

O. NICOLETTI

SULLA RIDUZIONE A FORMA CANONICA

DI UN FASCIO DI FORME BILINEARI E QUADRATICHE

1. Il teorema di WEIERSTRASS dà le condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, tali che i determinanti dei due fasci non siano identicamente nulli; è perciò necessario e sufficiente che i determinanti dei due fasci abbiano gli stessi divisori elementari.

La dimostrazione data da WEIERSTRASS ha carattere trascendente ed a FROBENIUS si deve la prima dimostrazione *razionale* del teorema di WEIERSTRASS.

In una Memoria, pubblicata nel XIV volume degli Annali di Matematica (anno 1908) ho dato una nuova dimostrazione (razionale) del teorema stesso. Essa si fonda sulle considerazioni seguenti.

Si abbiano due forme bilineari in due serie di n variabili $u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n$:

$$(1) \quad A(u, v) = \sum_{i,k}^n a_{ik} u_i v_k; \quad B(u, v) = \sum_{i,k}^n b_{ik} u_i v_k,$$

la seconda delle quali abbia il determinante:

$$|b_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

diverso da zero. Sia R un campo assegnato di razionalità, che contiene i coefficienti a_{ik}, b_{ik} delle due forme, e detto:

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

il determinante del fascio $A - \omega B$, sia P un divisore di $D(\omega)$, primo nel campo R , e sia $g \geq 1$ il suo grado in ω . Al divisore P corrispondono $h \geq 1$ divisori elementari di $D(\omega)$:

$$P^{e_1}, P^{e_2}, \dots, P^{e_h}, \quad (\text{con } e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_h \geq 1);$$

ed è possibile ottenere dai minori del determinante $D(\omega)$, *in modo razionale*, un

sistema di hn polinomi in ω :

$$X_k^{(p)} = \sum_v^{e_p-1} \sum_u^{g-1} x_k^{e_p v g + u} \omega^u P^v, \quad (k = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, h)$$

i quali soddisfano alle congruenze:

$$(2) \sum_k^n (a_{ik} - \omega b_{ik}) X_k^{(p)} \equiv 0 \pmod{P^{e_p}}, \quad (p = 1, 2, \dots, h; i = 1, 2, \dots, n)$$

e sono tali inoltre che la matrice di n righe e di $g \sum_p^h e_p$ colonne

$$|x_k^{e_p t_p}|, \quad (k = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, h; t_p = 0, 1, \dots, e_p g - 1)$$

formata coi coefficienti dei polinomi stessi ha la caratteristica $g \sum_p^h e_p$, è cioè, come si dice, diversa da zero.

Un tale sistema di polinomi e la matrice dei loro coefficienti ho detto rispettivamente un sistema *canonico* ed una matrice *canonica* relativa al divisore P ed alle righe (corrispondenti al primo indice i) di $D(\omega)$.

Siano ora P_1, P_2, \dots, P_s i divisori primi diversi di $D(\omega)$ nel campo R . Riunendo s matrici canoniche relative ad essi divisori, otteniamo una matrice quadrata

$$X \equiv |x_k^r|, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n)$$

di ordine n , il cui determinante è diverso da zero. Una tale matrice diciamo *canonica* per le righe di $D(\omega)$. È possibile determinare razionalmente la più generale di queste matrici; essa contiene:

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \dots + n_n)$$

parametri arbitrari, dove n_r ($r = 0, 1, \dots, n; n_0 = n$) indica il grado in ω del massimo comun divisore $D_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ del determinante $D(\omega)$.

In modo analogo si definisce una matrice canonica

$$Y \equiv |y_i^s|, \quad (i, s = 1, 2, \dots, n)$$

per le colonne, invece che per le righe, di $D(\omega)$.

2. Siano

$$X \equiv |x_k^r|, \quad Y \equiv |y_i^s|, \quad (i, k, r, s = 1, 2, \dots, n)$$

due matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$, e poniamo:

$$(3) \quad B_{rs} = \sum_k^n b_{ik} y_i^s x_k^r, \quad (r, s = 1, 2, \dots, n);$$

le quantità B_{rs} così definite soddisfano ad un sistema di equazioni lineari omogenee (simmetriche nei primi e secondi indici), le quali dipendono soltanto dai divisori elementari del determinante $D(\omega)$ nel campo R .

Queste equazioni, che ometto di scrivere, indico brevemente col nome di *equazioni fondamentali*.

Sia inversamente B_{rs} , ($r, s = 1, 2, \dots, n$) una soluzione delle equazioni fondamentali, per la quale il determinante

$$|B_{rs}|, \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

è diverso da zero, o, come diremo, sia B_{rs} una soluzione *propria* delle equazioni fondamentali. Indicando con $X(Y)$ una matrice canonica arbitraria per le righe (per le colonne) di $D(\omega)$, si può, ed in un modo solo (colla risoluzione di equazioni lineari), associare ad essa una matrice canonica $Y(X)$ per le colonne (per le righe) di $D(\omega)$, in guisa che valgano le relazioni (3).

Si ha di qui subito la più generale soluzione propria delle equazioni fondamentali; essa dipende ancora da N parametri arbitrari.

Due matrici canoniche, per le quali valgano le (3), si diranno *associate* alla soluzione B_{rs} , che figura nelle (3) stesse; è chiaro da ciò che precede che ad una qualunque soluzione propria delle equazioni fondamentali sono associate ∞^N coppie di matrici canoniche.

Tra le soluzioni proprie delle equazioni fondamentali, una si distingue per la sua grande semplicità; la diremo la soluzione *principale*; due matrici canoniche associate alla soluzione principale le diremo semplicemente *associate*.

3. Sia B_{rs} una soluzione propria delle equazioni fondamentali e

$$X \equiv |x_k^r|, \quad Y \equiv |y_i^s|, \quad (i, k, r, s = 1, 2, \dots, n)$$

due matrici canoniche associate ad essa; e si cambino le variabili u_i, v_k in altre η_r, ζ_s ($r, s = 1, 2, \dots, n$) colle formole:

$$u_i = \sum_1^n y_i^r \eta_r, \quad v_k = \sum_1^n x_k^r \zeta_r;$$

il fascio $A - \omega B$ assume una forma, la quale dipende soltanto dalla soluzione B_{rs} considerata e dai divisori elementari di $D(\omega)$ in R . Questa forma diremo la forma *canonica* del fascio, *associata alla soluzione* B_{rs} . Il risultato è invertibile; due trasformazioni lineari, non degeneri, sulle u e sulle v , che riducano il fascio $A - \omega B$ alla forma precedente, sono date necessariamente da due matrici canoniche, associate alla soluzione B_{rs} considerata.

Si hanno così per il fascio $A - \omega B$ ∞^N forme canoniche; e fissata una qualunque di esse, si può determinare razionalmente la più generale trasformazione che riduce il fascio ad essa forma canonica; essa contiene ancora N parametri arbitrari.

La forma canonica del fascio associata alla soluzione principale delle equazioni fondamentali si dirà semplicemente la forma *canonica* del fascio. Quando i divisori primi del determinante $D(\omega)$ del fascio hanno tutti il primo grado (come si ha, in particolare, quando \mathbf{R} sia il campo totale di tutti i numeri reali e complessi) la forma canonica del fascio è quella data da WEIERSTRASS.

Il teorema di WEIERSTRASS è un corollario immediato di quanto precede. Infatti, se per due fasci $\mathbf{A} - \omega\mathbf{B}$, $\mathbf{A}' - \omega\mathbf{B}'$ di forme bilineari, i determinanti $D(\omega)$, $D'(\omega)$ hanno gli stessi divisori elementari, è cioè $D_r = D'_r$, ($r = 0, 1, \dots, n$), essi si decompongono in ugual modo nel campo \mathbf{R} ; i due fasci hanno quindi comuni le equazioni fondamentali, le loro soluzioni proprie e le ∞^n forme canoniche; i due fasci sono quindi equivalenti. Si ha inoltre, in modo razionale, la più generale trasformazione di un fascio nell'altro.

4. Supponiamo ora che le forme \mathbf{A} , \mathbf{B} siano simmetriche, sia cioè:

$$a_{ik} = a_{ki}, b_{ik} = b_{ki}; \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ lo è anche per le colonne ed inversamente. Le equazioni fondamentali ammettono infinite soluzioni simmetriche (per le quali è $B_{rs} = B_{sr}$, per $r, s = 1, 2, \dots, n$), e tra queste è anche la soluzione principale. Consideriamo, per fissare le idee, questa soluzione. È possibile determinare una matrice canonica \mathbf{X} di $D(\omega)$, associata di sè stessa rispetto alla soluzione principale. Una tale matrice diremo *normale*; nota una particolare matrice normale, si ha in modo razionale la più generale di esse matrici; essa dipende da

$$N_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_n$$

parametri arbitrari, avendo i numeri n_r ($r = 1, \dots, n$) il significato già dichiarato al n. 1.

La determinazione di una matrice normale, associata alla soluzione principale delle equazioni fondamentali, dipende dal problema della riduzione a somma di quadrati (mod \mathbf{P}) di una forma quadratica, i cui coefficienti sono definiti (mod \mathbf{P}), dove \mathbf{P} è un divisore primo di $D(\omega)$ in \mathbf{R} ; e questo problema porta a considerare delle congruenze quadratiche del tipo:

$$Z^2 \equiv \mathbf{A} \pmod{\mathbf{P}},$$

essendo \mathbf{A} un polinomio primo con \mathbf{P} .

La congruenza superiore non ha sempre soluzioni nel campo \mathbf{R} ; detto g il grado di \mathbf{P} , ne ha 2^g nel campo più ampio che si ottiene aggiungendo ad \mathbf{R} le g radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ dell'equazione $\mathbf{P} = 0$ ed i g radicali quadrati:

$$\sqrt{\mathbf{A}(\omega_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, g).$$

Ne segue facilmente che una matrice normale appartiene, *in generale*, al campo \mathbf{R}_1 ,

che si ha aggiungendo al campo R le radici dell'equazione $D(\omega) = 0$ e dei radicali quadrati, il cui numero uguaglia quello dei divisori elementari (ora tutti di primo grado) del determinante $D(\omega)$.

Sia ora:

$$X \equiv |x_k^r|, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n)$$

una matrice normale e si cambino le variabili u, v in altre η, ζ colle formole

$$u_i = \sum_1^n x_i^r \eta_r, \quad v_i = \sum_1^n x_i^r \zeta_r, \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

il fascio $A - \omega B$ assume la forma canonica, associata alla soluzione principale.

Ne segue subito che condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di forme bilineari simmetriche (o, ciò che è lo stesso, due fasci di forme quadratiche), i cui determinanti non siano identicamente nulli, siano congruenti, è ancora l'uguaglianza dei divisori elementari dei due fasci e si ha insieme la più generale trasformazione che porta l'uno nell'altro fascio. Essa dipende ancora da

$$N_1 = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n$$

parametri arbitrari ed è, in generale, irrazionale.

Aggiungiamo ancora un'osservazione. Il fascio dato sia *reale* (le a_{ik}, b_{ik} siano cioè numeri reali) e, per semplicità, assumiamo come campo fondamentale il campo reale. Esistono allora infinite forme canoniche *reali* del fascio $A - \omega B$, nelle quali il fascio stesso è portato da una trasformazione *reale*. Vale in questa riduzione a forma canonica reale una *legge di inerzia*, che comprende in sè, come caso particolarissimo, quella di SYLVESTER-JACOBI per le forme quadratiche reali. Si è condotti così ad introdurre degli invarianti numerici di un fascio reale di forme quadratiche, i quali assegnano quella che si può dire la *segnatura* del fascio. È notevole osservare che: *La segnatura di un fascio di forme quadratiche si determina razionalmente*. Inoltre l'uguaglianza dei divisori elementari e della segnatura di due fasci reali è condizione necessaria e sufficiente perchè essi siano congruenti per trasformazioni reali.

Si traggono anche di qui altre conseguenze notevoli, ad es. la condizione necessaria e *sufficiente* perchè un fascio reale di forme quadratiche contenga delle forme definite, o, più generalmente, di segnatura determinata.

5. Diciamo brevemente anche delle trasformazioni congruenti dei fasci di forme bilineari emisimmetriche. La condizione che il determinante del fascio non sia identicamente nullo, porta che il numero n sia pari.

Le equazioni fondamentali ammettono anche infinite soluzioni emisimmetriche; ad una qualunque di queste, è possibile associare, *in modo razionale*, (ciò che non è per i fasci di forme quadratiche) ∞^{n_2} matrici normali, cioè associate di sè stesse, essendo

$$N_2 = n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_n.$$

Ne segue ancora che l'uguaglianza dei divisori elementari di due fasci di forme bilineari emisimmetriche è condizione necessaria e sufficiente perchè essi siano congruenti e si ha insieme, in modo razionale, la più generale trasformazione di un fascio nell'altro. Essa contiene ancora N_2 parametri arbitrari.

6. Abbiamo supposto, per semplicità, che il determinante del fascio $A - \omega B$ non sia identicamente nullo. Quando questo accada, conviene considerare insieme colle congruenze (2) le equazioni lineari:

$$\sum_1^n (a_{ik} - \omega b_{ik}) X_k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e le loro soluzioni polinomiali. Valgono poi, con lievi modificazioni, delle conclusioni affatto analoghe alle precedenti.
