4 Matrice i determinante

Definicija 1 *Pod matricom tipa (formata) $m \times n$ nad skupom (brojeva) P podrazumevamo funkciju koja preslikava Dekartov proizvod $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ u P.*

Matrice obeležavamo velikim slovima latinice sa ili bez indeksa. Prema tome

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to P$$

pri čemu se uređeni par (i, j) preslikava u *element* matice a_{ij}

$$A(i, j) = a_{ij} \quad ((i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\})$$

Elementi matrice A formata $m \times n$ se razvrstavaju u m *vrsta* i n *kolona* tako što element a_{ij} pripada i-toj vrsti i j-toj koloni. Vrste i kolone elemenata matrice A zapisuju se između uglastih zagrada:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrica A formata $m \times n$ može se zapisati i kraće kao

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Definicija 2 *Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli naziva se* nula matrica. *Obeležava se sa $0_{m \times n}$ ili samo sa 0.*

Definicija 3 *Matrica sa istim broj vrsta i kolona, dakle matrica u kojoj je $m = n$, odnosno matrica $n \times n$ naziva se* kvadratnom matricom *reda n.*

Definicija 4 *Dve matrice A i B nad skupom P su* jednake *ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki. Naime, ako su date matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ onda je*

$$A = B \Leftrightarrow \forall (i, j) \ (a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Definicija 5 *Ako je matrica $A = [a_{ij}]$ kvadratna onda pod njenom* glavnom *(padajućom)* dijagonalom *podrazumevamo uređenu n-torku $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, a pod* sporednom*, uređenu n-torku $(a_{n1}, a_{n-1\ 2}, \ldots, a_{1n})$.*

Definicija 6 *Za kvadratnu matricu kažemo da je* dijagonalna *ako su svi njeni elementi van glavne dijagonale jednaki 0.*

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

Ako su svi elementi dijagonalne matrice jednaki onda se takva dijagonalna matrica naziva se skalarnom matricom*.*

Definicija 7 *Skalarna (dijagonalna) matrica čiji su svi elementi (na glavnoj dijagonali) jednaki 1 naziva se* jediničnom matricom*.*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Definicija 8 *Matrica* $1 \times n$

$$[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}]$$

je matrica vrsta*, a matrica* $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

je *matrica kolona.* Ove vrste matrica se zovu i *vektori.*

Definicija 9 *Matrica*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je donja trougaona *matrica, a*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je gornja trougaona *matrica.*

4.1 Sabiranje matrica

Definicija 10 *Dve matrice istog tipa* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *nad skupom* P *sabiraju se tako što im se saberu odgovarajući elementi*

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Sabiranje matrica je komutativno i asocijativno

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Neutralni element za sabiranje matrica tipa $m \times n$ je nula matrica tipa $m \times n$.

4.2 Množenje matrice skalarom

Definicija 11 *Matrica se množi skalarom (brojem)* α *tako što se svaki element matrice pomnoži tim skalarom. Ako je* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *onda je*

$$\alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$$

Za množenje matrice skalarom i sabiranje matrica važi

- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $1 \cdot A = A$

4.3 Množenje matrica

Definicija 12 *Matrice* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{q\times p}$ *mogu da se pomnože samo ako je broj kolona matrice* A *jednak broju vrsta matrice* B*, odnosno ako je* $n = q$*. U tom slučaju dobija se matrica koja ima broj vrsta kao matrica* A *i broj kolona kao matrica* B*, odnosno proizvod matrica* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ *je matrica* $C = [c_{ij}]_{m\times p}$*. Elementi matrice* C *se izračunavaju na sledeći način*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, p)$$

Množenje matrica A tipa $m\times n$, B tipa $n\times p$ i C tipa $p\times q$ je asocijativno. Naime ako je

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad B=[b_{ij}]_{n\times p} \quad C=[c_{ij}]_{p\times q}$$

onda je

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=D=[d_{ij}]_{m\times q}$$

Ako je $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, a I_m i I_n jedinične matrice reda m, odnosno n, tada je

$$I_m\cdot A=A\cdot I_n=A$$

Za množenje matrica A tipa $m\times n$, B i C tipa $n\times p$ i D tipa $p\times q$ važi

- $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
- $(B+C)\cdot D=B\cdot D+C\cdot D$
- $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$

Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno. Naime ako postoji porizvod matrica A i B, odnosno AB, to ne znači da mora da postoji i proizvod matrica B i A, odnosno BA. Čak i kada proizvod BA postoji, AB ne mora biti jednako BA. Međutim ako važi $AB=BA$ onda se kaže da su matrice A i B *komutativne.*

Proizvod dve matrice A i B može biti nula matrica, a da pri tome ni A ni B nisu nula matrice.

Primer 26

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 4 & -4\end{bmatrix}$$

4.4 Stepen kvadratne matrice

Definicija 13 *Ako je A kvadratna matrica a k neki prirodan broj, tada se pod k-tim stepenom matrice podrazumeva*

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ puta}$$

Nulti stepen kvadratne matrice je jedinična matrica

$$A^0 = I$$

Ako je A kvadratna matrica a k i l su nenegativni celi brojevi, tada je

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$
$$(A^k)^l = A^{k \cdot l}$$

Ako su A i B *komutativne* matrice tada je

$$(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k$$

Ako je A kvadratna matrica reda n, tada izraz

$$P_k(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

predstavlja *matrični polinom stepena k.*

4.5 Transponovana matrica

Definicija 14 Transponovana matrica *matrice A tipa $m \times n$ je matrica $A^\top$ tipa $n \times m$ koja se od matrice A dobija tako što vrste matice A zamene mesta s odgovarajućim kolonama*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Za transponovane matrice važi:

- $(A^\top)^\top = A$
- $(\alpha A)^\top = \alpha \cdot A^\top$
- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

Ako su date matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ tada je

$$(A \cdot B)^\top = B^\top A^\top$$

4.6 Determinante

Za svaku kvadratnu matricu postoji odgovarajuća *determinanta*, pri čemu se svaka determinata može izračunati, odnosno svakoj determinanti odgovara određena brojna vrednost. Ako je A kvadratna matrica drugog reda:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

onda se odgovarajuća determinanta drugog reda označava sa

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a izračunava se na sledeći način

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Elementi determinante, isto kao i elementi matrice, označavaju se sa a_{ij}, gde indeks i označava vrstu, a indeks j kolonu determinante kojoj pripada element a_{ij}.

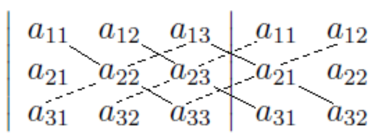
Za kvadratnu matricu A trećeg reda odgovarajuća determinanta se označava sa

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a izračunava na sledeći način

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Za izračunavanje determinanti trećeg reda može se koristiti *Sarusovo pravilo*: u produžetku determinante dopišu se prva i druga kolona, a potom se sa pozitivnim znakom uzimaju proizvodi elemenata na glavnoj dijagonali i duž dve njoj paralelne linije, a sa negativnim znakom proizvod elemenata na sporednoj dijagonali i duž dve njoj paralelne linije.



Slika 1: Ilustracija Sarusovog pravila

Važno je napomenuti da Sarusovo pravilo važi samo za determinante trećeg reda i ne može se uopštavati na determinante višeg reda.

Primetimo da su prilikom izračunavanja determinante trećeg reda svi sabirci oblika $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, gde su $j_1j_2j_3$ redom permutacije brojeva 1, 2 i 3:

$$123\ 231\ 312\ 321\ 132\ 213$$

Promena redosleda elemenata u permutaciji u odnosu na osnovnu permutaciju naziva se *inverzijom.* Tako, na primer, u permutaciji 231 postoje dve inverzije: 2 ispred 1 i 3 ispred 1. Permutacije sa parnim brojem inverzija nazivaju se *parnim*, a sa neparnim brojem inverzija *neparnim permutacijama.*

Primetimo da su prilikom izračunavanja determinante trećeg reda svi sabirci za koje $j_1j_2j_3$ čine parnu permutaciju pozitivni, dok su negativni sabirci u kojima su $j_1j_2j_3$ neparne permutacije. Tačnije, ako sa k označimo broj inverzija u permutaciji $j_1j_2j_3$, onda svaki sabirak koji čini determinantu trećeg reda možemo označiti sa

$$(-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

tako da se izračunavanje determinante može predstaviti sa

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3 \in S} (-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

gde je S skup svih permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$ kojih ima 3!.

Ovaj rezultat se može uopštiti na determinantu kvadratne matrice A proizvoljnog n-tog reda, pa tako važi

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n \in S} (-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

gde je S skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ kojih ima ukupno $n!$, a k je broj inverzija u permutaciji $j_1j_2\dots j_n$.

Ova opšta definicija za $k = 3$ daje prethodnu definiciju determinante trećeg reda, dok je za $k = 2$

$$\sum_{j_1j_2 \in S} (-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

što se slaže sa već datom definicijom determinante drugog reda.

Definicija 15 *Ako je A kvadratna matrica i* $\det A = 0$*, za matricu A kažemo da je* singularna*, a ako je* $\det A \neq 0$ *matrica je* regularna.

4.6.1 Osobine determinanti

1. Ako u determinanti vrste i kolone zamene mesta determinanta ne menja vrednost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   što znači da je
   $$\det A = \det A^\top$$

   Iz ove osobine sledi da svako tvrđenje koje važi za vrste, važi i za kolone.

2. Ako u determinanti dve vrste (kolone) zamene mesta, determinanta menja znak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Ako su u determinanti svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli i determinanta je jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

4. Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone) onda je determinanta jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

5. Zajednički faktor jedne vrste (kolone) može da se izvuče ispred determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi proizvoljnom konstantom c

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \dots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. Ako su elementi neke vrste (kolone) dati kao zbir dva sabirka (u ovom slučaju elementi i-te vrste)

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tada je determinanta jednaka zbiru dve determinante kod kojih su sve vrste sem i-te jednake vrstama date determinante, a i tu vrstu jedne determinante čine elementi b_{ij}, a druge c_{ij} $(j = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. Ako su A i B kvadratne matrice n-tog reda, tada je

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Primer 27

$$\begin{vmatrix} 1983 & 1984 & 1985 \\ 1986 & 1987 & 1988 \\ 1989 & 1990 & 2000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1983 & 1984 & 1985 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1983 & 1984 & 1985 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1983 & 1983 & 1983 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -27$$

4.6.2 Izračunavanje determinante

Za svaki element a_{ij} determinante n-tog reda može se definisati njegov *minor* M_{ij} koji predstavlja determinantu $n-1$-og reda, a koja se dobija iz polazne determinante tako što se obrišu i-ta vrsta i j-ta kolona.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & a_{i-1\ 2} & \dots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \dots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & a_{i+1\ 2} & \dots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \dots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Za element a_{ij} se dalje pomoću minora M_{ij} definiše njegov *kofaktor* A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Primetimo da su minor i kofaktor jednaki ako je zbir vrste i kolone elementa a_{ij} paran a iste apsolutne vrednosti ali različitog znaka ako je zbir vrste i kolone elementa a_{ij} neparan.

Polazeći od pojma kofaktora determinanta proizvoljne matrice se može izračunati na osnovu sledeće (Laplasove) teoreme:

Teorema 1 *Neka je i proizvoljna vrsta kvadratne matrice A n-tog reda. Tada je*

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Izračunavanje determinante na ovaj način se naziva razvijanjem determinante po i-toj vrsti.

Analogno, ako je j proizvoljna kolona matrice A n-tog reda, tada je

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

što predstavlja razvijanje determinante po j-toj koloni.

Razvijanjem determinante n-tog reda po vrsti ili koloni izračunavanje determinante n-tog reda se svodi na izračunavanje n determinanti $n-1$-og reda.

Primer 28

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5(-2) + 2(-3) - 2 \cdot 19 + 3 \cdot 25 = 41$$

Napomena: Razvijanjem determinante četvrtog reda po drugoj vrsti njeno izračunavanje svedeno je na izračunavanje četiri determinanti trećeg reda.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -2 & 11 & 9 \\ 8 & 4 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ -7 & -7 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 11 & 9 \\ 8 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ -7 & -7 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 0 & 11 & 9 \\ 8 & -4 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ -7 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -7 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 8 & 19 & 41 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & -11 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 19 & 41 \\ -11 & -26 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ -11 & -26 \end{vmatrix} = -4(-208+165) = -4(-43) = 172$$

Napomena: Transformisanjem determinante petog reda na osnovu osobina determinante, i višestrukom primenom Laplasove teoreme izračunavanje determinante petog reda svedeno je na izračunavanje svega dve determinante drugog reda.

4.7 Adjungovana matrica

Definicija 16 *Ako se svaki element a_{ij} u kvadratnoj matrici A zameni svojim kofaktorom A_{ij}, i ako se potom tako dobijena matrica transponuje, dobija se* Adjungovana matrica *matrice A*

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Za adjungovanu matricu važi

$$A \cdot adj A = (adj A) \cdot A = (\det A) \cdot I$$

pri čemu je

$$(\det A) \cdot I = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$$

skalarna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki vrednosti determinante polazne matrice A.

Primer 29

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$adj A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 2 = 3$$

$$A \cdot adjA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4.8 Inverzna matrica

Definicija 17 Inverzna matrica *regularne kvadratne matrice A, koja se označava sa A^{-1}, je matrica takva da je*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Prema tome, kako kvadratna matrica ima inverznu matricu ako i samo ako je regularna ($detA \neq 0$) i kako je

$$A \cdot adjA = (adjA) \cdot A = (\det A) \cdot I$$

onda sledi da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$$

Ako su A i B regularne matrice istog reda tada je

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Za inverznu matricu važe i sledeće osobine

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

4.9 Rang matrice

Definicija 18 *Neka je data matrica A tipa $m \times n$. Matrica M tipa $p \times q$ gde je $p \leq m$ i $q \leq n$ koja je formirana od elemenata p vrsta i q kolona matrice A naziva se* submatricom (podmatricom) *matrice A.*

Primer 30

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Napomena: Matrica M formirana je od elemenata prve i treće vrste i druge i četvrte kolone matrice A.

Definicija 19 *Rang matrice je broj r jednak najvećem redu kvadratne regularne podmatrice matrice A. Važi*

$$r \leq min(m, n)$$

Drugim rečima, da bi se odredio rang matrice A, potrebno je ispitivati redom njene kvadratne podmatrice, polazeći od kvadratnih podmatrica najvišeg mogućeg reda (k), koji je jednak manjem od broja vrsta i kolona ($k = min(m, n)$). Ukoliko je bar jedna od ovih podmatrica regularna (determinanta joj je različita od 0) onda je rang matrice A jednak k. Ukoliko su sve kvadratne podmatrice reda k singularne, onda se ispituje da li među podmatricama reda $k - 1$ ima regularnih. Ako su i sve matrice $k - 1$-og reda singularne, prelazi se na matice reda $k - 2$, i tako redom. Najniži mogući rang matrice koja nije nula matrica je 1.

Primer 31

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Rang matrice A je $r = 2$ jer je $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ regularna matrica, a sve kvadratne podmatrice matrice A trećeg reda su singularne (na osnovu osobine determinante da je jednaka 0 ako su joj elementi dve vrste ili kolone proporcionalni, a budući da je u navedenom primeru treća vrsta matrice A proporcionalna prvoj).

Određivanje ranga matrice može se pojednostaviti primenom elementarnih transformacija matrice.

Definicija 20 Elementarne transformacije *matrice su*

1. *Zamena mesta dve vrste (kolone)*

2. *Množenje jedne vrste (kolone) skalarom* $\lambda \neq 0$

3. *Množenje elemenata jedne vrste (kolone) skalarom* $\lambda \neq 0$ *i dodavanje odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone)*

Definicija 21 *Ako se matrica B može dobiti iz matrice A primenom elementarnih transformacija, onda se kaže da su matrice A i B* ekvivalentne. *Ekvivalentnost matrica se označava sa*

$$B \sim A$$

Veoma značajna osobina ekvivalentnih matrica je da imaju isti rang. To omogućava određivanje ranga matrice svođenjem na ekvivalentnu matricu čiji je rang lakše odrediti.

Primer 32

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je očigledno da je rang matrice dobijene ekvivalentnim transformacijama iz matrice A jednak 2, to je i

$$rang A = 2$$