

F. DE HELGUERO

SULLA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA
DELLE STATISTICHE ABNORMALI

Il compito della statistica nelle sue varie applicazioni alle scienze economiche e biologiche non consiste solo nel determinare la legge di dipendenza dei diversi valori ed esprimerla con pochi numeri, ma anche nel fornire un aiuto allo studioso che vuole ricercare le cause della variazione e le loro modificazioni.

A questo scopo ben soddisfa la curva degli errori di osservazione o curva *normale*, tanto frequente nelle statistiche biologiche ed economiche, che esprime la variazione risultante da cause elementari di variazione infinitesime ed in numero infinito, indipendenti fra loro, facentisi equilibrio intorno alla media, od in una parola da cause *accidentali*. Soddisfano bene a questo scopo anche le curve dimorfiche che ci rivelano la eterogeneità del materiale studiato.

Invece le curve teoriche studiate dal PEARSON e dall'EDGEWORTH per la perezazione delle statistiche abnormali in un materiale omogeneo, mentre danno con molta approssimazione la legge di variazione (meglio della curva normale perchè ne sono delle generalizzazioni), a mio avviso sono difettose in quanto si limitano a dirci che le cause infinitesime elementari della variazione sono *interdipendenti*. Nulla ci fanno sapere sulla legge di dipendenza, quasi nulla sulle relazioni colla curva normale che pure deve essere considerata come fondamentale.

Io penso che miglior aiuto per lo studioso potrebbero essere delle equazioni che supponessero una perturbazione della variabilità normale per opera di cause estranee.

Una tale ipotesi dal punto di vista biologico fu per la prima volta affacciata dallo GIARD⁽¹⁾ che interpretò la bimodalità della variazione della larghezza del *Carcinus moenas* e la lunghezza delle pinze nelle forficule come dovuta all'azione di parassiti che infettassero una parte del materiale studiato.

Molte e varie ipotesi possono farsi sulla legge di perturbazione della variabilità normale: io qui ne espongo due, l'una che corrisponde all'ipotesi dello GIARD, l'altra che suppone la legge di perturbazione lineare, ipotesi a mio avviso molto importante.

(¹) GIARD A., *Sur certains cas de dédoublement des courbes de Galton dus au parasitisme et sur le dimorphisme d'origine parasitaire* (Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, volume CXVIII, p. 870, 1894).

I.

Curve dello GIARD.

Si abbia una popolazione distribuita normalmente secondo la legge

$$y = \frac{y_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2}$$

ed una causa perturbatrice, p. es. morbosa, affetti alcuni individui non lasciandoli raggiungere lo sviluppo x cui giungerebbero, ma li faccia invece figurare nella classe $(x - c)$. Se la causa perturbatrice ipertrofizzasse gli individui affetti, c sarebbe negativo.

La costante c misura l'effetto della causa perturbatrice sullo sviluppo dell'organismo e può dirsi *indice di atrofia* se positivo, di *ipertrofia* se negativo, in generale *indice di eterotrofia*.

Sia h la probabilità che ha un individuo di esser colpito dalla causa perturbatrice: se si tratta di una causa patologica può dirsi indice di *morbidità*.

Nella nostra trattazione supponiamo c ed h indipendenti da x . Inoltre poichè h esprime una probabilità deve essere $0 < h < 1$.

L'equazione della curva perturbata sarà allora

$$y = \frac{y_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2} - \frac{hy_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2} + \frac{hy_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b+c}{\sigma}\right)^2}$$

che può scriversi:

$$(1) \quad y = \frac{y_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2} + \frac{y_2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b_1}{\sigma}\right)^2}$$

avendo posto

$$(1 - h)y_0 = y_1, \quad hy_0 = y_2, \quad b - c = b_1.$$

Dalle posizioni risulta che y_1 ed y_2 devon esser sempre positive, mentre b_1 è di segno contrario a b se l'origine si prende sul baricentro.

Si vede inoltre dalla (1) che abbiamo a che fare con una curva dimorfica risultante dalla somma di due curve normali aventi però la stessa deviazione normale. Per ricavare i valori dei cinque parametri y_1, y_2, b, b_1, σ si applicano perciò i metodi da me altrove (1) esposti per la risoluzione delle curve dimorfiche.

(1) HELGUERO F., *Per la risoluzione delle curve dimorfiche* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, Roma, 1906).

Si procede in questo modo: Dai dati empirici si calcola la media $\mu'_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ e rispetto a questa i momenti $\mu'_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0}$, $\mu'_3 = \frac{\mu_3}{\mu_0}$ e $\mu'_4 = \frac{\mu_4}{\mu_0}$, dove μ_0 è l'area.

Si risolve poi l'equazione trinomia di 3° grado in p_2 :

$$(2) \quad p_2^3 + \frac{1}{2}(\mu'_4 - 3\mu'^2_2)p_2 + \frac{1}{2}\mu'^2_3 = 0.$$

Poi la

$$p_1 = -\frac{\mu'_2}{p_2}.$$

Le b e b_1 sono le radici della

$$(3) \quad b^2 - bp_1 + p_2 = 0.$$

Per b si deve prendere la radice maggiore se si tratta di atrofia, la minore se si tratta di eterotrofia.

Gli altri parametri son dati dalle formule

$$\sigma = \sqrt{p_2 + \mu'_2} \quad y_1 = -\frac{b_1 \mu_0}{b - b_1} \quad y_2 = \frac{b \mu_0}{b - b_1} = \mu_0 - \mu_1.$$

Da queste si hanno

$$y_0 = \mu_0, \quad h = \frac{y_2}{\mu_0}, \quad c = b - b_1.$$

Così si ricavano y_0, b, σ parametri della variazione ipotetica e c ed h parametri della perturbazione.

Perchè la statistica possa avere una tale interpretazione biologica, bisogna che sia $p_2 < 0$, poichè $p_2 = bb_1$. Perciò la (2) deve ammettere una soluzione reale e negativa che deve anche essere maggiore di $-\mu'_2$ perchè risulti σ reale. Questa condizione è anche sufficiente.

Essa può anche mettersi sotto altra forma. La (2) trinomia di terzo grado col termine noto positivo ha sempre una ed una sola radice reale negativa.

Perchè questa sia maggiore di $-\mu'_2$ dev'essere

$$-\mu'^3_2 - \frac{1}{2}(\mu'_4 - 3\mu'^2_2)\mu'_2 + \frac{1}{2}\mu'^2_3 < 0$$

ovvero

$$\mu'_2 \mu'_4 > \mu'^3_2 + \mu'^2_3.$$

Per fare uso dei simboli noti (V. DAVENPORT, *Statistical Methods*, p. 18), dividiamo per μ'^3_2 e si ha

$$\frac{\mu'_4}{\mu'^2_2} > 1 + \frac{\mu'^2_3}{\mu'^3_2}$$

ovvero

$$\underline{\beta_2 - \beta_1 - 1 > 2} \quad \text{ponendo } \beta_0 = \frac{\mu_4'}{\mu_2'^2}, \beta_1 = \frac{\mu_3'^2}{\mu_2'}$$

È questa dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè la curva sia suscettibile di una tale interpretazione biologica.

Per tracciare effettivamente la curva ci serviremo della sua equazione sotto la forma (1).

II.

Curve perturbate per selezione.

Supponiamo che sopra una popolazione distribuita colla legge normale

$$\frac{y_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2}$$

agisca una selezione sfavorevole alle classi più basse (o alle più elevate) tale che per ogni classe y vengano eliminati $y\varphi(x)$ individui, dicendo $\varphi(x)$ la probabilità che ha ogni individuo di essere colpito. Noi supponiamo $\varphi(x)$ funzione di x ; poichè essa rappresenta una probabilità dovrà essere $0 < \varphi(x) < 1$.

Per ogni classe rimarranno allora $y - y\varphi(x)$ cioè

$$y(1 - \varphi(x)) \text{ individui.}$$

L'ipotesi più semplice che possiamo fare in $\varphi(x)$ è che sia funzione lineare di x .

$$\varphi(x) = A(x - b) + B.$$

Essa acquista il valore zero per $x_0 = b - \frac{B}{A}$ e il valore 1 per $x_1 = b + \frac{1-B}{A}$ che dovranno perciò cadere fuori del campo di variazione.

Sostituendo e ponendo

$$y_0 = y_1(1 - B) \quad , \quad \alpha = -\sigma \frac{A}{1 - B} \quad ,$$

si ha l'equazione

$$y = \frac{y_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\alpha(x-b)}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2} .$$

Figurano in questa le costanti b e σ media e deviazione normale della variazione normale ipotetica, y_0 proporzionale al numero degli individui studiati ed $\frac{\alpha}{\sigma}$ che misura la deviazione dalla normalità che io dico perciò *coefficiente di abnormalità*. Esso è positivo o negativo secondo che la selezione colpisce di più gli individui delle classi basse o quelle delle classi elevate.

La curva così ottenuta ha un solo massimo (*unimodale*), asimmetrica, da una parte asintotica all'asse delle x , mentre dall'altra lo taglia alla distanza $-\frac{\sigma}{\alpha}$ dall'asse della variazione ipotetica.

Della grande importanza di queste curve mi riservo di parlare altrove e delle loro applicazioni alla economia e alla biologia, qui tratto solo del problema delle determinazioni dei parametri per mezzo dei dati empirici.

Il metodo che espongo è generale e può applicarsi qualunque sia il coefficiente di abnormalità.

Sia al solito l'equazione

$$y = \frac{y_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\alpha x}{\sigma}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

della quale vogliamo determinare i parametri y_0, σ, α e la posizione dell'origine rispetto al baricentro. Anche qui faremo uso dei momenti della curva empirica.

Poniamo

$$y_1 = y_0 \frac{\alpha}{\sigma};$$

l'equazione può scriversi

$$y = \frac{y_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{\alpha} + x\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

e si annulla per $x = -\frac{\sigma}{\alpha}$.

Calcoliamone i momenti: supporrò α positivo, ma il procedimento sarebbe assolutamente analogo se α fosse negativo e le formule finali sono le stesse.

Indichiamo i momenti rispetto all'asse della variazione ipotetica con ν_n . Per trovarli dovremo servirci degli integrali:

$$I_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{\alpha}}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

È facile avere una relazione ricorrente:

$$I_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{\alpha}}^{+\infty} x^{n-1} de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-\sigma}{\alpha}\right)^{n-1} e^{-\frac{1}{2\alpha^2}} + \frac{(n-1)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{\alpha}}^{+\infty} x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

ponendo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = z\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

si ha:

$$I_n = \sigma \left(-\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{n-1} z + (n-1)\sigma^2 I_{n-2}.$$

In questo modo si riconducono tutte le I ad I_0 ed I_1 . Calcoliamole:

$$I_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{\alpha}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

che è funzione di $\frac{1}{\alpha}$; la indicherò con $I_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{\alpha}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\frac{x^2}{2\sigma^2} = + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}} = \sigma z\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Le due funzioni I_0 e z sono ben note e ne sono state costruite delle tavole; cito quelle di W. F. SHEPPARD nelle quali si adotta il simbolo $\frac{1}{2}(1 + \alpha)$ invece di I_0 . Ho dovuto cambiare il simbolo in questo procedimento per non generare confusione.

Gli altri integrali I_n si ottengono facilmente:

$$I_0 = I_0\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$I_1 = \sigma z\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$I_3 = -\frac{\sigma^2}{\alpha} z + \sigma^2 I_0 = -\sigma^2 \left(\frac{1}{\alpha} z - I_0\right),$$

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} z + 2\sigma^3 z = \sigma^3 \left(\frac{1}{\alpha^2} + 2\right) z,$$

$$I_4 = -\frac{\sigma^4}{\alpha^3} z - 3\frac{\sigma^4}{\alpha} z + 3\sigma^4 I_0 = -\sigma^4 \left\{ \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{3}{\alpha}\right) z - 3I_0 \right\}.$$

Calcoliamo ora i momenti:

$$v_0 = y_1 \left(\frac{\sigma}{\alpha} I_0 + I_1 \right)$$

$$v_1 = y_1 \left(\frac{\sigma}{\alpha} I_1 + I_2 \right)$$

$$v_2 = y_1 \left(\frac{\sigma}{\alpha} I_2 + I_3 \right)$$

$$v_3 = y_1 \left(\frac{\sigma}{\alpha} I_3 + I_4 \right).$$

Da esse si ha sostituendo:

$$v_0 = \sigma y_1 \left(\frac{1}{\alpha} I_0 + z \right)$$

$$v_1 = \sigma^2 y_1 I_0$$

$$v_2 = \sigma^3 y_1 \left(\frac{1}{\alpha} I_0 + 2z \right)$$

$$v_3 = \sigma^4 y_1 \left(3I_0 - \frac{1}{\alpha} z \right).$$

Dalla prima si ottiene y_1 in funzione degli altri parametri:

$$y = \frac{v_0}{\sigma} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} I_0 + z},$$

e ricordando le posizioni fatte

$$y_0 = v_0 \chi_1(\alpha)$$

dove $\chi_1(\alpha) = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} I_0 + z}$ è funzione della sola α , pari, sempre positiva.

Dividendo v_1, v_2, v_3 per v_0 si ha:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{\sigma I_0}{\frac{1}{\alpha} I_0 + z} = \sigma \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + F}$$

$$\frac{v_2}{v_0} = \sigma^2 \frac{\frac{1}{\alpha} I_0 + 2z}{\frac{1}{\alpha} I_0 + z} = \sigma^2 \frac{\frac{1}{\alpha} + 2F}{\frac{1}{\alpha} + F}$$

$$\frac{v_3}{v_0} = \sigma^3 \frac{3I_0 - \frac{1}{\alpha} z}{\frac{1}{\alpha} I_0 + z} = \sigma^3 \frac{3 - \frac{1}{\alpha} F}{\frac{1}{\alpha} + F}$$

dove $F = \frac{z}{I_0}$ è una funzione dispari di α .

La prima ci fa conoscere la distanza del baricentro dalla media della variazione ipotetica; onde conoscendo il baricentro ed α , potremo trovare l'asse della variazione ipotetica posta a $-\sigma\chi_2(\alpha)$, dove

$$\chi_2(\alpha) = \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]}$$

è funzione dispari, avente sempre lo stesso segno di α .

Cerchiamo ora i momenti μ_2 e μ_3 rispetto al baricentro.

$$\mu_2 = \frac{\nu_2}{\nu_0} - \left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\alpha^2} + 2\frac{1}{\alpha}F + 2F^2 - 1\right)}{\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2} = \frac{2\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + F\right] - 1}{\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2} \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{\nu_3}{\nu_0} - 3\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_0\nu_0} + 2\left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^3 = -\sigma^3 \frac{\frac{1}{\alpha}F\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2 + 3F\left[\frac{1}{\alpha} + F\right] - 2}{\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^3}$$

Dalla prima si ricava σ :

$$\sigma^2 = \mu_2\chi_3(\alpha), \text{ dove } \chi_3(\alpha) = \frac{\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2}{2\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + F\right] - 1}$$

è funzione pari di α , sempre positiva.

Elevando μ_3 a quadrato e dividendo per il cubo di μ_2 si elimina σ . Facendo uso della lettera β_1 , già usata dal PEARSON per indicare la stessa espressione abbiamo:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\left\{\frac{1}{\alpha}F\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2 + 3F\left[\frac{1}{\alpha} + F\right] - 2\right\}^2}{\left\{2\left[\frac{1}{\alpha} + F\right]^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + F\right] - 1\right\}^3}$$

che è anch'esso funzione della sola α , sempre positivo.

Inversamente in questa formula potremo considerare α come funzione di β_1 che si ottiene dai dati empirici. Noto α avremo gli altri parametri mediante le formule già trovate.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mu_2\chi_3(\alpha) \\ b &= \mu_1 - \sigma\chi_2(\alpha) \\ \nu_0 &= \nu_0\chi_1(\alpha)^2. \end{aligned}$$

Le funzioni χ_1 e χ_3 sono sempre positive, χ_2 ha il segno di α , cioè il segno del momento terzo rispetto al baricentro μ_3 . Delle funzioni $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \beta_1$, la tabella dà i valori dei logaritmi per α da .30 a 1.—.

Per $\alpha < .30$ la curva è così vicina alla normalità che la sua rappresentazione per mezzo di quella può considerarsi come soddisfacente.

Ecco il procedimento pratico per applicare la teoria svolta.

Dalla statistica si comincia col calcolare la media e rispetto a questa i momenti μ_2 e μ_3 . Da questi si calcola $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$.

Si cerca sulle tavole il valore di β_1 più vicino a quello trovato e così si ha α , a cui si dà per segno il segno di μ_3 . Volendo un grande rigore si potrebbe interpolare in modo da ottenere per α un più preciso valore, ma nelle mie prove mi son convinto che si può senz'altro prendere per α il valore più prossimo.

Nello stesso tempo si osservano i valori delle funzioni χ_1 , χ_2 , ecc.

Trovato α si calcolano gli altri parametri mediante le formole

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\mu_2 \chi_3(\alpha)}, \\ y_0 &= \nu_0 \chi_1(\alpha).\end{aligned}$$

L'asse della variazione normale ipotetica è posto a

$$b = \mu_1 - \sigma \chi_2(\alpha),$$

dove χ_2 ha il segno di α .

L'equazione riferita a quest'asse come origine è:

$$y = \frac{y_0}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\alpha x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha x}{\sigma}\right)^2}$$

III.

Applicazione ad alcune statistiche di salari.

Termino questo scritto applicando il metodo alla rappresentazione di due statistiche di salari per far vedere come possono confrontarsi statistiche analoghe.

I dati mi sono stati forniti dal dott. MENGARINI che sta preparando una Memoria su questo soggetto: sono due statistiche degli "Ouvriers à veine" per gli anni 1896 e 1900 ricavate dal libro: *Statistique des Salaires dans les Mines de Houille*, pubblicato dalla Sezione di statistica dell'Ufficio del lavoro belga. (Bruxelles, Fourez, 1901).

I dati della prima curva sono:

$$\text{Media a } 4.1642, \mu_2 = 1.8107, \mu_3 = .5287, \text{ onde } \beta_1 = .047084.$$

Il valore di α corrispondente è .54.

Con questo troviamo:

$$\sigma = .78725, y_0 = 99.329.$$

La media della variazione ipotetica è 3.7659.

Il limite è inferiore a 2.345.

L'equazione è:

$$y = \frac{99.329}{.76725\sqrt{2\pi}} \left(1 + .54 \frac{x - 3.7659}{.76725} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - 3.7659}{.76725} \right)^2}.$$

Per la seconda curva abbiamo:

$$\text{Media} = 6.3534, \mu_2 = 5.5930, \mu_3 = 2.9326 \text{ onde } \beta_1 = .049156.$$

Il valore di α più vicino è .54.

Con questo troviamo:

$$\sigma = 1.3485, y_0 = 99.329.$$

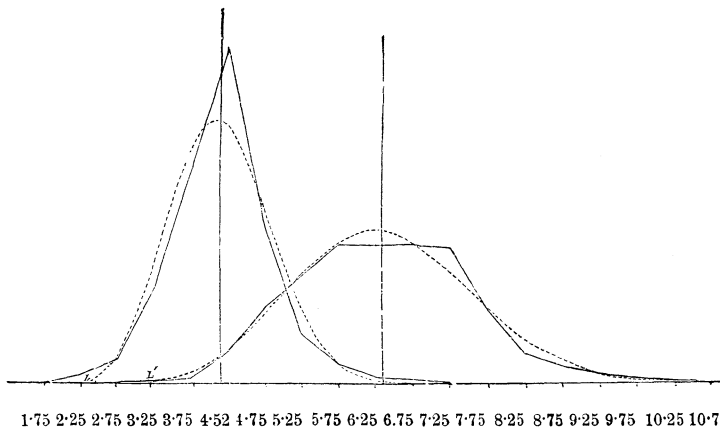
L'asse della variazione ipotetica è a 5.1667.

Il limite è inferiore a 3.4139.

L'equazione è:

$$y = \frac{99.329}{1.3485\sqrt{2\pi}} \left(1 + .54 \frac{x - 5.1667}{1.3485} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - 5.1667}{1.3485} \right)^2}.$$

Le curve sono tracciate nella figura, coi poligoni empirici. La differenza non è grande specialmente riflettendo all'enorme concentrazione del 35% in una sola classe della prima statistica.



Statistiche dei salari degli « Ouvriers à veine »
delle Miniere di carbon fossile del Belgio.

Poichè le rappresentazioni sono abbastanza buone possiamo trarre la conclusione che la variazione dei salari considerati è quale ci darebbe una variabilità normale perturbata con una legge di selezione che colpisce di preferenza i salari bassi.

Naturalmente non basta questo per poter affermare l'esistenza di una causa perturbatrice; lo studio dettagliato del fenomeno in tutte le sue modalità deve controllare questa ipotesi.

Solo posso indicare quale potrebbe essere in generale una causa di selezione per le statistiche dei salari: l'emigrazione alla quale si lasciano più facilmente trascinare gli operai meno retribuiti.

Riguardo alla abnormalità i coefficienti $\frac{\alpha}{\sigma}$ sono .704 e .400 onde si vede che essa è notevolmente diminuita in 4 anni, per quanto il valore di α sia rimasto costante.

TABELLA

α	$\log \chi_1(\alpha)$	$\log \chi_2(\alpha)$	$\log \chi_3(\alpha)$	β
·30	Ī·9999854	Ī 4769203	·0406982	·00358
·31	Ī 9999772	Ī·4910660	·0434899	·00433
·32	Ī 9999659	Ī·5047294	·0463532	·00519
·33	Ī·9999509	Ī·5179339	·0493820	·00616
·34	Ī·9999308	Ī·5306992	·0522639	·00725
·35	Ī·9999048	Ī·5430436	·0553039	·00845
·36	Ī·9998720	Ī·5549844	·0583818	·00977
·37	Ī·9998314	Ī·5665371	·0614946	·01121
·38	Ī·9997818	Ī 5777161	·0646353	·01276
·39	Ī 9997227	Ī·5885351	·0677959	·01440
·40	Ī 9996522	Ī·5990069	·0709697	·01615
·41	Ī·9995697	Ī·6091439	·0741514	·01801
·42	Ī·9994749	Ī·6189582	·0773351	·01996
·43	Ī 9993665	Ī·6284613	·0805150	·02201
·44	Ī·9992431	Ī·6376631	·0836849	·02413
·45	Ī·9991052	Ī·6465753	·0868421	·02633
·46	Ī·9989504	Ī·6552081	·0899820	·02860
·47	Ī·9987790	Ī·6635706	·0930998	·03093
·48	Ī·9985911	Ī·6716737	·0961941	·03333
·49	Ī·9983845	Ī·6795253	·0992591	·03577
·50	Ī·9981605	Ī·6871358	·1022952	·03825
·51	Ī·9979352	Ī·6945130	·1052979	·04078
·52	Ī·9976560	Ī 7016672	·1082694	·04335
·53	Ī·9973751	Ī·7086045	·1112034	·04594
·54	Ī·9970744	Ī·7153329	·1140987	·04855
·55	Ī·9967553	Ī·7218622	·1169581	·05118
·56	Ī·9964170	Ī·7281985	·1197790	·05384
·57	Ī 9960582	Ī·7343481	·1225579	·05651
·58	Ī·9956801	Ī·7403187	·1252972	·05918
·59	Ī·9952826	Ī·7461171	·1279958	·06185
·60	Ī·9948640	Ī·7517479	·1306503	·06452
·61	Ī·9944276	Ī·7572200	·1332698	·06719
·62	Ī·9939721	Ī·7625382	·1358412	·06986
·63	Ī·9934972	Ī·7677075	·1383744	·07252
·64	Ī·9930036	Ī·7727340	·1408667	·07517
·65	Ī·9924912	Ī·7776222	·1433175	·07781
·66	Ī·9919618	Ī·7823791	·1457318	·08045

α	$\log \chi_1(\alpha)$	$\log \chi_2(\alpha)$	$\log \chi_3(\alpha)$	β
·67	Ī·9914120	Ī·7870056	·1481001	·08305
·68	Ī·9908453	Ī·7915095	·1504309	·08564
·69	Ī·9902611	Ī·7958946	·1527226	·08822
·70	Ī·9896599	Ī·8001649	·1549790	·09078
·71	Ī·9890418	Ī·8043245	·1571918	·09332
·72	Ī·9884068	Ī·8083770	·1593682	·09584
·73	Ī·9877557	Ī·8123265	·1615087	·09833
·74	Ī·9870888	Ī·8161765	·1636145	·10081
·75	Ī·9864064	Ī·8199307	·1656815	·10326
·76	Ī·9857089	Ī·8235921	·1677152	·10569
·77	Ī·9849953	Ī·8271266	·1697294	·10808
·78	Ī·9842680	Ī·8306474	·1716748	·11046
·79	Ī·9835267	Ī·8340488	·1736059	·11280
·80	Ī·982707	Ī·8373683	·1755022	·11513
·81	Ī·9820023	Ī·8406107	·1773696	·11744
·82	Ī·9812193	Ī·8437762	·1792012	·11971
·83	Ī·9804247	Ī·8468696	·1810060	·12196
·84	Ī·9796164	Ī·8498909	·1827759	·12418
·85	Ī·9787965	Ī·8528445	·1845192	·12638
·86	Ī·9779649	Ī·8557315	·1862326	·12855
·87	Ī·9771214	Ī·8585542	·1879172	·13070
·88	Ī·9762665	Ī·8613144	·1895735	·13282
·89	Ī·9754015	Ī·8640148	·1912040	·13492
·90	Ī·9745250	Ī·8666561	·1928060	·13698
·91	Ī·9736386	Ī·8692412	·1943828	·13903
·91	Ī·9727422	Ī·8717712	·1959331	·14105
·93	Ī·9718364	Ī·8742481	·1974591	·14305
·94	Ī·9709204	Ī·8766729	·1989597	·14502
·95	Ī·9699957	Ī·8790474	·2004352	·14696
·96	Ī·9690623	Ī·8813737	·2018885	·14888
·97	Ī·9681212	Ī·8836524	·2033171	·15077
·98	Ī·9671697	Ī·8858855	·2047247	·15265
·99	Ī·9662112	Ī·8880739	·2061095	·15450
·100	Ī·9652450	Ī·8902190	·2074723	·15633