CONTEÚDO

AOS LEITORES

Realizamos durante 1999 a XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em mais de 2.500 colégios de nosso país, atingindo na realização da primeira etapa cerca de 60.000 alunos. Este ano a Olimpíada se realizará nas seguintes datas:

Primeira Fase – Sábado, 10 de junho
Segunda Fase – Sábado, 02 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 21 de outubro (níveis 1,2 e 3)
Domingo, 22 de outubro (nível 3 - segundo dia).

A Comissão Nacional de Olimpíadas entende que todo aluno que desejar participar da OBM deve poder fazê-lo sem restrições. A comissão oferece inclusive a alunos de escolas que não participam da OBM a possibilidade de fazer as provas sob supervisão direta do Coordenador Regional. As escolas podem naturalmente aconselhar seus alunos a participar ou não da Olimpíada de acordo com seus próprios critérios, mas a escola nunca deve impedir um aluno de participar se este for o seu desejo.

Lembramos que a Olimpíada Brasileira de Matemática *é uma competição entre alunos e não entre colégios*. A OBM divulga apenas os nomes e pontuações dos alunos premiados; a OBM nunca divulgou nem divulgará comparações entre colégios. Nosso objetivo é estimular o estudo de Matemática entre os jovens, contribuir para o aprimoramento dos professores e propiciar uma melhoria do ensino e do aprendizado desta matéria nas escolas brasileiras e não comparar desempenhos de escolas.

O Regulamento da OBM foi atualizado. Leia o novo regulamento no site: **`http://www.obm.org.br/regulamento.htm`**

Finalmente, aproveitamos, para registrar a realização da Semana Olímpica 2000, atividade que vem sendo realizada desde 1998. Nesta oportunidade o evento teve lugar na Universidade Metodista de Piracicaba (UNIMEP) entre os dias 21 a 27 de janeiro de 2000. Durante a Semana Olímpica 2000, reunimos alunos ganhadores da XXI Olímpiada Brasileira de Matemática nos seus três níveis de competição. Estes alunos participaram de um treinamento intensivo com professores de diversas partes do país como preparação para a futura formação das equipes que representarão o Brasil em Olimpíadas Internacionais. Além disso eles tiveram a oportunidade de conquistar novas amizades, iniciando um relacionamento extremamente proveitoso com outros jovens da mesma faixa de idade e com interesses semelhantes.

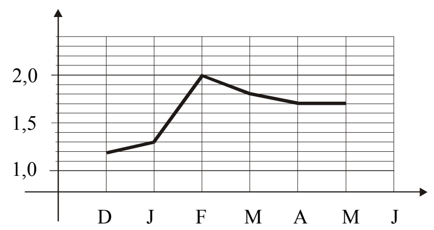
XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Primeira Fase - Nível 1

01. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?
A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

02. A calculadora de Juliana é bem diferente. Ela tem uma tecla **D**, que duplica o número escrito no visor e a tecla **T**, que apaga o algarismo das unidades do número escrito no visor.Assim, por exemplo, se estiver escrito 123 no visor e apertarmos **D**, teremos 246; depois, apertando **T**, teremos 24. Suponha que esteja escrito 1999. Se apertamos **D** depois **T**, em seguida **D**, depois **T**, teremos o número:
A) 96 B) 98 C) 123 D) 79 E) 99

03. O gráfico abaixo mostra o valor *aproximado* do dólar em reais no dia 15 dos últimos 6 meses.



Marcelo comprou um carro usando um sistema de financiamento chamado *leasing corrigido pela variação do dólar* e suas prestações vencem exatamente no dia 15 de cada mês. Em dezembro, Marcelo pagou R$ 600,00 de prestação. Com base na tabela, podemos dizer que em maio a prestação foi de:
A) R$ 700,00 B) R$ 850,00 C) R$ 650,00 D) R$ 900,00
E) R$ 800,00

04. Numa certa cidade, o metrô tem todas suas 12 estações em linha reta. A distância entre duas estações vizinhas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta estações é igual a 3 300 metros. Qual é o comprimento dessa linha?
A) 8,4 km B) 12,1 km C) 9,9 km D) 13,2 km E) 9,075 km

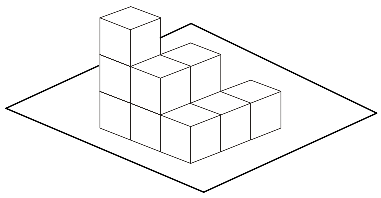
05. A metade do número $2^{11} + 4^8$ é igual a:
A) $2^5 + 4^4$ B) $2^5 + 2^8$ C) $1^{10} + 2^8$ D) $2^{15} + 4^5$ E) $2^9 + 4^7$

06. Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito ?
A) 2 B) nenhum C) 1 D) 3 E) 6

07. Quantas vezes num dia (24 horas) os ponteiros de um relógio formam ângulo reto ?
A) 48 B) 44 C) 24 D) 22 E) 23

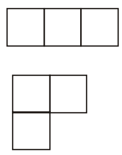
08. Dona Zizi comprou 2 balas para cada aluno de uma 5ª série. Mas como os meninos andavam meio barulhentos, ela resolveu redistribuir essas balas, dando 5 para cada menina e apenas 1 para cada menino. Podemos concluir que na 5ª série
A) 20% são meninos B) 30% são meninas C) 75% são meninos
D) 50% são meninas E) 66,6...% são meninos

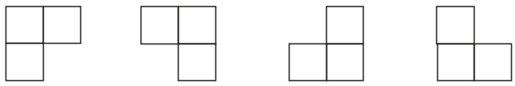
09. Vários caixotes cúbicos de plástico Azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura ao lado, na qual apenas um dos caixotes não é visível. Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando-se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:
A) 4 B) 5 C) 3 D) 2
E) 1

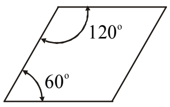


10. Ronaldo, sempre que pode, guarda moedas de 50 centavos ou 1 real. Atualmente, ele tem 100 moedas, num total de 76 reais. Quantas moedas de um valor ele tem a mais do que a de outro valor ?
A) 48 B) 4 C) 8 D) 52 E) 96

11. Juntando três quadrados congruentes e fazendo coincidir lados comuns, sem superposição, podemos formar duas figuras diferentes, como mostra a figura ao lado. Observe que uma figura obtida de outra por rotação, deslocamento ou reflexão, é congruente à mesma figura (muda apenas a posição). Por exemplo, temos abaixo figura iguais em 4 posições diferentes:







Vamos agora pegar três losangos congruentes, um deles representado ao lado.
Quantas figuras diferentes podemos formar com os três losangos, fazendo coincidir lados comuns?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 9

12. Renata digitou um trabalho de 100 páginas numerados de 1 a 100 e o imprimiu. Ao folhear o trabalho, percebeu que sua impressora estava com defeito, pois trocava o zero pelo um e o um pelo zero na numeração das páginas. Depois de consertar a impressora, quantas páginas teve que reimprimir, no mínimo ?
A) 18 B) 20 C) 22 D) 30 E) 28

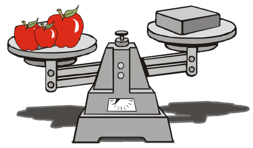
13. Letícia vendeu todos seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R\$ 240,00, R\$ 180,00 e R\$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia no mínimo?
A) 20 B) 37 C) 28 D) 21 E) 25

14. 6 cartões com números somente numa das faces são colocados sobre uma mesa conforme a ilustração. Os cartões X e Y estão com a face numerada voltada para baixo. A média aritmética dos números de todos os cartões é 5. A média aritmética dos números do cartão Y e seus três vizinhos é 3. Qual é o número escrito no cartão X ?

8	2	4
X	6	Y

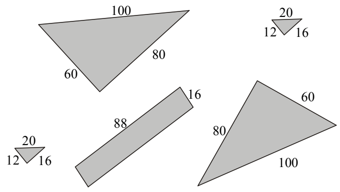
A) – 4 B) 12 C) 0 D) 15 E) 10

15. Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Em anos, a soma das idades dos três é:
A) 48 B) 72 C) 58 D) 60 E) 34



16. Marcos quer pesar três maças numa balança de Dois pratos, mas ele dispõe de apenas um bloco de 200 gramas. Observando o equilíbrio na balança, ele observa que a maçã maior tem o mesmo peso que as outras duas maçãs juntas; o bloco e a maçã menor pesam tanto quanto as outras duas maçãs juntas; a maçã maior junto com a menor pesam tanto quanto bloco. O peso total das três maçãs é:

A) 250 g B) 300 g C) 350 g D) 400 g E) 450 g



17. No desenho ao lado estão representados Quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas.
Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. O lado desse quadrado irá medir:

A) 88 cm B) 100 cm C) 60 cm
D) 96 cm E) 80 cm

18. Numa certa cidade, foi adotado o seguinte sistema de rodízio de carros: duas vezes por semana, de segunda a sexta, cada carro fica proibido de circular, de acordo com o final de sua placa (algarismo das unidades). O número médio de finais de placa proibidos diferentes para cada dia de proibição é:

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2 E) indefinido

19. Alexandre, consultando a programação de filmes, decidiu gravar *Contato*, cuja duração é de 150 minutos. Para gravar numa única fita, ele começou com velocidade menor (modo EP, que permite gravar 6 horas) e, num dado momento, mudou para a velocidade maior (modo SP, que permite gravar 2 horas), de forma que a fita acabou exatamente no fim do filme. Do início do filme até o momento da mudança do modo de gravação, quantos minutos se passaram?

A) 60 B) 30 C) 15 D) 45 E) 105

20. Você sabe que existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos, 900 números de três algarismos, etc. Considere agora cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 9 074 é um deles, pois 4 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem ?

A) 99 999 999 B) 99 999 992 C) 100 000 000 D) 10 000 000
E) 1 000 000 000

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

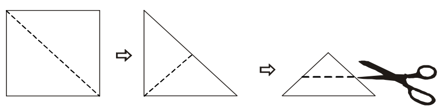
Primeira Fase - Nível 2

01. Veja problema 01 do Nível 1.

02. Em um hotel há 100 pessoas. 30 comem porco, 60 comem galinha e 80 comem alface. Qual é o maior número possível de pessoas que não comem nenhum desses dois tipos de carne?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

03. Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais conforme ilustração abaixo, obtendo-se um triângulo isósceles. Foi feito um corte na folha dobrada, paralelo à base desse triângulo, pelos pontos médios dos outros lados. A área do buraco na folha corresponde a que fração da área da folha original ?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

04. Veja problema 9 do Nível 1.
05. Veja problema 17 do Nível 1.

06. Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2 e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é igual a :

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

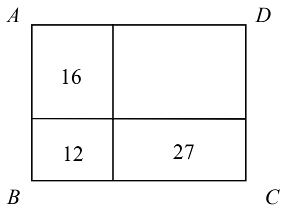
07. O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a :

A) 25^{25} B) 10^{25} C) 100^{25} D) 2^{25} E) 2×25^{25}

08. Qual o 1999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{4}{37}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) 8

09. Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

10. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou-se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?
A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

11. Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e a seguir, ainda pagou R$ 2,00 de estacionamento. Se no final ainda tinha R$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?
A) R$ 220,00 B) R$ 204,00 C) R$ 196,00 D) R$ 188,00
E) R$ 180,00

12. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?
A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

13. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x-45)^2-(x-21)^2=0$ é:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças.
Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?
A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

15. Hoje, 12/6/1999, Pedro e Maria fazem aniversário. No mesmo dia em 1996, a idade de Pedro era 3/4 da idade de Maria. No mesmo dia em 2002, a idade de Pedro será igual à de Maria quando ele tinha 20 anos. Quantos anos Maria está fazendo hoje?
A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

16. Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver *pelo menos* 10 bolas da mesma cor é:
A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

17. Quantos são os triângulos que possuem medidas dos seus lados expressas por números inteiros e tais que a medida do maior lado seja igual a 11 ?
A) 10 B) 11 C) 12 D) 24 E) 36

18. Os pontos S, T e U são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo PQR sobre os lados RQ, RP e PQ respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos TU, ST e US estão na razão $TU : ST : US = 5 : 8 : 11$, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :
A) 7 : 4 : 1 B) 8 : 5 : 2 C) 7 : 3 : 2 D) 11 : 8 : 5 E) 9 : 5 : 1

19. Aos vértices de um cubo são atribuídos os números de 1 a 8 de modo que os conjuntos dos números correspondentes aos vértices das seis faces são $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$, $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$ e $\{3, 4, 5, 8\}$. O vértice atribuído ao número 6 está mais longe do vértice de número
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

20. Com os 5 números ímpares entre –5 e 4 e com os 5 números pares entre –5 e 4 são formados 5 pares de números. Se N é a soma dos produtos, obtidos em cada par de números, o valor mínimo possível de N é igual a :
A) – 41 B) – 40 C) – 28 D) –10 E) 0

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Primeira Fase - Nível 3

01. Veja problema 01 do Nível 1.
02. Veja problema 02 do Nível 2.

03. Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

A) 16 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

04. Sendo $a \neq b$ e $b \neq 0$, sabe-se que as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são exatamente a e b. Então, $a - b$ é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05. Veja problema 09 do Nível 2.
06. Veja problema 14 do Nível 2.

07. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x-45)^2 - (x-21)^2 = 0$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

08. Veja problema 12 do Nível 2.

09. Se $0^0 < x < 90^0$ e $\cos x = \dfrac{1}{4}$ então x está entre:

A) 0^0 e 30^0 B) 30^0 e 45^0 C) 45^0 e 60^0 D) 60^0 e 75^0 E) 75^0 e 90^0

10. Veja problema 11 do Nível 2.

11. Para todo n natural definimos a função f por: $f(n) = \dfrac{n}{2}$ se n é par, $f(n) = 3n + 1$ se n é ímpar. O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

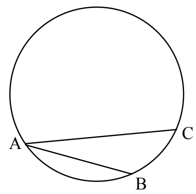
12. O número N = 11111 . . . 11 possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

13. Um quadrado *ABCD* possui lado 40cm. Uma circunferência contém os vértices *A* e *B* e é tangente ao lado *CD*. O raio desta circunferência é:
A) 20cm B) 22cm C) 24cm D) 25cm E) 28cm

14. Veja problema 18 do Nível 2.
15. Para quantos valores inteiros de *x* existe um triângulo acutângulo de lados 12, 10 e *x*?
A) 9 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

16. A circunferência abaixo tem raio 1, o arco AB mede 70^0 e o arco BC mede 40^0. A área da região limitada pelas cordas AB e AC e pelo arco BC mede:



A) $\pi/8$ B) $\pi/9$ C) $\pi/10$ D) $\pi/12$ E) $\pi/14$

17. A reta *r* contém os pontos (0, 4) e (7, 7). Dos pontos abaixo, qual é o mais próximo da reta *r*?
A) (1999, 858) B) (1999, 859) C) (1999, 860)
D) (1999, 861) E) (1999, 862)

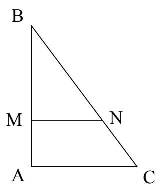
18. Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$?
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

19. Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).
A) 90 B) 98 C) 112 D) 118 E) 120

20. Veja problema 10 do Nível 2.
21. Veja problema 15 do Nível 2.

22. No quadrado *ABCD* o ponto *E* é médio de *BC* e o ponto *F* do lado *CD* é tal que o ângulo *AEF* é reto. Aproximadamente, que porcentagem a área do triângulo *AEF* representa da área do quadrado?
A) 28% B) 31% C) 34% D) 36% E) 39%

23. Dois irmãos herdaram o terreno *ABC* com a forma de um triângulo retângulo em *A*, e com o cateto *AB* de 84m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro *MN* paralelo a *AC* como mostra a figura abaixo. Assinale a opção que contém o valor mais aproximado do segmento *BM*.



A) 55m B) 57m C) 59m D) 61m E) 63m

24. As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a :
A) 1999 B) 2000 C) 2001 D) 3998 E) 3999

25. Veja problema 16 do Nível 2.

GABARITO

Primeiro Nível (5ª. e 6ª. séries)

1) B	**6) A**	**11) E**	**16) B**
2) D	**7) B**	**12) E**	**17) E**
3) B	**8) C**	**13) B**	**18) A**
4) B	**9) A**	**14) E**	**19) D**
5) D	**10) B**	**15) C**	**20) C**

Segundo Nível (7ª. e 8ª. séries)

1) B	**6) E**	**11) D**	**16) E**
2) D	**7) C**	**12) C**	**17) E**
3) E	**8) B**	**13) A**	**18) A**
4) A	**9) E**	**14) C**	**19) D**
5) E	**10) D**	**15) B**	**20) B**

Terceiro Nível (Ensino Médio)

1) B	**6) C**	**11) C**	**16) B**	**21) B**
2) D	**7) A**	**12) A**	**17) D**	**22) B**
3) D	**8) C**	**13) D**	**18) E**	**23) C**
4) D	**9) E**	**14) A**	**19) E**	**24) B**
5) E	**10) D**	**15) A**	**20) D**	**25) E**

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 1

PROBLEMA 1

Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345, para que o número restante seja o maior possível.

PROBLEMA 2

Sabe-se que três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem cada um exatamente quatro domingos.

a) Estes meses podem ser janeiro, fevereiro e março?

b) Podem ser agosto, setembro e outubro?

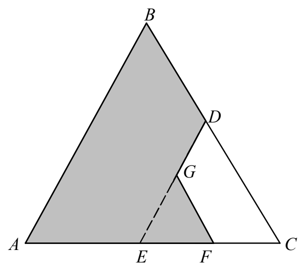
PROBLEMA 3

Na figura, os triângulos ABC e EGF são equiláteros. O perímetro do triângulo ABC é 132cm e, além disso,

$$AE = EC$$
$$BD = DC$$
$$EF = FC$$
$$DG = GE$$

a) Qual o perímetro da área sombreada?

b) Que fração da área do triângulo ABC representa a área sombreada?



PROBLEMA 4

Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

PROBLEMA 5

Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:

O elevador A pára em todos os andares.

O elevador B pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, …

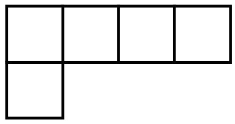
O elevador C pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, …

O elevador D pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, …

O elevador E pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, …

a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.
b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

PROBLEMA 6
Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser ladrilhado usando peças com o seguinte formato:



Obs: Ladrilhado significa completamente coberto, sem superposição de peças, e de modo que nenhum ponto fora do tabuleiro seja coberto por alguma peça.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE - NÍVEL 1

SOLUÇÃO PROBLEMA 1
O maior número restante é 553451234512345. Para ver isto, podemos supor que os cortes são feitos da esquerda para a direita. Se deixarmos de cortar todos os quatro primeiros algarismos, o número que resta começará por 1, 2, 3 ou 4. Logo, menor que o número acima. Feito isto, se deixarmos de cortar a segunda seqüência 1234, o número que resta terá na primeira ou segunda casa, da esquerda para a direita, 1, 2, 3 ou 4. Ainda menor que o número acima. Os dois primeiros 5 devem permanecer, pois retirando-se um deles, completamos 9 retiradas e aí algum algarismo da terceira seqüência 1234 aparecerá na 1^a ou na 2^a casa. Finalmente devemos cortar a seqüência 12, que ocupa a 11^a e 12^a posição.

SOLUÇÃO PROBLEMA 2
Se o dia primeiro de janeiro for Segunda-feira, e o ano não for bissexto, então os meses de janeiro, fevereiro e março terão 4 domingos cada.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3 (Solução resumida)

a) $Perímetro = 2\cdot(44) + 3\cdot = 121$.

b) $S' = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}.\frac{1}{4}S = \frac{13}{16}S$

SOLUÇÃO PROBLEMA 4
Basta distribuir as moedas em 7 caixas contendo respectivamente 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 moedas. Para outros pagamentos Pedro pode fazer 3 = 1 + 2, 5 = 1 + 4, 6 = 2 + 4, 7 = 1 + 2 + 4. Assim já pode pagar as quantias de 1 a 7 reais com o conteúdo das caixas. Somando-se a parcela de 8 a estas somas chega-se nas somas de 9 até 15. Somando-se a parcela de 16 às 15 somas assim formadas

obtém-se somas de 17 a 31. A estas acrescenta-se a parcela de 32. E finalmente a parcela de 64, obtendo-se assim todas as somas de 1 a 127 = 1+ 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

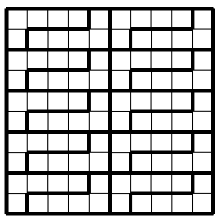
a) O elevador *B* pára nos múltiplos de 5.
O elevador *C* pára nos múltiplos de 7.
O elevador *D* pára nos múltiplos de 17.
O elevador *E* pára nos múltiplos de 23.

Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.

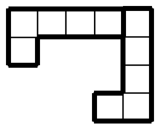
b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar *A*, que pára em todos, e três dos restantes.
B, *C* e *D* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, *C* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, *D* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, *D* e *E* param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

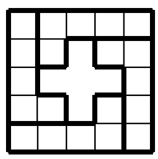
SOLUÇÃO PROBLEMA 6

O menor tabuleiro é do tipo 10×10 coberto com 20 peças, como mostrado, por exemplo, pela figura abaixo, à esquerda.



Com efeito, o número de casas do tabuleiro é um quadrado perfeito múltiplo de 5. Logo é 25, 100, 225 ou ... etc. Mas um tabuleiro 5×5 não pode ser coberto com peças deste tipo, pois ao tentarmos completar uma lateral do tabuleiro, seremos conduzidos a uma das duas figuras à direita, as quais não se deixam completar pelas peças para formar todo o tabuleiro.





XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 2

PROBLEMA 1

Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

PROBLEMA 2

Num quadro-negro são escritos três inteiros. Começa-se, então, uma sequência de movimentos onde, em cada passo, apaga-se um deles e escreve-se em seu lugar a soma dos outros dois diminuída de uma unidade. Após vários movimentos, estão escritos no quadro os números 17, 75 e 91. É possível que no início estejam escritos no quadro :

a) 2, 2, 2 ?
b) 3, 3, 3 ?

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um quadrado. Escolhemos pontos M, N, P, Q respectivamente sobre AB, BC, CD e DA, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos MBN e PDQ sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq AC$.

PROBLEMA 4

Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 5

Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

PROBLEMA 6

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE - NÍVEL 2

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Se nenhum destes meses for fevereiro, o número total de dias não pode ser menor que 91 = 7. 13 e portanto o número total de domingos não poderia ser menor do que 13.

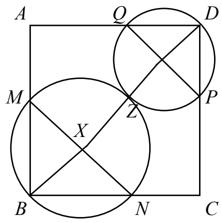
SOLUÇÃO PROBLEMA 2

a) Estão escritos inicialmente 3 números pares. Quando um deles é apagado, é escrito em seu lugar um número ímpar. Após o 1º movimento ficam então dois números pares e um número ímpar. Se apagarmos agora o número ímpar, surgirá em seu lugar outro númro ímpar e se apagarmos um número par aparecerá em seu lugar outro número par. Deste modo, após qualquer número de movimentos restarão dois números pares e um número ímpar e portanto, não é possível termos no final os três números ímpares 17, 75 e 91.

b) Sim, uma possível sequência de movimentos é : 3, 3, 3 $\to$ 5, 3, 3 $\to$ 5, 3, 7 $\to$ 5, 11, 7 $\to$ 17, 11, 7 $\to$ 17 , 11, 27 $\to$ 17, 43, 27 $\to$ 17, 43, 59 $\to$17, 75, 59 $\to$ 17, 75, 91.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3

A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90°$, segue que $BX = MX = NX = XZ$ e $DY = QY = YP = YZ$. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = AC$.



SOLUÇÃO PROBLEMA 4

Temos $3^a \cdot 6^b \cdot 9^c \cdot 12^d = 2^{b+2d} \cdot 3^{a+b+2c+d}$. Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $mdc\{b+2d, a+b+2c+d\} \leq b+2d$. Note que $b + 2d$ é máximo (com b e d elementos distintos de $\{3, 6, 9, 12\}$) quando $d = 12$ e $b = 9$. Neste caso, $b + 2d = 33$, e $a + b + 2c + d = 21 + a + 2c$. Tomando $a = 6$ e $c = 3$, temos também $a + b + 2c + d = 33$, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para $(a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12)$.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

Como os denominadores das frações são primos entre si, seu MMC é BD e assim, a fração resultante é $\frac{AD + CB}{BD}$. Suponhamos que esta fração não seja irredutível isto é, que exista algum número primo p que divida o numerador e o denominador desta fração. Como o produto BD é divisível por p, um dos seus termos, digamos B sem perda de generalidade o seja. Entretanto, uma das parcelas da soma $AD + CB$ é divisível por p e como a soma, por hipótese, é divisível por p a parcela AD é também divisível por p. Portanto A ou D é divisível por p. No primeiro caso temos uma contradição com o fato da fração $\frac{A}{B}$ ser irredutível, no outro casos a contradição está no fato de que os denominadores das frações iniciais sempre são primos entre si.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora n = 6, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 3

PROBLEMA 1

Nos extremos de um diâmetro de um círculo, escreve-se o número 1 (primeiro passo) . A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios escreve-se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo) . A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios coloca-se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede-se, assim, sucessivamente: sempre cada arco é dividido ao meio e em seu ponto médio é escrita a soma dos números que estão em seus extremos. Determinar a soma de todos os números escritos após 1999 passos.

PROBLEMA 2 Veja problema 3 do nível 2.
PROBLEMA 3 Veja problema 4 do nível 2.

PROBLEMA 4

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

PROBLEMA 5

José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

PROBLEMA 6

Encontre as soluções inteiras de $x^3 - y^3 = 999$.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE - NÍVEL 3

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Seja $S(n)$ a soma dos termos em cada passo em um dos semicírculos. Observemos que $S(1) = 2$, $S(2) = 4$, e $S(3) = 10$. Deste modo, nos parece razoável conjecturar que $S(n) = 3^{n-1} + 1$. Claramente, $S(1) = 3^{1-1} + 1$. Os novos termos adicionados para formar L_{n+1} representam somas de dois termos consecutivos de L_n e cada termo de L_n, excetuando-se o primeiro e o último, aparece em exatamente duas destas somas. Daí, $S(n+1) = S(n) + 2(S(n) - 1) = 3S(n) - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3^{(n+1)-1} + 1$. Levando em consideração o outro semicírculo, temos que a soma após os 1999 passos é igual a $2.(3^{1999-1} + 1) - 2 = 2.\ 3^{1998}$

SOLUÇÃO PROBLEMA 2 Veja solução do problema 3 do nível 2.
SOLUÇÃO PROBLEMA 3 Veja solução do problema 4 do nível 2.

SOLUÇÃO PROBLEMA 4
É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora $n = 6$, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5
Sejam m_n , a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Temos $m_1 = 1$, $a_1 = c_1 = 0$ e $m_{n+1} = \dfrac{a_n + c_n}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{m_n + c_n}{2}$, e $c_{n+1} = \dfrac{m_n + a_n}{2}$ Como $a_n + c_n + m_n = 1$, temos $m_{n+1} = \dfrac{1 - m_n}{2}$. Assim, $m_n = \dfrac{1 - (-2)^{2-n}}{3}$, e em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é $m_{31} = \dfrac{1 + 2^{-29}}{3}$.

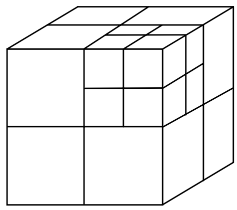
SOLUÇÃO PROBLEMA 6
Temos $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 3^3 \cdot 37$. Suponhamos $x > y$. Assim, os possíveis valores de $a = x - y$ são 1, 3, 9, 27, 37, $3 \cdot 37$, $9 \cdot 37$, $27 \cdot 37$ e cada valor permite fazer $y = x - a$ e precisamos apenas verificar se as raízes de $x^2 + x(x - a) + (x - a)^2 = \dfrac{999}{a}$ são inteiras. Na verdade, alguns destes valores são obviamente inapropriados: $a = x - y \equiv x^3 - y^3 \equiv 0 \ (mod\ 3)$, donde os valores 1 e 37 podem ser descartados. Por outro lado, se $x - y \ge 3b$ temos $(x^3 - y^3) \ge 3b^3$, donde podemos descartar $a \ge 27$. Os dois valores restantes, 3 e 9, são de fato possíveis e dão as quatro soluções: $(10,1), (-1,-10), (12,9)$ e $(-9,-12)$.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 1

PROBLEMA 1

Diga como dividir um cubo em 1999 cubinhos. A figura mostra uma maneira de dividir um cubo em 15 cubinhos.



PROBLEMA 2

Emanuela, Marta e Isabel são três nadadoras que gostam de competir e por isso resolveram organizar um desafio de natação entre elas. Ficou combinado o total de pontos para o primeiro, o segundo e o terceiro lugares em cada prova. A pontuação para primeiro lugar é maior que a para o segundo e esta é maior que a pontuação para o terceiro. As pontuações são números inteiros positivos. O desafio consistiu de várias provas e ao final observou-se que Emanuela fez 20 pontos, Marta 9 pontos e Isabel 10. A primeira prova foi vencida por Isabel.

(a) Quantas provas foram disputadas?
(b) Determine o total de pontos para o primeiro, segundo e terceiro lugares.

PROBLEMA 3

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe-se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

PROBLEMA 4

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe-se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

SOLUÇÕES TERCEIRA FASE - NÍVEL 1

PROBLEMA 1
SOLUÇÃO DE MARIANA DE MORAES SILVEIRA (Belo Horizonte - MG)

O cubo deve ser dividido em 1000 cubinhos, ou seja $10 \times 10 \times 10$, depois, deve-se pegar um deles e dividí-lo novamente em 1000 cubinhos para que obtenhamos 1999 cubinhos. Assim teremos $1000 - 1$ (que será dividido) $+ 1000 = 1999$ cubinhos.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE DIOGO DOS SANTOS SUYAMA (Belo Horizonte - MG)

a) Foram disputadas 3 provas. Como $20 + 10 + 9 = 39$, o número de pontos distribuidos por prova só poderia ser 3 ou 13, pois estes são os únicos divisores de 39, a não ser o mesmo e o 1. Em consequências, o número de provas também será um desses números. Porém, se forem disputadas 13 provas, só há uma maneira de se distribuir os pontos: 2 para o primeiro, 1 para o segundo e 0 para o terceiro. Entretanto, 0 não é positivo, sendo assim descartada essa hipótese.

b) Já sabendo que são 3 provas, é impossível que a vencedora ganhe menos que 8 pontos, pois assim, Emanuela só conseguiria os 20 pontos fazendo 7, 7 e 6 pontos em cada prova. Para isso, seria preciso que a vencedora fizesse 7 pontos, a segunda colocada 6 e a última 0, mas como vimos, 0 não é positivo. É impossível, também que a vencedora faça mais de 10 pontos, pois não seria possível que a segunda fizesse mais pontos que a última, ou que esta não fizesse 0 pontos. Então, as únicas possibilidades são: $1^a. \to 10$, $2^a. \to 2$, $3^a. \to 1$; $1^a. \to 9$, $2^a. \to 3$, $3^a. \to 1$; $1^a. \to 8$, $2^a. \to 4$, $3^a. \to 1$; e $1^a. \to 8$, $2^a. \to 3$, $3^a. \to 2$. A primeira opção é incorreta, pois Isabel, que venceu uma das provas, não poderia ter feito pontos nas outras. A segunda opção também não é correta, pois Isabel teria que marcar apenas um ponto em duas provas. A última opção é incorreta também, pois Isabel teria que marcar 2 pontos em duas provas. Terceira opção: $1^a. \to 8$, $2^a. \to 4$, $3^a. \to 1$ é a correta. Veja o quadro abaixo:

	1ª. Prova	**2ª. Prova**	**3ª. Prova**	**Total**
Emanuela	**4**	**8**	**8**	**20**
Marta	**1**	**4**	**4**	**9**
Isabel	**8**	**1**	**1**	**10**

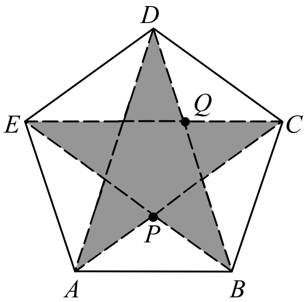
PROBLEMA 3 Veja solução do problema 2 do nível 2.
PROBLEMA 4 Veja solução do problema 3 do nível 2

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 2

PROBLEMA 1

Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de $APQD$.



PROBLEMA 2

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe-se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

PROBLEMA 3

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe-se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

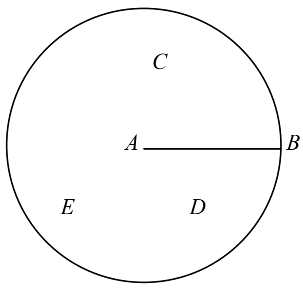
PROBLEMA 4

Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1.000.000ª. e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

SOLUÇÕES TERCEIRA FASE - NÍVEL 2

PROBLEMA 1 Veja solução do problema 1 do nível 3.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE EINSTEIN DO NASCIMENTO JÚNIOR (Fortaleza - CE)
Há dez cidades A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.
Um chato da cidade A foi exilado para a cidade mais longe de A, a cidade B.
Como B é a cidade mais longe de A, pode-se dizer que se tomarmos A como sendo o centro de uma circunferência de raio AB, todas as cidades estarão dentro dos limites da circunferência, exceto a cidade B que estará em cima dela.



Como as distâncias entre as cidades não são iguais e o chato foi exilado para a cidade C que é a mais longe de B então $BC > AB$.
Da cidade C ele será exilado para a cidade D que é a mais longe de C e assim sucessivamente até chegar na cidade J onde teremos a seguinte verdade:
$AB < BC < CD < \ldots < HI < IJ$.
Ao chegar nesse ponto vemos que A com certeza não é a cidade mais longe de J pois
AB = raio
AJ < raio
$AJ < AB$
$AB < IJ$
$AJ < IJ$
Logo ele irá para uma cidade diferente de A, e nunca retornará à cidade A.

PROBLEMA 3
SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (Rio de Janeiro - RJ)
Quando começa a série, já ocorre um encontro entre Adriano (A) e Bruno (B). Vamos chamar de V_A, V_B e V_C o número de vitórias de Adriano, Bruno e Carlos, respectivamente. Então ao final da série $V_A + V_B = 33$ e depois do 1º. jogo $V_A + V_B$

= 1. Suponhamos que o segundo jogo seja $x \times C$. Chamemos de E o número de jogos $A \times B$.
Então no 2º. jogo $E = 1$. Enquanto C ganhar, $V_A + V_B$ e E permanecem constantes. Quando C perder, $V_A + V_B$ aumenta uma unidade. O próximo jogo será $A \times B$, aumentando $V_A + V_B$ e E em uma unidade. Após este jogo, o próximo será $x \times C$. Ou seja, para que E aumente uma unidade, $V_A + V_B$ aumenta duas, e o aumento de um em E. Como no 2º. jogo $E = 1$ e falta que $V_A + V_B$ aumente 32 unidades, ocorrem $1 + 16 = 17$ jogos $A \times B$.

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO DE HENRIQUE CHOCIAY (Pinhais - PR)

Para começar a desenvolver $\sqrt{2}$, utilizei o processo de extração que não utiliza tentativas (processo prático por aproximação).

$\sqrt{2}$	
$\underline{-1}$	1,414
	↑
1.00	
$\underline{-96}$	$1 \times 2 = 2\mathbf{4} \times \mathbf{4} \cong 100$
	96 ↵
4.00	
$\underline{281}$	
1.1900	$14 \times 2 = 28\mathbf{1} \times \mathbf{1} \cong 400$
1.1296	
0060400	$141 \times 2 = 282\mathbf{4} \times \mathbf{4} \cong 11900$
	11296 ↵

Deste lado, o número de casas sempre aumenta em 1 casa, nunca mais. (mesmo se houvesse um caso de $99999 \times 9 = 899991$ (só aumenta 1 casa) (entre 1.000.000 e 3.000.000)

Quando estivermos no número 1.000.000 de casas no multiplicador, teremos 999.999 casas decimais. Supondo que haja só 1 casa no resto nesta situação, depois de 1.000.000 de operações, teremos 1.999.999 casas decimais (1 milhão de zeros), 2.000.000 no multiplicador e 2.000.001 no resto, podendo obter número diferente de zero.
Em geral o fato de, não podendo haver divisão, com o aumento das casas divisoras em 1 e do resto em 2 e as casas decimais serem menores que as divisoras em 1 torna impossível a obtenção desta seqüência de zeros entre as casas de 1.000.000 e 3.000.000.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 3

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1 Veja problema 1 do nível 2.
PROBLEMA 2 Veja problema 4 do nível 2.

PROBLEMA 3
Temos um tabuleiro quadrado 10×10.
Desejamos colocar n peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.
Determine o maior valor de n para o qual é possível fazer esta construção.

SEGUNDO DIA

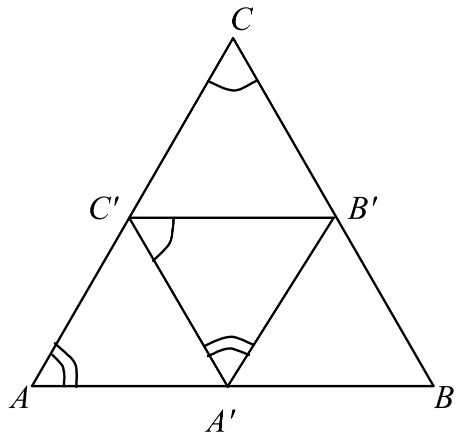
PROBLEMA 4
O planeta ***Zork*** é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta).
Existem em ***Zork*** estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma seqüência de estradas.
O preço da ***Kriptonita*** em ***Urghs*** (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 ***Urghs***. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da ***Kriptonita*** difere por no máximo 100 ***Urghs***.

PROBLEMA 5
Em Tumbólia existem n times de futebol .
Deseja-se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia.
Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

PROBLEMA 6

Dado triângulo ABC mostre como construir com régua e compasso um triângulo $A'B'C'$ de área mínima com $C' \in AC, A' \in AB$ e $B' \in BC$ tal que

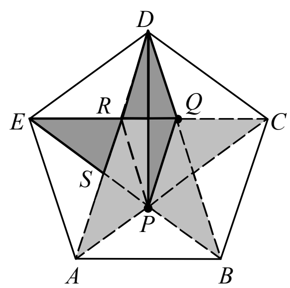
$B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$ e $A'\hat{C}'B' = A\hat{C}B$.



SOLUÇÕES TERCEIRA FASE - NÍVEL 3

PROBLEMA 1

SOLUÇÃO DE HUGO PINTO IWATA (São José do Rio Preto - SP)



Como o pentágono e a estrela são regulares, o quadrilátero $APQD$ é um trapézio. A área do trapézio $APQD$ é igual à área do triângulo APD somada à do triângulo PQD. Como $BDRP$ também é um trapézio, $\overline{RP} // QD$, então a área de PQD é

igual à de *RQD*. Como a estrela é regular, a área de *RQD* é igual à de *ERS*, então, a área de *PQD* é igual à de *ERS*. Assim a área do trapézio *APQD* é igual à soma das áreas dos triângulos *APD* e *ERS*, que é igual à figura *APDRES,* que é exatamente metade da estrela toda.
Resposta: A área de *APQD* é 0,5.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia - GO)

Suponhamos, por absurdo, que todos os algarismos das casas decimais entre a 1.000.000ª. casa decimal e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ fossem zero, então:
$10^{2\cdot 10^6}\lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2}\rfloor$ (onde $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ e $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$)
$10^{2\cdot 10^6}\cdot K = \lfloor 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2}\rfloor$ (onde $K = \lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor$) $\Rightarrow 10^{2\cdot 10^6}K \le 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2} < 10^{2\cdot 10^6}K + 1$,
mas como $10^{2\cdot 10^6}K \ne 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2}$, (pois se não fosse teríamos $\sqrt{2} = K/10^{10^6}$, um absurdo, pois $\sqrt{2}$ é irracional!) então:

$$10^{2\cdot 10^6}K < 10^{3\cdot 10^6}\sqrt{2} < 10^{2\cdot 10^6}K + 1 \Rightarrow \frac{K}{10^{10^6}} < \sqrt{2} < \frac{K}{10^{10^6}} + \frac{1}{10^{3\cdot 10^6}} \Rightarrow$$

$$\frac{K^2}{10^{2\cdot 10^6}} < 2 < \frac{K^2}{10^{2\cdot 10^6}} + \frac{2K}{10^{4\cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{6\cdot 10^6}} \Rightarrow K^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < K^2 + \frac{2K}{10^{2\cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{4\cdot 10^6}},$$

mas como $K = \lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor \in \mathbb{Z}$, temos (pela definição de $\lfloor x\rfloor$):

$$K \le 10^{10^6}\sqrt{2} < K + 1 \Rightarrow \frac{K}{10^{10^6}} \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{K}{10^{2\cdot 10^6}} \le \frac{\sqrt{2}}{10^{10^6}} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2K}{10^{2\cdot 10^6}} \le \frac{1}{2},$$

logo:

$$K^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < K^2 + \frac{2K}{10^{2\cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{4\cdot 10^6}} < K^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10^{4\cdot 10^6}} < K^2 + 1 \Rightarrow$$

$K^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < K^2 + 1 \Rightarrow 0 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} - K^2 < 1$, um absurdo, pois não existe nenhum inteiro maior que 0 e menor que 1, disto concluímos que há um algarismo diferente de 0 nestas casas decimais. (Poderíamos ter uma aproximação melhor pois $2K$ é bem menor que $10^{2\cdot 10^6}$).
Obs: $\lfloor x\rfloor$ denota a função do "maior inteiro": é o único inteiro tal que $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$.

PROBLEMA 3

SOLUÇÃO DA BANCA

O problema é equivalente a encontrar subconjuntos A_1, A_2, …, A_{10} do conjunto $\{1, 2, 3, …, 10\}$ cuja soma do número de elementos seja a maior possível tais que a interseção de dois quaisquer deles tenha no máximo um elemento (A_i é o conjunto das posições das peças na i-ésima linha do tabuleiro). Se A_i tem k_i elementos então há $C_{k_i}^2 = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos não pode pertencer a dois dos conjuntos A_i, e há no total $C_{10}^2 = 45$ subconjuntos de 2 elementos de

$\{1, 2,…,10\}$. Assim, devemos ter $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45.$

Por outro lado, se existem i, j com $k_j > k_i + 1$, temos

$$C_{k_i+1}^2 + C_{k_j-1}^2 = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)(k_j-2)}{2} = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{k_j(k_j-1)}{2} + k_i + 1 - k_j < C_{k_i}^2 + C_{k_j}^2.$$

Assim para minimizar $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2}$ mantendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} k_i$ fixo devemos ter $|k_i - k_j| \le 1$ para todo i, j. Se observamos que $5C_4^2 + 5C_3^2 = 5\cdot 6 + 5\cdot 3 = 45,$ concluímos que se

$\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45$ então $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} k_i \le 5\cdot 4 + 5\cdot 3 = 35,$ valendo a igualdade se e só se 5 dos k_i são iguais a 4 e os outros 5 iguais a 3. Para que a contrução seja possível nesse caso precisamos de que cada par de elementos apareça em exatamente um dos conjuntos A_i . Nesse caso, cada elemento de $\{1, 2, 3…, 10\}$ deve aparecer em 3 conjuntos com 4 elementos ou em um conjunto com 4 elementos e 3 conjuntos com 3 elementos (pois cada um dos outros 9 elementos aparece exatamente uma vez junto com ele). Como haveria 5 conjuntos com 4 elementos, o número médio de conjuntos com 4 elementos aos quais cada elemento pertence é 2, donde há elementos que pertencem a 3 conjuntos com 4 elementos (pois um elemento não pode pertencer a exatamente 2 conjuntos com 4 elemetos). Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$ e $A_3 = \{ 1, 8, 9, 10\}$, mais então qualquer outro conjunto de 4 elementos deve estar contido em $\{2, 3, …, 10\}$, e portanto deve intersectar um dos conjunto A_1, A_2, A_3, A_4, em pelo menos 2 elementos. Portanto, não é possível que $\sum_{i=1}^{10} k_i$ seja igual a 35. Por outro lado é possível construir exemplos com $\sum_{i=1}^{10} k_i = 34,$ como abaixo:

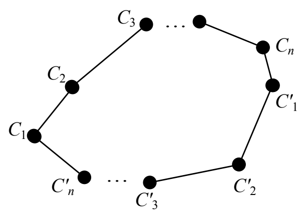
$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$, $A_3 = \{ 2, 5, 8, 9\}$, $A_4 = \{3, 6, 8, 10\}$,
$A_5 = \{1, 9, 10\}$, $A_6 = \{ 2, 7, 10\}$, $A_7 = \{3, 7, 9\}$, $A_8 = \{4, 5, 10\}$, $A_9 = \{ 4, 6, 9\}$ e $A_{10} = \{4, 7, 8\}$.

•	•	•	•						
•				•	•	•			
	•			•			•	•	
		•			•		•		•
•								•	•
	•					•			•
		•				•		•	
			•	•					•
			•		•			•	
			•			•	•		

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO DE GILBERTO SANTOS DO NASCIMENTO (São Paulo - SP)

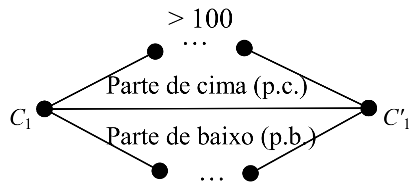
Seja C_1' o antípoda de C_1.

Vamos ligar C_1 a C_1' e vice-versa, formando uma linha fechada. Abaixo C_j' é o antípoda de C_j para todo *j*.

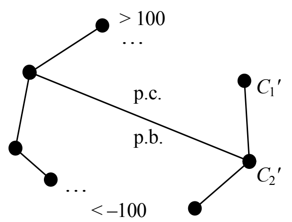


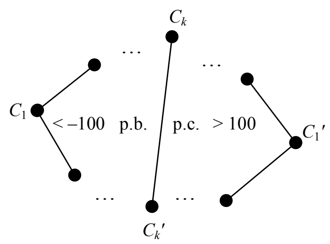
Agora, supondo que a diferença da Kriptonita de C_1' para C_1 seja maior que 100. Então, vamos supor que $(C_2 - C_1) + (C_3 - C_2) +\ldots+ (C_1' - C_n) > 100$. Como ao

percorrer o caminho, temos de ter uma diferença zero ao chegarmos em C_1 novamente, somando $(C_2' - C_1') + (C_3' - C_2') + \ldots + (C_1 - C_n') < -100$.
Agora, supondo que o **Superman** trace uma linha de C_1 a C_1' (esta linha não poderia ser uma estrada, pois $|C_1' - C_1| > 100$) a soma das diferenças na parte de cima da linha deve ser maior que 100 e embaixo menor que –100.



Agora, supondo que esta linha percorra a figura, ligando todas as cidades antípodas, na parte de cima, a soma deve continuar sendo maior que 100 e embaixo menor que 100. Em p.c. (parte de cima), a soma não pode passar bruscamente de > 100 para < –100, pois são somadas apenas duas diferenças de cada vez (menores que 200 no total!). Assim, para que p.c. fique negativo < –100 e p.b. fique positivo > 100, teríamos de ter duas cidades antípodas com diferença > 100 em módulo.





Continuando o percurso, ao chegarmos em C_1', teremos de ligá-lo a C_1. No entanto, p.c. estará em baixo e a soma das diferenças na direção de C_1' para C_1 terá de ser positivo > 100. Mas essa soma era negativa e < –100 quando começamos ($\Rightarrow\Leftarrow$) Contradição.
O mesmo ocorre analogamente com p.b. Logo, em algum par da cidades (uma cidade e sua antípoda), a diferença do preço da Kriptonita deverá ser menor ou igual a 100.
Viva o **Superman**!.

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia - GO)

Suponhamos, por absurdo, que os preços diferem por mais de 100 Urghs em todas as cidades antípodas, então:

$|x_0 - y_0| > 100 \Rightarrow M_0 - m_0 > 100$ (onde x_n e y_n são antípodas e representam o preço da Kriptonita).
$|x_1 - y_1| > 100 \Rightarrow M_1 - m_1 > 100$

$|x_n - y_n| > 100 \Rightarrow M_n - m_n > 100$ (Onde $M_n =$ máx (x_n, y_n) e $m_n =$ min (x_n, y_n))

Como sabemos que existe um caminho de estradas que leva de M_0 até m_0, então deve existir uma estrada que liga (para certo $i, j \in \mathbb{N}$; $i, j \le n$) $M_i \longleftrightarrow m_j$.
Como existe uma estrada ligando $M_i \longleftrightarrow m_j$, também existe uma estrada ligando $m_j \longleftrightarrow M_i$ (antípodas). Pode acontecer $i = j$, caso em que se conclui facilmente que $M_i - m_i > 100$, um absurdo pois m_i e M_i são "vizinhas", logo o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.
Se $i \ne j$, então:
$|M_j - m_i| \le 100$ (são "vizinhas")
$|M_i - m_j| \le 100$, mas como
$M_i - m_i > 100$ e $M_j - m_j > 100$, então:
$M_i + M_j - m_i - m_j > 200$
$M_i - m_j + M_j - m_i > 200 \Rightarrow |M_i - m_j + M_j - m_i| > 200 \Rightarrow |M_i - m_j| + |M_j - m_i| > 200 \Rightarrow 200 \ge |M_i - m_j| + |M_j - m_i| > 200$, um absurdo, logo existem cidades antípodas cujo preço difere no máximo em 100 Urghs.

PROBLEMA 5
SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (Fortaleza - CE)

Façamos 2 casos, n par e n ímpar.

i) n par.

Cada time tem que jogar com cada um dos outros. Se os times são: $T_1, T_2, \ldots, T_n$; temos que um time T_i tem que jogar $(n - 1)$ vezes e para isso precisará de pelo menos $(n - 1)$ domingos. (pois só pode jogar 1 vez por domingo). Mostraremos que é possível realizar o campeonato em $(n - 1)$ domingos. Para isso basta que o jogo entre T_i e T_j $(i \ne j)$ ocorra no seguinte domingo.

1) $d_{ij} \equiv i + j \ (mod\ n - 1)$, $1 \le d_{ij} \le n - 1$ para $\forall\ i \ne n, j \ne n$
2) $d_{in} \equiv 2i \ (mod\ n - 1)$, $1 \le d_{in} \le n - 1$ para todo $i \ne n, j \ne n$
(se um dos times for T_n).

Podemos observar isso numa tabela que indique o dia entre T_i e T_j
Exemplo: para $n = 6$

d_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1		**3**	**4**	**5**	**1**	**2**
T_2	**3**		**5**	**1**	**2**	**4**
T_3	**4**	**5**		**2**	**3**	**1**
T_4	**5**	**1**	**2**		**4**	**3**
T_5	**1**	**2**	**3**	**4**		**5**
T_6	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	

O campeonato organizado assim satisfaz o problema pois: é fácil ver que um time i joga com cada um dos outros times (no domingo d_{ij}, $j \ne i$). E cada time só joga uma vez num mesmo dia, caso contrário teríamos: um time T_i que joga contra T_j e T_k no mesmo domingo, ou seja $d_{ij} = d_{ki}$

1) Se $i = n$: $d_{jn} = d_{kn}$ $\therefore$ $2j \equiv 2k \ (mod\ n - 1)$ como $(2, n - 1) = 1$ teriamos $j \equiv k \ (mod\ n - 1)$, $\{j, k\} \subset \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ $\therefore$ $j = k$, uma contradição.

2) Se $i \ne n$.

2.1) j e $k \ne n$: $d_{ik} = d_{ij}$ $\therefore$ $i + k \equiv i + j \ (mod\ n - 1)$ $\therefore$ $j \equiv k \ (mod\ n - 1)$ e $k = j$. uma contradição.

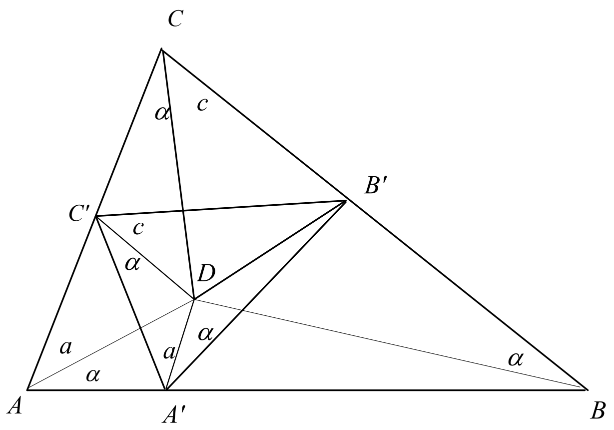
2.2) $j = n$, $k \ne n$, sem perda de generalidade:
$d_{in} = d_{ik}$ $\therefore$ $i + i \equiv i + k \ (mod\ n - 1)$ $\therefore$ $i \equiv k \ (mod\ n - 1)$,
$\{i, j\} \le \{1, 2, \ldots, n - 1\} \Rightarrow i = j$, uma contradição.

Agora se n for ímpar, como cada time tem que jogar com todos os outros seria necessário pelo menos $(n - 1)$ domingos.
Só que $(n - 1)$ domingos não são suficientes pois em cada dia há um time que fica sem jogar. Assim, se no primeiro dia T_i foi o time que não jogou, ele ainda precisará de mais $(n - 1)$ domingos para jogar contra os outros. De modo que são necessários pelo menos n domingos.

Para ver que n domingos são suficientes, basta que o campeonato se organize assim: Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_n$ os times. Criamos um time virtual chamado T_{n+1} onde jogar contra T_{n+1} um certo dia, significa não jogar naquele dia.
Temos então $n + 1 = x$ times, organizamos então como no caso anterior o campeonato. Como x é par isso pode ser feito em $x - 1 = n$ dias.
Obs: O exemplo para $(2k - 1)$ times é obtido do de $(2k)$ times esquecendo-se um dos times.

Resposta: Se n é par $m = n - 1$.
Se n é ímpar $m = n$.

PROBLEMA 6
SOLUÇÃO DA BANCA



Sejam $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ os ângulos internos do triângulo ABC, sejam $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$ os ângulos internos do triângulo $A'B'C'$ e consideremos $\angle A' = \angle A$ e $\angle C' = \angle C$.
Seja D o ponto de interseção das circunferências circuscritas aos triângulos $AA'C'$ e $CC'B'$. Nos quadriláteros inscritíveis $AA'DC'$ e $CC'DB'$ temos $\angle A'DC' = \pi - \angle A$ e $\angle C'DB' = \pi - \angle C$. Logo, $\angle A'DB' = 2\pi - (\pi - \angle A) - (\pi - \angle C) = \pi - \angle B$, e portanto, a circunferência circunscrita ao triângulo $BB'A'$ passa por D.

No quadrilátero inscritível $AA'DC'$, $\angle DAA' = \angle DC'A' = \alpha$ e $\angle DA'C' = \angle DAC' =$ a. Como $\angle A = \angle A'$ concluimos que $\angle DA'B' = \alpha$. Logo, no quadrilátero inscritível $BB'DA'$ temos que $\angle DBB' = \alpha$. No quadrilátero inscritível $CC'DB'$ temos que $\angle DCB' = \angle DC'B' =$ c, e como $\angle C = C'$ concluímos que $\angle DCC' = \alpha$.

O ponto D está então associado ao triângulo ABC pela propriedade:

$$\angle DAB = \angle DBC = \angle CDA$$

e portanto não depende da posição de A', B' e C'. O ponto D é fixo e sua construção será mostrada no final da solução.

Como os ângulos $A'DB'$, $B'DC'$ e $C'DA'$ são constantes, a menor área possível do triângulo A'B'C' é obtida quando os segmentos DA', DB' e DC' forem os menores possíveis. Logo, DA', DB' e DC' são respectivamente perpendiculares aos lados AB, BC e CA.

Construção do ponto *D*

Seja E a interseção da mediatriz de AB com a perpendicular a BC traçada por B. A circunferência de centro E e raio $EA = EB$ é tangente em B à reta BC. Logo, para qualquer ponto X do menor arco AB tem-se que $\angle XAB = \angle XBC$.

Seja F a interseção da mediatriz de BC com a perpendicular a CA traçada por C. A circunferência de centro F e raio $FB = FC$ é tangente em C à reta CA. Logo, para qualquer ponto X do menor arco BC tem-se que $\angle XBC = \angle XCA$.

O ponto D, interseção desses dois arcos é tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$.
(Note que qualquer ponto D com esta propriedade deve pertencer a cada um dos lugares geométricos descritos acima, o que nos dá a unicidade).

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Resultado - Primeiro Nível (5ª. e 6ª. séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo – SP	Ouro
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte – MG	Ouro
Sergio Santos do Nascimento	São Paulo – SP	Ouro
Gustavo Eufrásio Farias	Fortaleza – CE	Ouro
Luciano Lacerda Silveira	Campo Grande – MS	Prata
Emanuel Augusto Varussa Padovan	Rio Claro – SP	Prata
Fabrício Henrique de Faria	São Paulo – SP	Prata
Thiago Jorge Marinho Vieira	Fortaleza – CE	Prata
Paulo Roberto Sampaio Santiago	Salvador – BA	Prata
Mariana de Moraes Silveira	Belo Horizonte – MG	Prata
Gabriel Vieira Lana	Belo Horizonte – MG	Bronze
João Cláudio Telles Vianna	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	Bronze
Ana Cláudia de Franco Suzuki	São Paulo – SP	Bronze
Luiza de Almeida Aoki	S. J. dos Campos – SP	Bronze
Bruno Leonardo Schneider	São José – SC	Bronze
Paulo Rebello Bortolini	Jundiaí – SP	Bronze
Victor Mesquita Barbosa	Fortaleza – CE	Bronze
Thiago Augusto Caldas Bello	Salvador – BA	Bronze
Sinuhe Djin Maschio Shin	São Paulo – SP	Bronze
Raul Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	Bronze
Bruno Fiorio	Fortaleza – CE	Bronze
Pedro H. Milet Pinheiro Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Bernardo Melo Sobreira	Fortaleza – CE	Bronze
Mário Luiz Aranha da Silva	Salvador – BA	Bronze
Conrado F. Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza – CE	Bronze
Daniel Medeiros de Albuqerque	Fortaleza – CE	Bronze
Gabriela Duarte Costa Constantino	Timóteo – MG	Bronze
Tiago Porto Barbosa	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vitor Henrique Gonçalves	São Carlos – SP	Menção Honrosa
Gabriel Tomé de Lima	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa
Gustavo Pinheiro Melo	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Túlio Ivo Cordeiro Fulálio	Campina Grande – PB	Menção Honrosa
Leonardo Lucas Rentz	Maceió – AL	Menção Honrosa
Daniela Satie Kondo	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Rafael Santos Correia de Araujo	Salvador – BA	Menção Honrosa
Felipe Paupitz Schlichting	Florianópolis – SC	Menção Honrosa
Álinson Santos Xavier	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Antonia Taline de Souza Mendonça	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gustavo Hübner	Campina Grande – PB	Menção Honrosa
Leonardo Deeke Boguszewski	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Paola Valente Giorgini	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Roberta Pieroni Visconti	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Alan Hideki Uchida	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Cincinato Furtado Leite Neto	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Marcus Edson Barreto Brito	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Thiago de Sá Jorge	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Vento Inte Nunes Vieira	Curitiba – PR	Menção Honrosa

Resultado - Segundo Nível (7a. e 8a. séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Henrique Chociay	Pinhais – PR	Ouro
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	Ouro
Maurício Massao Soares Matsumoto	São Paulo – SP	Ouro
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Eduardo Kunio Kuroda Abe	São Paulo – SP	Ouro
Larissa de Lima	Fortaleza – CE	Prata
Einstein do Nascimento Júnior	Fortaleza – CE	Prata
Diego Cortez Gutierrez	S. J. dos Campos – SP	Prata
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Bruno Koga	Fortaleza – CE	Prata
Rafael Tajra Fonteles	Teresina – PI	Prata
André Luis Hirschfeld Danila	São Paulo – SP	Prata
Rodrigo Barbosa dos Santos Stein	Vitória – ES	Prata
Daniel Pessôa Martins Cunha	Fortaleza – CE	Bronze
Jaquelyne Gurgel Penaforte	Fortaleza – CE	Bronze
Thiago Braga Cavalcante	Fortaleza – CE	Bronze
Henrique Cortada Barbieri	São Paulo – SP	Bronze
Vinícius Piovesan de Toledo	Jundiaí – SP	Bronze
Lucas Gabriel Maltoni Romano	Jundiaí – SP	Bronze
Danilo Vieira Castejon	Goiânia – GO	Bronze
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza – CE	Bronze
Guilherme Oliveira Campos	Bauru – SP	Bronze
Eduardo Barbosa Araújo	Fortaleza – CE	Bronze
Tatyana Zabanova	Campinas – SP	Bronze
Rafael Montorfano Franco	Maringá – PR	Bronze
Otacílio Torres Vilas Boas	Salvador – BA	Bronze
Henrique Fernandes Macedo	Juiz de Fora – MG	Menção Honrosa
Vinicius de Aguiar Furvie	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Renato R. Sinohara da S. Souza	S. J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Daniel Teixeira	Brasília – DF	Menção Honrosa
Jefferson Ho Yun Lee	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Kiyoshi Horie Filho	Ourinho – SP	Menção Honrosa
Fábio Eiji Arimura	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Toni Chenson Wang	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Guilherme Tosi	Nova Venécia – ES	Menção Honrosa
Yuri Gomes Lima	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Thiago Mizuta	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Lucas Sáber Rocha	Macaé – RJ	Menção Honrosa
Daniel Nascimento Duplat	Salvador – BA	Menção Honrosa
Tiago Monteiro Fernandes	Rio Claro – SP	Menção Honrosa
Caio Ribeiro de Souza	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Adalberto Studart Neto	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Renato Araújo Barbosa	Sete Lagoas – MG	Menção Honrosa
Cibele Ferreira de Souza	Mineiros – GO	Menção Honrosa
Marina Lima Medeiros	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Carolina Nunes Nery	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Germanna Oliveira Queiroz	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Luciana Akemi Nishimaru	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Fabiano Siggelkow Linhares	São Paulo – SP	Menção Honrosa
SandraTie Nishibe Minamoto	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa
Daniel Haanwinckel Junqueira	Salvador – BA	Menção Honrosa
Solleon Natus Tavares de Menezes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Anna Laura Sfredo	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Bruno Gomes Coelho	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Daniel Bréscia dos Reis	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
André Bastos Veras	Teresina – PI	Menção Honrosa
LincolnYoshyiti Hamaji	São Paulo – SP	Menção Honrosa
João Paulo Aguiar Santos	Juiz de Fora – MG	Menção Honrosa
Bruno Bozon Furlan	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Márcio Antonio Ferreira Belo Filho	Goiânia – GO	Menção Honrosa
João Felipe Almeida Destri	Florianópolis – SC	Menção Honrosa
Caio Bória de Oliveira	S. J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Patrick Gonçalves	Jaguaré – ES	Menção Honrosa
Larissa Goulart Rodrigues	Goiânia – GO	Menção Honrosa
Eduardo Horai	São Paulo – SP	Menção Honrosa

Resultado - Terceiro Nível (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo – SP	Ouro
Daniel Nobuo Uno	São Paulo – SP	Ouro
Ulisses Medeiros Albuquerque	Fortaleza – CE	Ouro
Humberto Silva Naves	Goiânia – GO	Ouro
Carlos Stein Naves de Brito	Goiânia – GO	Prata
Lucas Heitzmann Gabrielli	São Paulo – SP	Prata
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza – CE	Prata
Giuliano Boava	Criciúma – SC	Prata
Jônathas Diógenes Castello Branco	Fortaleza – CE	Prata
Ronaldo Ikaro Farias Araújo	Fortaleza – CE	Prata
Carlos Emanuel Rodrigues Nogueira	Fortaleza – CE	Bronze
Daniel Mourão Martins	Fortaleza – CE	Bronze
Gilberto Santos do Nascimento	São Paulo – SP	Bronze
Rogério Uhlmann Yamauti	São Paulo – SP	Bronze
Fernando Silva Barros	C. Lafaiete – MG	Bronze
Leandro dos Santos de Jesus	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Hugo Pinto Iwata	S. José do Rio Preto – SP	Bronze
Leandro de Mattos Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Bruno Fernandes Cerqueira Leite	São Paulo – SP	Bronze
Adenilson Pereira Bonfim	Belém – PA	Bronze
Mônica Mitiko Soares Matsumoto	São Paulo – SP	Bronze
Leonardo da Costa Linhares	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Tertuliano Franco Santos Franco	Salvador – BA	Bronze
Arthur Duarte Nehmi	São Paulo – SP	Bronze
Paulo César de Melo Hanaoka	Campo Grande – MS	Bronze
João Alfredo Castellani F. Freire	Salvador – BA	Menção Honrosa
Eduardo Famini Silva	Salvador – BA	Menção Honrosa
Lívia Camargos Rodrigues Oliveira	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Roberto Tiburcio Canito Frota	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Rui Facundo Vigelis	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Carlos Yuji Hatae	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Daniel Pinheiro Sobreira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Pedro Paulo de Simoni Gouvéia	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Mauricio Masayuki Honda	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Christian Lyoiti Watanabe	Itaguaí – RJ	Menção Honrosa
Guilherme Goettems Schneider	São Leopoldo – RS	Menção Honrosa
Danilo Castello Branco A. Bessa	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Bruno Woltzenlogel Paleo	Piracicaba – SP	Menção Honrosa
Camila Shirota	Piracicaba – SP	Menção Honrosa
Miriam Ou	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina – PI	Menção Honrosa
Pedro Ferreira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Celio Hira	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Gustavo Maltez Lengler	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Fernando Duarte Menezes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Fernando Prado Rocha	Goiânia – GO	Menção Honrosa
Paulo Henrique Jacob Silva	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Zhang He	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Renato Takamatsu	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ulisses Duarte Nehmi	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Eduardo Moraes de Morais	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Humberto Vinhais	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ilan Felts Almog	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Pietro Kreitlon Carolino	Salvador – BA	Menção Honrosa
Ivo Almino Gondim	Fortaleza – CE	Menção Honrosa

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Antonio Caminha Muniz Neto

◆ Nível Intermediário

Denominaremos *equação diofantina* (em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria) uma equação em números inteiros. Nosso objetivo será estudar dois tipos particulares de equações diofantinas, a equação de Pitágoras e a de Pell, e determinar suas soluções. Também estudaremos o *método da descida*, que nos permitirá mostrar que algumas equações diofantinas não possuem soluções não triviais, num sentido a ser precisado.

Ternos Pitagóricos

Queremos estudar as soluções (x, y, z) da equação $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y, z inteiros não nulos. Após determinar tais soluções, vamos ver como podemos utilizar as informações obtidas para resolver outras equações em números inteiros. O resultado fundamental é o seguinte

Teorema 1: As soluções (x, y, z) da equação $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y, z inteiros não nulos, são dadas por: $(x, y, z) = (2uvd, (u^2 - v^2)d, (u^2 + v^2)d)$ ou $(x, y, z) = ((u^2 - v^2)d, 2uvd, (u^2 + v^2)d)$ onde d, u, v são inteiros não nulos, com $u \neq v$, $mdc(u, v) = 1$ e u e v de paridades distintas.

Prova: Sejam x, y, z inteiros positivos quaisquer satisfazendo a equação acima (os demais casos são análogos), e d o mdc de x e y. Então d^2 divide z^2, e daí d divide z. Existem portanto inteiros não nulos a, b, c, com $mdc(a, b) = 1$, tais que $(x, y, z) = (da, db, dc)$. Ademais, como

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2,$$

basta determinarmos as soluções (a, b, c) da equação, sujeitas à condição $mdc(a, b) = 1$ (que por sua vez implica $mdc(a, c) = 1$ e $mdc(b, c) = 1$).

Note agora que, dado um inteiro qualquer t, temos que t^2 deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4, quando t for respectivamente par ou ímpar. Assim, se fossem a e b ímpares, teríamos a^2 e b^2 deixando resto 1 na divisão por 4, e daí $c^2 = a^2 + b^2$ deixaria resto 2 quando dividido por 4, o que é um absurdo. Como a e b são primos entre si, não podem ser ambos pares. Há então dois casos: a ímpar e b par, a par e b ímpar. Analisemos o primeiro caso (o segundo é análogo).

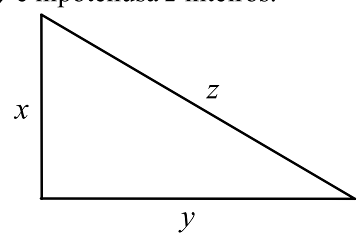
Se a for ímpar e b par, então c também é ímpar. De $a^2 + b^2 = c^2$ obtemos $b^2 = (c-a)(c+a)$, e não é difícil concluir que $mdc(c - a,\ c + a) = 2$. Podemos então escrever $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c-a}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right)$. Note que $\left(\frac{c-a}{2}\right)$ e $\left(\frac{c+a}{2}\right)$ são primos entre si.

Mas se o produto de dois naturais primos entre si $\left(\frac{c-a}{2} \text{ e } \frac{c+a}{2}\right)$ é um quadrado perfeito, então cada um deles deve ser um quadrado perfeito. Existem então inteiros positivos primos entre si u e v, tais que $c - a = 2v^2$, $c + a = 2u^2$, e daí $(a,b,c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$.

Note ainda que, como $u^2 + v^2 = c$ é ímpar, u e v devem ter paridades distintas. Por substituição na equação original, concluímos que os ternos acima são realmente soluções da equação, de modo que nada mais há a fazer.❑

Vemos então que há uma quantidade infinita de ternos $(x,\ y,\ z)$ satisfazendo a equação acima. Por exemplo, fazendo $d = v = 1$ e $u = 2n$, n inteiro positivo, obtemos o terno $(x,y,z) = (4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$

Um terno de inteiros positivos (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 = z^2$ é denominado um *terno Pitagórico*, em alusão ao matemático grego Pitágoras e seu famoso teorema sobre triângulos retângulos. De fato, um tal terno (x, y, z) determina um triângulo retângulo de catetos x e y e hipotenusa z inteiros.



Vejamos em que a equação acima pode ajudar na solução de outros problemas. Consideremos a tarefa de determinar as soluções inteiras não nulas da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, com $x \neq y$. Em uma qualquer dessas soluções, devemos ter x e y com a mesma paridade, pois caso contrário $x^2 + y^2$ seria um número ímpar. Assim, existem *inteiros* a e b tais que

$$x = a + b,\ y = a - b$$

Basta tomarmos $a = \frac{1}{2}(x + y)$ e $b = \frac{1}{2}(x - y)$, notando que $x + y$ e $x - y$ são números pares. Substituindo as expressões acima para x e y na equação original, concluímos que

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = z^2$$

Mas essa última equação é a nossa já conhecida equação de Pitágoras. Então, de acordo com o teorema acima, podemos escrever

$$(a,b,z) = (2uvd, (u^2 - v^2)d, (u^2 + v^2)d) \text{ ou } (a,b,z) = ((u^2 - v^2)d, 2uvd, (u^2 + v^2)d)$$

onde d, u, v são inteiros não nulos, com $u \neq v$, $mdc(u, v) = 1$ e u e v de paridades distintas.

Segue daí que as soluções (x, y, z) de nossa equação são de um dos tipos abaixo, onde d, u, v satisfazem as mesmas condições do teorema acima.

$$(x,y,z) = (2uvd + (u^2 - v^2)d, 2uvd - (u^2 - v^2)d, (u^2 + v^2)d)$$

ou

$$(x,y,z) = ((u^2 - v^2)d + 2uvd, (u^2 - v^2)d - 2uvd, (u^2 + v^2)d)$$

Descida de Fermat e Equações sem Soluções

As equações analisadas acima são, em um certo sentido, privilegiadas, pois possuem uma infinidade de soluções. Nosso próximo exemplo será o de uma equação que só admite a solução inteira $x = y = z = 0$. Ela ilustra um método que pode ser estendido a outras equações, a fim de provar que elas *não possuem* soluções inteiras não nulas.

***Exemplo* 1:** A equação $3x^2 + y^2 = 2z^2$ não possui soluções inteiras não nulas.

Prova: Suponha o contrário. Então a equação possui uma solução (x, y, z) em inteiros positivos. Então, dentre todas as soluções (x, y, z), com x, y e z inteiros positivos, existe uma $(x, y, z) = (a, b, c)$ para a qual $z = c$ é o menor possível. Trabalhemos tal solução.

Vamos usar o seguinte fato, que você pode provar facilmente: se um inteiro u não for múltiplo de 3, então u^2 deixa resto 1, quando dividido por 3. Então, se b não for múltiplo de 3, teremos de $3a^2 + b^2 = 2c^2$ que c também não será múltiplo de 3. Olhando os restos de cada termo da equação por 3, teremos que $3a^2 + b^2$ deixa resto 1 e $2c^2$ deixa resto 2.1 = 2. Logo, não poderia ser $3a^2 + b^2 = 2c^2$. Assim, b deve ser múltiplo de 3, digamos $b = 3b_1$. Daí vem que $3a^2 + 9b_1^2 = 2c^2$, e c também é múltiplo de 3, digamos $c = 3c_1$. Substituindo na equação, chegamos a $3b_1^2 + a^2 = 6c_1^2$.

Então, a também é múltiplo de 3. Sendo $a = 3a_1$, a equação acima nos dá $b_1^2 + 3a_1^2 = 2c_1^2$, e (b_1, a_1, c_1) é uma outra solução de nossa equação original, com $c_1 = \frac{c}{3} < c$. Mas isso é uma contradição, pois partimos de uma solução na qual o valor de z era c, mínimo possível. Logo, nossa equação não possui soluções não nulas. ❑

Esquematicamente, o *método da descida* (devido ao matemático francês Pierre Simon de Fermat) consiste então no seguinte:

i. Supor que uma dada equação possui uma solução em inteiros não nulos.
ii. Concluir daí que ela possui uma solução em inteiros positivos que seja, em algum sentido, *mínima*.
iii. Deduzir a existência de uma solução positiva *menor que a mínima*, chegando a uma contradição.

Já que determinamos acima as soluções da equação de Pitágoras, nada mais natural que tentar estudar a equação mais geral abaixo, denominada *equação de Fermat*. Aqui, $n > 2$ é um inteiro fixado.

$$x^n + y^n = z^n,$$

Por cerca de três séculos os matemáticos defrontaram-se com o problema de decidir sobre a existência de soluções não nulas (x, y, z) dessa equação, problema que somente foi resolvido na década de noventa, utilizando métodos muitíssimo complexos.
Vamos aproveitar o método da descida para analisar um caso simples dessa equação, aquele em que n é um múltiplo de 4. O leitor interessado em saber mais sobre essa equação pode consultar uma das referências [2] ou [3] da bibliografia, onde o caso $n = 3$ é discutido.

Teorema 2: Se n for múltiplo de 4 então não existem inteiros não nulos x, y, z tais que $x^n + y^n = z^n$.

Prova: Seja $n = 4k$, k natural. Se $x^n + y^n = z^n$, então teremos $(x^k)^4 + (y^k)^4 = (z^{2k})^2$, ou seja, (x^k, y^k, z^{2k}) será uma solução da equação $a^4 + b^4 = c^2$. Assim, basta mostrarmos que essa última equação não admite soluções não nulas. Por absurdo, suponhamos que existam inteiros positivos a, b, c tais que $a^4 + b^4 = c^2$. Podemos também supor que a, b e c foram escolhidos de tal modo que não há outra solução positiva a', b', c' com $c' < c$ (aqui vamos usar o método da descida). Então a e b são primos entre si, e o teorema 1 garante a existência de inteiros positivos primos entre si u e v tais que $a^2 = u^2 - v^2$, $b^2 = 2uv$, $c = u^2 + v^2$. Como $a^2 + v^2 = u^2$, segue novamente do teorema 1 a existência de inteiros positivos primos entre si p e q tais que

$a = p^2 - q^2$, $v = 2pq$, $u = p^2 + q^2$. Mas aí $b^2 = 2uv = 4pq(p^2 + q^2)$

Como p e q são primos entre si, temos que ambos são também primos com $p^2 + q^2$. Portanto, sendo $4pq(p^2 + q^2)$ um quadrado devemos ter p, q e $p^2 + q^2$ quadrados, digamos $p = \alpha^2, q = \beta^2, p^2 + q^2 = \gamma^2$, com α, β, γ positivos. Por fim, segue que $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$, com $c = u^2 + v^2 > u = p^2 + q^2 = \gamma^2 \geq \gamma$, contrariando a minimalidade de c. Logo, não há soluções não nulas de $x^n + y^n = z^n$ quando n for múltiplo de 4. ❑

A Equação de Pell

Nem sempre é fácil, ou mesmo possível, determinar *todas* as soluções em inteiros de uma dada equação. Por exemplo, para a equação $x^2 - 2y^2 = 1$, é bem mais fácil mostrar que ela possui uma infinidade de soluções do que determinar todas elas. Podemos gerar infinitas soluções dessa equação a partir de uma só solução não nula.

Uma vez que $a^2 - 2b^2 = 1$, teremos $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 1$, e daí

$$(a + b\sqrt{2})^2(a - b\sqrt{2})^2 = 1$$

Desenvolvendo os binômios, chegamos a

$(a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2})(a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}) = 1$, e daí a $\left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 2(2ab)^2 = 1$

Portanto, se (a, b) for uma solução, $\left(a^2 + 2b^2, 2ab\right)$ será outra solução. Sendo a e b positivos, temos $a < a^2 + 2b^2$, e desse modo determinamos uma infinidade de soluções da equação (contanto que tenhamos uma solução não nula). Veja que (3, 2) é uma solução não nula de nossa equação.

É fácil ver que o método acima utilizado também garante que, quando d for um inteiro tal que $\sqrt{d}$ é irracional, a equação $x^2 - dy^2 = 1$ admite infinitas soluções não nulas, desde que admita uma solução não nula. Também, com poucas modificações podemos tratar a equação $x^2 - dy^2 = -1$ (veja o exercício 6).

Observe que, apesar de determinarmos facilmente infinitas soluções da equação acima, não sabemos se há outras. Vamos agora começar a responder essa pergunta, para uma classe mais ampla de equações.

Definição* 1 *(Equação de Pell): Seja d um inteiro positivo que não seja um quadrado. Nesse caso, sabemos que $\sqrt{d}$ é irracional. Chamamos *equação de Pell* à equação $x^2 - dy^2 = m$, onde m é um inteiro qualquer.
É claro que no caso $m = 0$ a equação não admite soluções além da trivial $x = y = 0$, pois se esse fosse o caso teríamos x e y não nulos, e daí $\sqrt{d} = \frac{x}{y}$, um racional.

Lema* 1*: Seja ξ um irracional qualquer. Existem infinitos racionais $\frac{x}{y}$, com x e y inteiros não nulos primos entre si, tais que $\left|\frac{x}{y} - \xi\right| < \frac{1}{y^2}$.

<u>Prova:</u> Seja $n > 1$ um natural qualquer, e considere os números $j\xi$, com $j = 0, 1, ..., n$. Seja $\{j\xi\} = j\xi - [j\xi] \in [0,1)$. Como

$$[0,1) = \left[0, \tfrac{1}{n}\right) \cup \left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[\tfrac{n-1}{n}, 1\right),$$

segue do princípio de Dirichlet que existem $0 \le k < j \le n$ tais que $\{j\xi\}$ e $\{k\xi\}$ pertencem a um mesmo intervalo dos que aparecem no lado direito da igualdade acima. Então $|\{j\xi\} - \{k\xi\}| < \frac{1}{n}$ Daí, $\left|(j-k)\xi - \left(\lfloor j\xi\rfloor - \lfloor k\xi\rfloor\right)\right| < \frac{1}{n}$, e segue que $\left|\xi - \left(\frac{\lfloor j\xi\rfloor - \lfloor k\xi\rfloor}{j-k}\right)\right| < \frac{1}{(j-k)n} \le \frac{1}{(j-k)^2}$

Existe então um par (x, y) de inteiros, $x = \lfloor j\xi\rfloor - \lfloor k\xi\rfloor$, $y = j - k \le n$, tais que $\left|\frac{x}{y} - \xi\right| < \frac{1}{y^2}$. Se $x = dx_1, y = dy_1$, com $d > 1$, então $\left|\frac{x_1}{y_1} - \xi\right| < \frac{1}{y^2} < \frac{1}{y_1^2}$, de modo que podemos supor que x e y são primos entre si.
Para garantirmos a existência de infinitos tais pares, suponha que achamos x e y primos entre si e tais que $\left|\frac{x}{y} - \xi\right| < \frac{1}{y^2}$. Escolha agora um natural n tal que $\frac{1}{n} < \left|\frac{x}{y} - \xi\right|$. Repetindo o argumento acima, chegamos a um par de inteiros primos entre si x_1, y_1, com $\left|\frac{x_1}{y_1} - \xi\right| < \frac{1}{ny_1}$ e $y_1 \le n$. Portanto, $\left|\frac{x_1}{y_1} - \xi\right| < \frac{1}{ny_1} < \left|\frac{x}{y} - \xi\right|$ e $\left|\frac{x_1}{y_1} - \xi\right| < \frac{1}{ny_1} \le \frac{1}{y_1^2}$, donde $(x_1, y_1) \ne (x, y)$ satisfaz o lema. ❑

Lema 2: Seja d um inteiro positivo que não seja um quadrado. Existe um inteiro m para o qual a equação $x^2 - dy^2 = m$ admite infinitas soluções inteiras.

Prova: Sabemos que $\sqrt{d}$ é irracional. Assim, o conjunto S dos pares (x, y) de inteiros primos entre si tais que $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{y^2}$ é infinito. Mas se x e y forem inteiros satisfazendo essa desigualdade, então

$$\left|x^2 - dy^2\right| = \left|x - \sqrt{d}\,y\right|\left|x + \sqrt{d}\,y\right| < \tfrac{1}{y}\left(\left|x - \sqrt{d}\,y\right| + 2\sqrt{d}\,y\right) < \tfrac{1}{y}\left(\tfrac{1}{y} + 2\sqrt{d}\,y\right) < 2\sqrt{d} + 1$$

Segue que algum inteiro não nulo m entre $-(2\sqrt{d}+1)$ e $2\sqrt{d}+1$ se repete um número infinito de vezes entre os valores de $x^2 - dy^2$, com (x, y) em S. Mas isto é o mesmo que dizer que a equação $x^2 - dy^2 = m$ admite infinitas soluções. ❑

Teorema 3 (Soluções da Equação de Pell): Seja d um inteiro positivo que não seja um quadrado. A equação $x^2 - dy^2 = 1$ admite infinitas soluções em inteiros positivos x, y. Ademais, existe uma solução em inteiros positivos x_1, y_1 tal que todas as demais soluções dessa equação são da forma $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, onde n é um número natural.

Prova: Admitamos por enquanto que nossa equação tenha uma solução em inteiros positivos x, y. Dentre todas essas soluções, escolha aquela x_1, y_1 tal que $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{d}$ seja o menor possível.

Dado um natural qualquer n, sabemos que existem inteiros positivos x_n, y_n tais que $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$. Daí, sabemos que

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = x_n - y_n\sqrt{d}\text{, e assim}$$

$$1 = (x_1^2 - dy_1^2)^n = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n =$$
$$= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = x_n^2 - dy_n^2$$

Então todos os pares (x_n, y_n) são soluções da equação.

Seja agora (x, y) uma solução qualquer em inteiros positivos. Para terminar, basta mostrarmos que existe um natural n tal que $x + y\sqrt{d} = \alpha^n$. Suponha o contrário. Então existe um natural n tal que $\alpha^n < x + y\sqrt{d} < \alpha^{n+1}$. Daí, vem que $1 < \alpha^{-n}(x + y\sqrt{d}) < \alpha$. Mas

$$\alpha^{-n}(x + y\sqrt{d}) = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}(x + y\sqrt{d}) = (x_n + y_n\sqrt{d})^{-1}(x + y\sqrt{d}) =$$
$$= (x_n - y_n\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = (xx_n - dyy_n) + (x_n y - y_n x)\sqrt{d}$$

e ocorre que

$$(xx_n - dyy_n)^2 - d(x_n y - y_n x)^2 = x_n^2(x^2 - dy^2) + y_n^2(dy^2 - x^2) = x_n^2 - dy_n^2 = 1,$$

de modo que $\alpha^{-n}(x + y\sqrt{d}) = (xx_n - dyy_n, x_n y - y_n x)$ também é solução.
Como $1 < \alpha^{-n}(x + y\sqrt{d}) < \alpha$, basta mostrarmos que $xx_n - dyy_n, x_n y - y_n x > 0$ para chegarmos numa contradição. Sejam $a = xx_n - dyy_n$, $b = x_n y - y_n x$. Temos $a + b\sqrt{d} > 0$ e $a^2 - db^2 = 1$, donde $a - b\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^{-1} > 0$.
Então, $2a = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) > 0$. Por outro lado, $a + b\sqrt{d} > 1$ implica $a - b\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^{-1} < 1$, e daí $b\sqrt{d} > a - 1 \geq 0$. Logo, $b > 0$.

Para terminar, basta mostrarmos que a equação $x^2 - dy^2 = 1$ admite uma solução. Tome, de acordo com o lema 2, um inteiro (não nulo) m tal que $x^2 - dy^2 = m$ admita uma infinidade de soluções. Podemos escolher duas dessas soluções, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ digamos, tais que $|x_1| \neq |x_2|$ mas $x_1 \equiv x_2$ e $y_1 \equiv y_2$, módulo m. Então

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) = (x_1x_2 - dy_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\sqrt{d} \quad (*)$$

Mas $x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv x_1^2 - dy_1^2 \equiv 0 \pmod{m}$ e $x_2y_1 \equiv x_1y_2 \pmod{m}$, donde existem inteiros u e v tais que $x_1x_2 - dy_1y_2 = mu,\ x_2y_1 - x_1y_2 = mv$

Segue de (*) que $(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) = m(u + v\sqrt{d})$, e daí

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d}) = m(u - v\sqrt{d}).$$

Multiplicando ordenadamente essas duas igualdades, chegamos a

$$m^2 = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = m^2(u^2 - dv^2),$$

ou seja, $u^2 - dv^2 = 1$. Resta mostrarmos que u e v são não nulos. Se $u = 0$ teríamos $-dv^2 = 1$, um absurdo. Se $v = 0$, viria $u = 1$ ou -1. De (*) seguiria que

$(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) = \pm m$, e assim $(x_1 + y_1\sqrt{d}) = \pm(x_2 + y_2\sqrt{d})$, donde por fim $|x_1| = |x_2|$, o que é um absurdo. ❑

Exemplo 2: Agora podemos determinar *todas* as soluções inteiras não nulas da equação $x^2 - 2y^2 = 1$. O teorema 3 ensina que as soluções positivas dessa equação são da forma (x_n, y_n), onde x_n e y_n são os únicos inteiros para os quais $x_n + y_n\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n$, sendo (x_1, y_1) a solução positiva para a qual $x_1 + y_1\sqrt{2}$ é o menor possível. Como os pares (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) não são soluções da equação e (3, 2) é, é fácil nos convencermos de que (x_1, y_1) = (3, 2). Desse modo, temos os pares (x_n, y_n) dados pela igualdade $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$

Determine agora as demais soluções não nulas da equação acima. O exercício 7 discute mais alguns aspectos dessa equação.

Exercícios:

1. Seguindo os passos da prova do teorema 1, mostre que as soluções em inteiros não nulos da equação $x^2 + 2y^2 = z^2$ são da forma $x = \pm(u^2 - 2v^2)d,\ y = 2uvd,\ z = (u^2 + 2v^2)d$, onde *d*, *u*, *v* são inteiros não nulos, com *u* e 2*v* primos entre si.

2. Mostre que as equações a seguir não possuem soluções inteiras não nulas:

i. $x^4 + 4y^4 = z^2$

ii. $x^4 + 2y^4 = z^2$

iii. $x^2 + y^2 = 3z^2$

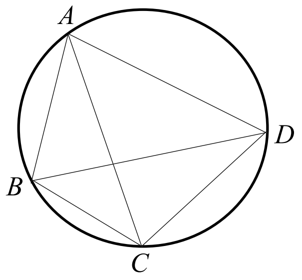
O item i do exercício a seguir tem a ver com o exemplo 1 do texto.

3. i. Mostre que não existem racionais *x* e *y* tais que $x^2 + xy + y^2 = 2$.

ii. Determine todas as soluções racionais da equação $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Para resolver os próximos dois exercícios utilizamos o teorema 1. Eles são mais difíceis que os anteriores, e no primeiro deles você pode achar útil o seguinte resultado, conhecido como Teorema de Ptolomeu: *dado um quadrilátero convexo inscritível ABCD, tem-se*

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$



Para uma prova do Teorema de Ptolomeu, você pode consultar a referência [4].

4. Temos no plano uma circunferência de raio 1. Mostre que podemos escolher em tal circunferência 2000 pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$ tais que A_iA_j é racional, quaisquer que sejam $1 \le i < j \le 2000$.

5. Seja *r* um inteiro positivo dado. Queremos determinar o número de triângulos *ABC*, dois a dois não congruentes, satisfazendo as seguintes condições:

i. O raio da circunferência inscrita em *ABC* mede *r*.

ii. Os comprimentos dos lados de *ABC* são números inteiros, primos entre si.

Mostre que o número de tais triângulos é 2^k, onde *k* é o número de fatores primos distintos de *r*.

6. Prove, sem apelar para o teorema 2, que a equação $x^2 - 2y^2 = -1$ admite uma infinidade de soluções inteiras.

7. Prove que as soluções positivas (x_n, y_n) da equação do exemplo 2 são dadas pelas seqüências $(x_1, y_1) = (3, 2)$ e $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$

8. Prove que há infinitos inteiros *n* tais que $n^2 + (n+1)^2$ seja quadrado.

Bibliografia

[1] *Introdução à Teoria dos Números*. Plínio O. dos Santos. Coleção Matemática Universitária. IMPA. 1999.

[2] *An Introduction to the Theory of Numbers*. I. Niven, H. Zuckermann. John Wiley & Sons. New York. 1980.

[3] *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. K. Ireland & M. Rosen. Springer-Verlag. New York. 1990.

[4] *Quadriláteros e Triângulos*. M. Mendes. Eureka! Nº5. OBM 1999

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

✎ Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

29) Seja $n > 1$ um número inteiro. Existem n lâmpadas $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ colocadas em um círculo. Cada lâmpada está ACESA ou APAGADA. Uma seqüência de passos $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ é executada. O passo S_j afeta apenas o estado da lâmpada L_j (deixando o estado de todas as outras inalterado) da seguinte forma:

Se L_{j-1} está ACESA, S_j muda o estado de L_j de ACESA para APAGADA, ou de APAGADA para ACESA;

Se L_{j-1} está APAGADA, S_j deixa o estado de L_j inalterado.

As lâmpadas são rotuladas *mod n*, ou seja, $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, etc.

Inicialmente todas as lâmpadas estão ACESAS. Mostre que:

a) Existe um inteiro positivo $M(n)$ tal que depois de $M(n)$ passos todas as lâmpadas estão ACESAS de novo;

b) Se n é da forma 2^k então todas as lâmpadas estão ACESAS depois de $n^2 - 1$ passos;

c) Se n tem a forma $2^k + 1$ então todas as lâmpadas estão ACESAS depois de $n^2 - n + 1$ passos.

Solução de Frank Castro (São Paulo - SP):

a) Vamos inicialmente representar o estado das lâmpadas $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ por uma n-upla $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, onde $u_i = 0$ se L_i está apagada e $u_i = 1$ se L_i está acesa.
Evidentemente o estado inicial das lâmpadas é dado pela n-upla $e = (1, 1, 1, \ldots, 1)$.
Nessas condições a operação S_j tranforma a n-upla $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ na nova n-upla $(u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j-1} + u_j, \ldots, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1})$, onde a soma $u_{j-1} + u_j$ é tomada módulo 2 (e j é tomada módulo n).
Assim sendo, nosso problema consiste em determinar um valor natural r, tal que:

$$S_r(S_{r-1}(\ldots(S_1(S_0(e)))\ldots)) = e$$

Para tanto, denotemos por R_j a operação que transforma a n-upla (u_0, u_1,..., u_{j-1}, u_j, u_{j+1},..., u_{n-1}) na n-upla $(u_{j \bmod n}, u_{(j+1) \bmod n}, \ldots u_{(j+n-1) \bmod n})$. Observe que R_{-j} é a operação inversa de R_j e R_0 deixa a n-upla inalterada.
Nesses termos temos para uma n-upla qualquer $S_j = R_{-j}(S_0(R_j))$.

Agora para uma n-upla qualquer $\overline{u}$ podemos escrever:

$$S_r(S_{r-1}...(S_1(S_0(\overline{u})))...) = S_r S_{r-1}...S_1 S_0(\overline{u}) = (R_{-r} S_0 R_r)(R_{-r+1} S_0 R_{r-1})...$$

$$...(R_{-1} S_0 R_1) S_0(\overline{u}) = R_{-r} S_0 (RS_0)_r(\overline{u}) = R_{-r-1}(RS_0)_{r+1}(\overline{u}) \quad \text{onde}\ R = R_1.$$

Consequentemente, $S_r S_{r-1}...S_1 S_0(e) = e \Leftrightarrow (RS_0)_{r+1}(e) = R_{r+1}(e) = e$ como existe apenas um número finito de estados das lâmpadas (2^n precisamente) que equivale ao número total de n-uplas, em algum estágio a seqüência $e, (RS_0)_1(e), (RS_0)_2(e), \ldots$ deve repetir algum de seus elementos. Nessas condições para algum m e n ($m < n$) teremos : $(RS_0)_m(e) = (RS_0)_n(e)$. Sendo RS_0 uma bijeção (verifique!) temos $(RS_0)_{n-m}(e) = e$, o que conclui o ítem *a*.

b) Primeiramente associaremos à n-upla u = (u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) o polinômio $P(x)$ da forma : $P(x) = u_{n-2} + u_{n-3} \cdot x + u_{n-4} \cdot x^2 + \ldots + u_0 \cdot x^{n-2} + u_{n-1} \cdot x^{n-1}$, onde os coeficientes serão olhados módulo 2 (isto é, $P(x) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ [x]$).
Chamemos tal polinômio de polinômio de posição. Observe agora que para a n-upla $(RS_0)_1(u)$ temos:
$(RS_0)_1(u) = R_1(S_0(u)) = R_1(u_{n-1} + u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_{n-1} + u_0)$
e seu polinômio de posição é dado por
$Q(x) = u_{n-1} + u_{n-2}x + u_{n-3}x^2 + \ldots + u_1 x^{n-2} + (u_{n-1} + u_0)x^{n-1}$ Não se esqueça que a adição $u_{n-1} + u_0$ é tomada módulo 2. Assim, $Q(x) \equiv x \cdot P(x) \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$.
Assim sendo, queremos encontrar r tal que $x^r \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$. Note que quando $x^r \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$. o polinômio de posição associado a $(RS_0)_r$ será congruente a $P(x)$ que representará a n-upla e = (1, 1, 1,...1) no estado inicial das lâmpadas. Suponha agora $n = 2^k$.
Então $x^{n^2} \equiv (x^n)^n \equiv (x^{n-1} + 1)^n \equiv x^{n \cdot (n-1)} + 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$ pois se n é uma potência de 2, todos os coeficientes, exceto o primeiro e o último da expansão binomial $(x^{n-1} + 1)^n$ são pares, logo congruentes a zero módulo 2.

Finalmente temos:

$x^{n^2} - x^{n(n-1)} \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow x^{n^2} - x^{n^2-n} \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow$

$x^{n^2-n} \cdot (x^n - 1) \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow x^{n^2-1} \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$

(pois $x^n - 1 \equiv x^{n-1} (\bmod\ x^n - x^{n-1} - 1)$).

Assim, após $(n^2 - 1)$ etapas todas as lâmpadas estarão acesas novamente.

c) Suponha $n = 2^k + 1$

Assim $x^{n^2-1} \equiv (x^{n+1})^{n-1} \equiv (x^n + x)^{n-1} \equiv x^{n\cdot(n-1)} + x^{n-1}$ onde todas as congruências foram tomadas $\mathrm{mod}(x^n - x^{n-1} - 1)$. Como no ítem anterior $n - 1$ é potência de 2, logo todos os coeficientes, exceto o primeiro e o último da expansão binômial $(x^n + x)^{n-1}$ são pares, consequentemente congruentes a zero módulo 2.

Finalmente temos:

$x^{n^2-1} - x^{n\cdot(n-1)} \equiv x^{n-1} \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow x^{n^2-n} \cdot (x^{n-1} - 1) \equiv x^{n-1} \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow$

$(*) x^{n^2-n} \cdot (x^n) \equiv x^{n-1} \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow x^{n^2} \equiv x^{n-1} \bmod (x^n - x^{n-1} - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{n^2-n+1} \equiv 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$. Observe que, como estamos trabalhando módulo 2, $x^n \equiv x^{n-1} + 1 \equiv x^{n-1} - 1 \bmod (x^n - x^{n-1} - 1)$, e isso justifica a congruência (*). Assim sendo, após $n^2 - n + 1$ etapas, todas as lâmpadas estarão acesas novamente.

30) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem as condições:

(i) $f(-x) = -f(x)$, (ii) $f(x + 1) = f(x) + 1$, (iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ para $x \neq 0$.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor (Rio de Janeiro - RJ):

Do ítem (ii) : $f(x + 1) = f(x)$ temos que $f(x) = 1 + f(x - 1)$ e usando (i) $\therefore$

$f(x) + f(1 - x) = 1$. Sejam $x \neq 0$ e $x \neq 1$, logo: $f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ e usando

(iii) $\Rightarrow \frac{1}{x^2} f(x) + f\left[\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\right] = 1$ e usando novamente (iii) $\Rightarrow \frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 \therefore$

$$\frac{1}{x^2}f(x)+\frac{(x-1)^2}{x^2}\cdot f\left[1+\frac{1}{x-1}\right]=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2}f(x)+\frac{(x-1)^2}{x^2}\left[1+\frac{1}{(x-1)^2}\cdot f(x-1)\right]=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\cdot f(x)+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot f(x-1)=1$$

$$f(x)+(x-1)^2+f(x-1)=x^2 \Rightarrow f(x)+f(x-1)=2x-1$$

donde: $\begin{cases} f(x)+f(1-x)=1 \\ f(x)-f(1-x)=2x-1 \end{cases} \therefore f(x)=x$

para $\quad x=0 \to f(1)=f(0)+1$

$\quad x=-1 \to f(0)=f(-1)+1=-f(1)+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1)-f(0)=1 \\ f(0)+f(1)=1 \end{cases} \therefore f(1)=1 \text{ e } f(0)=0.$$

Conclusão: $\forall x \in \mathbb{R}$, teremos $f(x) = x$ como sendo a única solução.

31) Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots$ uma seqüência de números reais não negativos satisfazendo $x_n = \dfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$ para $n = 3, 4, 5, \ldots$ Estabeleça condições necessárias e suficientes em x_1 e x_2 para x_n ser inteiro para infinitos valores de n.

Solução de Davi Máximo Alexandrino Nogueira (Fortaleza - CE):

Afirmação: $x_1 = x_2$, x_1 e x_2 inteiros.

Prova: Se, $x_n = \dfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$ teremos,

$$x_n(2x_{n-2}-x_{n-1}) = x_{n-2}x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-2}-x_{n-1}}{x_{n-2}x_{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_{n-2}}$ tome $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ logo, a seqüência $y_1, y_2, \ldots$, é uma P.A., de razão $r = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$ desse modo, $y_n = y_1 + (n-1)r \Rightarrow x_1 = x_n + (n-1)rx_1x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_n(1+(n-1)rx_1) = x_1 \Rightarrow x_n = \dfrac{x_1}{1+(n-1)x_1 r}$. Suponha $r \neq 0$.

Como $r = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$, temos $x_n = \dfrac{x_1 x_2}{x_2 + (n-1)(x_1 - x_2)}$ fazendo $x_1 - x_2 = a$, teremos $x_n = \dfrac{x_1 x_2}{x_2 + (n-1)a}$. Porém, para algum k, tal que $|x_1 x_2| < |x_2 + (k-1)a|$ teremos $|x_n| < 1$, para todo $n \geq k$. Logo, devemos ter $r = 0$, o que conclui a demonstração.

32) a) Prove que todo número inteiro não nulo m admite uma única representação da forma $m = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot 3^k$, onde n é um inteiro positivo e $\sigma_k \in \{-1,0,1\}$ para todo k, com $\sigma_{n-1} \neq 0$.

Dado um conjunto de $\dfrac{3^n+1}{2}$ pontos $V = \{P_0, P_1, ..., P_{\frac{3^n-1}{2}}\}$, escrevemos em cada aresta que une dois desses pontos P_i e P_j $(i \neq j)$ um número pertencente a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ da seguinte forma: escreveremos $|i-j| = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot 3^k$, com $\sigma_k \in \{-1,0,1\}, \forall k,$ e associamos à aresta P_i P_j o número $m = \min\{k \geq 0 \mid \sigma_k = 1\}$.

Prove que não existe nenhum triângulo cujos vértices pertençam a V com o mesmo número escrito em seus três lados.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor (Rio de Janeiro - RJ):

a) Sabendo que $m \equiv 0 \ (mod\ 3)$; $m \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ou $m \equiv -1 \ (mod\ 3)$,
teremos:

$$m = 3k_0 + r_0$$
$$k_0 = 3k_1 + r_1$$
$$k_1 = 3k_2 + r_2$$
$$\vdots$$
$$k_{n-2} = 3k_{n-1} + r_{n-1}$$

com $k_{n-1} = 0$ e $r_{n-1} \neq 0$, onde $r_i \in \{-1, 0, 1\}$ (note que os r_i estão unicamente determinados, e existe n com $k_{n-1} = 0$ pois $|m| > |k_0| > |k_1| > \ldots > |k_i|$ enquanto tivermos $|k_{i-1}| \neq 0$.) Substituindo na primeira igualdade k_0 pela sua igualdade, obteremos m como função de k_1, r_0. Tomando novamente $k_1 = 3\,k_2 + r_2$ e fazendo as substituições sucesivas de $k_2, k_3, \ldots, k_{n-2}$; obtemos:

$m = 3^n \cdot k_{n-1} + r_{n-1} \cdot 3^{n-1} + r_{n-2} \cdot 3^{n-2} + \ldots + r_2 \cdot 3^2 + r_1 \cdot 3^1 + r_0 \cdot 3^0$ e já que $k_{n-1} = 0$, teremos $m = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \cdot 3^k$ com $r_{n-1} \neq 0$.

b) Sejam P_i, P_j e P_s três pontos quaisquer de V e por hipótese $i < j < s$; portanto podemos escrever: $j - i = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot 3^k$ e $s - i = \sum_{p=0}^{t-1} \tilde{\sigma}_p \cdot 3^p$, com

$\sigma_k, \tilde{\sigma}_p \in \{-1,0,1\}$; $\sigma_{n-1} = 1$ e $\tilde{\sigma}_{t-1} = 1$.

Vamos também fazer a hipótese de que para as arestas P_iP_j e P_iP_s, tenhamos o número $\lambda = \min\{k \geq 0 / \sigma_k = 1\} = \min\{p \geq 0 / \tilde{\sigma}_p = 1\}$ onde $0 \leq \lambda < n-1$ e $0 \leq \lambda < t-1$. Podemos então escrever:

$$\begin{cases} j - i = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \sigma_k .3^k + \sum_{k=\lambda+1}^{n-1} \sigma_{k.} 3^k + 1.3^\lambda & (1) \\ s - i = \sum_{p=0}^{\lambda-1} \sigma_p .3^p + \sum_{p=\lambda+1}^{t-1} \sigma_{pk.} 3^p + 1.3^\lambda & (2) \end{cases}$$

De (2) – (1) obtemos $s - j = \sum_{p=0}^{\lambda-1} \tilde{\sigma}_p .3^p + \sum_{p=\lambda+1}^{t-1} \tilde{\sigma}_p .3^p - \left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} \sigma_k .3^k + \sum_{k=\lambda+1}^{n-1} \sigma_k .3^k \right)$

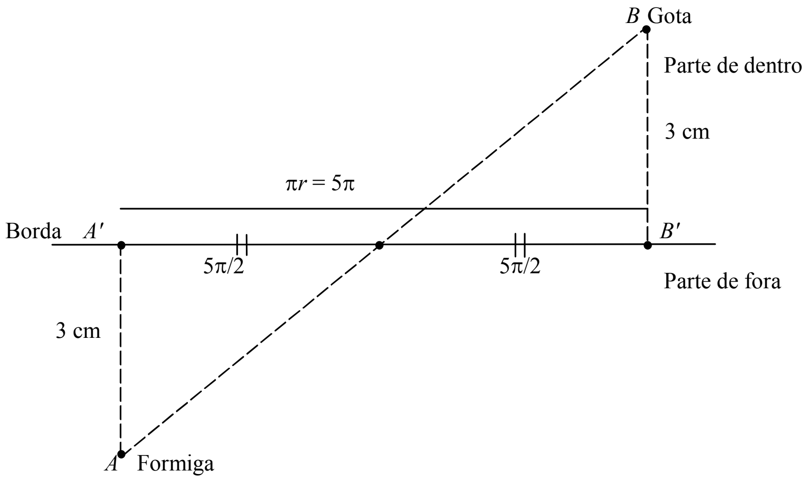
Para $0 \leq k \leq \lambda - 1, \sigma_k$ e $\tilde{\sigma}_k$ pertencem a $\{-1, 0\}$, donde $\tilde{\sigma}_k - \sigma_k \in \{-1,0,1\}$, e os somatórios com $p \geq \lambda + 1$ e $k \geq \lambda + 1$ são múltiplos de $3^{\lambda+1}$, e portanto, ao escrever $s - j = \sum_{\gamma \geq 0} \sigma'_\gamma 3^\gamma$, com $\sigma'_\gamma \in \{-1,0,1\}$, não aparece o termo $1 \cdot 3^\lambda$, o que garante que o número associado à aresta $P_j\ P_s$, que é $\min\{\gamma \geq 0 / \sigma'_\gamma = 1\}$ em $(s - j)$ não será igual a λ.

Conclusão: não existe triângulo cujos vértices pertençam a V com o mesmo número escrito em seus três lados.

33) Na parede interna de um vaso cilíndrico de cristal existe uma gota de mel num ponto B situado a três centímetros do seu bordo superior. Na parede externa, num ponto A diametralmente oposto ao da gota, está uma formiga. Sabendo que a altura do vaso é de 20cm e o seu diâmetro é 10cm. Indicar o caminho mais curto para que a formiga atinja a gota de mel.

Solução de Daniel Pessôa Martins Cunha (Fortaleza - CE):

Cobrindo o vaso com papel por dentro e por fora, e marcando nele a localização da formiga, da gota de mel e da borda, poderemos ver que ao desamassar o papel ficarão as seguintes impressões, com as seguintes medidas:



Como a menor distância entre 2 pontos é a medida do segmento que os une, o menor caminho é o segmento $\overline{AB}$ de medida : $\sqrt{36+25\pi^2}$ (Teorema de Pitágoras).

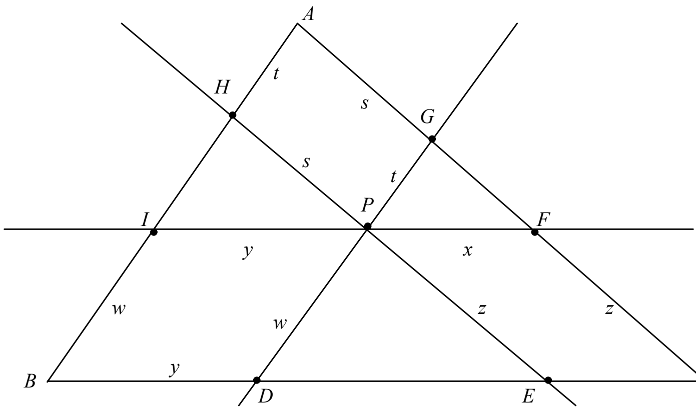
Ao colocar o papel de volta ao vaso veremos o menor caminho a ser percorrido pela formiga. Que é subir em diagonal até o ponto médio do arco $\overset{\frown}{A'B'}$, determinado pelo diâmetro na borda. Depois descer em diagonal até a gota de mel.

34) ABC é um triângulo, tal que $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.
Por um ponto interior P deste triângulo, são traçadas paralelas aos seus lados.
Sabe-se que as intersecções, da paralela ao lado de medida a, com os lados deste triângulo, determinam um segmento de medida a'.
Analogamente, as paralelas aos lados de medidas b e c, determinam com os lados do triângulo, segmentos de medidas b' e c' respectivamente.

Nestas condições demonstre que $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2.$

Solução de Francisco Antonio Martins de Paiva (Fortaleza - CE):

De acordo com o problema temos:



Como as retas traçadas são paralelas aos lados então os quadriláteros $PFCE$, $PIBD$, $PHAG$ são paralelogramos, e com isso concluímos que seus lados opostos são congruentes. Daí temos:
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $IF = x + y = a'$, $GD = t + w = c'$, $HE = s + z = b'$

Os triângulos ABC e AIF são semelhantes pois $\overline{IF} // \overline{BC}$, de onde temos:

$$\frac{x+y}{a} = \frac{c-w}{c} \quad \text{e} \quad \frac{x+y}{a} = \frac{b-z}{b}$$

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{w}{c} \qquad \frac{a'}{a} = 1 - \frac{z}{b}$$

Os triângulos ACB e GCD são semelhantes pois $\overline{AB} // \overline{GD}$, de donde temos:

$$\frac{t+w}{c} = \frac{b-s}{b} \quad \text{e} \quad \frac{t+w}{c} = \frac{a-y}{a}$$

$$\frac{c'}{c} = 1 - \frac{s}{b} \qquad \frac{c'}{c} = 1 - \frac{y}{a}$$

Os triângulos ACB e HEB são semelhantes pois $\overline{AC} // \overline{HE}$, de onde temos:

$$\frac{s+z}{b} = \frac{a-x}{a} \quad \text{e} \quad \frac{s+z}{b} = \frac{c-t}{c}$$

$$\frac{b'}{b} = 1 - \frac{x}{a} \qquad \frac{b'}{b} = 1 - \frac{t}{c}$$

Daí temos que:

$$2\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = 6 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a} - \frac{z}{b} - \frac{s}{b} - \frac{t}{c} - \frac{w}{c}$$

$$2\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = 6 - \frac{x+y}{a} - \frac{z+s}{b} - \frac{t+w}{c}$$

$$2\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = 6 - \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}$$

$$3\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = 6$$

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2.$$

35) Sabendo que num triângulo ABC a altura relativa ao vértice A mede 12cm. e a altura relativa ao vértice B mede 20cm, determine todos os valores possíveis para a altura relativa ao vértice C.

Solução de Frank Castro (São Paulo - SP):

Temos: $h_a = 12$, $h_b = 20$.
Sendo a, b e c os lados do triângulo e S sua área, valem as seguintes relações:
$c > |b - a|$ (I)
$a = \dfrac{2 \cdot S}{h_a}$, $b = \dfrac{2 \cdot S}{h_b}$ e $c = \dfrac{2 \cdot S}{h_c}$ Substituindo as três últimas igualdades em (I)

Vem que:
$\dfrac{1}{h_c} > \left|\dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_a}\right| = \left|\dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{12}\right| = \dfrac{1}{30}$, assim $h_c = 30$. Agora, sabemos que: $a + b > c$
$a = \dfrac{2 \cdot S}{h_a}$, $b = \dfrac{2 \cdot S}{h_b}$ e $c = \dfrac{2 \cdot S}{h_c}$. Substituindo temos:
$\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} > \dfrac{1}{h_c} \Rightarrow \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} > \dfrac{1}{h_c} \Rightarrow h_c > 7,5$
Resposta: 7,5cm < h_c < 30 cm.

Agradecemos também o envio das soluções a: Ricardo Klein Hoffmann (Porto Alegre - RS), Geraldo Perlino Júnior (São Paulo - SP), José Heleno Faro (Cachoeiro de Itapemirim - ES).

Você sabia…

Que há novos records de primos grandes descobertos em 2000?

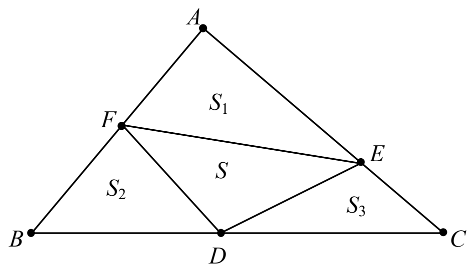
Maior par de primos gêmeos conhecido: $2409110779845 \cdot 2^{60000} \pm 1$. Esses primos têm 18075 dígitos, e foram descobertos por Wassing, Járai e Indlekofer.

Maior primo de Fermat generalizado conhecido: $167176^{32768} + 1$, que tem 171153 dígitos e foi descoberto por Yves Gallot (este é o oitavo maior primo conhecido atualmente, e maior primo conhecido que não é de Mersenne).

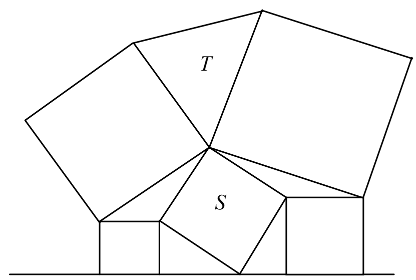
PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

36) Na figura abaixo o triângulo *DEF* tem área de medida *S*. Sabendo-se que o triângulo *DEF* está inscrito num triângulo arbitrário *ABC*, mostre que as medidas S_i ($i = 1, 2, 3$) das áreas dos outros triângulos formados satisfazem a desigualdade $S \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}}$ e que a igualdade ocorre se e só se os pontos *DEF* são os pontos médios dos lados do triângulo, *ABC*.



37) Cinco quadrados são dispostos conforme ilustra o diagrama abaixo. Mostre que a medida da área do quadrado *S* é igual a medida da área do triângulo *T*.



38) Os lados e diagonais de um polígono regular de *n* lados são coloridos em *k* cores tais que:

i) para cada cor *a* e dois vértices *A* e *B* do polígono, o segmento *AB* é colorido de *a* ou existe um vértice *C* tal que *AC* e *BC* são coloridos de *a*.

ii) os lados de qualquer triângulo com vértices entre os vértices do polígono são coloridos usando no máximo 2 cores.
Prove que $k \le 2$.

39) Sejam x, y e z os ângulos de um triângulo de lados opostos a, b e c respectivamente. Prove que, $a\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$.

40) a) Calcular a soma dos divisores positivos de um número natural em termos de sua fatoração prima.
b) Dizemos que $n \ge 1$ é abundante se a soma de seus divisores é maior que $2n$. Prove que se n é abundante então kn é abundante para todo inteiro $k \ge 1$.
c) Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo inteiro $n \ge n_0$ pode ser escrito como soma de dois números abundantes.

Problemas 36 e 37 propostos por Carlos Alexandre Gomes da Silva (Natal - RN), problema 38 proposto na Olimpíada Búlgara - 1998, problema 39 proposto por Aldo Trajano Louredo, problema 40 proposto por Gleydson Chaves Ricarte (Fortaleza - CE) e Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro - RJ).

Errata:

Eureka!N^o. 6, pág 40: O enunciado do problema 4 deve dizer:
Problema 4: Mostre que há infinitos naturais n tais que n^2+1 divide $n!$, onde $n! = n \cdot (n-1)..2\cdot 1$ (por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Eureka! N^o. 6, pág 27: o segundo parágrafo está truncado. A versão correta é:
Determinar exatamente os valores de números de Ramsey clássicos $R(a, b)$ é, em geral, um problema computacionalmente muito difícil.
Os únicos valores de $R(a, b)$ com $3 \le a \le b$ que são conhecidos são: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$, e $R(4, 5) = 25$.
O único número Ramsey com mais de duas cores cujo valor é conhecido é $R(3, 3, 3) = 17$.

AGENDA OLÍMPICA

XI OLIMPÍADA DO CONE SUL
14 a 19 de abril de 2000
Montevideu – Uruguai

♦

VI OLIMPÍADA DE MAIO
13 de maio de 2000

♦

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Sábado, 10 de junho
Segunda Fase – Sábado, 02 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 21 de outubro (níveis 1,2 e 3)
Domingo, 22 de outubro (nível 3 - segundo dia).

♦

XLI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
13 a 25 de julho
Taejon, Coreia do Sul.

♦

XV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
16 a 24 de setembro de 1998
Caracas, Venezuela

♦

III OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
outubro de 2000

COORDENADORES REGIONAIS

Amarisio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa - MG*
Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora - MG*
Angela Camargo	*(Centro de Educ.de Adultos - CEA)*	*Blumenau - SC*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRN)*	*Natal - RN*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí - SP*
Claus Haetinger	*(UNIVATES)*	*Lajeado - RS*
Crescêncio das Neves	*(UFAM)*	*Manaus-AM*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo - SP*
Enzo Marcom Takara	*(Col. Singular)*	*Santo André - SP*
Flávia Jerônimo Barbosa	*(UFPB Campus I)*	*João Pessoa - PB*
Florêncio F. Guimarães Filho	*(UFES)*	*Vitória - ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Gisele de A. Prateado Gusmão	*(UFGO)*	*Goiânia - GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande - MS*
João Benício de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina - PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém - PA*
Jorge Ferreira	*(UEM)*	*Maringá - PR*
José Carlos Pinto Leivas	*(UFRG)*	*Rio Grande - RS*
José Cloves Saraiva	*(UFMA)*	*São Luis - MA*
José Gaspar Ruas Filho	*(ICMC-USP)*	*São Carlos - SP*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
José Paulo Carneiro	*(Univ. Santa Úrsula)*	*Rio de Janeiro - RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande - PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Sistema Titular de Ensino)*	*Belém - PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*Salvador - BA*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza - CE*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Piracicaba - SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*SJ dos Campos - SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*SJ dos Campos - SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu - RJ*
Roberto Vizeu Barros	*(Colégio ACAE)*	*Volta Redonda - RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre - RS*
Seme Gebara Neto	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Silvio de Barros Melo	*(UFPE)*	*Recife - PE*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro - BA*
Tomás Menéndez Rodrigues	*(U. Federal de Rondonia)*	*Porto Velho - RO*
Valdenberg Araújo da Silva	*(U. Federal de Sergipe)*	*São Cristovão - SE*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí - GO*
Waldemar M. Canalli	*(P.M. S. João de Meriti)*	*S. João de Meriti - RJ*