

ΑΣΚΗΣΗ 207

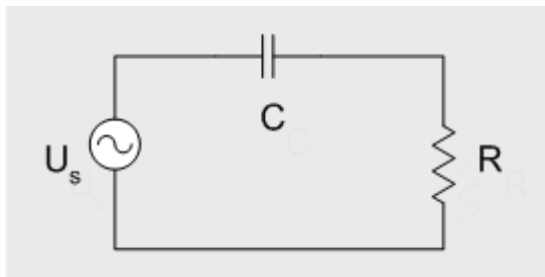
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ R-C ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Αντικείμενο της άσκησης είναι η μελέτη της συνάρτησης μεταφοράς ενός εν σειρά R-C κυκλώματος συναρτήσει της συχνότητας του σήματος εισόδου.

Η θεωρία της άσκησης καλύπτεται από το βιβλίο του Εργαστηρίου.

θ

Στο Σχ.1 φαίνεται ένα R-C κύκλωμα σειράς που διεγείρεται από μία πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Ένα τέτοιο κύκλωμα είναι ένας διαιρέτης εναλλασσόμενης τάσης όπως ακριβώς ένα εν σειρά κύκλωμα ωμικών αντιστατών είναι ένας εν σειρά διαιρέτης συνεχούς τάσης. Η κατανομή της τάσης της πηγής στα στοιχεία του κυκλώματος, δηλαδή στην αντίσταση και στον πυκνωτή, εξαρτάται από την συχνότητα της επιβαλλόμενης τάσης.



Σχ.1.

Η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι $Z_C(j\omega) = -jX_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi fC}$. Για μικρές τιμές της συχνότητας f της πηγής, η $Z_C(j\omega)$ είναι πολύ μεγάλη με αποτέλεσμα το μεγαλύτερο ποσοστό της επιβαλλόμενης τάσης να εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή, ενώ η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι μικρή. Για μεγάλες τιμές της συχνότητας f της πηγής, η $Z_C(j\omega)$ είναι πολύ μικρή με αποτέλεσμα να έχουμε μικρή τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή και μεγάλη πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση. Ένα τέτοιο κύκλωμα λειτουργεί σαν «φίλτρο» συχνοτήτων το οποίο ανάλογα με το ποια τάση θεωρούμε σαν έξοδό του, αποκόπτει τις χαμηλές ή τις υψηλές συχνότητες.

1. Λειτουργία R-C κυκλώματος ως υψιπερατό φίλτρο.

Στην περίπτωση αυτή έξοδος (απόκριση) του κυκλώματος είναι η τάση U_R στα άκρα της αντίστασης. Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι

$$H(j\omega) = \frac{V_R(j\omega)}{V_S(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$



όπου $V_R(j\omega)$ και $V_S(j\omega)$ είναι αντίστοιχα οι φάσορες των τάσεων $U_R(t)$ και $U_S(t)$.

Στις πολύ υψηλές συχνότητες η X_C γίνεται πολύ μικρή συγκρινόμενη με την R με αποτέλεσμα η τάση V_{PR} στα άκρα της αντίστασης να είναι περίπου ίση με την τάση της πηγής οπότε το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς τείνει στην μονάδα,

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_R(j\omega)}{V_S(j\omega)} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cong 1$$

η δε γωνία θ αυτής τείνει στο μηδέν.

Η γωνία της συνάρτησης μεταφοράς εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ των τάσεων U_R και U_S . Η τάση U_R προηγείται της τάσης της πηγής κατά γωνία θ όπου

$$\theta = \angle H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$

Όσο μειώνεται η συχνότητα, η X_C αυξάνεται, το ποσοστό της τάσης V_{PR} που εφαρμόζεται στην R μειώνεται επίσης, στις πολύ δε χαμηλές συχνότητες η τάση στην R τείνει στο μηδέν. Αρα το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς τείνει στο μηδέν στις χαμηλές συχνότητες και η γωνία θ στις 90° .

Έτσι, το R-C κύκλωμα, με έξοδο την τάση U_R , εμφανίζει στις υψηλές συχνότητες την τάση εισόδου στην έξοδο, χωρίς σημαντική απόσβεση και χωρίς αλλαγή της φάσης. Για το λόγο αυτό λέμε ότι το πιο πάνω κύκλωμα “περνάει” τις υψηλές συχνότητες και λέγεται “υπιπερατό κύκλωμα” ή **υπιπερατό φίλτρο**. Αντίθετα, στις χαμηλές συχνότητες η τάση εισόδου εμφανίζεται στην έξοδο με μεγάλη απόσβεση και με σημαντική αλλαγή της φάσης, δηλαδή το κύκλωμα αποκόπτει τις χαμηλές συχνότητες. Η οριακή περίπτωση είναι όταν η τάση εισόδου είναι συνεχής ($\omega=0$) όπου λόγω του πυκνωτή η τάση εξόδου είναι μηδέν.

Για μία συχνότητα της τάσης εισόδου τέτοια ώστε $X_C=R$ η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R είναι το μισό της μέγιστης ισχύος, η τάση εξόδου είναι

$$V_{PR} = 0,707 \cdot V_{PS} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{PS} \text{ και η γωνία } \theta \text{ είναι } 45^\circ. \text{ Για όλες τις συχνότητες που}$$

είναι μεγαλύτερες από την f_1 η τάση V_{PR} είναι μεγαλύτερη από $0,707 \cdot V_{PS}$ και η γωνία θ μειώνεται. Θεωρούμε ότι για τις συχνότητες αυτές η απόκριση του φίλτρου είναι ικανοποιητική δηλαδή δεν έχουμε μεγάλη απόσβεση της τάσης εισόδου και δεν έχουμε σημαντική αλλαγή στη φάση. Η συχνότητα $f_1 = 1/2\pi RC$ ($X_C=R$)

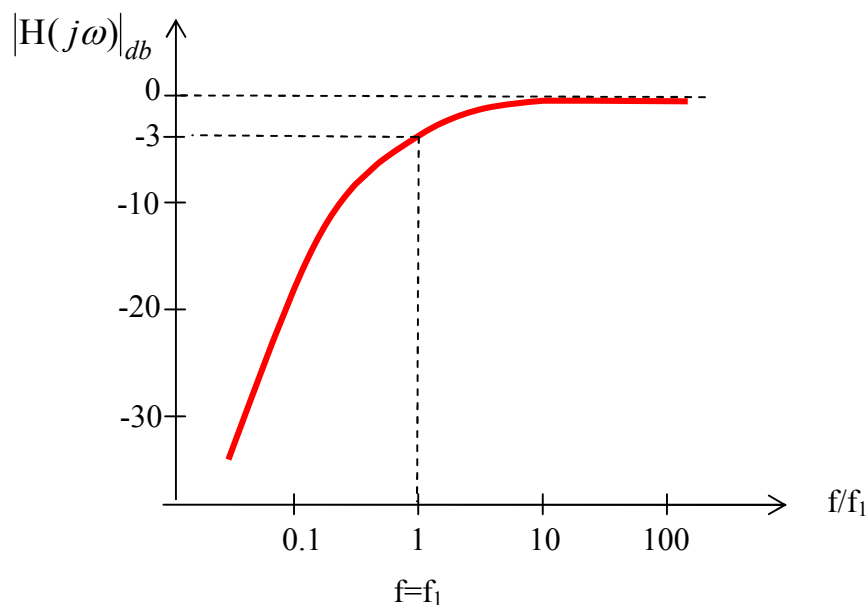


δηλ. $1/2\pi fC=R$) λέγεται **συχνότητα κάτω αποκοπής** με την έννοια ότι το κύκλωμα RC “κόβει” τις συχνότητες που είναι μικρότερες της f_1 και “περνάει” όλες τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες της f_1 . Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι

Η περιοχή συχνοτήτων που “κόβει” ή “περνάει” ένα RC κύκλωμα είναι συνάρτηση των τιμών των στοιχείων R και C.

Ας εξετάσουμε τώρα τη γραφική παράσταση του μέτρου $|H(j\omega)|$ και της γωνίας $\angle H(j\omega)$ για να δούμε την εξάρτησή τους από την συχνότητα. Γι’ αυτή τη γραφική παράσταση ο συνηθέστερος τρόπος είναι το διάγραμμα **Bode** όπου το μέτρο $|H(j\omega)|$ σχεδιάζεται σε db, συναρτήσει του λογαρίθμου της συχνότητας.

$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log|H(j\omega)| = 20 \cdot \log \left| \frac{V_R(j\omega)}{V_S(j\omega)} \right|$$



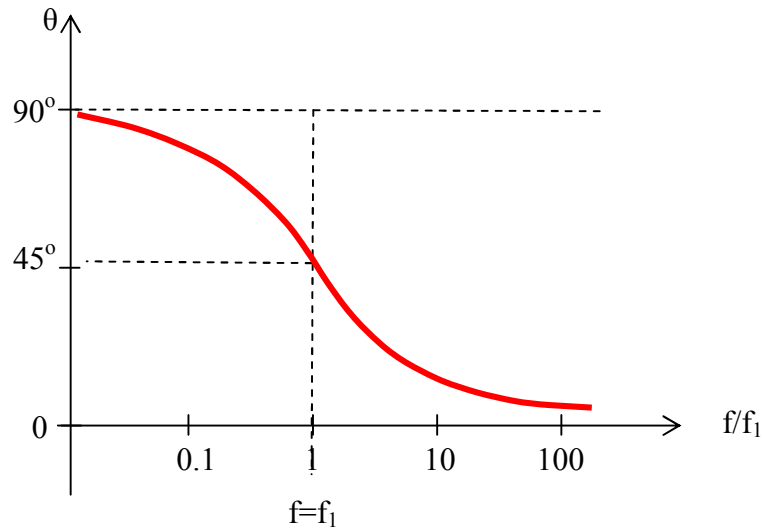
Σχ. 2. Διάγραμμα μέτρου υπερπαρατού φίλτρου.

Σημειώστε ότι στη συχνότητα f_1 εφόσον $\left| \frac{V_{PR}}{V_{PS}} \right| = 0.707$ τότε $\left| \frac{V_{PR}}{V_{PS}} \right|_{db} = -3db$.

Για το λόγο αυτό η συχνότητα f_1 λέγεται και συχνότητα $-3db$.

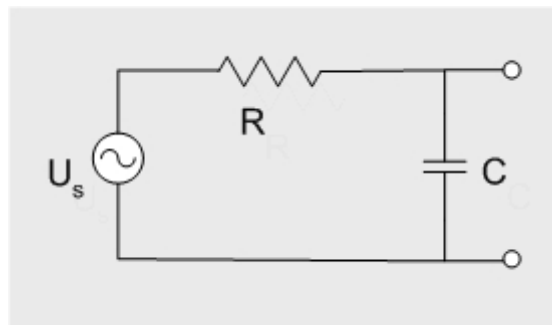


Η γραφική παράσταση για τη γωνία θ της συνάρτησης μεταφοράς γίνεται επίσης συναρτήσει του λογαρίθμου f/f_1 . Σημειώστε ότι στη συχνότητα f_1 η γωνία είναι 45° .



Σχ. 3. Διάγραμμα γωνίας υπερπαρατού φίλτρου.

2. Λειτουργία R-C κυκλώματος ως κατωδιαβατό φίλτρο.



Λόγω της εξάρτησης της $Z_C(j\omega)$ από τη συχνότητα (βλ.σελ.1), η τάση εξόδου U_C θα πλησιάζει την τάση εισόδου όταν η συχνότητα της τάσης εισόδου είναι χαμηλή, ενώ θα είναι πολύ μικρή στις υψηλές συχνότητες.

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι τώρα

$$H(j\omega) = \frac{V_C(j\omega)}{V_S(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$|H(j\omega)| = \frac{|V_C(j\omega)|}{|V_S(j\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

και η γωνία της είναι $\theta = -\tan^{-1} \omega RC$

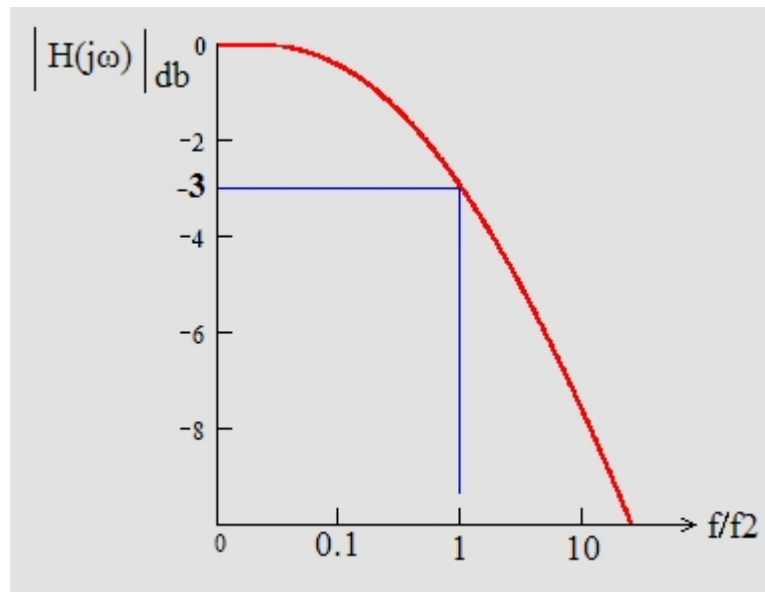
Το μέτρο πλησιάζει στην μονάδα στις χαμηλές συχνότητες ενώ είναι πολύ μικρότερο της μονάδας στις υψηλές συχνότητες. Η γωνία θ πλησιάζει στο μηδέν στις χαμηλές συχνότητες και στις 90° στις υψηλές συχνότητες (η $U_s(t)$ προηγείται της $U_c(t)$).

Το κύκλωμα λειτουργεί τώρα ως κατωδιαβατό φίλτρο συχνοτήτων.

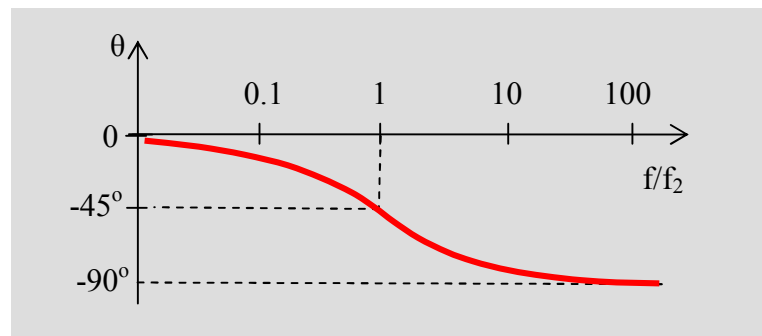
Τα διαγράμματα μέτρου και γωνίας φαίνονται στο Σχ.4 και στο Σχ.5.

Η συχνότητα **άνω αποκοπής** f_2 είναι η συχνότητα για την οποία $V_{PC} = 0,707 \cdot V_{PS}$ ή

$$|H(j\omega)| = 0.707 \text{ και } \theta = -45^\circ \quad (f_2 = f_1 = 1/2\pi RC)$$



Σχ.4



Σχ.5



Πειραματική Διάταξη-Μετρήσεις.

Ρυθμίστε τη τάση της γεννήτριας στα 5V_{p-p}.

A. Υψιπερατό φίλτρο.

Για τιμές των στοιχείων $R=10\text{ K}\Omega$ και $C=0.01\text{ }\mu\text{F}$

- 1) Μετρήστε τις τιμές της U_R στον παλμογράφο για τις συχνότητες της γεννήτριας του πίνακα
- 2) Μετρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς σε db για τις ίδιες συχνότητες.
- 3) Βρείτε πειραματικά τη συχνότητα κάτω αποκοπής f_1 .

B. Κατωδιαβατό φίλτρο.

Για τις ίδιες τιμές των στοιχείων R,C και τις ίδιες συχνότητες

- 1) Μετρήστε τις τιμές της U_C στον παλμογράφο.
- 2) Μετρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς σε db.
- 3) Βρείτε πειραματικά τη συχνότητα άνω αποκοπής f_2 .

Ισχύει $V_{ps}=V_{PR}+V_{pc}$? και αν όχι γιατί.



Επεξεργασία μετρήσεων.

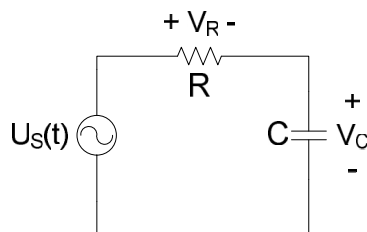
- A) Σχεδιάστε σε ημιλογαριθμικό χαρτί τα διαγράμματα μέτρου υψιπερατού και κατωδιαβατού φίλτρου συναρτήσεως του λόγου f/f_1 .
- B) Σχεδιάστε σε ημιλογαριθμικό χαρτί τις θεωρητικές καμπύλες της γωνίας θ της συναρτήσεως μεταφοράς συναρτήσεως του λόγου f/f_1 .

f (KHz)	U_{pR}	U_{pC}	θ_1	θ_2	$ U_R/U_S _{db}$	$ U_C/U_S _{db}$	f/f ₁
0.1							
0.5							
1							
1.5							
5							
10							
20							

Ερωτήσεις προς Μελέτη

Για να παρακολουθήσετε την Άσκηση θα πρέπει να γνωρίζετε τουλάχιστον το 80% των απαντήσεων.

1. Στο R-C κύκλωμα του σχήματος δώστε τον τύπο της συνάρτησης μεταφοράς εάν,
α) Το κύκλωμα λειτουργεί ως υπερβατό φίλτρο συχνοτήτων,
β) Το κύκλωμα λειτουργεί ως κατωδιαβατό φίλτρο συχνοτήτων.



2. Σημειώστε τη σωστή απάντηση. Ένα υπερβατό φίλτρο αποκόπτει:
α) Τις Υψηλές συχνότητες
β) Τις Χαμηλές συχνότητες
3. α) Πόσο είναι το πλάτος της τάσης $U_R(t)$ όταν $f=f_1$;
β) Πόσο είναι το πλάτος της τάσης $U_C(t)$ όταν $f=f_1$;
4. Σχεδιάστε τη συνάρτηση μεταφοράς σε db ενός κατωδιαβατού και ενός υπερβατού R-C κυκλώματος σειράς, συναρτήσει της συχνότητας.
5. Αν μια τάση έχει πλάτος 1 Volt ποια είναι η τιμή της σε db;
6. Εάν η συχνότητα της τάσης της πηγής είναι ίση με τη συχνότητα αποκοπής τότε:
α) $H(j\omega)_{db} = 0$, β) $H(j\omega)_{db} = -3$.
7. Γιατί η συχνότητα αποκοπής λέγεται και συχνότητα -3db;
8. Στο υπερβατό κύκλωμα R-C σειράς η διαφορά φάσης μεταξύ των $U_R(t)$ και $U_S(t)$:
α) είναι πάντοτε μηδέν,
β) παίρνει τιμές από 0° έως 90° ,
γ) παίρνει τιμές από 0° έως 180° .