Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 853 à 858.

NOUVEAUX RÉSULTATS POUR LES HYPERSURFACES MINIMALES

par Mario MIRANDA

Je parlerai des hypersurfaces de dimension $n-1$ dans un espace euclidien à n dimensions dont l'aire, c'est-à-dire la mesure à $n-1$ dimensions, est minimale par rapport aux hypersurfaces ayant le même bord. Les problèmes que je considèrerai en détail sont la régularité à l'intérieur pour de telles hypersurfaces, le problème de Bernstein pour les fonctions de n variables et le problème de Dirichlet pour l'équation des hypersurfaces minimales. Ensuite je donnerai des indications sur des problèmes encore largement ouverts comme la régularité jusqu'au bord des solutions du problème de Plateau, la régularité des hypersurfaces dont la courbure moyenne est bornée et l'étude des hypersurfaces minimales en présence d'obstacles. La bibliographie que je donne est celle strictement nécessaire pour la compréhension du texte. Pour plus d'information sur les sujets traités je renvoie aux articles de MM. Almgren et Osserman qui ont paru dans le *Bull. A.M.S.* de 1969 et surtout au livre de Federer "Geometric measure theory" publié par Springer en 1969.

1. Un problème, qui est intéressant en soi et pour ses liaisons avec la théorie des hypersurfaces minimales, auquel on a beaucoup travaillé dans les dernières années est le problème des cônes minimaux. Un cône à $n-1$ dimensions dans R^n est l'ensemble des demi-droites issues de l'origine et s'appuyant sur une variété orientée compacte M de dimension $n-2$, contenue dans la sphère unité S^{n-1}. On dira qu'un tel cône est minimal si, en chacun de ses points différents de l'origine, sa courbure moyenne est nulle. Dans R^3 les seuls cônes minimaux sont les plans ; mais déjà à partir de R^4 la famille des cônes minimaux contient des cônes singuliers, dont l'exemple plus simple est donné par

$$\{x\ ,\ x \in R^4\ ,\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\ \}$$

à savoir la projection du tore

$$M = \{x\ ,\ x \in R^4\ ,\ x_1^2 + x_2^2 = 1/2\ ,\ x_3^2 + x_4^2 = 1/2\}$$

Un problème très intéressant dans la théorie des hypersurfaces minimales est de savoir si la partie du cône engendrée par la variété M et contenue dans la boule unité est d'aire minimale dans la classe des variétés de bord M ; c'est-à-dire si le cône est solution du problème de Plateau avec donnée M. Evidemment les hyperplans ont cette propriété ; la question est de savoir s'il y a aussi des cônes singuliers ayant la même propriété. La réponse à cette question est d'autant plus interessante que la non-existence de cônes singuliers d'aire minimum entraîne la régularité intérieure pour toutes les solutions du problème de Plateau, comme cela avait été remarqué par Federer, Fleming, Reifenberg, De Giorgi et Almgren. Mais il y a encore un autre problème qui est strictement lié à la non-existence de cônes singuliers d'aire minimum, à savoir le problème de Bernstein. Bernstein a prouvé pour $n = 2$, l'énoncé suivant :

"Si $f \in C^2(R^n)$ est solution de l'équation des hypersurfaces minimales dans tout R^n, alors f est un polynôme de degré $\leqslant 1$".

Beaucoup d'autres auteurs ont donné des démonstrations du théorème de Bernstein. En 1962 Fleming a montré que la non-existence de cônes singuliers d'aire minimum dans R^{n+1} entraine la validité de l'énoncé de Bernstein dans R^n. Comme il n'y a pas de cônes minimaux dans R^3 Fleming avait obtenu en particulier une nouvelle démonstration du théorème de Bernstein. En 1965 De Giorgi avait remarqué que pour la validité de l'énoncé de Bernstein dans R^n il suffisait de ne pas avoir de cônes singuliers d'aire minimum dans R^n, il obtenait ainsi l'extension du théorème de Bernstein à $n = 3$.

On voit alors comment le problème des cônes singuliers solutions du problème de Plateau était devenu un des problèmes principaux dans la théorie des hypersurfaces minimales. Ce problème a été complètement résolu dans les années 1966-1969 par les articles de Almgren, Simons et Bombieri – De Giorgi – Giusti. D'abord Almgren en 1966 a demontré la non-existence de cônes singuliers d'aire minimum dans R^4, ensuite Simons en 1968 a prouvé le même résultat jusqu'à la dimension 7. Finalement Bombieri – De Giorgi – Giusti en 1969 ont demontré que le cône

$$\left\{ x \ ; x \in R^8 \ , \ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=5}^{8} x_i^2 \right\}$$

déjà considéré par Simons, est d'aire minimum. Ils ont ainsi prouvé que le résultat de Almgren-Simons concernant la régularité intérieure des solutions du problème de Plateau est le meilleur possible. (Récemment H. Blaine Lawson a trouvé d'autres cônes singuliers d'aire minimum). Dans le même article Bombieri – De Giorgi – Giusti montrent que même l'énoncé de Bernstein est faux à partir de $n = 8$, en prouvant l'existence d'une solution de l'équation des hypersurfaces minimales dans R^8 qui croit à l'infini comme $|x|^3$.

A ce point il est intéressant de remarquer que des énoncés plus faibles que celui de Bernstein sont vrais en toute dimension. Par exemple la conclusion de Bernstein est valable pour les solutions non négatives de l'équation des hypersurfaces minimales ou plus généralement pour les solutions vérifiants une inégalité du type : $f(x) \geqslant -M - K|x|$, $\forall x \in R^n$, avec M et K constantes positives. Ce résultat est conséquence d'une remarque de Moser sur la validité du théorème de Bernstein pour les solutions à dérivées premières bornées et de la majoration à priori du gradient des solutions de l'équation des hypersurfaces minimales prouvée par Bombieri – De Giorgi – Miranda.

En ce qui concerne encore le problème de Bernstein, précisons que la remarque de Fleming déjà signalée permet d'étendre le théorème de Bernstein à des hypersurfaces qui ne sont pas nécessairement des graphes ; par exemple pour les hypersurfaces de De Giorgi on a le théorème suivant :

"Soit $n \leqslant 7$, $E \subset R^n$ mesurable avec $\partial E \neq \emptyset$, et tel que sa fonction caractéristique soit de gradient minimal. Alors E est un demi-espace".

Un tel énoncé n'est plus valable dans R^8. Comme pour l'énoncé de Bernstein la conclusion est valable pour toute dimension si on ajoute l'hypothèse que E contienne un demi-espace (v. Miranda [19]).

Pour terminer cette première partie je veux signaler un intéressant résultat de Federer concernant les singularités des solutions du problème de Plateau. Federer a démontré que pour $n \geqslant 8$ la dimension de l'ensemble singulier ne peut pas dépasser $n - 8$.

2. Le deuxième sujet dont je veux parler est le problème de Dirichlet pour l'équation des hypersurfaces minimales. Ce problème dans le cas bidimensionnel a une solution classique qui est la suivante (v. Bernstein, Haar et surtout Rado) :

"Soit Ω un ouvert convexe et borné dans R^2 et g une fonction continue sur $\partial\Omega$. Il existe une seule fonction f dans $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solution de l'équation des hypersurfaces minimales dans Ω et prenant la valeur g sur $\partial\Omega$". La condition de convexité pour Ω est aussi nécessaire (v. Finn et Jenkins-Serrin) en ce sens que pour tout ensemble non convexe Ω il existe une fonction continue g sur $\partial\Omega$ pour laquelle le problème de Dirichlet n'a pas de solutions.

Le cas $n \geqslant 3$ a été considéré et complètement résolu ces dernières années. Le premier résultat a été obtenu en faisant des hypothèses qui assuraient une majoration a priori des dérivées premières dans tout le domaine. Une telle hypothèse est la B.S.C. (Bounded Slope Condition) qui est équivalente pour $n = 2$ à la condition des trois points de Haar et en dimension supérieure, à la condition des $n + 1$ points. En utilisant la B.S.C. on démontre l'existence d'une solution lipschitzienne du problème de Dirichlet par un simple argument variationnel. La régularité à l'intérieur de cette solution est assurée par les résultats de De Giorgi – Nash, Morrey etc. Des conditions suffisantes entrainant la B.S.C. sont : Ω uniformément convexe et g de classe C^2(v. Gilbarg, Miranda [18] et Stampacchia). En 1968 Jenkins et Serrin ont prouvé que la condition naturelle (nécessaire et suffisante) pour le domaine Ω est que la courbure moyenne de $\partial\Omega$ soit de signe constant. Jenkins et Serrin conservent l'hypothèse que g soit de classe C^2. La majoration à priori du gradient déjà dite et un simple procédé d'approximation permettent l'extension du résultat de Jenkins et Serrin au cas de g continue. On a ainsi l'extension du resultat classique à toutes les dimensions.

Remarquons que la dite majoration du gradient permet d'obtenir la régularité intérieure pour les solutions faibles (dans un sens a preciser) de l'équation des hypersurfaces minimales.

3. Je veux maintenant donner des indications sur le problème de la régularité jusqu'au bord des solutions du problème de Plateau. Comme d'habitude je ne considererai pas les résultats spéciaux relatifs au cas bidimensionnel. Le seul résultat général (en n variables) de ma connaissance est celui de Allard. Ce résultat, annoncé dans le *Bull. A.M.S.* en 1969, est le suivant :

"Si B est une variété orientée compacte de dimension $m - 1$ dans $R^n (0 < m < n)$ de classe $p \geqslant 2$ (analytique) contenue dans la frontière d'un ensemble uniformément convexe et si T est une solution du problème de Plateau correspondant à B (par example T peut-être un courant au sens de Federer-Fleming) alors dans un voisinage de B le courant T est une variété m-dimensionnelle de bord B et de classe $p - 1$ (analytique)".

Je veux encore donner des indications sur deux directions de recherche dont le point de départ est la théorie des hypersurfaces minimales. Dans la première direction, l'étude des hypersurfaces a courbure moyenne donnée, il faut indiquer un résultat de Allard, non encore publié, sur la régularité presque partout à l'intérieur des varifolds (surfaces généralisées au sens de Almgren) dont la courbure moyenne est bornée. Ce résultat est une généralisation des résultats de Reifenberg, De Giorgi et Almgren pour les hypersurfaces minimales. Dans cette même direction il y a les recherches de Bakel'man et Serrin (v. la conférence de Serrin) sur l'équation differentielle

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\right) = A \ , \tag{$*$}$$

ou A est une fonction donnée qui peut dépendre de x, f et Df. On doit tenir compte du fait que le premier membre de l'équation (*) représente la courbure moyenne du graphe de f multipliée par le nombre des variables.

La deuxième direction de recherche est l'étude des hypersurfaces minimales en présence d'obstacles, à savoir du problème de Plateau dans un espace qui ne soit pas R^n tout entier mais seulement une partie de celui-ci. Une telle formulation générale du problème de Plateau se trouve déjà dans l'article de Federer-Fleming. Cette formulation conduit à des situations nouvelles surtout lorsqu'on s'occupe de la régularité des solutions. En effet, si l'espace n'est pas convexe la solution peut s'appuyer sur le bord de l'espace et cela a comme conséquence, même dans le cas d'obstacles très réguliers, une limitation de la régularité de la solution. Avec des exemples simples on s'aperçoit qu'on ne peut pas attendre en général une régularité meilleure que $C^{1,1}$. Mais les obstacles ont aussi une influence favorable sur la régularité. Rappelons-nous que pour le problème sans obstacles, des singularités très importantes pouvaient apparaître (v. le cône de Bombieri – De Giorgi – Giusti). Un tel type de singularités ne se présente pas au voisinage des obstacles de classe C^1. Nous avons en effet le résultat suivant de Miranda [19] : "Soit L un ensemble dont la frontière est de classe C^1 et E un ensemble mesurable contenant L et de gradient minimal dans un ouvert Ω de R^n (parmi les ensembles contenant L). Alors il existe un ouvert $A \supset \Omega \cap \partial L$ tel que $[\mathrm{supp}(D\varphi_E)] \cap A$ soit une variété a $n - 1$ dimensions de classe C^1". (φ_E est la fonction caractéristique de E).

Même dans le cas des obstacles les choses changent complètement lorsqu'on passe au problème non paramétrique. Dans ce cas les obstacles, déjà considérés par d'autres auteurs pour d'autres équations, (v. la conférence de Stampacchia) sont introduits sous forme d'inégalités devant être vérifiées par les fonctions cherchées. Pour le cas de l'équation des hypersurfaces minimales le problème a été considéré par Kinderlehrer, Nitsche et Tomi en deux variables. Pour le cas de n variables il y a les résultats de Lewy-Stampacchia, Giaquinta-Pepe et Giusti. Tous ces résultats pour le cas de n variables sont à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLARD W.K. — On the boundary regularity for Plateau's problem, *Bull. A.M.S.*, may 1969, p. 522-523.

[2] ALMGREN F.J. Jr. — Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Ann. of Math.*, 1966, p. 277-292.

[3] ALMGREN F.J. Jr. — Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure, *Ann. of Math.*, 1968, p. 321-391.

[4] ALMGREN F.J. Jr. — Measure theoretic geometry and elliptic variational problems, *Bull. A.M.S.*, March 1969, p. 285-304.

[5] BOMBIERI E., DE GIORGI E. et GIUSTI E. — Minimal cones and the Bernstein problem, *Inv. Math.*, 1969, p. 243-268.

[6] BOMBIERI E., DE GIORGI E. et MIRANDA M. — Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, *Arch. Mat. Mech. Anal.*, 1969, p. 255-267.

[7] DE GIORGI E. — Frontiere orientate di misura minima, *Sem. Mat. S.N.S.*, Pisa, 1961, p. 1-56.

[8] DE GIORGI E. — Una estensione del teorema di Bernstein, *Ann. S.N.S.*, Pisa, 1965, p. 79-85.

[9] FEDERER H. et FLEMING W.H. — Normal and integral currents, *Ann. of Math.*, 1960, p. 458-520.

[10] FEDERER H. — *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[11] FEDERER H. — The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension 1 and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension, *Bull. A.M.S.*, 1970.

[12] FINN R. — Remarks relevant to minimal surfaces, *Techn. Rep.*, No. 120, Standard 1963.

[13] FLEMING W.H. — On the oriented Plateau problem, *Rend. Circ. Mat.*, Palermo, 1962, p. 69-90.

[14] FLEMING W.H. — Flat chains over a finite coefficient group, *Trans. A.M.S.*, 1966, p. 160-186.

[15] GILBARG D. — Boundary value problems for non-linear equations in n variables, *Non-linear-problems*, Univ. of Wisc. Press, Madison Wisc. 1963, p. 151-159.

[16] JENKINS H. et SERRIN J. — Minimal surface equation in higher dimensions, *J. Reine u. Ang. Math.*, 1968, p. 170-187.

[17] LAWSON Blaine H. — *The equivariant Plateau problem and interior regularity*, (è paraître).

[18] MIRANDA M. — Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell' area minima in n variabili, *Ann. S.N.S.*, Pisa, 1965, p. 233-250.

[19] MIRANDA M. — *Frontiere minimali con ostacoli* (à paraître).

[20] MOSER J. — On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. P.A.M.*, 1961, p. 577-591.

[21] OSSERMAN R. — Minimal varieties, *Bull. A.M.S.*, nov. 1969, p. 1092-1120.

[22] RADO T. — On the problem of Plateau, *Eg. d. Math.*, Berlin, 1933.

[23] REIFENBERG E.R. — Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, *Acta Math.*, 1960, p. 1-92.

[24] Simons J. — Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 1968, p. 62-105.
[25] Stampacchia G. — On some regular multiple integral problems in the Calculus of Variations, *Comm. P.A.M.*, 1963, p. 383-421.

Istituto Matematico
Universita di Ferrara
44 100 - Ferrara
Italie