УДК 53(092)+323.(092)

З. В. Зарицька – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Волинського національного університету імені Лесі Українки;
І. Р. Ковальчук – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Волинського національного університету імені Лесі Українки;
М. Є. Коренков – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Волинського національного університету імені Лесі Українки;
С. Ю. Дзядик – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики державного університету інформаційно-комунікаційних технологій (м. Київ);
Ю. В. Дзядик – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Центру інформаційних технологій та систем (м. Київ);
Л. І. Філозоф – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу Волинського національного університету імені Лесі Українки

Біографія і стислий огляд творчості члена-кореспондента НАНУ, заслуженого діяча науки і техніки, доктора фізико-математичних наук, професора Владислава Кириловича Дзядика

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу ВНУ ім. Лесі Українки

Висвітлено життєвий шлях та досягнення в математиці всесвітньо відомого вченого Владислава Кириловича Дзядика.

Ключові слова: життєвий шлях, наукова діяльність, основні результати, наукова школа, апроксимація.

Зарицкая З. В., Ковальчук И. Р., Коренков Н. Е., Дзядык С. Ю., Дзядык Ю. В., Философ Л. И. Биография и краткий обзор творчества члена-корреспондента НАНУ, заслуженного деятеля науки и техники, доктора физико-математических наук, профессора Владислава Кирилловича Дзядыка. Рассматривается жизненный путь и достижения в математике всемирно известного учёного Владислава Кирилловича Дзядыка.

Ключевые слова: жизненный путь, научная деятельность, основные результаты, научная школа, аппроксимация.

Zarytska Z. V., Kovalchuk I. R., Korenkov M. Ye., Dzyadyk S. Yu., Dzyadyk Yu. V., Filozof L. I. The Biography and Concise Review of the Creative Work of Member of National Academy of Science of Ukraine, Honoured Worker of Science and Technique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor Vladyslav Dzyadyk. The life and the achievements in mathematics of world-known scientist Vladyclav Dzyadyk are considered.

Key words: life, scientific activity, the main results, scientific school, approximation.

Є математики-тактики. Вони відразу штурмують задачі, які не піддалися зусиллям попередніх дослідників. Інші математики − стратеги. Вони спочатку зосереджено аналізують поняття, які охоплюються задачею, вивчають зв'язки між ними і т. ін., в результаті чого сам розв'язок видається майже тривіальним. Обидва ці підходи, безсумнівно, важливі і плідні для розвитку математики.

Владислав Дзядик

Постановка наукової проблеми та її значення. Формулювання мети та завдань статті. У сузір'ї славетних імен діячів науки, на які щедра Україна, особливе місце належить Владиславові Кириловичу Дзядику (1919−1998) − члену-кореспонденту НАНУ, заслуженому діячеві науки й техніки, докторові фізико-математичних наук, професорові. Основні віхи життєвого шляху та наукової діяльності вченого загалом висвітлено, зокрема, у журнальних та газетних статтях. Однак уважаємо, що життя й творчість усесвітньо відомого математика заслуговує докладнішого вивчення передусім у хронологічному плані. Гостро постає проблема вшанування в Україні, й на Волині зокрема, пам'яті славетного земляка, що і є **метою** нашої статті.

Виклад основного матеріалу

І. Основні віхи життя Владислава Кириловича Дзядика

18.02.1919 р. – народився в селищі Сахновщина Харківської області. Батько Кирило Павлович із Сокаля на Львівщині, мати Феодосія Трохимівни (дівоче прізвище − Кацай) з Харківщини.

1937 р. – відмінник навчання, вступає на факультет іноземних мов Київського університету, хоча мріяв учитися на математичному. А не взяли на математичний, оскільки квота відмінників заповнена, складати вступні разом з іншими не дозволили: "Не положено!" І так щороку, аж до 1941 р., Владислав просив декана математичного факультету, щоб узяв на свій факультет, а той відмовляв.

1937 р. – репресували батька, про якого і досі нема відомостей.

1941 р. і 1945 р. − мобілізували до лав Радянської армії, попав у Харківську військову операцію "Котел", яка закінчилася трагічно. Коли вибирався з оточення, кулі дзижчали біля голови, не зачепивши його. З цілого класу залишились живими лише двоє.

1943–1945 рр. – на примусових роботах у Німеччині.

1945–1946 рр. – учителює на Харківщині.

1946–1951 рр. – навчання в Дніпропетровському університеті, де виділявся серед студентів унікальними здібностями, мав оригінальні роботи з теорії функцій; його учитель Сергій Михайлович Нікольський (якому 30.04.05 р. виповнилося 100 літ, і досі плідно працює на педагогічній та науковій ниві) не один раз називав Владислава Кириловича крупним спеціалістом, одним із найкращих своїх учнів.

1951–1953 рр. – викладає математику, астрономію та німецьку мову в Луківській та Цуманській середніх школах Волині.

1953–1960 рр. – працює в Луцькому педінституті імені Лесі Українки. Як попав до Луцького педінституту? Професор С. І. Зуховицький дізнався про такого вчителя і взяв його на роботу, але побутові умови були дуже складними. Після захисту кандидатської дисертації 1955 р. В. К. Дзядик дістав запрошення працювати у Дніпропетровському державному університеті, тому він подав заяву на звільнення ректорові Д. М. Цимбалюку. На запитання "Що Вам не подобається?" Владислав Кирилович відповів: "Погана квартира і те, що посилають у колгосп, а у мене хворий шлунок". Цимбалюк звернувся до Грушецького (першого секретаря обкому партії), той викликав Дзядика і сказав: "Буде хороша квартира і не будете їздити в колгосп". Так і сталось.

У Луцькому педінституті В. К. Дзядик встановив декілька рекордів, а саме: чотири кандидатські іспити склав на "відмінно" за сім місяців, захистив у 1955 р. кандидатську дисертацію, а вже в 1960 р. – докторську, не будучи при цьому ні в аспірантурі, ні в докторантурі, одночасно виконуючи величезне педагогічне навантаження (до 700 аудиторних годин на рік), працюючи по 18 год на добу. Починаючи з 1956 р., на міжнародних та всесоюзних з'їздах і конференціях, симпозіумах, школах Владислав Кирилович систематично виступає з об'ємними доповідями (часто німецькою, англійською чи французькою мовами). До речі, за чотири роки (1937−1941) він вивчив три мови (латинську, французьку, англійську) так, що міг розмовляти ними.

1960 р. – у вересні запрошують до Інституту математики НАНУ.

Із вересня 1960 р. майже до кінця життя Владислав Кирилович працює в Інституті математики НАНУ (завідувачем відділу теорії функцій (1963–1992 рр.)) і за сумісництвом у Київському національному університеті імені Т. Шевченка (завідувачем кафедри математичного аналізу (1961−1967 рр.)).

1969 р. – обраний членом-кореспондентом АН УРСР.

29.05.1970 р. – нагороджено медаллю до 100-річчя Леніна.

03.10.1984 р. − нагороджено медаллю "Ветеран праці".

03.07.0991 р. – удостоєний звання "Заслужений діяч науки і техніки УРСР".

1989 р. (31.08–08.09) – у с. Світязь відбулася Всесоюзна школа "Теорія наближення функцій", присвячена 70-річчю члена-кореспондента АН УРСР Владислава Кириловича Дзядика. Головою оргкомітету був академік АН СРСР С. М. Нікольський, членами оргкомітету чотири доктори наук, учні В. К. Дзядика, і Л. І. Філозоф. У роботі школи взяли участь 143 учених, серед яких 28 докторів наук, у т. ч. шість членів-кореспондентів АН, 95 – кандидатів наук. Представлено 32 міста з десяти союзних республік.

Діти: Юрій (1946), Надія (1957), Тетяна (1974).

II. Усупереч…
Стресові, смертельні ситуації

1. Пережив три голодомори: 20-х, 32−33-х, 40-х рр. У 20-ті рр. мама Феодосія Трохимівна брала маленького Владислава на руки, їхала на відкритих платформах і в товарняках у пошуках шматка хліба.

2. 1937 р. – репресовано батька Кирила Павловича.

3. 1937 р. – не приймають на омріяний ще з шкільних років математичний факультет Київського університету (до речі, першокурсником мешкав у кімнаті з математиками, за два місяці вивчив алгебру і геометрію).

1938, 1939, 1940, 1941 рр. – студента не переводять з факультету іноземних мов на математичний.

4. Колісниця війни прокотилася по його долі. У серпні 1941 р. призивають в армію. У травні 1942 р. Харківська операція "Котел", закінчилася катастрофою, солдатів відпускають додому. Під градом куль, які дзижчали біля голови, Владислав Кирилович добирається додому. Незабаром забирають до Німеччини в неволю.

5. 1943–1945 рр. – фашистська неволя; звільнений Радянською армією. Владислава Кириловича забирають знову в армію. (Французи запрошували до себе. Міг оселитися у Франції, тим більше, що там мешкала його тітка.)

6. 1951–1953 рр. − Владиславові Кириловичу не дозволили працювати у ВНЗ, не прийняли до аспірантури, хоч у нього були вже наукові праці.

7. Захист кандидатської дисертації міг би бути не 1955 р., а на два-три роки раніше, якби не знайшлися "добрі люди", що сповістили куди треба, що він син "ворога народу". Отак шлейф КДБ тягнувся за нашим героєм довгі-довгі роки (задача Фавара розв'язана 1951−1953 рр.; а надрукована робота у співавторстві з О. П. Тіманом).

ІІІ. Відгуки про Владислава Кириловича Дзядика

1. Як поціновував свого учня С. М. Нікольський ми писали вище.

2. Про 8-річний період роботи (1952−1960) Владислава Кириловича С. Стєчкін сказав: "В. Дзядик поставив своєрідний рекорд: на сьогоднішній день йому в теорії функцій належать результати, які найбільш важко доводяться".

3. А. Л. Кудрявцев у відгуку на докторську дисертацію (яку В. Дзядик захищав у Москві в Математичному інституті імені В. Стеклова АН СРСР) писав, що "…вона є глибоким фундаментальним дослідженням…, у ній розв'язано ряд… задач, над якими трудилося багато першокласних спеціалістів у цій галузі".

4. Про дослідження В. Дзядика знаходимо схвальні відгуки в багатьох авторитетних зарубіжних виданнях. Наприклад, у монографії К. Лоренца "Теорія апроксимації" (1966, Нью-Йорк, Чикаго, Сан-Франциско, Торонто, Лондон) і в книзі Гайєра "Лекції з теорії апроксимації", яка перекладена з німецької англійською та китайською мовами. Зокрема, в останній читаємо: "Рівно 100 років тому Рунге довів першу загальну теорему теорії апроксимації у комплексні області. З того часу предмет дуже розрісся… На розвиток теорії в останні десятиліття справили величезний вплив визначні дослідження радянських математиків, зокрема С. Мергельна та вірменської школи, В. Дзядика й української школи та багатьох ін…".

5. Свідченням визнання величезних успіхів В. Дзядика в математиці є дві міжнародні конференції. Одна з теорії наближення функцій та її застосувань, присвячена його пам'яті, яка відбулася у Києві 23–31 травня 1999 р. У заході взяли участь понад 130 учених, із них 12 осіб з Росії, іще 12 з інших країн СНД, доповідали вчені з Туреччини, Франції, Польщі, Болгарії, Ізраїлю, Китаю, США, Румунії, Єгипту, Канади, Німеччини. Друга — "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів", присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919–1998), яка відбулася 22−26 серпня 2009 р. на оз. Світязь, Волинь, Україна.

6. Численні відгуки про вченого його колишніх студентів про те, що сильним студентам він давав додаткові завдання та консультації. У післявоєнні часи Владислав Кирилович наполегливо працював із сільською молоддю Харківщини та Волині, підвищуючи її рівень із математики (багато з них пов'язали своє життя з математикою), чесно оцінював знання студентів на іспитах. Сам щодня розв'язував важкі задачі (щоб не втрачати форму) і своїм студентам радив мати товстий зошит із задачами, які можна було б запропонувати тим, хто звернеться за порадою щодо вступу на математичний факультет. Г. А. Алібеков говорить, що В. К. Дзядик учив не лише математиці, але й життю.

Улюблена математика "переслідувала" вченого скрізь, і навіть на відпочинок з родиною він брав матеріали для роботи.

У Владислава Кириловича ніколи не було відпусток, як це розуміє багато людей.

− Одного разу, щоб по-справжньому відпочити, вирішили не брати із собою паперу, − розповідає дружина Світлана Юріївна. − А я взяла дві нові чоловічі сорочки з картонними вкладками. І вони рясніли формулами, бо не працювати Владислав Кирилович просто не міг. Уважав, що лінощі − "ракова пухлина" суспільства. Працював часто по 18 годин на добу.

Лекції, доповіді В. К. Дзядика характеризувалися високим науковим рівнем, лаконічністю, доступністю, філігранною строгістю і логікою, викликали великий інтерес у слухачів. Математичний аналіз ніколи не читав однаково, а щоразу допрацьовував.

Перу вченого належить 150 статей, чотири монографії, 2-томний підручник із математичного аналізу, низка науково-методичних праць, задуми про які часто виникали під час прогулянок, на пікніках, у розмовах.

Педагогічну й наукову діяльність Владислав Кирилович розпочинав саме на Волині й тому з великим задоволенням підтримував зв'язки з Волинським університетом імені Лесі Українки, сім випускників якого були його аспірантами й захистили кандидатські дисертації (В. І. Білий, Р. М. Ковальчук, О. І. Швай, П. Є. Антонюк, В. О. Панасович, Л. І. Філозоф, Л. Б. Шевчук-Нестерович). Багато наших викладачів і випускників користувалися його порадами і консультаціями (В. Плющова, З. Зарицька, В. Заровний, Н. Кононова, В. Горбайчук, М. Махомед та ін.). Ми вважаємо В. К. Дзядика одним із фундаторів Волинського національного університету імені Лесі Українки загалом і математичного факультету зокрема. Він заслуговує увічнення його пам'яті на Волині.

Владислав Кирилович не уявляв свого життя без математики, але шахи − ще одна його пристрасть. Міг засиджуватися за дошкою до пізньої ночі, аж поки не виграє партію. Був чемпіоном Волині з шахів.

45 молодих людей захистили дисертації під керівництвом В. К. Дзядика. І кожному з них він віддав часточку свого серця. Більшість його учнів з України, але були і з Єгипту, Китаю, Азербайджану, Грузії, республік Середньої Азії. Він об'єднував Україну, об'єднував світ. Серед учнів Владислава Кириловича вісім докторів наук (О. Степанець, І. Шевчук, В. Коновалов, В. Білий, Ю. Мельник, Ю. Волков, Ю. Підлипенко, Махомет Ісмаїл Махомет Хусейн із Єгипту).

Теплі спогади про Вчителя лунали на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті Владислава Кириловича Дзядика, яка відбулася 22−26 серпня 2009 р.

Владислав Кирилович − працьовита, чесна, висококультурна й порядна людина, здібний організатор. Очолював Союзну математичну школу в Кацивелі (Крим), організував кафедру теорії функцій у Київському національному університеті імені Т. Шевченка, відділ теорії функцій в Інституті математики АН УРСР. Поряд із науковою та педагогічною діяльністю вів активну громадську роботу. Він був головою бюро секції товариства "Знання" при Інституті математики АН УРСР, членом редколегій декількох провідних математичних часописів, заступником головного редактора "Українського математичного журналу".

В. К. Дзядик був високоерудованою людиною: знав декілька європейських мов, мав літературний дар (видані ним роботи написані барвистою, лаконічною мовою), енциклопедичні знання з математики. Він уражав людей своєю чуйністю та щирістю, вів здоровий спосіб життя: полюбляв бігати, помірятися силою, грав у бадмінтон, шахи й не мислив жодного дня без математики.

Дещо суворий, але справедливий, люблячий, щирий батько, − так відгукуються про нього діти Юрій, Надія, Тетяна. Його дім був завжди відкритий для людей, а сам Владислав Кирилович дарував нам тепло, радість життя.

Минуло 10 років із тієї важкої миті, коли відійшов у Вічність незабутній Владислав Дзядик. А пам'ять тих, хто знав Владислава Кириловича, завжди з ним. Це справді було серце, віддане Україні.

IV. Стислий огляд творчості В. К. Дзядика

Творчість Владислава Кириловича Дзядика настільки багатогранна, що будь-який огляд її навряд чи буде повним. Наведемо фрагменти робіт, щоб читач ознайомився з дослідженнями видатного математика.

Початок творчого шляху В. К. Дзядика збігається з піднесенням громадського інтересу до науки, зокрема до математики, який характерний для 50-х рр. XX ст. Його яскравий талант проявився вже в перших публікаціях, де була повністю вирішена знаменита на той час проблема Фавара. У цей період В. К. Дзядик береться за розв'язування окремих задач теорії наближення функцій, які не піддавалися зусиллям багатьох математиків. У процесі глибокого аналізу цих задач ученому вдалося створити нові методи теорії наближення функцій, які допомагали йому успішно розв'язувати свої задачі, і ці методи одержують подальший розвиток у його роботах і роботах його послідовників.

Ранні результати викладено в докторській дисертації. Опонент Л. Д. Кудрявцев зазначав: "...дисертація В. К. Дзядика є глибоким і фундаментальним дослідженням, присвяченим, в основному, класичним питанням в дійсній і комплексній площинах. Дисертант, подолавши низку принципових труднощів, розв'язав ряд давніх задач, над розв'язуванням яких працювало багато видатних у цій галузі математиків". С. Б. Стєчкін, який теж опонував цій дисертації, відзначив, що "В. К. Дзядик установив своєрідний рекорд: сьогодні йому в теорії функцій належать найважчі для доведення результати."

Протягом 1957–1975-х рр. наукові інтереси В. К. Дзядика концентруються в основному на задачах наближення функцій, аналітичних на різних множинах у комплексній площині.

Характерно, що до цієї тематики В. К. Дзядик підійшов у результаті аналізу теорем про конструктивні характеристики різних класів неперіодичних функцій, одержаних раніше в роботах С. М. Нікольського, О. П. Тімана (прямі теореми), а також у його роботах (обернені теореми). Учений помітив, що результати для відрізка можна формулювати в термінах віддалей точок $x \in [a,b]$ до деяких ліній рівня цього відрізка й висунув гіпотезу: для широкого класу континуумів комплексної площини з однозв'язним доповненням конструктивні характеристики відповідних класів функцій подібним чином виражаються через відстані межових точок континуумів до їх ліній рівня. Для реалізації цієї ідеї треба було здолати низку принципових труднощів із геометричної теорії функцій, із теорії сингулярних інтегралів типу Коші, з теорії рядів за узагальненими многочленами Фабера. У результаті створено методи розв'язування основних задач наближення на широкому класі континуумів функцій комплексної змінної і отримані такі ж стрункі та закінчені результати, як ті, що були раніше відомі в періодичному випадку й на відрізку дійсної осі. Зокрема, використовуючи розвинуті ним методи, В. К. Дзядик одержав необхідні й достатні умови належності функцій до класів Гельдера та їх узагальнення на замкнених множинах із кусково-гладкою межею. Ці результати встановлюють конструктивну характеристику вказаних класів функцій і розкривають глибокий зв'язок між наближенням періодичних функцій тригонометричними поліномами й наближенням неперіодичних функцій алгебраїчними многочленами.

Дослідження В. К. Дзядика в комплексній області ввійшли в його фундаментальну монографію [1], яка давно вже стала настільною книгою багатьох математиків.

У наступні десятиліття акцент у творчості В. К. Дзядика зміщується в сторону зближення і певною мірою синтезу результатів, ідей та методів теорії наближення функцій, теорії диференціальних й інтегральних рівнянь та обчислювальної математики. Він і тут досягнув результатів, які поставили його ім'я в один ряд із творцями широко відомих методів наближеного роз'язування диференціальних й інтегральних рівнянь. Він розвинув і в багатьох випадках поглибив різні аспекти теорії й обчислювальної практики прямих методів, котрі розробляли Ш. Е. Пікар, Бубнов, Б. Г. Гальоркін, В. І. Крилов, М. М. Боголюбов, М. П. Кравчук, М. В. Келдиш, Л. В. Канторович й ін.

У результаті досліджень В. К. Дзядика створено і глибоко обґрунтовано два загальних методи, які згодом були названі апроксимаційним (а-метод) й апроксимаційно-ітеративним (АІ-метод). а-метод застосовується для побудови многочленів, які наближають розв'язки задач для лінійних диференціальних рівнянь із многочленними коефіцієнтами. АІ-метод для побудови многочленних наближень розв'язків задач для нелінійних диференціальних й інтегральних рівнянь.

Ці методи вигідно відрізняються від відповідних відомих раніше і своєю простотою, і точністю наближень. Їх широко використовують В. К. Дзядик, його численні учні й послідовники не лише у процесі розв'язування задач для диференціальних й інтегральних рівнянь: вони дають прекрасні результати і в теорії раціональної апроксимації (у тому числі апроксимації Паде), а також у теорії спеціальних функцій; і з їх допомогою одержуються нові інтегральні подання для цілого ряду гіпергеометричних функцій тощо. Результатам досліджень цього кола питань присвячена насичена новими глибокими ідеями й фундаментальними результатами монографія В. К. Дзядика [2].

1. ***Задача Фавара.*** Напевно, одним із найважливіших досягнень у теорії наближення функцій у 30-ті роки можна вважати появу нового типу задач, які пізніше були названі екстремальними. Засновником таких задач є А. М. Колмогоров [3], який 1935 р. розглянув величину

$$E_n(W^r) = \sup\{ \ \| f(x) - S_n(f;x) \|_c ; f \in W^r \ \},$$

де W^r – множина $2p$-періодичних функцій $f(\bullet)$, для яких $ess\sup\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$, а $S_n(f,\ x)-$ сума Фур'є порядку n функції $f(\bullet)$, і показав, що

$$E_n(W^r) = \frac{4\ln n}{p^2 n^r} + O(1/n^r). \tag{1}$$

Пізніше А. М. Колмогоров увів поняття поперечника функціональної множини й узагальнив (1).

Вивчення цих і подібних їм величин і сьогодні займає провідне місце в теорії наближення функцій.

Одну з перших таких задач розглянув 1937 р. Ж. Фавар, який показав, що

$$E_n(W^r)=\sup_{f\in W^r}\| f(x)-T_{n-1}(x)\|=K_r/n^r, r=1,2,..., \tag{2}$$

де

$$K_r=\frac{4}{p}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i(r+1)}}{(2i+1)^{r+1}} \tag{3}$$

(K_r – сталі, які пізніше названо константами Фавара).

При цьому Фавар показав, що поліноми $U_n(f;x)$, для яких виконується рівність $\sup_{f\in W^r}\| f(x)-U_n(f,x)\|_C=E_n(W^r)$, будуються за допомогою конкретного лінійного методу, який визначається трикутною матрицею $\Lambda_n=\{l_k^{(n)}\}$, $k=0,1,...,n-1$; $n=1,2,...$, за формулою

$$U_n(f;x)=\frac{a_0 l_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}l_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{4}$$

де a_k і b_k – коефіцієнти Фур’є функції $f(x)$, тобто Фавар указав найкращий лінійний метод для класу W^r. Він же висунув гіпотезу, що рівності (2) і (3) будуть справедливі при дробових значеннях r, тобто вони мають місце при $\forall r>0$. Ця задача довгий час була в центрі уваги багатьох математиків. Над нею працювали Ж. Фавар, Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, Б. Надь, С. М. Нікольський, С. Б. Стєчкін, О. П. Тіман й ін. На початку 50-х років над розв’язанням цієї задачі почав працювати В. К. Дзядик і 1953 р. розв’язав задачу Фавара при $\forall r\in(0,1)$. При довільному $r>0$ цю задачу розв’язав у 1958–1959 рр. В. К. Дзядик, а $\forall r>1-$ також і китайський математик Сунь Юн-шен (шляхом розвитку ідей і методів, які запропонував В. К. Дзядик у статті [4]). Задача Фавара була розв’язана повністю і не одним способом. При цьому передбачення Фавара щодо константи у (2) не підтвердилося. У процесі розв’язування задачі Фавара В. К. Дзядик водночас розв’язав задачу про найкращий лінійний метод для класу W^r при довільному $r>0$.

2. ***Задача Колмогорова–Нікольського.*** Після згаданої роботи А. М. Колмогорова [3] про асимптотичну рівність (1) для відхилення

$$E_n(W^r)=\sup\{\ \| f(x)-S_{n-1}(f;x)\|_c;\ f\in W^r\ \} \tag{5}$$

виник новий великий напрям, присвячений отриманню аналогічних результатів для найбільш важливих інших лінійних методів (методи Фейєра й Фавара, метод частинних сум ряду Фур’є для класів W^r при дробових $r>0$ й ін.). Великий вклад у цю тематику внесли С. М. Нікольський, С. Б. Стєчкін, А. В. Єфімов, С. А. Теляковський, М. П. Корнійчук й ін. Слід відзначити, що в 1959 р. М. П. Корнійчук довів одну лему, яка дала можливість йому знайти точну верхню межу наближення періодичних функцій класів Гельдера лінійним методом Фавара.

У 1968−1972 рр. В. К. Дзядик разом з О. І. Степанцем дослідили лінійний метод Рогозінського на класах $W^r H_w$.

Отже, завдяки дослідженням В. К. Дзядика, удалося знайти підходи ще до одного важливого кола екстремальних задач, які довгий час вважалися недоступними.

Творчість В. К. Дзядика з теорії наближення періодичних функцій не обмежується згаданими вище результатами. Йому належить ще низка глибоких і цікавих тверджень. Математик побудував приклад періодичної функції, для якої при дробовому диференціюванні не справджується теорема Ролля про нулі похідної, простий приклад неперервної періодичної функції, ряд Фур’є якої в окремих точках розбігається, істотно посилив класичний результат С. Н. Бернштейна про оцінку норм похідних від тригонометричних поліномів за їх значеннями в дискретному наборі точок і застосував апарат рядів Фур’є до ефективної наближеної побудови періодичних розв’язків інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

3. ***Дослідження В. К. Дзядика з теорії наближення функцій комплексної змінної.*** Фундаментальні дослідження В. К. Дзядика в цій сфері з повним правом можна назвати основоположними:

протягом п'яти десятиліть, які пройшли після опублікування його перших робіт про наближення неперервних функцій комплексної змінної в замкнених областях із кутами, ідеї, що в них містяться, визначили напрям зусиль створеної В. К. Дзядиком математичної школи і багатьох вітчизняних та зарубіжних математиків з розв'язування тонких і важких проблем конструктивної теорії функцій комплексної змінної.

Ряд глибоких і закінчених результатів одержав В. К. Дзядик в інших напрямах комплексного аналізу: аналітичні й гармонічні перетворення, граничні значення інтеграла типу Коші, ряди Діріхле, апроксимація Паде, проблема моментів, посилення декількох класичних результатів.

Широкий резонанс викликала монографія [1], яка зробила значний вплив на формування наукових інтересів і спеціалістів з теорії наближення функцій, і початківців математиків-дослідників.

а) *Прямі й обернені теореми поліноміального наближення функцій на множинах у комплексній площині.* Йтиметься про створення теорії, яка встановлює зв'язок між структурними властивостями функцій, заданих на замкнених множинах у комплексній площині, і швидкістю наближення цих функцій поліномами n-го порядку. Основним орієнтиром для побудови такої теорії були класичні дослідження Джексона, Бернштейна, Вале-Пуссена в теорії наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами та їх аналог – теорія наближення неперервних на $[a,b]$ функцій алгебраїчними дійсними многочленами, яка до кінця 50-х років набула завершеного характеру завдяки роботам С. М. Нікольського [5], В. К. Дзядика [6], О. П. Тімана [7]. При цьому виявилось, що навіть для класів Гельдера $H^a, a \in (0,1)$ (модельний випадок, для якого повністю замикаються прямі й обернені теореми, утворюючи в періодичному випадку конструктивну характеристику цих класів) у неперіодичному випадку спостерігається покращання наближення біля кінців відрізка і конструктивна характеристика не може бути дана в термінах найкращих наближень $E_n(f)$.

Перехід від періодичного випадку до неперіодичного на $[-1;1]$ пояснюється необхідністю заміни рівномірних оцінок швидкості прямування до нуля наближення функцій у термінах $1/n, n \to \infty$ на оцінки в термінах функції $j(n,x) =: \sqrt{1-x^2}/n + n^{-2}$, які залежні від положення точки x на $[-1;1]$. Необхідний вид функції $j(n,x)$ був знайдений як результат тривалих досліджень, причому до робіт В. К. Дзядика з поліноміальних досліджень у комплексній області переконливого пояснення, чому саме така функція є ключовою для отримання конструктивної характеристики класів Гельдера на $[-1;1]$, не було. В. К. Дзядик "розшифрував" цю функцію як таку, що реалізовує порядок відстані $r_{1+1/n}(z)$ від точки z відрізка $[-1;1]$ (як множини комплексної площини) до лінії рівня n-го порядку функції Гріна зовнішності відрізка $[-1;1]$ (образ кола радіуса $1+1/n$ при конформному відображенні зовнішності одиничного круга на зовнішність континуума). Цей факт містить у собі сміливе припущення, що саме в термінах функції $r_{1+1/n}(z)$ можна побудувати повний конструктивний опис найважливіших класів функцій комплексної змінної, аналітичних у внутрішніх точках континуума $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$ ($\mathfrak{M}$ – обмежений і не вироджується в точку) і неперервних на $\mathfrak{M}$, тобто розв'язати в комплексній області проблему прямих і обернених теорем конструктивної теорії функцій. Відзначимо, що у вужчій постановці – пояснити особливу роль кінців відрізка $[-1;1]$, що випливає з конструктивної характеристики на ньому класів Гельдера, геометричними властивостями відрізка як множини в $\mathbb{C}$ - ця проблема ставилася С. М. Нікольським на III Всесоюзному математичному з'їзді (1956 р.). Конструктивна теорія функцій на замкнених множинах комплексної площини, яка виросла з цієї проблеми, далеко вийшла за рамки проблеми Нікольського. В. К. Дзядику належить безсумнівна заслуга у створенні фундаменту цієї теорії. Її дальшому розвиткові до сучасного рівня ми зобов'язані В. К. Дзядику, його учням Г. А. Алібекову, В. І. Білому, М. М. Воробйову, Р. В. Полякову, О. І. Шваю, І. О. Шевчуку та ін.

Нехай $\mathfrak{M}$ – континуум на скінченній комплексній площині $\mathbb{C}$, $\mathfrak{M}^c$ його доповнення, яке має бути зв'язним; $A(\mathfrak{M})$ – клас функцій, аналітичних в $\mathfrak{M}^0 = \mathrm{int}\mathfrak{M}$ і неперервних на $\mathfrak{M}$, $A^r(\mathfrak{M})$ – підкласи функцій f з $A(\mathfrak{M})$, які мають r неперервних на $\mathfrak{M}$ похідних; $A^0(\mathfrak{M}) = A(\mathfrak{M})$; $w = \Phi(z)$ –

конформне відображення $\mathfrak{M}^c$ на зовнішність одиничного круга D, нормоване умовами: $\Phi(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1}\Phi(z)>0$; $\Psi=\Phi^{-1}(w)$; $L_{1+1/n}=\{z:|\Phi(z)|=1+1/n\}$ – n-на лінія рівня зовнішньої функції Гріна для $\mathfrak{M}$; $L=\partial\,\mathfrak{M}$; $r_{1+1/n}(z)$ – відстань від точки $z\in L$ до $L_{1+1/n}$. Для будь-якої функції $f\in A(\mathfrak{M})$ позначимо через $w(d)=w(f;d)$ її модуль неперервності на $\mathfrak{M}$.

Схематично прямі й обернені теореми конструктивної теорії функцій на замкнених множинах у $\mathbb{C}$ в основному мають таку форму, яка утвердилася після робіт Дзядика 1959 - 1962 років.

Пряма теорема. Нехай $f\in A^r(\mathfrak{M})$, $r\geq 0$, де $\mathfrak{M}$ – континуум у $\mathbb{C}$, який задовольняє деякому набору умов (D_1). Тоді $\forall n\in\mathbb{N}$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_n(z)$ n-го порядку, такий, що при всіх $z\in\partial\,\mathfrak{M}$ виконуються нерівності*:

$$|f(z)-P_n(z)| \preccurlyeq [r_{1+1/n}(z)]^r w(f^{(r)};r_{1+1/n}(z)). \tag{6}$$

Обернена теорема. Нехай $\mathfrak{M}$ – континуум у $\mathbb{C}$, який задовольняє деякому набору умов (D_2). Якщо задана на $\mathfrak{M}$ функція $f(z)$ є рівномірною границею послідовності $(P_n(z))$, такої, що при всіх $z\in\partial\,\mathfrak{M}$

$$|f(z)-P_n(z)| \preccurlyeq [r_{1+1/n}(z)]^{r+a},\ r\in\mathbb{N},\ a\in(0,1), \tag{7}$$

то $f\in A^r(\mathfrak{M})$ і $w(f^{(r)};d)\preccurlyeq d^a$.

Якщо умови (D_1) і (D_2) збігаються, то сукупність прямої й оберненої теореми дають конструктивну характеристику класу Гельдера H^a, $a\in(0,1)$.

Щоб довести обернені теореми, В. К. Дзядик 1959 р. для досить широкого класу замкнених множин з кусково-гладкою межею дослідив поведінку функції $r_{1+1/n}(z)$ на межі $\partial\mathfrak{M}$ і для довільного дійсного s довів нерівність

$$\left\| P_n'(x)\, r_{1+\frac{1}{n}}^{1-s}(x)\right\|_{C_{\partial m}} \preccurlyeq \left\| P_n(x)\, r_{1+\frac{1}{n}}^{-s}(x)\right\|_{C_{\partial m}}, \tag{8}$$

яка дозволила йому встановити обернену теорему на таких множинах. У наступні роки інші вчені узагальнювали одержані Дзядиком результати.

У 1967–1971 рр. Дзядик запропонував загальну конструкцію ядер:

$$K_{m,n}(z,z)=\frac{1-[1-(z-z)p_n(z,z)]^m}{z-z}, \tag{9}$$

які зіграли велику роль для узагальнення відомих результатів й одержання нових результатів Дзядиком і його учнями О. І. Шваєм, Р. В. Поляковим, І. О. Шевчуком, В. І. Білим та ін.

Інтерес до вирішення проблеми прямих і обернених теорем у постановці В. К. Дзядика послугував поштовхом для багатьох глибоких досліджень П. М. Тамразова, І. О. Шевчука, О. І. Швая, П. Є. Антонюка, В. І. Білого, Д. М. Галана й ін.

У теорії наближення В. К. Дзядик та його учні й послідовники створили один із найбагатших ідеями та результатами напрям.

б) *Дослідження з теорії раціональної апроксимації.*

Ряд важливих і дотепних ідей висунув В. К. Дзядик у сфері раціональної апроксимації. Передовсім слід відзначити помічений ним взаємозв'язок біортогональності з апроксимаціями Паде, який дав змогу вперше дослідити асимптотику похибок діагональних апроксимацій Паде функцій $\sin z, \cos z, \mathrm{sh} z, \mathrm{ch} z$. Відзначимо, у зв'язку з цим, що значно простіший випадок – апроксимація Паде функції e^z був уперше досліджений Перроном, а функцій $\ln(1+z)$ і $(1+z)^a$ – Ю. Люком і незалежно (іншим методом) В. К. Дзядиком і Л. І. Філософом [8]. Указаний вище взаємозв'язок став відправним

* Тут і далі $\preccurlyeq$ – знак порядкової нерівності, $\asymp$ – знак слабкої еквівалентності, тобто порядкової рівності.

пунктом узагальнення класичної проблеми моментів і тим дав можливість ширше формулювати багато важливих результатів у теорії апроксимації Паде. Вихідним пунктом цих досліджень послугувало поширення запропонованого В. К. Дзядиком у 1974 р. a-методу наближеного розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із многочленними коефіцієнтами на випадок раціональної апроксимації. Щоб проілюструвати цю ідею, розглянемо інтегральне рівняння для e^z:

$$y(z)=1+\int_0^z y(x)dx,\quad z\in[0,z]. \tag{10}$$

Схема a-методу передбачає заміну цього рівняння операторним

$$y_{n-1}(z)=\int_0^z y_{n-1}(x)dx+1-t(z)P_n\left(\frac{z}{z}\right), \tag{11}$$

у якому $P_n(t)$ – деякий фіксований многочлен, а $y_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k z^k$. Рівняння (11) зрівнюванням коефіцієнтів при степенях z зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $c_0, c_1, .., c_{n-1}, t$, де $c_j=c_j(z); t=t_n(z); j=1,\ 2,\ \ldots$. Розв'язуючи цю систему і покладаючи $z=z$, дістаємо раціональну функцію $R_{n,n}(z)=y_{n-1}(z)+t(z)P_n(1)$, яка апроксимує точний розв'язок. Вигляд і властивості цієї апроксимації залежать від вибору полінома $P_n(t)$. В. К. Дзядик помітив, що за $P_n(t)$ необхідно для цього прикладу брати зміщені ортонормовані многочлени Лежандра $L_n^*(t)$. У результаті одержано діагональні апроксимації Паде для e^z. Подібним способом можна побудувати й дослідити діагональні поліноми Паде для функцій $\ln(1+z), \mathrm{arctg}z, (1+z)^a$. Однак у випадку функцій $\sin z, \cos z, \mathrm{sh}z, \mathrm{ch}z$, які задовольняють диференціальним рівнянням 2-го порядку, потрібно було втілити істотно нові ідеї.

На основі аналізу одержаних результатів В. К. Дзядик запропонував таке важливе означення.

Узагальненим моментним поданням (УМП) деякої послідовності, взагалі кажучи, комплексних чисел $(s_k)_{k=0}^{\infty}$, *називається подання цієї послідовності у вигляді системи рівностей (в якій при* $j+k=m$ s_m *допускає* m *різних подань)*

$$s_{j+k}=\int_0^1 a_j(t)b_k(t)dm(t),\quad k,\ j=0,1,\ldots, \tag{12}$$

де $m(t)$ *– деяка неспадна функція на* $[0,1]$, а $(a_j(t))_{j=0}^{\infty}$ *і* $(b_k(t))_{k=0}^{\infty}$ *– які-небудь послідовності функцій, при яких виконуються рівності (12).*

Легко бачити, що у випадку $a_k(t)=b_k(t)=t^k$ дістанемо формулювання класичної проблеми моментів, умови існування розв'язку якої добре відомі. В. К. Дзядик показав, що подання виду (12) можуть бути побудовані для дуже широкого класу послідовностей, а саме для всіх послідовностей $(s_k)_{k=0}^{\infty}$, детермінанти Ганкеля яких відмінні від 0 (у той час як для класичної проблеми моментів усі ці визначники повинні бути додатними). Використовуючи ці подання, можна будувати й аналізувати апроксимації Паде твірних функцій цих послідовностей.

Відправляючися від УМП, В. К. Дзядик установив теореми, що узагальнюють основні результати П. Л. Чебишова, які були одержані ним для класичної проблеми моментів.

Ефективне застосування УМП знайшли також при отриманні різних нових інтегральних представлень для цілого ряду гіпергеометричних функцій. Ці ідеї використали й розвинули його учні О. П. Голуб і М. Н. Чип.

в) *Дослідження з подання функцій рядами експонент.*

До 70-х років минулого століття О. Ф. Леонтьєв виконав низку глибоких досліджень, присвячених поданню аналітичних в опуклих областях $Q\subset\mathbb{C}$ функцій $f(z)$ рядами експонент вигляду

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{l_n z}. \tag{13}$$

1970 р. В. К. Дзядик уперше поставив задачу про дослідження збіжності рядів експонент вигляду (13) на замкнених опуклих областях $\overline{Q}$.

В 1973 р. з'являються вперше роботи О. Ф. Лєонтьєва, а також В. К. Дзядика та Є. К. Крутиголови, присвячені розв'язуванню цієї задачі. В. К. Дзядик 1974 р. для випадку, коли Q многокутник, вперше виявив зв'язок експонент вигляду (13) на межі ∂Q з поведінкою рядів Фур'є деяких періодичних функцій, які породжуються граничними значеннями $f(z)$ на сторонах многокутника, що, зокрема, дало змогу йому встановити такий результат:

Нехай $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ *– множина коренів цілої функції* $\mathcal{L}(l)=\sum_{k=1}^{N} d_k e^{a_k l}$, *де* $d_k \neq 0$, $a_k (k=1,2,...,N;\ N\geq 3)$ *– вершини многокутника Q. Тоді для рівномірної збіжності ряду (13) на* ∂Q *достатньо, щоб виконувались умови: 1)* $\sum_k d_k f(a_k)=0$;

2) $\int_0^1 \frac{w(f;t)}{t}dt<\infty$, *де* $w(f;t)$ *– модуль неперервності функції* $f(z)$ *на замкненому многокутнику Q (умова Діні).*

Указані дослідження В. К. Дзядика мали важливе значення для подальшого розвитку теорії подання аналітичних функцій рядами експонент, стимулюючи появу нових робіт О. Ф. Леонтьєва, Ю. І. Мельника й ін.

г) *Про посилення деяких класичних результатів.*

1^0. Відома теорема Пікара існування розв'язку $y(x)$ задачі Коші вигляду

$$y'=f(x,y),\ \ y(x_0)=y_0,\ \ x\in[x_0,x_0+h]. \tag{14}$$

Для випадку, коли $f(x;y)$ в (14) є аналітичною по обох змінних, В. К. Дзядик посилив результат Пікара, а саме розробив так званий апроксимаційно-ітеративний метод, який дозволив наближати розв'язок $y(x)$ ефективно, легко і з дуже високою точністю.

Цей метод використовує учений та його учні також для розв'язку з високою точністю крайових задач вигляду $y''=f(x,y,y'), y(0)=y_0, y(h)=y_1$, для розв'язування заданих у найпростіших областях задач Гурса, Коші й Дарбу для рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу та для одержання нової високоефективної квадратурної формули.

2^0. П. Л. Чебишов, А. А. Марков і С. Н. Бернштейн послідовно розв'язували (різними способами) таку задачу Чебишова:

Нехай на $[-1,1]$ *заданий додатний многочлен* $a_0(x)=x^l+c_1x^{l-1}+...+c_l$. *Треба при заданому* $n\geq l/2, n\in\mathbb{N}$, *побудувати многочлен* $T_n^*(x)$ *вигляду* $T_n^*(x)=x^n+t_1^*x^{n-1}+...+t_n^*$, *для якого виконується рівність*

$$\left\|\frac{T_n^*(x)}{\sqrt{a_0(x)}}\right\|_{C[-1,1]}=\inf_{t_j,\,j=\overline{1,n}}\left\|\frac{x^n+t_1x^{n-1}+...+t_{n-1}x^{x-1}}{\sqrt{a_0(x)}}\right\|_{C[-1,1]}. \tag{15}$$

Ця задача розв'язувалася раніше досить складно при кожному фіксованому *n.* В. К. Дзядик запропонував новий підхід до цієї задачі й посилив попередні результати, установивши, що $T_n^*(x)$ при всіх $n\in\mathbb{N}$, $n\geq l/2$ є лінійною комбінацією класичних многочленів Чебишова, тобто існують числа $g_0, g_1,...,g_l$ такі, що при довільних цілих $n\geq l/2, n\in\mathbb{N}$ буде мати місце тотожність:

$$T_n^*(x)=\sum_{j=0}^{l} g_i T_{|n-j|}(x),\qquad T_k(x)=\cos k\arccos x,\qquad k=0,1,2,... \tag{16}$$

При цьому ним вказаний також ефективний спосіб побудови чисел g_j.

3^0. Наведемо такий принципово важливий результат. Нехай у $(a,a+h]$ задано сингулярне лінійне диференціальне рівняння, яке має тільки одну (заради простоти міркувань) регулярну особливу точку a, тобто рівняння вигляду

$$a_0(x)(x-a)^k y^k + a_1(x)(x-a)^{k-1} y^{(k-1)}+...+a_k(x)y=0, \tag{17}$$

де всі $a_j(x)$ – многочлени й $a_0(x) \geq c > 0 \ \ \forall x \in [a, a+h]$.

Кожен із розв'язків фундаментальної системи S цього рівняння називається спеціальною функцією. Прикладами таких функцій є функції Бесселя, гіпергеометричні функції, P-функція Рімана, функції Лапласа, Неймана, Кельвіна, Дірака й ін. Усіх використовуваних тепер тільки у практичних питаннях класів функцій і окремих функцій нараховується понад 1500.

Завдяки дослідженням, проведеним у XIX ст., було відомо, що кожна зі спеціальних функцій $y(x)$, яка визначається рівнянням (15) при $a = 0$, може бути подана у вигляді

$$y(x) = x^r \left[p_j(\ln x)\, j_1(x) + p_{j-1}(\ln x)\, j_2(x) + \ldots + p_0(\ln x)\, j_{j+1}(x) \right], \quad j = 1, 2, \ldots, \mathscr{J} = \mathscr{J}(r), \tag{18}$$

де r – будь-який із коренів так званого характеристичного рівняння $\sum_{i=0}^{k} a_i(0)(r)_{k-i} = 0$, $\mathscr{J}$ – його кратність: $j_n(x) = j_n(r; x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ – невідомі аналітичні функції, коефіцієнти яких $c_m = c_m(r, j, n)$ шукають методом невизначених коефіцієнтів шляхом підстановки $y(x)$ з (18) у (17); $p_0(x) \equiv 1, p_i(s) := \frac{s(s-1)\ldots(s-i+1)}{i!}$, $\quad i = 1, 2\ldots$, – система стандартних многочленів.

За допомогою глибоких і тонких міркувань В. К. Дзядик посилив цей результат Фукса. Для обчислювачів і спеціалістів з теорії апроксимації інтерес наведеного результату Дзядика полягає передусім у тому, що він дав можливість при наближеному обчисленні спеціальних функцій замінити звичний метод степеневих рядів так званим (запропонованим В. К. Дзядиком) сингулярним аналогом розробленого ним раніше а-методу ефективної побудови при кожному натуральному n многочленів степеня n, для яких має місце рівність:

$$\left\| j(x) - P_n(x) \right\|_{L^2_{p(x)}} = (1 + e_n) E_n(y)_{L^2_{p(x)}}, \tag{19}$$

де $e_n \downarrow 0$ і $E_n(y)_{L^2_{p(x)}}$ – найкраще наближення невідомої аналітичної частини $j(x)$ у квазічебишовській метриці $L^2_{p(x)}$, що породжена вагою $p(x)$, яка визначається многочленом $a_0(x)$.

Рівність (19) означає, що многочлени $P_n(x)$ здійснюють асимптотично найкраще наближення аналітичної частини $j(x)$ і наближають її принаймні в 2^n разів краще, ніж частинні суми n-го порядку степеневого ряду, у який розкладається $j(x)$.

4. *Апроксимаційні методи Дзядика розв'язування диференціальних й інтегральних рівнянь.*

Однією зі сфер математики, в якій В. К. Дзядик отримав низку дуже важливих результатів, є теорія та обчислювальна практика наближених методів розв'язування операторних рівнянь.

Починаючи з 1969 р. математик глибоко досліджує задачу про можливості та способи застосування ряду методів, ідей і результатів чебишовської теорії наближення функцій до побудови нових високоефективних (у розумінні числа операцій і одержуваної точності) методів й алгоритмів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. На цьому шляху він створив і строго обґрунтував три взаємно пов'язаних обчислювальних апроксимаційних методи, які добре доповнюють один одного:

1) метод лінійних поліноміальних операторів;

2) апроксимаційний метод (а-метод) розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами (ЛДРМК);

3) апроксимаційно-ітеративний метод (АІ-метод) розв'язку нелінійних диференціальних та інтегральних рівнянь при аналітичних умовах.

Витоки розроблених В. К. Дзядиком методів беруть свій початок у класичних працях П. Л. Чебишова, В. Ритца, І. Радона, Б. Г. Гальоркіна, С. Н. Бернштейна, М. М. Боголюбова, М. П. Кравчука, Л. В. Канторовича, Польського, М. Вайнікко. Як один із найбільших спеціалістів в теорії наближення функцій, яка є фундаментом обчислювальної математики, В. К. Дзядик на основі синтезу найважливіших результатів чебишовської теорії наближення функцій і ряду обчислювальних методів розв'язування рівнянь математичної фізики побудував вишукану, багату перспективними ідеями теорію апроксимаційних методів. Основні положення цієї теорії учений систематизував у монографії [2], яка, без сумніву дала могутній імпульс дальшому розвиткові та вдосконаленню обчислювальних методів розв'язування операторних рівнянь математичної фізики загалом.

Стисло викладемо суть апроксимаційних методів. Проаналізуємо деякі теоретичні результати й численні приклади, які добре ілюструють високу ефективність і конструктивність цих методів. Указано також деякі важливі практичні задачі, до яких досить ефективно застосовуються методи Дзядика.

а) *Метод лінійних поліноміальних операторів.*

Цей метод запропонував В. К. Дзядик 1970 р. у процесі розвитку його досліджень із наближення поліномами неперервних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма II роду і наближення многочленами розв'язку задачі Коші вигляду

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, x \in [x_0, x_0 + h], \tag{20}$$

за умови, що $f(x,y)$ задовольняє по змінній y умові Ліпшиця з деякою константою A.

Згідно з цим методом, задача (20) замінюється операторним (інтегральним) рівнянням

$$y_n(x) = U_n\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt; x \right), \tag{21}$$

у якому U_n – лінійний поліноміальний оператор хорошого наближення функцій класу $Lip1$:

$$U_n(y\,;x) = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{L}_k(y)p_k(x), \forall y \in C[x_0, x_0 + h], \tag{22}$$

де $\mathscr{L}_k$ – лінійні функціонали в $C[x_0, x_0 + h]$ і $\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$ – яка-небудь система лінійно незалежних функцій з $C[x_0, x_0 + h]$.

Установлено, що за досить слабких умов на оператори U_n, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(h)$, або ж при досить малих $h > 0$ і довільних $n \in \mathbb{N}$ рівняння (21) розв'язне.

При цьому для відхилення полінома $y_n(x)$, який є розв'язком рівняння (21), від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (20) отримана оцінка

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \le (1 + a_n)e^{Ah}\|y(x) - U_n(y;x)\|_C, \tag{23}$$

у якій $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Відзначимо, що істотним вкладом В. К. Дзядика в теорію наближених методів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь є також дотепна методика для обґрунтування розглянутого методу.

Метод лінійних поліноміальних операторів був узагальнений і досліджений також для систем звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь Гаммерштейна.

б) *а-метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із многочленними коефіцієнтами.*

Дуже важливим і природним (хоч і не очевидним) виявилося застосування методу лінійних поліноміальних операторів до наближення многочленами розв'язку задачі Коші для ЛДРМК вигляду

$$\begin{aligned} &a_0(x)y^{(k)}(x) + a_1(x)y^{(k-1)}(x) + \ldots + a_k(x)y(x) = f(x), x \in [-h,h], \\ &y^{(i)}(0) = y_j,\ j = \overline{0,k-1}, \end{aligned} \tag{24}$$

де $a_i(x)$ і $f(x)$ – многочлени; при цьому $\forall x \in [-h,h]$ $a_0(x) \ge c > 0$.

У результаті такого застосування В. К. Дзядик розробив у 1973–1974 рр. а-метод. Цей метод учений запропонував також для ефективного близького до найкращого наближення многочленами елементарних функцій e^x, $\sin x, \cos x, \mathrm{sh} x, \mathrm{ch} x$, які визначаються рівняннями 1-го і 2-го порядків вигляду (24).

Ідею а-методу роз'яснимо на найпростішій задачі Коші вигляду $y' = y, y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = e^x$, $x \in [-h, h]$еквівалентної інтегральному рівнянню

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt.$$

Вибравши в ролі лінійного поліноміального оператора U_n в (21) оператор S_n – Фур'є–Чебишова, учений одержав операторне рівняння:

$$y_n(x) = S_n\left(1 + \int_0^x y_n(t)\,dt; x\right)$$

з нев'язкою

$$e_n(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\,dt - y_n(t) = t_{n+1}T_{n+1}(x/h),$$

де t_{n+1} – деякий (невідомий) коефіцієнт ряду Фур'є–Чебишова для $1 + \int_0^x y_n(t)\,dt$; $T_{n+1}(x/h) = \cos[(n+1)\arccos(x/h)]$ – многочлени Чебишова першого роду. Звідси В. К. Дзядик дістав інтегральне рівняння для різниці $y(x) - y_n(x)$:

$$y(x) - y_n(x) = t_{n+1}T_{n+1}(x/h) + \int_0^x [y(t) - y_n(t)]\,dt,$$

і, отже, за теоремою Фредгольма про подання розв'язку через резольвенту:

$$y(x) - y_n(x) = t_{n+1}\left[T_{n+1}(x/h) + \int_0^x e^{x-t}T_{n+i}(t/h)\,dt\right] = t_{n+1}[T_{n+1}(x/h) + d_n], \quad d_n < 7/n^2 \to 0.$$

На основі цього отримана оцінка похибки $\left|e^x - y_n(x)\right| \le (1 + 7/n^2)E_n(e^x)$, де $E_n(e^x)$ – величини найкращого наближення в рівномірній метриці функції e^x многочленами степеня не вищого n.

На цьому прикладі добре видно принципову відмінність а-методу Дзядика від відомого обчислювального t -методу Ланцоша. Це передовсім конструктивність вибору нев'язки в а-методі завдяки застосуванню лінійних поліноміальних операторів. На відміну від t -методу, а-метод дозволяє:

а) будувати асимптотично оптимальні за точністю алгоритми наближення многочленами розв'язків рівнянь вигляду (24) довільного порядку у просторах C^L, L_p^2 де $p(x)$ – деяка вага;

б) усі твердження (теореми існування, оцінки похибок і ін.) одержувати зі всією математичною строгістю й ін.

Відзначимо, що сфери застосування а-методу і t -методу перетинаються, однак не містять один одного.

У 1974 році у фундаментальній праці [9] В. К. Дзядик поширив а-метод на загальний випадок рівнянь вигляду (24). Суть цього методу для таких рівнянь полягає в реалізації такої схеми:

1) задачу (24) шляхом k -кратного інтегрування частинами на $[0, x]$ потрібно замінити еквівалентним їй інтегральним рівнянням

$$a_0(x)y(x) = \int_0^x P_l(x,t)y(t)\,dt + \tilde{f}(x), \tag{25}$$

де $P(x,t)$ і $\tilde{f}(x)$ – алгебраїчні многочлени, які ефективно будуються за формулами, одержаними в [9]. При цьому сума показників у кожному доданку многочлена від двох змінних $P_l(x,t)$ не перевищує:

$$l : \max_{0 \le j \le k}(\deg a_j(x) + j - 1), k \le l + 1;$$

2) від рівняння (25) перейти до операторного інтегрального рівняння:

$$a_0(x)y(x) = \int_0^x P_l(x,t)y_n(t)\,dt + \tilde{f}(x) - e_n(x), \tag{26}$$

розв'язок $y_n(x)$ якого шукаємо у вигляді:

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k x^k, \tag{27}$$

а нев'язку $e_n(x)$ за формулою:

$$e_n(x)=\sum_{i=1}^{l+1}t_i T_{n+i}(x/h), \tag{28}$$

де $T_{n+1}(\bullet)=\cos[(n+1)\arccos(\bullet)]$ – многочлени Чебишова 1-го роду; c_k, t_i – невідомі числа;

3) виконавши у правій частині (26) інтегрування, прирівнюємо з урахуванням (27) і (28) коефіцієнти при однакових степенях x і дістанемо для визначення невідомих c_k, t_i систему з $(l+n+2)$ лінійних алгебраїчних рівнянь із розрідженою матрицею вигляду:

$$\begin{aligned}
&a_{00}c_0+\sum_{i=1}^{l+1}b_{0i}t_i=f_0,\\
&a_{10}c_0++a_{11}c_1+\sum_{i=1}^{l+1}b_{1i}t_i=f_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{i=0}^{n}a_{n+1,i}c_i+\sum_{i=1}^{l+1}b_{n+1,i}t_i=f_{n+1},\\
&\sum_{i=0}^{n}a_{n+2,i}c_i+\sum_{i=2}^{l+1}b_{n+2,i}t_i=f_{n+2},\\
&\sum_{i=0}^{n}a_{n+l+1,i}c_i+b_{n+l+1}t_{n+l+1}=f_{n+l+1},
\end{aligned} \tag{29}$$

де a_{ji}, b_{ji} і f_j – деякі легко визначувані числа.

Для a-методу в [9] В. К. Дзядик довів теорему існування і єдиності розв'язку системи (29) при $\forall h>0$ і $\forall n\ge n_0$, де n_0 – натуральне число, яке визначається вихідними даними (аналогу такої теореми у t -методі немає). У роботах [2; 9] він дістав для a-методу ефективні оцінки похибок, одна з яких, наприклад, має вигляд

$$\|y(x)-y_n(x)\|_Y=l_n(Y)[1+O(1/n)]E_n(y)_Y,$$

де Y – один із просторів C або і L_p^2; $p(x)=\left[1-(x/h)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$; $l_n(C)\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$; M – ефективно визначувана стала; $l_n(L_p^2)\to 0$ при $n\to\infty$ і $E_n(y)_Y$ – величина найкращого наближення функції $y\in Y$ многочленами степеня не вищого n.

У подальшому в розробку окремих питань розвитку і застосування a-методу Дзядика включились його учні: Столярчук, Філозоф, Шевчук, Раппопорт, Чіп, Біленко, Янчук й ін. У результаті a-метод дістав успішне застосування до розв'язування основних задач для лінійних диференціальних рівнянь і звичайних, і в частинних похідних, до розв'язування диференціальних й інтегральних рівнянь з поліноміальними нелінійностями, до питань апроксимацій Паде, до одержання інтегрального подання для ряду гіпергеометричних функцій та ін. Однак основоположні результати серед цих досліджень належать самому авторові a-методу.

В. К. Дзядику належить також заслуга в одержанні ряду фундаментальних результатів, які мають і самостійний інтерес у теорії наближення функцій, і відіграють велику роль при обґрунтування та встановленні асимптотичної оптимальності за точністю a-методу і його узагальнень.

Одним із дуже сильних результатів такого роду є результат про істотне посилення теореми Чебишова–Маркова–Бернштейна про многочлени $T_n^0(x)$ степеня n, які найменше відхиляються від нуля на $[-1,1]$ з вагою $[a_0(x)]^{-\frac{1}{2}}$, де $a_0(x)$ – додатний коефіцієнт (многочлен степеня $l\le n$) у рівнянні (24).

У той час як П. Л. Чебишов, А. А. Марков, С. Н. Бернштейн розв’язували вказану задачу досить складним способом при кожному фіксованому n, В. К. Дзядик довів, що кожен многочлен при довільному $n \geq l/2$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації з $(l+1)$ класичних многочленів Чебишова 1-го роду:

$$T_n^0(x) = \sum_{k=0}^{l} g_k T_{n-k}(x), \tag{30}$$

де числа g_k не залежать від n і будуються ефективно алгебраїчним шляхом.

Цей результат дав змогу йому побудувати асимптотично оптимальний за точністю в метриці простору L_q^2 модифікований а-метод розв’язування задачі (24) у тому розумінні, що при деякому фіксованому $r \in \mathbb{R}_+$ і $\forall n \geq r/2 \deg a_0(x)$ справедлива рівність:

$$\| y(x) - y_n(x) \|_{L_q^2} = [1 + O(1/n)] E_n(y)_{L_q^2}, \text{ де } q(x) = \left[a_0^r(x) \sqrt{1 - (x/h)^2} \right]^{-1}.$$

в) *Апроксимаційно-інтегративний метод (АІ-метод)*

Із цим методом можна ознайомитися в [10, 461−463].

г) *Практичні аспекти застосування методів Дзядика.* Виділимо деякі загальні особливості й достоїнства апроксимаційних методів Дзядика.

Першою такою особливістю є орієнтація методів на інтегральні рівняння і необхідний попередній перехід до них у випадку диференціальної (або інтегро-диференціальної) постановки вихідної задачі. Другою особливістю і, очевидно, одним із найважливіших достоїнств апроксимаційних методів є наявність ефективної методики їх обґрунтування, яка дала змогу побудувати глибоку і строгу теорію таких методів.

Практично важливими достоїнствами, а в більшості випадків і перевагами перед існуючими методами, є простота їх реалізації на ЕОМ, поліноміальний або кусково-поліноміальний вигляд і, як правило, максимально можлива за порядком (або асимптотично) точність одержуваних розв’язків.

Усі методи В. К. Дзядика не насичені. У цьому їх велика перевага перед скінченно-різницевими методами та методами скінченних елементів.

У ряді випадків відхилення одержуваних многочленів степеня n від точного розв’язку відповідного рівняння з точністю до множника $(1+d_n)$, де $d_n \to 0$ при $n \to \infty$, дорівнює величині найкращого наближення шуканого розв’язку многочленами степеня не вище n, і в цьому розумінні апроксимаційні методи Дзядика для широких класів диференціальних й інтегральних рівнянь є асимптотично оптимальними.

Перелічені достоїнства апроксимаційних методів Дзядика, порівняння їх з іншими методами, а також апробація при розв’язуванні деяких задач енергетики (задача розрахунку інтенсивності випромінювання [11; 12], задача аналізу перехідних процесів у нелінійних електричних кіл) дозволяють твердити про перспективу щодо розв’язування різних практично важливих задач науки і техніки.

Особливо, на нашу думку, плодотворним буде їх застосування при розрахунку динамічних процесів у газотранспортних системах, при аналізі міцності конструкцій механічних систем, при визначенні швидкості і траєкторії руху фізичного тіла й інших задачах, в яких підвищені вимоги до точності та якості наближених методів розв’язання диференціальних й інтегральних рівнянь.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Нарешті відзначимо, що, незважаючи на велику кількість наближених методів розв’язування диференціальних й інтегральних рівнянь, проблема побудови ненасичуваних і водночас оптимальних за точністю методів й алгоритмів ще дуже далека від свого розв’язання. Запропоновані В. К. Дзядиком методи для основних класів рівнянь вносять істотний вклад у вирішення цієї важливої проблеми обчислювальної математики. Це, напевно, є однією з основних причин того, що робота з подальшого розвитку вдосконалення та застосування апроксимаційних методів Дзядика інтенсивно триває й охоплює усе більше спеціалістів і у нашій країні, і за кордоном.

Література

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / Дзядык В. К. – М. : Наука, 1977. – 511 с.
2. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интнгральных уравнений / Дзядык В. К. – Киев : Наук. думка, 1988. – 304 с.
3. Колмогоров А. Н. Zur Grossenordnung des restglides Fourieriescher reihen differenzierbarer Function / А. Н. Колмогоров // Ann. Mart. – 1935. – 36. – S. 521–526.
4. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на класе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – 17, № 2. – С. 135–162.
5. Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – 10. – С. 295–317.
6. Дзядык В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $a\,(0 < a < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – 20. – С. 623–642.
7. Тиман А. Ф. Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном промежутке вещественной оси / А. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1951. – 78. – С. 17–20.
8. Дзядык В. К. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций / В. К. Дзядык, Л. И. Философ // Мат. сб. – 1978. – 107, № 3. – С. 347–363.
9. Дзядык В. К. Аппроксимоционный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – 38, № 4. – С. 937–367.
10. Украинский математический журнал. – К. : Наук. думка, 1989. – Т. 41, № 4. – С. 435–465.
11. Биленко В. И. О применении сумматорных операторов к решению на ЭВМ интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения / В. И. Биленко // Атомная энергия. – 1982. – 53, вып. 5. – С. 335–339.
12. Биленко В. И. Численно-аналитический алгоритм расчета интенсивности излучения в неоднородной плоской среде / В. И. Биленко // Атомная энергия. – 1985. – 58, вып. 5. – С. 380–381.
13. Міжнародна конференція з теорії наближення функцій та її застосувань, присвячена пам’яті В. К. Дзядика : тези доп. – К. : Ін-т математики НАН України, 1999. – 100 с.

Статтю подано до редколегії
22.07.2009 р.