Aplikasi Bilangan Kompleks pada Dinamika Fluida

Evita Chandra (13514034)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
evita.chandra@s.itb.ac.id

***Abstract*— Dalam bidang *engineering,* bilangan kompleks sangat sering digunakan dan diaplikasikan untuk mengatasi permasalahan-permasalahan yang ada. Oleh karena itu, dalam makalah ini, akan dibahas penerapan bilangan kompleks pada dinamika fluida. Di dalam teori yang berhubungan dengan dinamika fluida, bilangan kompleks banyak digunakan dalam fungsi –fungsi yang digunakan untuk menjelaskan potensial aliran dalam 2 dimensi.**

***Kata kunci*— bilangan kompleks, dinamika fluida, aliran, inkompresibel, 2 dimensi, Cauchy-Riemann**

I. PENDAHULUAN

Dinamika fluida adalah salah satu ilmu yang mempelajari perilaku dari zat cair dan gas dalam keadaan diam atau bergerak dan interaksinya dengan benda lain. Cara penyelesaian dari permasalahan yang berhubungan dengan dinamika fluida biasanya melibatkan perhitungan seperti kecepatan, tekanan, kepadatan, dan suhu, sebagai fungsi-fungsi kompleks yang beberapa juga menggunakan bilangan kompleks dalam kompleks perhitungannya.

Salah satu aspek yang dikaji dalam dinamika fluida adalah visualisasi aliran. Visualisasi dapat ditinjau secara dua dimensi ataupun tiga dimensi. Dalam menjelaskan sifat-sifat aliran potensial dua dimensi, digunakan bilangan kompleks untuk memecahkan permasalah tersebut. Oleh karena itu penulis ingin menjelaskan penerapan bilangan kompleks dalam memvisualisasikan fenomena aliran fluida dua dimensi.

II. LANDASAN TEORI

Agar lebih mudah memahami permasalahan dan solusi yang ada dalam makalah ini, berikut akan dijelaskan teori-teori yang digunakan.

2.1. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan imajiner yang memiliki bentuk:

$$a+bi$$

Dimana, a dan b : bilangan riil,

i : bilangan imajiner dengan sifat $i^2 = -1$.

Bilangan riil a disebut juga sebagai bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan real b disebut bagian imajiner. Jika pada suatu bilangan kompleks, nilai b adalah 0, maka bilangan kompleks tersebut menjadi sama dengan bilangan real a. Sebagai contoh, 3 + 2i adalah bilangan kompleks dengan bagian riil 3 dan bagian imajiner 2i.

Bilangan kompleks dapat dihitung seperti operasi aritmatika biasa, yaitu ditambah, dikurang, dikali, dan dibagi seperti bilangan riil; namun bilangan kompleks juga mempunyai sifat-sifat tambahan yang unik. Setiap persamaan aljabar polynomial pada bilangan kompleks mempunyai solusi bilangan kompleks, tidak seperti bilangan riil yang hanya memiliki sebagian.

a. Operasi Bilangan Kompleks

Operasi bilangan kompleks menggunakan sifat-sifat aljabar seperti asosiatif, komutatif, dan distributif, dan dengan persamaan $i^2 = -1$:

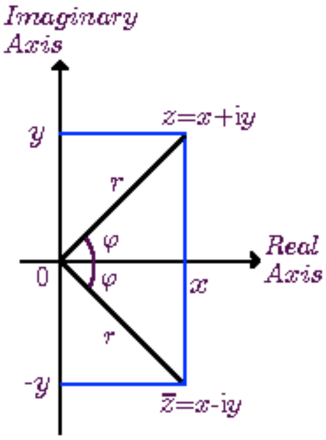
$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a-c) + (b-d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bd\,i^2 = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

Definisi formal bilangan kompleks adalah sepasang bilangan real (a, b) dengan operasi sebagai berikut:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) . (c,d) = (ac-bd, bc+ad)$$

Karena bilangan kompleks a + bi merupakan spesifikasi unik yang berdasarkan sepasang bilangan riil (a, b), bilangan kompleks mempunyai hubungan korespondensi satu-satu dengan titik-titik pada satu bidang yang dinamakan bidang kompleks.

b. Bidang Kompleks



Gambar 2.1. Bidang Kompleks

Bilangan kompleks dapat divisualisasikan sebagai titik atau vektor posisi pada sistem koordinat dua dimensi yang dinamakan bidang kompleks atau Diagram Argand.

Koordinat Cartesian bilangan kompleks adalah bagian riil x dan bagian imajiner y, sedangkan koordinat sirkulernya adalah r = |z|, yang disebut sebagai modulus, dan φ = arg(z), yang disebut sebagai argumen kompleks dari z (Format ini disebut format mod-arg). Setelah dikombinasikan dengan Rumus Euler, dapat diperoleh:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

Perlu diperhatikan bahwa argumen kompleks adalah unik modulo 2π, jadi, jika terdapat dua nilai argumen kompleks yang berbeda sebanyak kelipatan bilangan bulat dari 2π, kedua argumen kompleks tersebut adalah sama (ekivalen).
Dengan menggunakan identitas trigonometri dasar, dapat diperoleh:

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Penjumlahan dua bilangan kompleks sama seperti penjumlahan vektor dari dua vektor, dan perkalian dengan bilangan kompleks dapat divisualisasikan sebagai rotasi dan pemanjangan secara bersamaan.

Perkalian dengan i adalah rotasi 90 derajat berlawanan dengan arah jarum jam (π/2 radian). Secara geometris, persamaan i2 = −1 adalah dua kali rotasi 90 derajat yang sama dengan rotasi 180 derajat (π radian).

c. Teori Cauchy-Riemann

Limit dan kekontinuitasan dari suatu fungsi pada suatu bidang kompleks dapat digunakan untuk mencari tahu sifat analitik dari fungsi kompleks tersebut.

Suatu fungsi kompleks f(s) dikatakan mempunyai limit l untuk s mendekati s_0 jika untuk suatu epsilon > 0 yang diketahui, ada sebuah delta > 0 sehingga | f(s)- l | < epsilon kalau 0 < | s- s_0| < delta.

Dengan cara yang sama, f(s) dikatakan kontinyu di s_0 jika untuk sebuah epsilon > 0 yang diketahui, ada sebuah delta > 0 sehingga | f(s)-f(s_0) | < \epsilon kalau | s- s_0 | < delta. Pilihan lain, f(s) kontinyu di s_0 jika lim{s-s_0} f(s)= f(s_0).

Selanjutnya jika f(s) mempunyai limit untuk s = s_0, maka f(s) dikatakan analitik di s_0.

Untuk u dan v adalah fungsi riil dari x dan y pada {R}, syarat yang dibutuhkan adalhialah bahwa u dan v memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2.2. Dinamika Fluida

Fluida dinamis adalah fluida (bisa berupa zat cair, gas) yang bergerak.

Ciri-ciri fluida dinamis yang ideal adalah:

- Tidak kompresibel, artinya bahwa dengan adanya perubahan tekanan, volume fluida tidak berubah.
- Tidak memngalami gesekan, artinya bahwa pada saat fluida mengalir,gesekan antara fluida dengan dinding tempat mengalir dapat diabaikan.
- Tidak memngalami gesekan, artinya bahwa pada saat fluida mengalir,gesekan antara fluida dengan dinding tempat mengalir dapat diabaikan.
- Aliran stasioner, artinya tiap partikel fluida mempunyai garis alir tertentu dan untuk luas penampang yang sama mempunyai laju aliran yang sama.

Semua zat cair yang dapat mengalir dari satu tempat ke tempat yang lain dapat dikelompokan ke dalam fluida. Selain zat cair, zat gas juga termasuk fluida. Zat gas juga dapat mengalir dari satu satu tempat ke tempat lain.

2.2.1. Jenis –Jenis aliran Dinamika Fluida

- Aliran 1D, 2D, dan 3D

Aliran 1D : aliran hanya terjadi pada satu dimensi. Aliran 2D : aliran hanya terjadi pada bidang 2 dimensi. Aliran 3D : aliran terjadi pada ruang 3 dimensi.

- Compressible dan incompressible flow

Compressible flow adalah aliran dimana densitas fluidanya tidak berubah didalam medan aliran (flow field), misalnya aliran air. Sedangkan incompressible flow adalah aliran dimana densitas fluidanya berubah didalam medan aliran, misalnya aliran udara.

- Steady dan unsteady flow

Steady flow adalah aliran yang mana kondisi alirannya (kecepatan, tekanan, densitas, dsb) tidak berubah dengan waktu. Sebaliknya, unsteady flow adalah aliran dimana kondisi alirannya berubah dengan waktu.

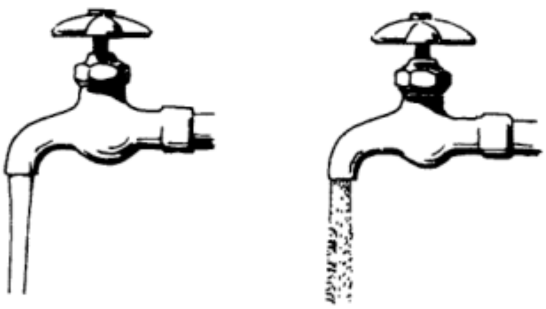
Sebagai contoh, pada saat kita memutar penutup kran maka air yang mengalir adalah unsteady flow. Namun ketika bukaan kran tidak berubah maka alirannya adalah steady flow.

Definisi yang lebih sempit adalah dengan membatasi kondisi aliran pada kecepatan. Dengan demikian, steady flow adalah aliran yang kecepatannya tidak berubah dengan waktu, sedangkan unsteady flow adalah aliran yang kecepatannya berubah dengan waktu.

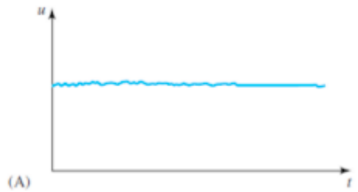
- Laminar dan turbulent flow

Aliran viscous fluid bisa dibedakan menjadi aliran laminar dan aliran turbulent. Pada aliran laminar, partikel-partikel fluida mengalir lembut bagikan lapisan-lapisan laminar. Sebaliknya, pada aliran turbulen, partikel-partikel fluida saling bercampur dan mengalir secara tidak beraturan.

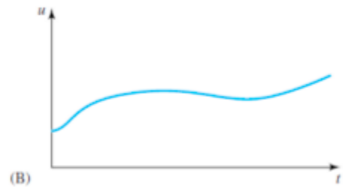
Untuk menyatakan besaran-besaran seperti kecepatan, tekanan, dsb pada aliran turbulent, biasanya dipakai statistical average. Kecepatan fluida pada saat terjadi transisi antara laminer dan turbulent disebut dengan kecepatan kritis.



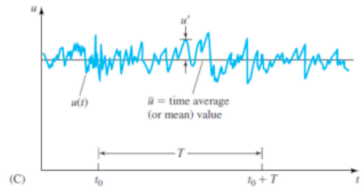
Gambar 2.2. Contoh Aliran Laminar dan Turbulen



Gambar 2.3. Steady Laminar



Gambar 2.4. Unsteady Laminar



Gambar 2.5. Steady Turbulent

III. PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini, kita akan membahas cara menerapkan teori bilangan kompleks ke dalam kasus penghitungan potensial untuk aliran inkompresibel dimensi 2.

Untuke menghitung potensial aliran, kita perlu menggunakan persamaan Laplache, yaitu:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

Aliran Potensial yang incompressible memenuhi persamaan Laplache sehingga untuk kasus 2 dimensi menjadi :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_2}^2} = 0$$

Apabila solusi dari persamaan ini telah didapatkan maka kecepatan u1 & u2 dapat ditentukan.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1},\ u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$$

Persamaan kontinuitas untuk aliran incompressible

2 dimensi dapat dipenuhi secara otomatis apabila kita definisikan fungsi arus (ψ) seperti,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2},\; u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Dengan demikian maka fungsi φ dan ψ dapat dihubungkan menjadi persamaan,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \text{ dan } \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Dalam teori bilangan kompleks, persamaan diatas dikenal sebagai persamaan Cauchy-Riemann.

Persamaan ini menjelaskan kondisi yang harus dipenuhi oleh sebuah fungsi F(z) apabila fungsi tersebut adalah fungsi analitik dimana:

$$F(z) = \phi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$$
$$z = x_1 + ix_2$$

Dengan demikian, maka kita dapat menggunakan hasil-hasil dari teori bilangan kompleks untuk mendapatkan solusi dari aliran inkompresible potensial 2 dimensi dan hal tersebut sangat memudahkan secara matematis.

Kelemahan dari metode ini adalah bahwa metode ini termasuk metode inverse. Atau dengan kata lain, dalam metode ini kita menentukan sebuah fungsi F(z) yang analitik kemudian baru kita lihat aliran apa yang direpresentasikan oleh F(z).

Akan tetapi metode ini juga memiliki keuntungan lain, yaitu dengan menggunakan metode ini kita tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial parsial dan ini tentunya sangat membantu

Apabila fungsi analitik F(z) telah ditentukan, kecepatan u1 dan u2 didapatkan dengan mengambil turunan dari F(z),

$$W \equiv \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = u_1 - iu_2$$

sehingga,

$$W = -i\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = -i\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = u_1 - iu_2$$

Apabila kita gunakan koordinat polar seperti digambarkan di atas maka,

$$u_1 = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta$$
$$u_2 = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta$$

sehingga,

$$W = u_1 - iu_2 = (u_r - iu_\theta)e^{-i\theta}$$

Kemudian kita lihat integral tertutup dari W.

$$\oint W dz = \oint \frac{dF}{dz} dz = \oint (u_1 - iu_2)(dx_1 + idx_2)$$
$$= \oint (u_1 dx_1 + u_2 dx_2) + i\oint (u_1 dx_2 - u_2 dx_1)$$
$$\oint W dz = \Gamma + im$$

dimana Γ adalah sirkulasi dan m adalah *source strength*.

Dengan menggunakan Terorema Residu, yang merupakan salah satu teorema penting dalam teori bilangan kompleks, yang berisi :

Apabila W adalah fungsi analytic kecuali di beberapa titik dalam domain maka,

$$\oint W dz = 2\Pi i \sum_k A_k$$

di mana A_k adalah residu dari W (A_k bisa berupa bilangan real atau bilangan kompleks).

Dengan demikian maka,

$$\boxed{\Gamma + im = 2\Pi i \sum_k A_k}$$

IV. KESIMPULAN

Bilangan kompleks dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai macam persoalan matematika yang kompleks

Dalam makalah ini diaplikasikan bilangan kompleks untuk bagian dari kajian ilmu dinamika fluida, yaitu potensial aliran inkompresibel dimensi 2. Dalam penerapannya digunakan juga persamaan Laplache, Cauchy-Riemann, serta teroema residu. Dengan menggunakan bilangan kompleks, sangat memudahkan untuk mencari solusi dari aliran inkompresibel potensial 2 dimesi secara matematis karena tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Akan tetapi metode ini juga memiliki kelemahan yaitu harus menentukan dulu fungsi F(z) yang analitik barulah kemudian bisa dilihat aliran apa yang direpresentasikan oleh F(z).

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur, saya ucapkan kepada Tuhan yang Maha Esa atas terselesaikannya penyusunan makalah guna memenuhi tugas mata kuliah Aljabar Geometri IF2123. Terima kasih kepada Dosen Pengajar Mata Kuliah IF2123 Aljabar Geometri, Pa Rinaldi Munir dan Pa Judhi Santoso

atas pengarahan, bimbingan, serta ilmu yang diberikan dalam penyusunan makalah ini sehingga makalah ini dapat selesai sesuai dengan yang diharapkan.

Makalah ini disusun dengan tujuan sebagai informasi serta untuk menambah wawasan yang berhubungan dengan bagian ilmu Aljabar Geometri.

Semoga makalah ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca. Mohon maaf apabila dalam penyusunan makalah ini terdapat kesalahan baik dalam kosa kata maupun isi dari keseluruhan makalah ini.

REFERENCES

[1] Aliran Inkompresibel (2011). https://labmefluftunhalu.wordpress.com/2011/12/. Tanggal Akses : 15 Desember 2015 pukul 07.06

[2] Fluida Dinamis (2015). http://muputipiapa.blogspot.co.id/2015/02/fluida-dinamis.html. Tanggal Akses : 14 Desember pukul 23.50

[3] Ivansyah Okto. " Power and Complex Number". Bandung ITB.2012.

[4] Sifat Analitik Fungsi Kompleks (2011). https://matematiku.wordpress.com/2011/10/13/sifat-analitik-fungsi-kompleks/. Tanggal Akses : 15 Desember 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

Evita Chandra / 13514034