ПМТФ, № 5, 1964

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ РАСТВОРЯЮЩИХСЯ И ПОГЛОЩАЮЩИХ СТЕНОК

Г. А. Бугаенко

(Черкассы)

Рассмотрена конвекция жидкости в специфических условиях, когда среди тел, ограничивающих поток, есть и такие, которые растворяются, и такие, которые поглощают диффундирующее вещество, но практически не изменяют ни своих геометрических размеров, ни формы. Найдено точное решение задачи о конвекции для средней части пространства между вертикальными коаксиальными цилиндрами, нагретыми до различной температуры.

Наличие растворяющихся тел в жидкости делает ее неоднородной по своему составу. Макроскопическое движение жидкости и молекулярный перенос вещества изменяют состав раствора. В таких условиях жидкость является бинарной смесью [1].

Уравнения стационарной конвекции бинарной жидкой смеси с учетом термодиффузии и диффузионной теплопроводности имеют вид [2]

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\rho_0^{-1}\,\nabla p + \nu\nabla^2\,\mathbf{v} + g\,(\beta_1 T + \beta_2 C)\,\gamma \\
(\mathbf{v}\nabla)\,T = (\chi + N\lambda^2 D)\,\nabla^2 T + N\,\lambda D\,\nabla^2 C \\
(\mathbf{v}\nabla)\,C = \lambda D \nabla^2 T + D\nabla^2 C \qquad (1)\\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0
\end{gathered}
$$

Здесь $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость; T и C — отклонение температуры и концентрации легкой компоненты смеси от своих средних значений $\langle T\rangle$ и $\langle C\rangle$ соответственно; p — давление, отсчитываемое от гидростатического при $T = \langle T\rangle$ и $C = \langle C\rangle$; коэффициенты кинематической вязкости ν, температуропроводности χ, диффузии D и термодиффузии λ и расширения жидкости β_1 и β_2 принимаются при $\langle T\rangle$ и $\langle C\rangle$; термодинамический коэффициент N определяет (вместе с λ) диффузионную теплопроводность среды; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; g — напряженность поля тяжести.

Предположим, что жидкость заполняет пространство между двумя соосными цилиндрическими поверхностями, температуры которых поддерживаются постоянными. Изучим установившееся конвективное течение жидкости в предположении, что один из цилиндров растворяется в жидкости, а другой поглощает попадающее на него диффундирующее вещество.

Сформулируем сначала граничные условия задачи. Скорость на поверхности внутреннего (радиуса R_1) и внешнего (радиуса R_2) цилиндров равна нулю; температура на поверхности внутреннего цилиндра постоянна и равна T_0; температура на поверхности внешнего цилиндра T_1; пространство между цилиндрами замкнуто, количество жидкости, протекающее в единицу времени через нормальное к оси сечение, равно нулю; внешний цилиндр растворяется, так что вблизи его поверхности при $r = R_2$ существует равновесие, при котором концентрация в примыкающей к поверхности цилиндра жидкости равна концентрации насыщенного раствора $C = C_*$

(диффузия вещества из примыкающего к телу слоя происходит медленнее, чем может происходить процесс растворения), поверхность внутреннего цилиндра $r = R_1$ поглощает попадающее на нее диффундирующее вещество, так что на этой поверхности $C = 0$ (как в химических реакциях, происходящих на поверхности твердого тела) [1].

Будем пользоваться цилиндрической системой координат r, φ, z; ось z направлена по общей оси цилиндров вертикально вверх.

Из соображений симметрий ищем решение задачи в виде

$$v_r = v_\varphi = 0, \qquad T = T(r), \qquad C = C(r)$$

$$v_z = v_z(r, z), \qquad p = p(r, z)$$

В этих предположениях уравнения (1) значительно упрощаются. Из уравнения неразрывности следует, что $dv_z / dz = 0$, а значит $v_z = v(r)$. Из первого уравнения системы (1) находим, что $dp / dr = 0$ и $dp / d\varphi = 0$, откуда вытекает, что p зависит только от z. Система (1) в рассматриваемом случае сводится к такой

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dz} = \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + g(\beta_1 T + \beta_2 C) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dC}{dr}\right) = 0$$

Граничные условия

$$v(R_1) = v(R_2) = 0, \quad T(R_1) = T_0, \quad T(R_2) = T_1,$$

$$C(R_1) = 0 \quad C(R_2) = C_* \tag{3}$$

Так как в первом уравнении системы (2) левая часть не зависит от r, а правая от z, то обе части равны постоянной.

Интегрируя второе и третье уравнения системы (2) при граничных условиях (3), находим

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_2 / R_1)}\ln\frac{r}{R_1} + T_0, \qquad C = \frac{C_*}{\ln(R_2 / R_1)}\ln\frac{r}{R_1} \tag{4}$$

Следовательно, распределение температуры и концентрации оказывается таким же, как и в случае неподвижной среды; это обстоятельство связано с тем, что гидродинамическая скорость перпендикулярна градиенту температуры и концентрации.

Первое уравнение (2) перепишем так

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + \frac{g}{\nu}(\beta_1 T + \beta_2 C) = A \tag{5}$$

где A — постоянная.

Подставив (4) в (5), получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + a\ln\frac{r}{R_1} + b = 0 \tag{6}$$

где

$$a = \left(\beta_1\frac{T_1 - T_0}{\ln(R_2 / R_1)} + \beta_2\frac{C_*}{\ln(R_2 / R_1)}\right)\frac{g}{\nu}, \qquad b = \beta_1 T_0\frac{g}{\nu} - A \tag{7}$$

Интегрируя (6) при граничных условиях (3), найдем скорость

$$v = {}^1/_4 r^2 \left[a\left(1 - \ln\frac{r}{R_1}\right) - b\right] + k\ln\frac{r}{R_1} + k_1 \tag{8}$$

Постоянные интегрирования k и k_1 определим из трех условий:

$$v(R_1) = 0, \qquad v(R_2) = 0, \qquad \int_{R_1}^{R_2} vr\,dr = 0$$

последнее из них есть условие замкнутости потока.

В результате получим значения

$$k_1 = \frac{R_1^2}{4\Delta}\left(P\ln\frac{R_2}{R_1} - MQ\right), \quad k = \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}\left[M + k_1\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right) - 1\right]$$

Здесь

$$4\Delta = {}^1/_4(R_2^4 - R_1^4)\ln\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)R_1^2\ln\frac{R_2}{R_1} + Q(R_2^2 - R_1^2)$$

$$M = {}^1/_4 a R_2^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$p = a/16\left[R_2^4\ln\frac{R_2}{R_1} - {}^1/_4(R_2^4 - R_1^4)\right]$$

$$Q = {}^1/_2\left[R_2^2\ln\frac{R_2}{R_1} - {}^1/_2(R_2^2 - R_1^2)\right]$$

Постоянная A в (5) оказывается равной

$$A = \frac{g\beta_1 T_0}{\nu} - a + \frac{1}{\Delta}\left\{P\ln\frac{R_1}{R_2} + MQ\right\}$$

Из найденного решения, в частности, следует, что закон распределения концентрации аналогичен закону распределения температуры (оба логарифмические) и что перенос тепла от горячего цилиндра к холодному определяется (как и при отсутствии растворяющихся и поглощающих тел) одной только молекулярной теплопроводностью жидкости. Диффузионный поток растворяющегося вещества радиальный и равен

$$J_r = -\rho_0 D\left(\frac{\partial C}{\partial r} + \lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0 D}{r\ln(R_2/R_1)}\left[(T_1 - T_0)\lambda + C_*\right]$$

Количество вещества, поглощаемое в единицу времени площадью, приходящейся на единицу длины поглощающего цилиндра, постоянно и равно $2\pi r J_r$. Такое же количество вещества поступает в жидкость от растворяющегося цилиндра.

Поступила 29 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1953, гл. VI.
2. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
3. Гершуни Г. З. О свободной тепловой конвекции в пространстве между вертикальными коаксиальными цилиндрами. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 4.