupps

Mit entsprechender Planungssoftware (Bestandteil fast jeder GPS-Software) können Voruntersuchungen durchgeführt werden.

(Dabei können Beobachtungseinschränkungen (Abschattungen) berücksichtigt werden):

- Berechnung der Anzahl der zur Verfügung stehenden Anzahl der Satelliten auf den Stationen
- Sichtbarkeitsdiagramme (Azimut und Höhenwinkel)
- Darstellungen der DOP-Werte in Abhängigkeit von Ort und Zeit

Außerdem sollten erstellt werden:

- Übersichten über die Besetzung der Stationen zu den einzelnen Messungen (Sessionen)
- Übersichtskarten mit den zu beobachtenden Punkten
- Punktdokumentation (Einmessung, Erkundungsbericht,...)

### **Kinematische/schnelle Statische Verfahren und RTK:**

*Besonderheit: Es sind mindestens 5 Satelliten gleichzeitig kontinuierlich zu beobachten!*

Daraus ergeben sich entsprechend andere/höhere Anforderungen an die Planung der Messung (des Messungsweges):

- besondere Berücksichtigung von Abschattungen (Brücken, Häuser,...)

## **5.3 Auswertung von GPS-Messungen**

Die Auswertung im sogenannten Postprocessing läßt sich in drei wesentliche Schritte unterteilen:

- Datenvorverarbeitung
  - Datentransfer
  - Datendecodierung, Datenumformatierung
  - Bereinigung von groben Fehlern,...
- Datenanalyse & Parameterschätzung
  - Definition des stochastischen und funktionalen Modells (z.B. Auswahl der zu berechnenden Basislinien)
  - Parametrisierung zusätzlicher Einflüsse (z.B. Troposphäre, Ionosphäre)
  - Beurteilung von Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Ergebnisse
- Transformation
  - Übergang vom WGS 84 bzw. ETRS 89 zu Gebrauchskordinaten  
⇒ Datums-(Ellipsoid-)übergang und Koordinatenumformungen (Transformationsverfahren oder gemeinsame Ausgleichung mit terrestrischen Daten bzw. Festpunkten)



Beispiel für einen Datensatz im empfängerunabhängigen Datenformat (RINEX):

```

2          OBSERVATION DATA   G (GPS)          RINEX VERSION / TYPE
ASHTORIN  03 - JUL - 00 12:38 PGM / RUN BY / DATE
ROVR      COMMENT
          MARKER NAME
          MARKER NUMBER
          OBSERVER / AGENCY
          UZ-12             UF00             OA12     REC # / TYPE / VERS
          ANT # / TYPE
-2102280.9500  887156.9200 -5936077.0200     APPROX POSITION XYZ
          0.0000             0.0000             0.0000     ANTENNA: DELTA H/E/N
          1           0                                           WAVELENGTH FACT L1/2
          3   L1   C1   D1                                           # / TYPES OF OBSERV
          1.0000                                           INTERVAL
          LEAP SECONDS
          2000   1   25   9   26   14.000000   GPS     TIME OF FIRST OBS
          2000   1   25   13  0   40.000000   GPS     TIME OF LAST OBS
          END OF HEADER
00 1 25 9 26 14.0000000 0 7 01 24 22 04 06 18 16     -0.000191296
    7563.63516 19561658.481 -2183.521
    7973.60016 21639365.361 -1961.552
    -124.43216 20166769.378 20.566
    17626.37316 23100270.298 -3671.176
    9206.15516 22286627.090 -1964.585
    -1426.84216 19675375.639 470.840
    10156.96416 21096658.255 -3259.404
00 1 25 9 26 15.0000000 0 6 01 24 22 06 18 16     -0.000190850
    9749.103 6 19562074.363 -2186.992
    9937.019 6 21639739.007 -1964.246
    -143.137 6 20166765.993 17.259
    11172.904 6 22287000.851 -1968.357
    -1896.186 6 19675286.381 467.362
    13418.308 6 21097278.709 -3262.862
00 1 25 9 26 16.0000000 0 6 01 24 22 06 18 16     -0.000190635
    11937.345 6 19562490.794 -2188.727
    11903.388 6 21640113.155 -1966.922
    -159.043 6 20166763.088 15.466
    13142.469 6 22287375.414 -1969.205
    -2362.783 6 19675197.626 466.061
    16682.318 6 21097899.642 -3264.643
00 1 25 9 26 17.0000000 0 5 01 24 22 18 16     -0.000190412
    14126.791 6 19562907.457 -2189.709
    13870.958 6 21640487.533 -1968.434
    -173.699 6 20166760.419 14.603
    -2828.141 6 19675109.123 465.075

```

### 5.3.1 Auswertung von Code-Beobachtungen (Navigationslösung)

Funktionales Modell für die Auswertung von Pseudostrecken aus Code-Beobachtungen von der Station  $k$  zu den Satelliten  $j$ :

$$C_k^j(t) = \sqrt{(X^j(t) - X_k)^2 + (Y^j(t) - Y_k)^2 + (Z^j(t) - Z_k)^2} - \delta t_k(t) \cdot c - \delta t^j(t) \cdot c$$

wobei

$\mathbf{X}^j(t) = [X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)]$  bekannte Koordinaten des Satelliten  $j$  zur Epoche  $t$

$\mathbf{X}_k(t) = [X_k, Y_k, Z_k]$  gesuchte Koordinaten der Station  $k$

$\delta t_k(t)$  gesuchter Uhrsynchronisationsfehler des Empfängers auf der Station  $k$

$\delta t^j(t)$  bekannte Uhrsynchronisationsfehler des Satelliten  $j$

$c$  Lichtgeschwindigkeit

4 Unbekannte: 3 Stationskoordinaten, 1 Empfängeruhrfehler

Das Problem läßt sich mit einem räumlichen **Bogenschnitt** mit konstantem Zuschlag zu allen Strecken vergleichen.

### 5.3.2 Auswertung von Phasen-Beobachtungen

Methode: Nutzung der Phasendifferenzen der Trägerwellen (engl. „carrier phase“) als Messgröße

Vorteil: Genauigkeit der Messgröße wenige „mm“ da Wellenlänge nur 19 bzw 24,4 cm

Problem: Es müssen zusätzlich die ganzzahligen Vielfachen (Mehrdeutigkeiten, engl. „ambiguities“) der Trägerwellen  $L_1$  und  $L_2$  bestimmt werden, um von der Phasendifferenz zu einer Strecke zwischen Satellit und Empfänger zu kommen

Funktionales Modell für die Auswertung von Trägerphasendifferenzmessungen von der Station  $k$  zu den Satelliten  $j$ :

$$\Phi_k^j(t) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(X^j(t) - X_k)^2 + (Y^j(t) - Y_k)^2 + (Z^j(t) - Z_k)^2} + N_k^j - \frac{c}{\lambda} \delta t_k(t) - \frac{c}{\lambda} \delta t^j(t)$$

wobei

$\mathbf{X}^j(t) = [X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)]$  bekannte Koordinaten des Satelliten  $j$  zur Epoche  $t$

$\mathbf{X}_k(t) = [X_k, Y_k, Z_k]$  gesuchte Koordinaten der Station  $k$

$N_k^j$  Phasenmehrdeutigkeit

$\delta t_k(t)$  gesuchter Uhrsynchronisationsfehler des Empfängers auf der Station  $k$

$\delta t^j(t)$  bekannte Uhrsynchronisationsfehler des Satelliten  $j$

$\lambda$  Wellenlänge der Trägerwelle

$c$  Lichtgeschwindigkeit

#### Zwei grundsätzliche Lösungsansätze:

a) *PARAMETERSCHÄTZUNG*

b) *PARAMETERELIMINATION*

#### zu a)

- Es müssen alle Einflüsse (Refraktionsparameter, Uhrkorrekturen, Bahnfehler, ...) als unbekannte Parameter in das Ausgleichungsmodell mit eingeführt werden.
- Universelle Methode, aber viele unbekannte Größen

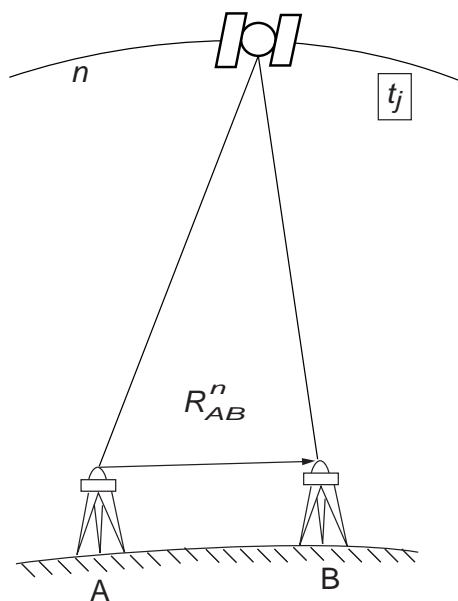
⇒ wissenschaftliche Software für globale Anwendungen (z.B. GIPSY (AUSLIG, Australien))

#### zu b)

- Einfluß vieler Störungen ist bei eng benachbarten Stationen nahezu gleich
- Die Bildung von Differenzen von Beobachtungen ermöglicht die Eliminierung von Einflüssen auf die gesuchten Koordinaten

⇒ Arbeitsweise der meisten kommerziellen Programme und auch wissenschaftliche Software für globale Anwendungen (z.B. Berner-GPS-Software)

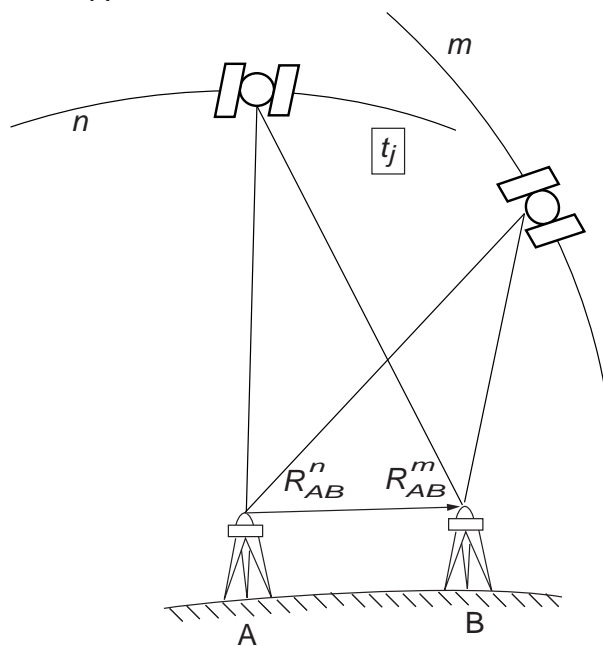
- Die Differenzbildung erfolgt in verschiedenen Stufen:



*Einfachdifferenz:*

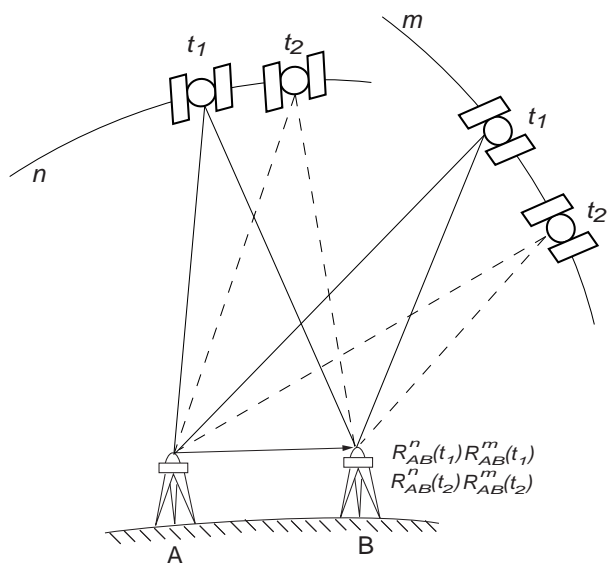
Differenz zwischen Beobachtungen zweier Empfänger zu einem Satelliten

Eliminierung von Fehlereinflüssen verursacht durch den Satelliten (z.B. Satellitenuhrfehler, Bahnfehler) und z.T. von Refraktionseinflüssen



*Doppeldifferenz:*

Differenz zwischen Einfachdifferenzen zu zwei verschiedenen Satelliten  
Eliminierung von Fehlereinflüssen verursacht durch die Empfänger (z.B. Empfängeruhrfehler) und z.T. von Refraktionseinflüssen



*Dreifachdifferenz:*

Differenz zwischen Doppeldifferenzen zu zwei verschiedenen Epochen  
Eliminierung von Fehlereinflüssen die nur zu einer Epoche auftreten (z.B. „cycle slips“)

### 5.3.3 Linearkombinationen der $L_1$ und $L_2$ Trägerphasen

Wenn Zweifrequenzbeobachtungen vorliegen, lassen sich Linearkombinationen der  $L_1$  und  $L_2$  Trägerphasen bilden:

$$\Phi_{n,m} = n\Phi_{L_1}^i + m\Phi_{L_2}^i$$

wobei  $n$  und  $m$  beliebig wählbare Zahlen sind.

Es ergibt sich für die Linearkombination die Wellenlänge aus den beiden Frequenzen  $f_{L_1}$  und  $f_{L_2}$ :

$$\lambda_{n,m} = \frac{c}{nf_{L_1} + mf_{L_2}}$$

Kriterien für die sinnvolle Bildung von Linearkombinationen sind:

- **Mehrdeutigkeitslösung:** Die Koeffizienten sollten ganzzahlig sein, um die Mehrdeutigkeiten lösen zu können.
- **Wellenlänge:** Je größer die Wellenlänge, um so besser lassen sich Vieldeutigkeiten lösen und „cycle slips“ finden.
- **Ionosphäre:** Der ionosphärische Einfluß sollte nicht wesentlich über denen der Originalbeobachtungen liegen oder sogar eliminiert werden.
- **Meßrauschen:** Durch die Kombination der Signale kann sich das Rauschen evtl. verstärken.

Linearkombinationen der Trägerphasen  $L_1$  und  $L_2$ :

Linear-kombination	Bezeichnung	n	m	$\lambda_{n,m}$ [cm]	$V_I$	$\sigma_{n,m}$ [mm]
$L_1$	originär	1	0	19,0	0,779	3,0
$L_2$	originär	0	1	24,4	1,283	3,9
$L\Delta$ ( $L_5$ )	wide lane	1	-1	86,2	-1,000	19,4
$L\Sigma$	narrow lane	1	1	10,7	1,000	2,4
$L0$ ( $L_3$ )	ionosphärenfrei	x	x	5,4	0,000	10,0
$LI$	geometriefrei	x	x	10,7	2,000	20,0

( $V_I$ : ionosphärischer Verstärkungsfaktor,  $\sigma_{n,m}$ : Standardabweichung)

### 5.3.4 Lösung der Mehrdeutigkeiten

Nur die Auswertung von Trägerphasenmessungen ermöglicht die Bestimmung von hochgenauen Koordinaten!

Daher ist die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten ein zentrales Problem.

- **Geometrische Methode:**  
Nutzung der zeitabhängigen Geometrie zwischen Satellit und Empfänger;  
Messung von Entfernungsdifferenzen zwischen den Epochen (Zählung der Phasen-Nulldurchgänge);  
Geometrie ändert sich nur langsam  $\implies$  längere Beobachtungszeiten nötig ( $> 1$  h)
- **Code-/Trägerphasenkombination**
- **Mehrdeutigkeits-Suchalgorithmen:**  
Nutzung von mehr als vier Satelliten zu einer Epoche;  
Testung verschiedener Kombinationen von Mehrdeutigkeiten zu den Satelliten

## 5.4 GPS-Landesdienste

1. Relative GPS-Messungen erfordern mindestens zwei Empfänger (**Differential-GPS, DGPS**).
2. Für den Anschluß an das amtliche Festpunktfeld (amtliches „Datum“) sind Beobachtungen auf mindestens einem Punkt des amtlichen Netzes erforderlich.
  - Wenn die Daten von permanent messenden Empfängern, deren amtliche Koordinaten bekannt sind, genutzt werden können, kann
    - auch mit einem Empfänger gearbeitet werden und
    - der Anschluß an das amtliche Bezugssystem auch ohne Transformation erfolgen (Genauigkeitsgrenzen beachten)
  - Wenn diese Daten auch noch per Funk an den Nutzer übertragen werden, kann in Echtzeit kinematisch gearbeitet werden (**Real-Time-Kinematik-GPS, RTK-GPS**)

Die Vermessungsverwaltungen der deutschen Länder bauen ein entsprechendes Netz von Stationen, den **SA**telliten**POS**itionierungsdienst (**SAPOS**), als Gemeinschaftsprojekt auf. Die Landesvermessung richtet einen permanent betriebenen multifunktionalen DGPS-Dienst ein.

Grundlage:	Netz von GPS-Referenzstationen, die als Festpunkte der Landesvermessung im Bezugssystem ETRS 89 bestimmt sind
Servicebereiche:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• SAPOS EPS    Echtzeit Positionierungs Service</li> <li>• SAPOS HEPS   Hochpräziser Echtzeit Positionierungs Service</li> <li>• SAPOS GPPS   Geodätischer Präziser Positionierungs Service</li> <li>• SAPOS GHPS   Geodätischer Hochpräziser Positionierungs Service</li> </ul>

Übersicht über die SAPOS-Servicebereiche (<http://www.sapos.de>)

Service	Verfügbarkeit	Medium	Genauigkeit	Taktrate	Format	Preis
EPS	realtime	RDS auf UKW und LW	100-300 cm	3-5 s	RTCM 2.0	im Gerätepreis enthalten
	realtime	2m-Funk	100-300 cm	1 s	RTCM 2.0	150 Euro/Jahr
HEPS	realtime	2m-Funk Mobiltelefon	1-5 cm 1-2 cm*	1 s	RTCM 2.1 u. NMEA-AdV	10 Cent/min
GPPS	near-realtime u. offline	Mobil-/Telefon u. Datenträger	1 cm	15 s	RINEX 2.0	20 Cent/min
GHPS	offline	Telefon u. Internet	<1 cm	bis <1 s	RINEX 2.0	20 Cent/min bis 80 Cent/min

\* mit Flächenkorrekturparametern vernetzter Permanentstationen

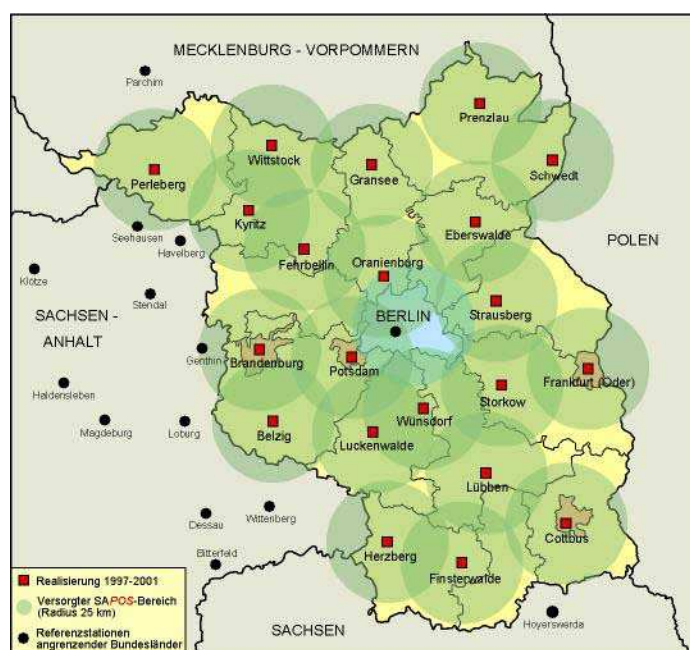


Abb.: SAPOS-Stationen im Land Brandenburg

#### 5.4.1 Echtzeit-Positionierungsservice (EPS)

- Referenzstationen messen ständig die Entfernungen zu den Satelliten und ermitteln daraus Korrekturwerte (Koordinaten- und Streckenkorrekturen für Code-Beobachtungen)
- Korrekturen werden den Anwendern in Echtzeit zur Verfügung gestellt
- Verbesserung der Positionsbestimmung auf  $\pm 1-3$  m
- Sendung der Korrekturwerte auf UKW (ARD), LW (Telekom AG), 2-m-Band (Sender der LV)
- international standardisiertes Datenformat RTCM SC-104 (US-Radio Technical Commission for Maritim Services Special Committee No. 104) Version 2.0
- es genügen einfacher GPS-(Code)-Empfänger und handelsüblicher RDS-fähiger UKW/LW-Empfänger bzw. 2-m-Band-Empfänger mit Dekoder

### 5.4.2 Hochpräziser Echtzeit-Positionierungsservice (HEPS)

- zusätzlich zu den EPS-Korrekturwerten stehen Trägerphasenkorrekturen der Satellitensignale in Echtzeit zur Verfügung
- Genauigkeit der Positionsbestimmung von  $\pm 1-5$  cm
- Dekodiermodul der AdV ist zum Entschlüsseln der Daten zwingend erforderlich!

### 5.4.3 Geodätischer Präziser Positionierungsservice (GPPS)

- für (geodätische) Zentimeter-Genauigkeit sind zwei Empfänger erforderlich  
mit SAPOS kann die Anschaffung eines Gerätes durch den Anwender entfallen
- Daten im RINEX-Format können bei den Landesvermessungsämtern bestellt werden  
die Datenbereitstellung über das Internet ist in Vorbereitung

### 5.4.4 Geodätischer Hochpräziser Positionierungsservice (GHPS)

- Bereitstellung der GPS-Daten der Referenzstationen im RINEX-Format
- Auswertung erfolgt immer „offline“ im sog. Post-Processing
- sinnvollerweise mit präzisen Bahndaten des International GPS Service (IGS) kombinieren!



**Abb.:** SAPOS-Internetseite (Ausschnitt), beteiligte Institutionen

## 5.5 Andere GPS-Dienste

### 5.5.1 ascos-Referenzdienst (Ruhrgas)

Die ascos-Referenzstationen befinden sich auf E.ON Ruhrgas-Stationen. Die Antennenmasten sind an standsicheren Orten befestigt. So ist gewährleistet, dass die Referenzstationen jederzeit für das Wartungspersonal zugänglich sind. Als Satellitenempfänger werden Receiver der Firma Topcon (früher mit JPS bezeichnet) eingesetzt. Hierbei handelt es sich um leistungsstarke Zweifrequenz 20-Kanal GPS & GLONASS-Empfänger (L1+L2). Als Antennen werden GPS & GLONASS- Choke-Ring-Antennen desselben Herstellers verwendet. Die Empfänger sind über eine unterbrechungsfreie Stromversorgung abgesichert. Die gesamte Einrichtung ist gegen Blitzschlag gesichert.

#### Datenübermittlung

Die Datenübermittlung zwischen den mobilen Positionierungssystemen und ascos erfolgt im GSM-Standard, der auch für die Mobiltelefonie eingesetzt wird. Durch die Nutzung der Mobilfunknetze ist höchste Verfügbarkeit gewährleistet. Bei Anruf eines ascos-Nutzers über GSM-Mobilfunk übermittelt der Nutzer seine aktuelle Position im standardisierten NMEA-Format an die Zentrale.

#### Berechnung der virtuellen Referenzstation

In der Vernetzungssoftware GPS-Network werden aus den Referenzstationsdaten Korrekturmodelle gebildet. Für die vom Nutzer übermittelte Näherungsposition wird mittels dieser Modelle eine virtuelle Referenzstation (VRS) berechnet. Die systematisch wirkenden Fehlereinflüsse werden dabei durch die Korrekturmodelle fast vollständig beseitigt. Der Berechnungsprozess einer VRS verläuft für jeden ascosNutzer individuell.

#### Korrekturdatenformate

Die Korrekturdaten werden in den Standardformaten des Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM) bereitgestellt. Es findet keine Verschlüsselung oder Komprimierung statt. Die Taktrate der Korrekturdaten beträgt eine Sekunde.

Die zur Zeit verfügbaren Datenformate sind:

RTCM 2.3 GPS & GLONASS Zweifrequenz-Trägerphasenkorrekturen

RTCM 2.3 GPS Zweifrequenz-Trägerphasenkorrekturen; GLONASS nicht standardisiert

RTCM 2.0 Code-Korrekturen für GPS und GLONASS nicht standardisiert

Für die globalen Satellitennavigationssysteme GPS und GLONASS werden Korrekturdaten angeboten - für Echtzeit-Positionierungen wie auch für zeitversetzte Auswertungen („Post-processing“).

Für den Echtzeit-Einsatz werden zwei Genauigkeits- und Tarifklassen realisiert:

Der **präzise Dienst (PED)** liefert Positionsgenauigkeiten von  $\pm 2$  cm (Höhenkomponente:  $\pm 4$  cm),

der **einfache Dienst (ED)**  $\pm 50$  cm, in Abhängigkeit von der eingesetzten Empfängertechnik.

Über GSM-Datenfunk werden sowohl die Positionen der Rover zur Zentrale geschickt (Stan-



Standardformat NMEA) als auch die Korrekturdaten übermittelt (Standardformat RTCM). Je nach Empfängertyp wird unterschieden in:

- GPS Code-Korrekturen (RTCM 2.0),
- GPS Zweifrequenz-Korrekturen (RTCM 2.3)
- GPS + GLONASS Zweifrequenz-Korrekturen (RTCM 2.3)

Die Taktrate der Korrekturdaten beträgt 1 Sekunde.

Zur Nutzung dieses Dienstes benötigen Sie Satellitenempfänger, die mit einem GSM-Modem ausgerüstet sind, die aktuelle Position übermitteln und Korrekturdaten im RTCM-Format empfangen und verarbeiten können.

Für Auswertungen im Postprocessing sind die Daten im RINEX-Format verfügbar - sowohl von allen Referenzstationen als auch von beliebigen Virtuellen Referenzstationen, bezogen auf Ihr Projektgebiet. Taktraten von = 1 Sekunde können gewählt werden.



**Abb.:** Überblick: Ausbau des ascos „Präzisen Echtzeitdienstes“ (PED)

### 5.5.2 Trimble VRS Now

Neuerdings steht der Dienst Trimble VRS Now zur Verfügung, der unmittelbaren Zugang zu RTK Korrekturen überall in Deutschland erlaubt.  
(Betrieben durch die Firma Trimble)

Weitere Informationen:

[http://global.trimble.com/de/template\\_trlinfo.asp?Nav=Collection-45549](http://global.trimble.com/de/template_trlinfo.asp?Nav=Collection-45549)

### Wiederholungsfragen

1. Beschreiben Sie kurz den Grundaufbau des GPS-Systems.
2. Welche Signale werden von GPS-Satelliten ausgesendet und wofür können sie geodätisch genutzt werden?
3. Wodurch unterscheiden sich Navigationsmethoden und die geodätische Anwendung des GPS grundsätzlich?
4. Was versteht man unter DOP? Wozu werden DOP-Parameter genutzt?
5. Welche Größenordnung haben ionosphärische und troposphärische Refraktion bei GPS-Signalen? Wie kann der Einfluß modelliert werden?
6. Welche weiteren wichtigen Fehlereinflüsse gibt es noch und wie werden sie behandelt?
7. Wodurch unterscheiden sich die verschiedenen geodätischen GPS-Meßverfahren (statisch, schnell statisch, kinematisch)?
8. Welche Probleme sind bei der GPS-Punkterkundung zu beachten und warum?
9. Wozu werden bei der GPS-Datenauswertung Differenzen der Beobachtungen gebildet?
10. Weshalb werden in der Zweifrequenz-GPS-Datenauswertung Linearkombinationen von Trägerphasenmessungen gebildet?
11. Mit welcher Genauigkeit können Koordinaten und Koordinatendifferenzen mit geodätischen GPS-Messungen bestimmt werden? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die praktische Messungsplanung?
12. In welchem Bezugssystem werden die Ergebnisse von GPS-Messungen erhalten und welche Konsequenzen ergeben sich daraus?
13. Welchen GPS-Landesdienst kennen Sie? Wozu wird er aufgebaut und welche Anwendungsmöglichkeiten kennen Sie?