SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

PAR M. M. PLANCHEREL,
Professeur à l'École Polytechnique Fédérale, Zurich, Suisse.

1. A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff* ont démontré que si

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(\log n)^{1+\delta}, \quad (\delta > 0),$$

converge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge presque partout. La méthode de ces deux auteurs peut s'appliquer à d'autres séries de fonctions orthogonales; son succès dépend de la possibilité de trouver une estimation précise de

$$\int_M \int_M \Phi_{m,n}(x,y)dxdy,$$

M désignant un ensemble mesurable quelconque de l'intervalle (a, b) pour lequel les fonctions continues $\phi_p(x)$ forment un système orthogonal normé, et $\Phi_{m,n}$ étant définie par

$$\Phi_{m,n}(x, y) = \underset{m<r\leqq s\leqq n}{\text{maximum}} \sum_{p=r}^{s} \phi_p(x)\phi_p(y).$$

On a, en effet, en notant

$$U_{m,n}(x) = \underset{m<r\leqq s\leqq n}{\text{maximum}} \sum_{p=r}^{s} a_p\phi_p(x),$$

$$\overline{U}_{m,n}(x) = \underset{m<r\leqq s\leqq n}{\text{maximum}} \left(-\sum_{p=r}^{s} a_p\phi_p(x)\right),$$

l'inégalité

$$\left|\int_M U_{m,n}(x)\,dx\right|^2 \leqq \sum_{p=m+1}^{n} a_p^2 \int_M\int_M \Phi_{m,n}(x,y)dxdy$$

et une inégalité analogue pour $\overline{U}_{m,n}(x)$. Or, si

$$U_m(x) = \lim_{n\to\infty} U_{m,n}(x), \quad \overline{U}_m(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{U}_{m,n}(x),$$

**Sur la convergence des séries de Fourier.* Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, t. 178 (1924), p. 301-303.)

la série $\sum_{p=1}^{\infty} a_p \phi_p(x)$ convergera certainement presque partout dans (a, b) lorsque, pour tout ensemble mesurable M de mesure inférieure à $b-a$, $\int_M U_m dx$ *et* $\int_M \bar{U}_m dx \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$.

Les formules asymptotiques connues permettent une estimation de

$$\int_M \int_M \Phi_{m,n}(x, y) dx dy$$

dans le cas des polynomes de Legendre, des fonctions de Bessel et d'une classe étendue de polynomes orthogonaux.

On démontre ainsi, par exemple, que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2n+1} (\log n)^{1+\delta}, \qquad (\delta > 0),$$

converge, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

converge presque partout dans $(-1, +1)$. Résultats analogues pour les séries de fonctions de Bessel et pour d'autres développements en série de polynomes orthogonaux.

2. Des considérations analogues montrent que si $f(x)^2$ est intégrable dans $(0, \infty)$ et si

$$\int_1^{\infty} f(x)^2 (\log x)^{1+\delta} dx, \qquad (\delta > 0),$$

est finie, la limite de

$$\int_0^z f(x) \cos xy dx$$

pour $z \rightarrow \infty$ existe presque partout et qu'il en est de même de celle de

$$\int_o^z x f(x) \ I_\nu(xy) dx, \quad (\nu > -1),$$

si $xf(x)^2$ est intégrable dans $(0, \infty)$ et si $\int_1^{\infty} x f(x)^2 (\log x)^{1+\delta} dx$ est finie.

3. Rademacher* a démontré, en utilisant un théorème de I. Schur, que si les fonctions $f_n(x)$ sont de carré intégrable dans (a, b) et si la forme quadratique

$$\int_a^b (z_1 f_1(x) + z_2 f_2(x) + \ldots)^2 dx$$

**Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Mathematische Annalen, Ed. 87 (1922), s. 126.

est bornée, la convergence de

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 (\log \nu)^2$$

entraîne la convergence de

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p f_p(x)$$

presque partout dans (a, b). Il peut être utile de remarquer que ce résultat peut s'établir directement sans utiliser le théorème de Schur, et cela par la méthode qu'emploie Rademacher pour établir le théorème II de son mémoire.