МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Суми
Вид-во Сум ДУ
2007

Механічні коливання і хвилі: Конспект лекцій/ Укладач В.М.Ігнатенко.- Суми: Вид-во Сум ДУ, 2007.- 89 с.

Кафедра загальної та експериментальної фізики

ЗМІСТ

1 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливаннями називаються рухи або стани, які мають ту чи іншу степінь повторюваності у часі.

Коливання властиві усім явищам природи: пульсує випромінювання зірок, всередині яких відбуваються ядерні реакції, з високою ступінню періодичності обертаються планети Сонячної системи навколо Сонця (будь-який обертальний рух можна подати, як доданок одночасних коливань у взаємно перпендикулярних напрямках) та ін. Коливання оточують нас повсюди. Вібрація повітря доносить до нас звуки, осцилюючe електромагнітне поле – світло. Рух Місяця викликає припливи та відпливи, в земній атмосфері циркулюють потоки заряджених і нейтральних частинок. Коливання повітря викликають коливання і хвилі на поверхнях водоймищ. Всередині будь-якого живого організму від клітини до високоорганізованих істот повсякчас відбуваються різноманітні процеси, які ритмічно повторюються (биття серця, коливання психічних станів, біоритми і т. ін.). Саме у вигляді складної сукупності коливань частинок і полів (електронів, фотонів, протонів та ін.) можна уявити „будову” мікросвіту.

У техніці коливання виконують або певні функції (колесо, маятник, коливальний контур, генератор коливань та інші конструкції або прилади), або виникають як неминучі прояви фізичних властивостей (вібрації машин та споруд, нестійкість та вихрові потоки під час руху тіл в газах і т. ін.).

Коливання будь-яких фізичних величин завжди супроводжуються періодичними перетвореннями енергії одного виду в інший (див. п. 1.3)

У цьому розділі ми встановимо основні принципи, які керують коливальними процесами та застосуємо ці принципи для пояснення багатьох явищ, які ми спостерігаємо чи сприймаємо повсякчас.

Наведемо деякі поняття та визначення даного розділу.

Коливальними називаються процеси, які так чи інакше повторюються з часом.

Залежно від фізичної природи коливального процесу і механізму його збудження розрізняють: **механічні коливання** (коливання маятників, струн, частин машин і механізмів, мостів, звукові коливання і т.ін.); **електромагнітні коливання** (коливання змінного струму в електричній мережі, коливання векторів магнітного та електричного змінних електромагнітних полів і т.ін.); **електромеханічні коливання** (коливання мембрани телефону і т.ін.) (рис 1.1).

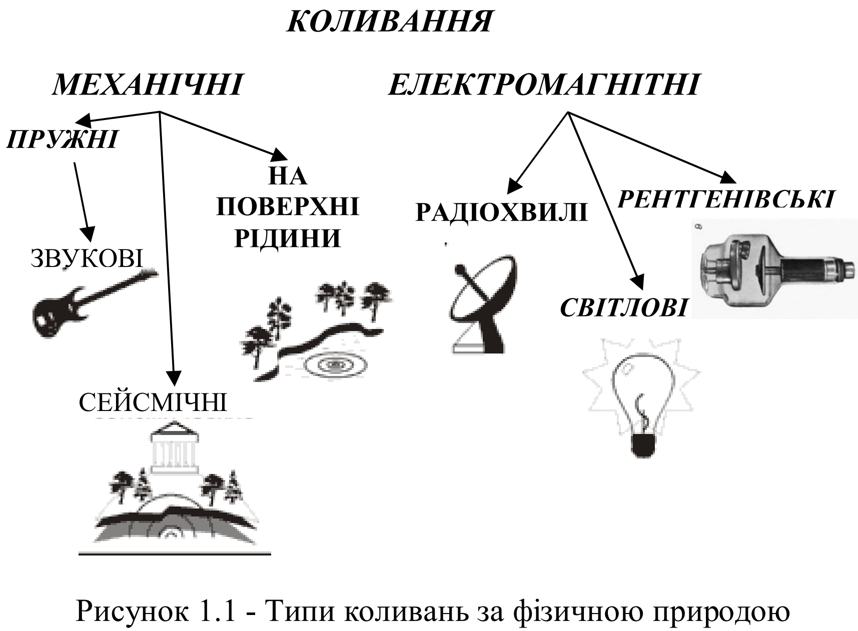

Рисунок 1.1 - Типи коливань за фізичною природою

Система, яка виконує коливання, називається **коливальною системою**.

Вільними (власними) коливаннями системи називають коливання, які відбуваються у відсутності змінних зовнішніх дій на коливальну систему і виникають внаслідок якогось початкового відхилення цієї системи від стану її стійкої рівноваги. Оскільки в реальних системах завжди діють сили тертя, то вільні коливання, як правило, є **згасаючими.**

Змушені коливання – це коливання, які виникають в будь-якій системі під впливом змінної зовнішньої дії.

Коливання називають **періодичними**, коли значення усіх фізичних величин, які характеризують коливальну систему, змінюються за періодичним законом.

Функція $f(t)$ називається **періодичною** з періодом T, якщо $f(t+T)=f(t)$ при будь-якому значенні T.

1.1 ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

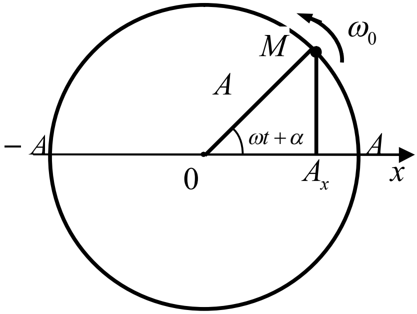

Рисунок 1.2 - До пояснення гармонічних коливань

Найважливішим серед коливальних рухів є простий або гармонічний рух. Характер такого руху можна встановити за допомогою наступної кінематичної моделі. Припустимо, що геометрична точка М рівномірно обертається по колу, радіус якого дорівнює А. Кутова швидкість цього обертання дорівнює ω_0 (рис. 1.2). Тоді проекція відрізка $AM = A_x$ на діаметр (вісь x) буде виконувати коливальний рух від крайнього положення А до іншого крайнього положення –А і навпаки. Таке коливання точки називають простим або гармонічним коливанням. З рис 1.2 бачимо, що

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t+\alpha)\,. \qquad (1.1)$$

Таким чином, коливання, під час яких коливна величина змінюється з часом за законом синуса або косинуса, називаються **гармонічними.**

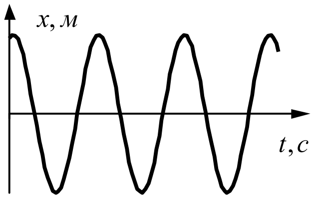

Рисунок 1.3 - Гармонічні коливання.

Співвідношення (1.1) називається **рівнянням гармонічних коливань.** Воно дозволяє визначити координату коливної точки відносно положення рівноваги $(x = 0)$. $x(t)$ – відхилення точки від положення рівноваги, називається **зміщенням.** Величина A – **амплітуда** коливань, або величина максимального зміщення: $A = x_{\max}$. α початкова фаза коливань. Одиницею вимірювання зміщення і амплітуди є 1м: $[x] = [A] = 1м$.

Час, протягом якого здійснюється одне повне коливання, називається **періодом коливань** (T)

$$T = \frac{t}{N}, \tag{1.2}$$

де N – число повних коливань, що здійснює система за час t. Одиницею вимірювання періоду є 1с: [T]=1с.

Частотою коливань (ν) називається фізична величина, що показує, яке число повних коливань виконує коливна система за одиницю часу

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}. \tag{1.3}$$

Одиницею вимірювання частоти є 1Гц. $[\nu] = \frac{1}{c} = c^{-1} = 1Гц$. 1 Герц – це частота такого коливання, період якого дорівнює $1c$. **Циклічною або коловою частотою** (ω) коливань називається число повних коливань, які здійснюються за 2π секунд.

$$\omega = 2\pi\nu \,. \tag{1.4}$$

Величина, що стоїть під знаком косинуса в рівнянні (1.1) $(\omega_0 t + \alpha)$, називається **фазою коливань**

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \,, \tag{1.5}$$

де α - початкова фаза коливань.

Фаза коливань визначає зміщення в будь-який момент часу. Початкова фаза α визначає зміщення тіла в момент початку відліку часу $(t = 0)$. **Фаза коливань -** це кутова міра часу, який минув від початку коливань. Одиницею вимірювання фази коливань є радіан:[φ]=1 радіан.

Вільними називаються коливання, які здійснюються без зовнішньої дії за рахунок раніше накопиченої енергії. Коли в замкнутій системі не діють сили тертя $(F_{тр} = 0)$, то коливання в ній будуть гармонічними. Частота коливань системи, яка виконує вільні коливання, називається **власною частотою.**

Проаналізуємо рівняння гармонічних коливань (1.1). **Швидкість коливної точки** знайдемо як першу похідну за часом від $x(t)$

$$\mathrm{v} = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \alpha) \,. \tag{1.6}$$

Прискорення коливної точки дорівнює другій похідній за часом від $x(t)$

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha) \,, \tag{1.7}$$

або, з урахуванням (1.1)

$$a = -\omega_0^2 x\,. \tag{1.8}$$

Сила, яка діє на коливну точку під час гармонічного коливання, дорівнює

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x\,. \tag{1.9}$$

Ця сила пропорційна зміщенню x і має протилежний напрямок. Вона завжди спрямована до положення рівноваги. Подібні сили завжди виникають при малих зміщеннях матеріальної точки від положення рівноваги.

1.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

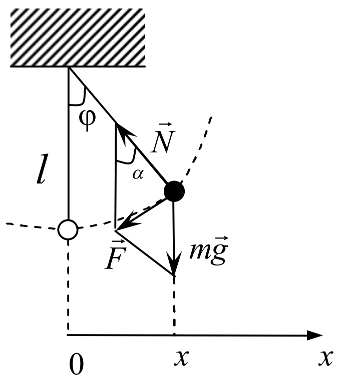

Рисунок 1.4 - Математичний маятник

Розглянемо гармонічні коливання математичного маятника. **Математичним маятником** називається матеріальна точка, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці, довжиною l. При відхиленні вантажу на кут α виникає сила, що повертає його в положення рівноваги. З рисунка (1.4) бачимо, що

$$F = -mg\sin\alpha\,.$$

Згідно з II законом Ньютона:

$$F = ma = m\ddot{x}\,,$$

тоді

$$m\ddot{x} + mg\sin\alpha = 0 .$$

З рисунка (1.4)

$$\sin\alpha = \frac{x}{l} \Rightarrow m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = 0$$

або

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 .$$

Ввівши позначення $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, одержимо вираз

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 , \qquad (1.10)$$

ω_0 - циклічна частота власних коливань маятника.

Вираз такого виду називається **диференціальним рівнянням гармонічних коливань.** Розв’язком диференціального рівняння гармонічних коливань є функція виду (1.1). Потрібно відзначити, що амплітуду A і початкову фазу α не можна визначити з рівняння (1.10). ці величини визначаються початковими умовами, наприклад, початковими значеннями зміщення x та швидкості $\dot{x}$. Диференціальне рівняння (1.10) є справедливим для будь-яких початкових умов. Воно описує увесь комплекс коливань, які може виконувати певна система. Конкретне коливання вирізняється з цього комплексу завданням сталих A та α.

Тоді **період власних коливань математичного маятника:**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (1.11)$$

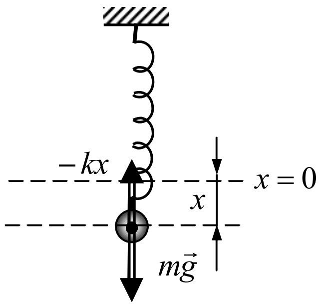

Рисунок 1.5 – Пружинний маятник

Пружинним маятником називається матеріальна точка, підвішена на пружині. Можна довести, що циклічна частота власних коливань вантажу на пружині дорівнює

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,, \qquad (1.12)$$

де k - жорсткість пружини, m - маса вантажу, прикріпленого до пружини.

Тоді **період власних коливань пружинного маятника**

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (1.13)$$

1.3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ ПРИ ВІЛЬНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ

Оскільки ми розглядаємо коливання замкнутої системи у відсутність дії дисипативних сил, то для такої системи завжди виконується закон збереження механічної енергії (див. розділ 4, Лекцій з механіки п. 4.4.2). Таким чином, при вільних гармонічних коливаннях енергія коливної системи **залишається**

сталою. Повна енергія механічних вільних коливань складається з кінетичної W_K і потенціальної $W_П$ енергій, тобто

$$W = W_K + W_П . \qquad (1.14)$$

Запишемо кінетичну W_K і потенціальну $W_П$ енергії для тіла, яке виконує гармонічні коливання на пружині, враховуючи (1.7)

$$W_K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1.15)$$

$$W_П = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (1.16)$$

$$W = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const$$

або

$$W = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = const .$$

Тоді, враховуючи співвідношення (1.12), отримаємо

$$W=\frac{1}{2}kA\sin^2\left(\omega_0 t+\alpha\right)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t+\alpha\right)=$$
$$=\frac{1}{2}kA\left[\sin^2\left(\omega_0 t+\alpha\right)+\cos^2\left(\omega_0 t+\alpha\right)\right].$$

Звідки

$$W=W_K+W_П=\frac{1}{2}kA^2. \qquad (1.17)$$

Співвідношення (1.15 - 1.17) показують, що кінетична і потенціальна енергії коливної точки не залишаються сталими, а виконують гармонічні коливання відносно загального середнього значення $\frac{1}{4}kA^2$ з циклічною частотою 2ω. Коли кінетична енергія дорівнює нулю, потенціальна – досягає максимуму і навпаки. Але повна механічна енергія вільних незатухаючих коливань пропорційна квадрату амплітуди і з часом не змінюється.

1.4 ФІЗИЧНИЙ МАЯТНИК

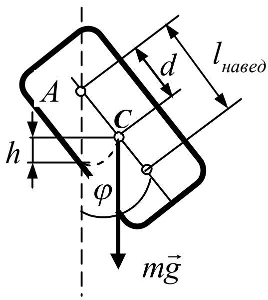

Рисунок 1.6 - Фізичний маятник

Фізичний маятник – це тверде тіло, яке може коливатися під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр тяжіння тіла. Точка A перетину цієї горизонтальної осі з вертикальною площиною, яка проходить через центр мас маятника, називається **точкою підвісу маятника** (рис.1.6).

Положення фізичного маятника в будь – який момент часу можна характеризувати кутом φ відхилення його центру тяжіння від положення рівноваги.

На відхилений маятник діє момент сили тяжіння

$$M = mgd\sin\varphi = -I\varepsilon ,$$

де $d\sin\varphi$ - плече сили, I - момент інерції маятника відносно осі A, $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ - кутове прискорення. Для малих кутів відхилення $\sin\varphi \approx \varphi$, тоді

$$mgd\varphi = -I\ddot{\varphi} ,$$

і ми отримуємо **диференціальне рівняння гармонічних коливань для фізичного маятника**

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0 . \qquad (1.18)$$

Розв’язком цього диференціального рівняння є функція виду

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

З рівняння (1.18) випливає, що **циклічна частота власних коливань фізичного маятника**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} . \qquad (1.19)$$

Тоді **період власних коливань фізичного маятника**

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\ . \qquad (1.20)$$

Порівнюючи формули (1.11) і (1.20) приходимо до висновку, що фізичний маятник коливається так само, як і математичний маятник з довжиною $L = \frac{I}{md}$. Тоді формулу (1.20) можна переписати у такому вигляді

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ , \qquad (1.21)$$

де $L = \frac{I}{md}$ - **зведена довжина маятника**.

Визначимо кінетичну і потенціальну енергії коливного фізичного маятника. **Кінетична енергія** фізичного маятника визначається співвідношенням

$$W_K = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2\ .$$

Потенціальна енергія дорівнює

$$W_П = mgh\ ,$$

де h - висота підняття центра мас C над його найнижчим положенням. Позначимо d відстань між центром мас C і точкою підвісу A. Тоді

$$W_П = mgh = mgd(1 - \cos\varphi) = 2mgd \sin^2\frac{\varphi}{2}\ .$$

У випадку малих коливань синус кута $\frac{\varphi}{2}$ можна наближено замінити самим кутом. У цьому наближенні **потенціальна енергія фізичного маятника** дорівнює

$$W_П = \frac{mgd}{2}\varphi^2 .$$

1.5 ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Додавання гармонічних коливань – це знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система бере участь в кількох коливальних процесах. Розрізняють два граничних випадки: додавання коливань однакового напрямку і додавання взаємно перпендикулярних коливань.

1.5.1 ДОДАВАННЯ ДВОХ ОДНАКОВО СПРЯМОВАНИХ КОЛИВАНЬ

При додаванні гармонічних коливань однакового напрямку широко використовується **метод векторних діаграм**. **Методом векторних діаграм** називається графічне зображення гармонічних коливань за допомогою обертового вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання (рис. 1. 7).

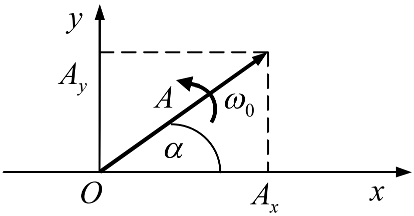

Рисунок 1.7 – Векторна діаграма гармонічного коливання

Візьмемо вісь, яку позначимо буквою x. З точки O на осі відкладемо вектор довжиною A, який утворює з віссю кут α. Якщо обертати цей вектор з кутовою швидкістю ω_0, то координата проекції A_x буде змінюватися за законом

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)\,.$$

Таким чином, проекція кінця вектора A_x на вісь буде виконувати гармонічне коливання з амплітудою, яка дорівнює довжині вектора, з коловою частотою, що дорівнює кутовій швидкості обертання вектора та початковою фазою, яка дорівнює куту, що утворює вектор з віссю в початковий момент часу.

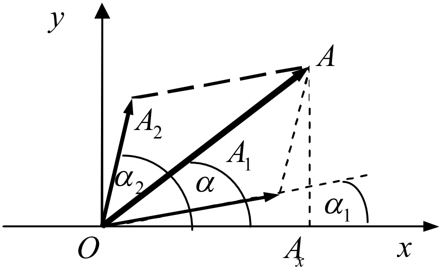

Рисунок 1.8 – Додавання коливань за допомогою векторної діаграми

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2)\,.$$

Зобразимо обидва коливання за допомогою векторів A_1 і A_2 (рис. 1.8). Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор A . Бачимо, що проекції цього вектора на осі x і y дорівнюють сумі проекцій

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2\,,$$

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2\,.$$

З рис.1.8 бачимо, що за теоремою косинусів **амплітуда результуючих коливань дорівнює**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\,. \qquad (1.22)$$

Початкову фазу результуючих коливань можна визначити із співвідношення

$$tg\alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}. \qquad (1.23)$$

Два коливальних процеси називаються **когерентними коливаннями** у випадку, коли вони відбуваються узгоджено, тобто так, що різниця їх фаз з часом не змінюється.

Різниця фаз двох гармонічних коливань x_1 і x_2 дорівнює

$$\Delta\varphi = \left(\omega_2 t + \alpha_2\right) - \left(\omega_1 t + \alpha_1\right) = \left(\omega_2 - \omega_1\right)t + \left(\alpha_2 - \alpha_1\right).$$

Таким чином, два гармонічних коливання – когерентні, коли їх циклічні частоти однакові, тобто

$$\omega_2 = \omega_1 = \omega.$$

У будь-який момент часу різниця фаз когерентних гармонічних коливань дорівнює різниці їх початкових фаз

$$\Delta\varphi = \left(\alpha_2 - \alpha_1\right).$$

Відповідно результуюче коливання буде гармонічним з циклічною частотою ω, тобто

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha\right),$$

де

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}$$

і початкова фаза визначається співвідношенням (1.23).

Залежно від різниці початкових фаз амплітуда A результуючих коливань змінюється в межах від

$$A = \left| A_1 - A_2 \right|,$$

при $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm(2m+1)\pi$ (коливання відбуваються в протилежних фазах), до

$$A = A_1 + A_2,$$

при $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2m\pi$ (коливання відбуваються в одній фазі – синфазні коливання), де $m = 0,1,2,\ldots$ будь-яке ціле додатне число.

1.5.2 БИТТЯ

Гармонічні коливання з різними частотами $\omega_2 \neq \omega_1$ – некогерентні, оскільки їх різниця фаз безперервно змінюється з часом. При накладанні таких коливань результуючі коливання є негармонічними.

Особливий інтерес викликає випадок, коли два гармонічних коливання, які додаються мало відрізняються за частотою. Результуюче коливання за цих умов є гармонічним коливанням з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **биттям** (рис. 1.9). Позначимо частоту одного з коливань $\omega_1 = \omega$, а частоту другого - $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$. Згідно з умовою $\omega >> \Delta\omega$. Нехай амплітуди коливань однакові і дорівнюють A_0

$$x_1 = A_0 \cos \omega t, \quad x_2 = A_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Застосуємо для додавання тригонометричну формулу для суми косинусів та отримаємо **рівняння коливань биття**

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t\,. \qquad (1.24)$$

Величину

$$A(t) = 2A_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}t \qquad (1.25)$$

називають **амплітудою биття**. Вона характеризує розмах коливань при биттях і змінюється в межах від $\left|A_1 - A_2\right|$ до $A_1 + A_2$ з циклічною частотою $\Omega = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, яка називається **циклічною частотою биття**. **Період биття** та **частота биття** дорівнюють

$$T_Б = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\left|\omega_2 - \omega_1\right|} = \frac{T_1 T_2}{\left|T_1 - T\right|_2}\,, \qquad (1.26)$$

$$\nu_Б = \frac{1}{T_Б} = \left|\nu_2 - \nu_1\right|. \qquad (1.27)$$

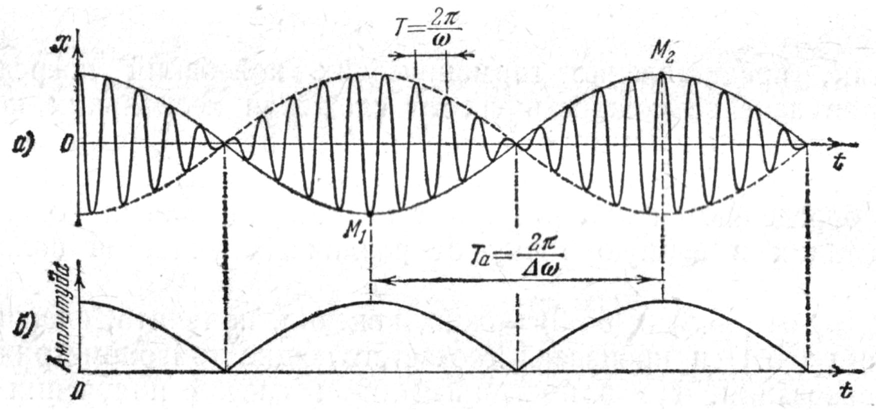

Рисунок 1.9 - Биття

Амплітуда биття змінюється набагато повільніше, ніж другий множник $\cos\omega t$. Це дозволяє розглядати биття як гармонічне коливання з частотою ω, амплітуда якого змінюється за певним періодичним законом.

Вміння додавати коливань дає можливість розкладати будь-яке складне коливання на окремі гармонічні коливання, тобто виконувати **гармонічний аналіз складного періодичного коливання.**

1.5.3 МОДУЛЯЦІЯ КОЛИВАНЬ

Зміна за певним законом будь-якого з параметрів періодичних коливань (наприклад, амплітуди чи частоти) протягом проміжку часу, який є набагато більшим за період коливань, називається **модуляцією коливань**.

Розглянемо амплітудну модуляцію гармонічних коливань

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

Рівняння модульованих коливань мають вигляд

$$x(t) = A_0\left[1 + b(t)\right]\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де $|b(t)| < 1$.

У випадку, коли амплітудна модуляція здійснюється за гармонічним законом

$$b(t) = b_0 \cos\Omega t,$$

де $b_0 = const$ і $\Omega << \omega_0$,

тоді **модульоване за амплітудою коливання** має вигляд

$$x(t) = A_0\left[1 + b_0 \cos\Omega t\right]\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (1.28)$$

Модуляція коливань знаходить широке використання у телебаченні та радіозв'язку.

1.5.4 ДОДАВАННЯ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ КОЛИВАНЬ

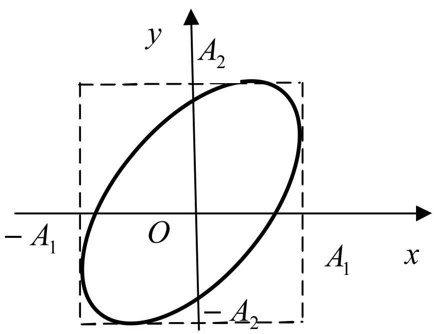

Рисунок 1.10 – Еліптично поляризовані коливання

Припустимо, що матеріальна точка *M* може виконувати коливання як вздовж осі x, так і вздовж перпендикулярної до неї осі y. Якщо збудити обидва коливання, то матеріальна точка буде рухатися за певною криволінійною траєкторією, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань. Виберемо початок відліку так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань

$$x = A\cos\omega t \text{ (*)}, \quad y = B\cos(\omega t + \alpha) \text{ (**)},$$

де α - різниця фаз обох коливань.

З першого рівняння (*)

$$\cos\omega t = \frac{x}{A},$$

тоді

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{1 - (\cos\omega t)^2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}.$$

Розкладемо косинус у другому рівнянні (**)

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha = \frac{y}{B},$$

тоді отримаємо рівняння результуючих коливань

$$\frac{x}{A} \cdot \cos\alpha \mp \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \cdot \sin\alpha = \frac{y}{B}.$$

Запишемо **рівняння результуючих коливань при додаванні взаємно перпендикулярних коливань** у такому вигляді:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB} \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha. \qquad (1.29)$$

Це рівняння еліпса (рис. 1.10), вісі якого повернені відносно координатних осей x і y. Воно описує траєкторію точки *M*, яка виконує рух вздовж еліпса за час, що дорівнює періоду коливань. Такий рух точки називають **еліптично поляризованими коливаннями.**

Визначимо форму траєкторії точки *M* для деяких випадків.

1) Додавання коливань, різниця фаз між якими дорівнює $\alpha = m\pi \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В цьому випадку рівняння траєкторії має вигляд

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

це **рівняння прямої лінії**

$$y = \pm \frac{B}{A} x. \qquad (1.30)$$

Результуючі коливання є гармонічними коливаннями вздовж цієї прямої з амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$. Кажуть, що в такому випадку точка *M* виконує **лінійно поляризовані коливання.**

Знак плюс відповідає парним значенням m, тобто додаванню синфазних коливань (рис.1.11 *а*), а знак мінус – непарним значенням m, тобто додаванню коливань, які відбуваються в протифазі.

2) Додавання коливань, різниця фаз між якими дорівнює $\alpha = (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, тоді рівняння результуючих коливань набуде вигляду

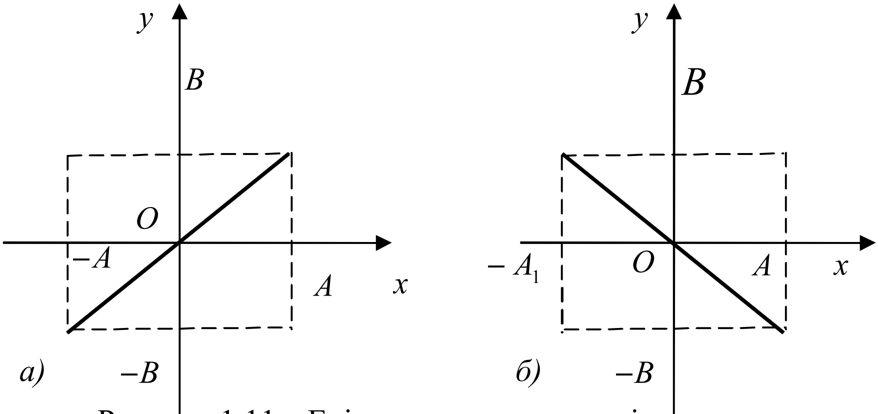

Рисунок 1.11 – Еліптично поляризовані коливання
а) у випадку додавання синфазних коливань;
б) у випадку додавання коливань, які знаходяться в протифазі

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1. \qquad (1.31)$$

це рівняння еліпса, наведеного до координатних осей. У випадку, коли амплітуди однакові $A = B$, еліпс перетворюється в коло. Такі результуючі коливання точки M мають **колову поляризацію.** Відповідно до вищезазначеного рух по колу можна подати як додавання двох взаємно перпендикулярних коливань.

2 ВПЛИВ ЗОВНІШНІХ СИЛ НА КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ

2.1 ЗГАСАЮЧІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Вільні коливання реальних систем завжди згасають. Енергія коливань поступово витрачається на роботу проти сил тертя $\left(F_{тер} \neq 0\right)$ і амплітуда коливань поступово зменшується (рис.2.1).

Закон згасання коливань в основному залежить від властивостей коливальної системи.

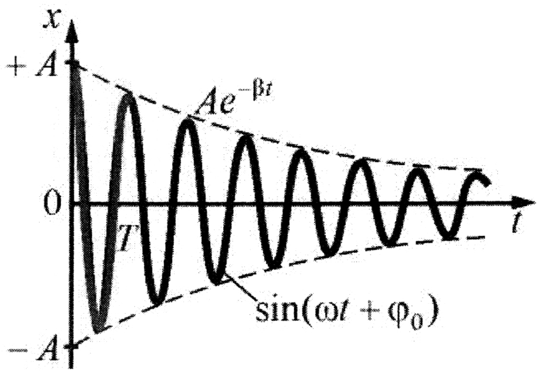

Рисунок 2.1 – Згасаючі коливання

Система називається **лінійною**, якщо параметри, що характеризують істотні в даному процесі фізичні властивості системи, не змінюються під час цього процесу.

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Наприклад, пружинний маятник, що рухається у в'язкому середовищі, є лінійною системою, якщо коефіцієнт опору середовища коефіцієнт пружності пружини не залежать від швидкості і зміщення маятника.

Знайдемо диференціальне рівняння, що описує вільні згасаючі коливання лінійної системи. Для цього розглянемо механічну лінійну систему, коливання якої супроводжуються дисипацією (розсіюванням) енергії. Як приклад, візьмемо вільні згасаючі коливання пружинного маятника масою m, який рухається у в'язкому середовищі вздовж осі OX. На маятник діють дві сили: сила пружності пружини $\vec{F}_{пр}$ та сила опору середовища $\vec{F}_{тер}$.

Як показують дослідження в першому наближенні можна вважати, що за невеликих швидкостей сили тертя, які викликають затухання коливань, пропорційні величині швидкості маятника). Тоді

$$\vec{F}_{тер} = -r\vec{v}, \qquad (2.1)$$

де r - **коефіцієнт опору;** $\vec{v}$ - швидкість руху.

Запишемо другий закон Ньютона для затухаючих коливань вздовж осі x

$$ma = -F_{пр} - F_{тер}.$$

Враховуючи, що сила пружності дорівнює $F_{пр} = kx$, отримаємо

$$ma = -kx - rv.$$

Тоді, оскільки $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ і $v = \frac{dx}{dt}$ другий закон Ньютона для згасаючих коливань набуде вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

звідки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введемо позначення **коефіцієнта згасання**

$$\beta = \frac{r}{2m} \qquad (2.2)$$

та врахуємо, що циклічна частота власних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Тоді **диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань лінійних систем** набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,. \qquad (2.3)$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Розв’язок цього рівняння (при $\beta \le \omega_0$) має вигляд

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,. \qquad (2.4)$$

A_0 та φ_0 визначаються з початкових та граничних умов задачі. β та ω - з самого рівняння. Знайдемо ω. Візьмемо першу та другу похідну від виразу (2.4)

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) +$$
$$+\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

Підставимо отримані значення в диференціальне рівняння (2.3) і скоротимо на $A_0 e^{-\beta t}$

$$\beta^2\cos(\omega t+\varphi_0)+2\beta\omega\sin(\omega t+\varphi_0)-\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)-$$
$$-2\beta^2\cos(\omega t+\varphi_0)-2\beta\omega\sin(\omega t+\varphi_0)+\omega_0^2\cos(\omega t+\varphi_0)=0\,.$$

Скоротимо на $\cos(\omega t+\varphi_0)$ та знайдемо **циклічну частоту згасаючих коливань** ω

$$-\beta^2-\omega^2+\omega_0^2=0\Rightarrow\omega^2=\omega_0^2-\beta^2$$
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,. \qquad (2.5)$$

Таким чином, для коливань під дією пружної сили ми маємо такі співвідношення:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \beta=\frac{r}{2m},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{r}{2m}\right)^2}\,.$$

Згасаючі коливання є неперіодичними коливаннями, оскільки максимальне значення амплітуди у них не повторюється. **Період згасаючих коливань**

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\,. \qquad (2.6)$$

Знайдемо відношення значень амплітуди згасаючих коливань в моменти часу t і $t+T$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}=\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t}e^{-\beta T}}=e^{\beta T}\,.$$

Натуральний логарифм відношення амплітуд, що відрізняються на період, називається **логарифмічним декрементом згасання**

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T , \qquad (2.7)$$

$$\theta = \beta T . \qquad (2.8)$$

З'ясуємо фізичний зміст θ і β. Позначимо τ - час, протягом якого амплітуда зменшується в e разів.

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \text{ звідки } \beta\tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}. \qquad (2.9)$$

Таким чином, **коефіцієнт згасання** β - це фізична величина, обернена до часу, протягом якого амплітуда зменшується у e разів; τ - **час релаксації**.

Нехай N - число коливань, після яких амплітуда зменшується в e разів. Тоді

$$\tau = NT; \quad T = \frac{\tau}{N}; \quad \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\theta = \beta T = \frac{1}{N}. \qquad (2.10)$$

Таким чином, **логарифмічний декремент згасання** θ - це фізична величина, обернена числу коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів.

Якщо коефіцієнт згасання великий, то не тільки амплітуда швидко зменшується, але й помітно збільшується період коливань. Коли опір стає таким, що дорівнює критичному $r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$, то циклічна частота обертається в нуль $(\omega = 0)$, $(T \to \infty)$ і коливання припиняються. Такий процес називається **аперіодичним**. Відмінності полягають в наступному. При коливаннях тіло, що повертається в положення рівноваги, має запас кінетичної енергії. У випадку **аперіодичного руху** енергія тіла при поверненні в положення рівноваги виявляється витраченою на подолання сил опору тертя.

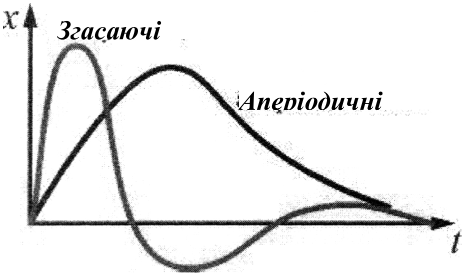

Рисунок 2.2 – Згасаючі коливання та аперіодичний рух

2.2 ЗМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

У реальних механічних системах усі вільні коливання є згасаючими, тому для підтримки коливань необхідно систему періодично "підживлювати" енергією ззовні.

Розглянемо систему, на яку крім, пружної сили $(-kx)$ та сил опору $(-r\mathrm{v})$, діє додаткова зовнішня періодична сила $F = F_0 \cos \omega t$. Коливання, які здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили, називаються **змушеними коливаннями.** Запишемо другий закон Ньютона для змушених коливань

$$ma = -kx - r\mathrm{v} + F,$$

тоді **диференціальне рівняння змушених коливань** набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \qquad (2.11)$$

де $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$.

Диференціальне рівняння змушених коливань є неоднорідним. Загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Цей розв'язок має вигляд

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta\omega^2}} \cos\left(\omega t - arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Отримана функція описує змушені коливання, які встановилися. Вони являють собою гармонічне коливання з частотою, яка дорівнює частоті зовнішньої сили, що викликала коливання. Амплітуда змушених коливань пропорційна амплітуді цієї сили.

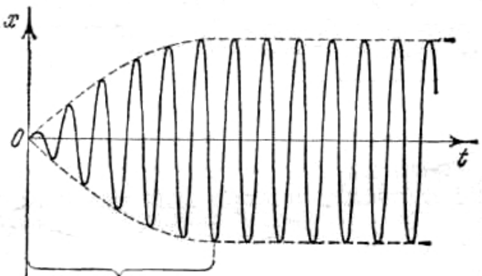

Рисунок 2.3 – Змушені коливання

Для даної коливальної системи **амплітуда змушених коливань** залежить від частоти зовнішньої періодичної сили

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta\omega^2}}. \qquad (2.12)$$

Проаналізуємо цей вираз

1) $\omega = 0$ (частота зовнішньої сили дорівнює нулю), тоді $A = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ - статична амплітуда, коливання не виконуються.

2) $\beta = 0$ (затухання відсутнє). Із збільшенням ω $(\omega < \omega_0)$, амплітуда збільшується і при $\omega = \omega_0$, амплітуда різко збільшується $(A \to \infty)$. Це явище резонансу. При подальшому збільшенні частоти ω $(\omega > \omega_0)$ амплітуда знову зменшується (див. рис.)

3) $\beta \neq 0$. Амплітуда буде максимальною при мінімальному значенні знаменника. Для знаходження точки перегину візьмемо першу похідну по ω від підкореневого виразу та прирівняємо її до нуля, тоді отримаємо для **резонансної частоти** $\omega_{рез}$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \tag{2.13}$$

Явище різкого зростання амплітуди, коли частота змушених коливань наближається до частоти власних коливань системи, називається **резонансом.**

Для консервативної системи, тобто коли $\beta = 0$, $\omega_{рез} = \omega_0$; для дисипативної $\omega_{рез} < \omega_0$.

Із збільшенням коефіцієнта згасання β явище резонансу проявляється все слабкіше і зникає при $\beta > \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Явище резонансу слід враховувати під час конструювання різних машин і споруд (наприклад, літаків, мостів). Їхня частота вільних коливань має значно відрізнятися від частоти змушуючих сил. Явище резонансу в деяких випадках відіграє позитивну роль, особливо

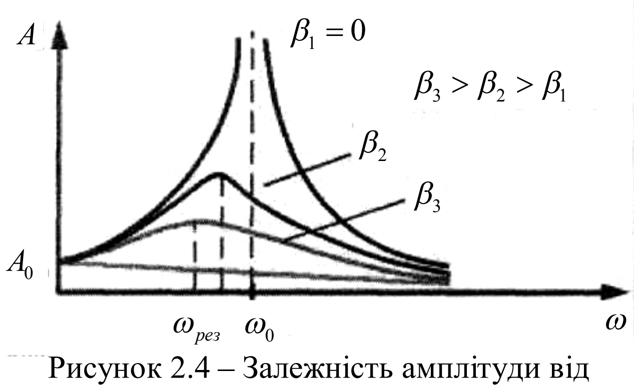

Рисунок 2.4 – Залежність амплітуди від частоти при змушених коливаннях

в акустиці і радіотехніці.

2.3 АВТОКОЛИВАННЯ

Спостерігаючи під час вітру коливання листя на деревах, полотнищ прапорів і т. ін. ми розуміємо, що у всіх перелічених випадках незгасаючі коливання відбуваються за рахунок енергії вітру, який постійно дме. Сама коливальна система бере енергію вітру в потрібний момент часу в кількості, достатній для компенсації витраченої енергії.

Коливання в цих системах починаються самочинно за рахунок початкових флуктуацій (тремтінь) коливних предметів. Частота й амплітуда сталих коливань визначається як параметрами самої системи, так і параметрами її взаємодії з вітром. Такі коливання є прикладами **автоколивань**, а самі системи - прикладами автоколивальних систем.

Класичним прикладом автоколивальної системи є механічний годинник з маятником і гирями. Цей годинник

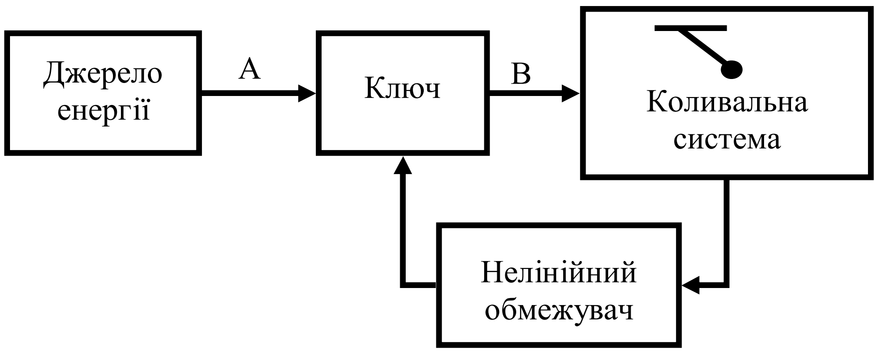

Рисунок 2.5 – Схема автоколивальної системи

періодично «черпає» енергію при опусканні гир, підвішених до ланцюжка, перекинутого через шестірню годинникового механізму.

Принцип роботи всіх автоколивальних систем можна зрозуміти, звернувшись до схеми, зображеної на рисунку 2.5.

Періодичним надходженням енергії в коливальну систему від джерела енергії по каналу АВ керує сама коливальна система за допомогою зворотного зв'язку. Схематично це зображено у вигляді деякого замикаючого канал АВ пристрою (ключа), що керується самою системою. Так, потужність сил аеродинамічного тиску буде різною залежно від положення і швидкості коливного листа на вітрі. У конструкції годинникового механізму (рис. 2.6) наявний спеціальний пристрій – анкер (у вигляді коромисла), що виконує роль ключа. Коливання цього анкера спричиняється маятником самого годинника. При певних положеннях він «вмикає» одну із шестірень годинного механізму. У цей момент часу шестірня провертається за рахунок моменту сил, прикладеного з боку натягнутого ланцюжка з вантажем. Вантаж при цьому опускається на невелику висоту. Кількість енергії, що надходить у годинний механізм, дорівнює за величиною зменшенню потенціальної енергії вантажу в полі сили тяжіння.

Важливо відзначити, що будь-яка автоколивальна система є нелінійною. На схемі (рис.2.5) це відбито наявністю в системі зворотного зв'язку нелінійного обмежувача сигналу, що керує ключем. Нелінійність системи виявляється в тому, що при початковому наростанні амплітуди коливань, породжених флуктуаціями, надходження енергії в систему за кожний наступний період коливань збільшується нелінійно, тобто приріст енергії, що надходить, стає все меншим і меншим. Природно, що амплітуда коливань досягне такої сталої величини, при якій приплив енергії та її втрат будуть за модулем однаковими.

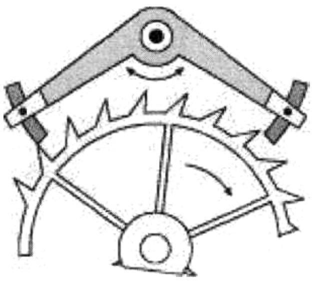

Рисунок 2.6 – Конструкція годинникового механізму

2.4 ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС

Виявляється, що існує своєрідний вид зовнішнього впливу на систему, за допомогою якого можна сильно розгойдати систему. Цей вид впливу полягає в періодичній зміні (в такт з коливаннями системи) якого-небудь параметра системи. Саме з цієї причини явище має назву **параметричного резонансу.**

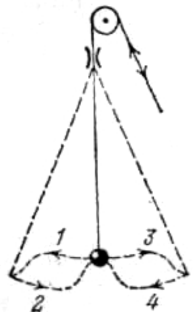

Рисунок 2.7 – Маятник в умовах параметричного резонансу

Візьмемо для прикладу маятник – кульку на нитці (рис. 2.7). Якщо періодично змінювати довжину маятника l, збільшуючи її в моменти, коли маятник знаходиться в крайніх положеннях та зменшуючи в моменти, коли маятник знаходиться в середньому положенні, то маятник сильно розгойдається. Збільшення енергії маятника відбувається за рахунок роботи, яку виконує сила, що діє на нитку. Сила натягу нитки під час коливань маятника не є сталою величиною: вона менша в крайніх положеннях, коли швидкість дорівнює нулю, і найбільша в середньому положенні, коли швидкість маятника є максимальною. Тому від'ємна робота зовнішньої сили під час подовження маятника виявляється меншою за додатну роботу, що виконується під час скорочення маятника. В результаті робота зовнішньої сили за період більша за нуль.

3 МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

3.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ РОЗДІЛУ

У попередніх розділах ми розглядали механічні коливання і не цікавилися тими процесами, які відбуваються у середовищі, що оточує коливальну систему.

Насправді внаслідок передачі енергії коливальною системою середовищу воно не тільки нагрівається (внаслідок опору), але й виконує змушені коливання. Розповсюдження коливань у просторі називають **хвилею.**

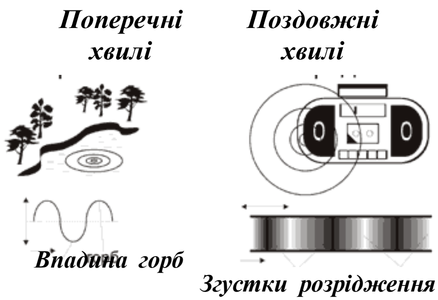

Рисунок 3.1 – Поперечні та поздовжні хвилі

Під час вивчення закономірностей поширення механічних коливань в газах, рідинах та твердих тілах ми будемо розглядати ці тіла як **суцільне середовище**, яке безперервно розподілене у просторі. Відповідно **частинкою середовища**, яка виконує змушені коливання, називають малий елемент об'єму, розмір якого в багато разів більший за міжмолекулярні відстані, так що в ньому міститься величезна кількість молекул.

Тіло називається **пружним,** а його деформації, які викликаються зовнішніми впливами, називаються пружними, якщо вони повністю зникають після припинення цих впливів.

Таким чином, коливне тіло в пружному середовищі є джерелом коливань, які поширюються від нього у всі боки. Під час поширення хвилі частинки середовища не рухаються разом із хвилею, а виконують коливання в околі своїх положень рівноваги. Разом з хвилею від частинки до частинки передається тільки стан коливального руху і його енергія. Таким чином, **основною властивістю усіх хвиль**, незалежно від їхньої природи, є перенесення енергії без перенесення речовини.

Пружна хвиля називається **поздовжньою**, коли частинки середовища виконують коливання в напрямку поширення хвилі. Пружна хвиля називається **поперечною**, якщо частинки середовища виконують коливання в площинах, перпендикулярних до напрямку поширення хвиль (див. рис.3 1)

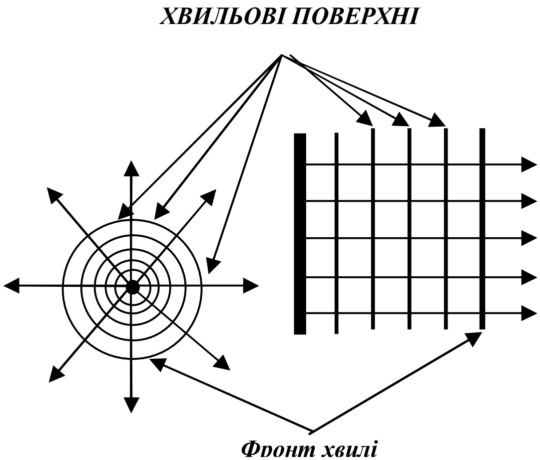

Рисунок 3.2 – Фронт хвилі: сферичний (зліва) та плоский (справа)

Границя, яка відокремлює частинки, що виконують коливання від частинок, які ще не почали коливатися, **називають фронтом хвилі.**

В однорідному середовищі напрямок поширення хвилі перпендикулярний до фронту хвилі.

Відстань між найближчими точками, які коливаються в однаковій фазі, називається **довжиною хвилі**

$$\lambda = \mathrm{v}T , \tag{3.1}$$

де v - швидкість поширення хвилі; $T = \dfrac{1}{\nu}$ - період; ν - частота коливань.

Звідси знайдемо швидкість поширення хвилі

$$\mathrm{v} = \lambda \nu . \tag{3.2}$$

Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називається **хвильовою поверхнею**. Хвильову поверхню можна провести через будь-яку точку простору, в якому відбувається хвильовий процес, тобто хвильових поверхонь можна провести безліч. Хвильові поверхні не рухаються. Хвильовий фронт весь час переміщується.

Хвильові поверхні можуть мати будь-яку форму. У найпростіших випадках хвильові поверхні мають форму площини або сфери, відповідно хвилі називаються **плоскими або сферичними**.

3.2 РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ

Рівнянням хвилі називається вираз, який дає зміщення коливної точки як функцію її координат (x, y, z) і часу t

$$\xi = f(x, y, z, t).$$

Ця функція має бути періодичною як відносно часу, так і відносно координат, оскільки хвиля – це коливання, яке поширюється.

Знайдемо вигляд функції ξ у випадку плоскої хвилі.

Спрямуємо вісі координат так, щоб вісь x збігалася з

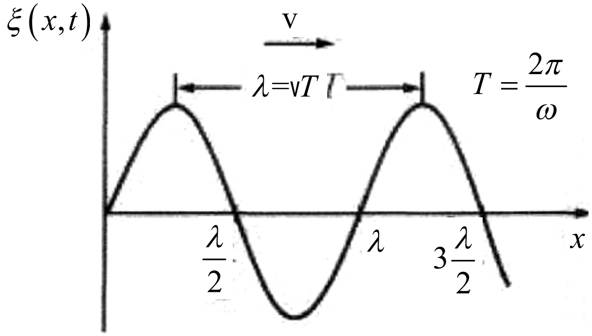

Рисунок 3.3 – Залежність зміщення від координати хвилі

напрямком поширення хвилі. Тоді хвильова поверхня буде перпендикулярною до осі x. Оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, зміщення ξ буде залежати тільки від x і t. $\xi = f(x,t)$. Нехай у площині $x = 0$ при початковій фазі $\varphi = 0$ збуджується гармонічне коливання

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t .$$

Знайдемо рівняння коливань у площині, яка відповідає довільному значенню x. Для проходження шляху x потрібен час $\tau = \frac{x}{v}$. Тоді коливання частинок у площині x будуть відставати за часом на τ від коливання частинок у площині $x = 0$, тобто

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t-\tau) \quad A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{3.3}$$

Ми отримали **рівняння плоскої хвилі**.

Таким чином, ξ - це зміщення будь-якої точки з координатою x в момент часу t. Такий самий вигляд має рівняння плоскої хвилі у випадку поширення вздовж осі y або z. У загальному вигляді **рівняння плоскої хвилі** записують так:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{3.4}$$

Це **рівняння біжучої хвилі**. Воно описує хвилю, яка поширюється вздовж осі x. Для хвилі, яка поширюється у зворотному напрямку, рівняння має вигляд

$$\xi = A\cos\omega\left(t+\frac{x}{v}\right). \qquad (3.5)$$

Рівняння хвилі можна записати у іншому вигляді. Введемо хвильове число

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}, \qquad (3.6)$$

або у векторному вигляді – хвильовий вектор

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}, \qquad (13.7)$$

де $\vec{n}$ - нормаль до хвильової поверхні.
Оскільки $\lambda = vT$, то

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{vT}=\frac{2\pi\nu}{v}=\frac{\omega}{v}.$$

Звідси отримуємо, що швидкість хвилі дорівнює

$$v=\frac{\omega}{k}. \qquad (3.8)$$

Тоді рівняння плоскої хвилі у випадку, коли вона поширюється вздовж осі x, можна записати так:

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx). \qquad (3.9)$$

У загальному випадку рівняння плоскої хвилі має вигляд

$$\xi(\vec{r},t)=A\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right). \qquad (3.10)$$

3.3 РІВНЯННЯ СФЕРИЧНОЇ ХВИЛІ

Хвиля називається **сферичною,** якщо її хвильові поверхні мають вигляд концентричних сфер. Центр цих сфер називають центром хвилі.

Такі хвилі збуджуються в однорідному ізотропному середовищі точковим джерелом світла.

Припустимо, що фаза коливань джерела дорівнює ωt. Тоді точки, які лежать на хвильовій поверхні радіуса r будуть мати фазу $\omega\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)$. Амплітуда коливань навіть у відсутність поглинання зменшується за законом $\frac{1}{r}$. Тоді рівняння сферичної хвилі набуде вигляду

$$\xi=\frac{A}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right), \tag{3.11}$$

або

$$\xi=\frac{A}{r}\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right). \tag{3.12}$$

3.4 ФАЗОВА ШВИДКІСТЬ

Фазова швидкість –це швидкість поширення фази хвилі. Зафіксуємо будь-яке значення фази і простежимо, з якою швидкістю фаза буде переміщуватися вздовж осі x.

$$\omega\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\right)=const. \tag{3.13}$$

$\frac{dx}{dt}$ - це швидкість переміщення фази. Оскільки $\omega=const$, то

$$t-\frac{x}{v}=const\,. \qquad (3.14)$$

Візьмемо похідну за часом від обох частин співвідношення (3.14)

$$1-\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}=0\,,$$

Звідки отримаємо

$$\frac{dx}{dt}=v\,. \qquad (3.15)$$

Бачимо, що v у рівняння хвилі - це фазова швидкість.

3.5 ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ. ГРУПОВА ШВИДКІСТЬ

У випадку, коли властивості середовища не змінюються під дією збурень, створюваних хвилями, то до них можна застосовувати **принцип суперпозиції** (накладання хвиль):

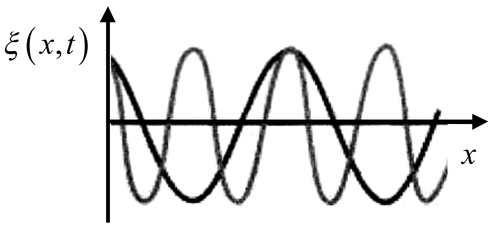

Рисунок 3.4 – Суперпозиція двох хвиль

Під час поширення в такому середовищі декількох хвиль кожна з них поширюється так, немов інші хвилі відсутні, а результуюче зміщення частинки середовища дорівнює геометричній сумі зміщень частинки для кожної хвилі.

Чітко монохроматична хвиля являє собою нескінченну у часі і просторі послідовність „горбів" та „впадин". За допомогою такої хвилі не можна передавати сигнал, оскільки в будь-якій точці „горби” і „впадини” однакові. Сигнал має відрізнятися , буди міткою на хвилі. Але тоді хвиля вже не буде відповідати наведеному рівнянню.

Сигнал (імпульс) можна уявити як суперпозицію гармонічних хвиль з частотами, які знаходяться в певному інтервалі $\Delta\omega$. Суперпозиція хвиль, які мало відрізняються одна від одної за частотами, називається **хвильовим пакетом або групою хвиль** (рис. 3.5). Цей хвильовий пакет може бути суперпозицією двох хвиль з частотами, які мало відрізняються (див. рис.3.4). там, де фази збігаються, спостерігається амплітуди, а де не збігаються – коливання гасяться.

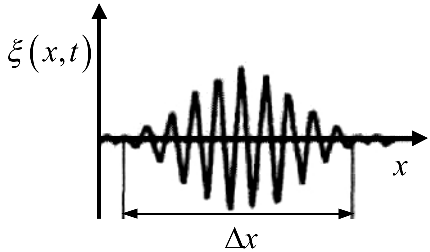

Рисунок 3.5 – Хвильовий пакет

Дисперсія – це залежність фазової швидкості в середовищі від частоти. В середовищі, яке не диспергує всі плоскі хвилі, що утворюють пакет, поширюються з однаковою швидкістю v. В середовищі, яке диспергує, кожна хвиля диспергує із своєю швидкістю, пакет з часом розпливається, його ширина збільшується. У випадку, коли дисперсія не дуже значна, то розпливання відбувається не швидко і пакету можна приписати швидкість U.

Швидкість, з якою переміщується центр пакета (точка з максимальним значенням амплітуди), називається **груповою швидкістю**. Групова швидкість пов’язана з фазовою співвідношенням

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \mathrm{v} + k\frac{d\mathrm{v}}{dk} = \mathrm{v} - \lambda\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}. \qquad (3.16)$$

Групова швидкість дорівнює швидкості переносу енергії.

3.6 ЕНЕРГІЯ ХВИЛІ

Пружне середовище, в якому поширюються механічні хвилі має як кінетичну енергію коливального руху частинок, так і потенціальну енергію, обумовлену деформацією. Якщо V_i - швидкість коливання частинок середовища, то **об’ємна густина кінетичної енергії середовища**

$$\omega_K = \frac{dW_K}{dV} = \frac{1}{2}\rho v_i^2, \qquad (3.17)$$

де ρ - густина середовища; dW_K - кінетична енергія усіх частинок в об’ємі dV, у якому швидкість $\vec{v}_i$ скрізь однакова.

Можна довести, що **об’ємна густина потенціальної енергії пружно деформованого середовища**

$$\omega_П = \frac{dW_П}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 \varepsilon^2, \qquad (3.18)$$

де $dW_П$ - потенціальна енергія однорідно деформованої малої ділянки середовища об’ємом dV; v - фазова швидкість хвилі в середовищі; ε - відносна деформація.

Об’ємною густиною енергії пружної хвилі називається об’ємна густина механічної енергії середовища, обумовлена поширенням цієї хвилі. Об’ємна густина пружної хвилі дорівнює сумі

$$\omega = \omega_K + \omega_П \quad \frac{1}{2}\mp\rho\left(v_1^2 + v^2\varepsilon^2\right). \qquad (3.19)$$

В кожній точці середовища, яке охоплене хвильовим рухом, ω_K і $\omega_П$ є однаковими функціями часу. Відповідно і ω змінюється з часом. Ця закономірність є справедливою для будь-яких біжучих хвиль незалежно від форми їх хвильових поверхонь і типу деформації середовища. Вона випливає з закону збереження енергії щодо процесу поширення коливань в пружному середовищі. Для залучення до коливального руху все більш віддалених від джерела частинок середовища, необхідно витрачати енергію, яку надає середовищу джерело. Таким чином, поширення пружних хвиль нерозривно пов’язане з передачею енергії від одних ділянок середовища до інших. Саме тому об’ємна густина енергії залежить як від координат, так і від часу.

Для плоскої хвилі

$$\omega = \rho A^2\omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \rho A^2\omega^2\left[1 + \cos 2(\omega t - kx + \varphi_0)\right].$$

Середнє за період значення об’ємної густини енергії дорівнює

$$\langle \omega \rangle = \rho A^2\omega^2 . \qquad (3.20)$$

Швидкість переносу енергії хвилею дорівнює швидкості переміщення в просторі поверхні, яка відповідає максимальному значенню об’ємної густини енергії хвилі. Для синусоїдальних хвиль ця швидкість дорівнює фазовій швидкості.

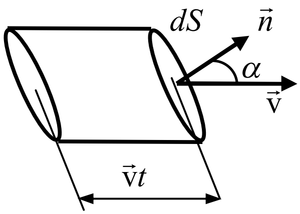

Рисунок 3.6 – До виведення вектора

Потік енергії $d\Phi$ через малу площадку dS - це відношення енергії dW, що передається через цю площадку за час dt до цього часу

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} . \qquad (3.21)$$

Якщо v - швидкість переносу енергії хвилею, то dW дорівнює, яка міститься всередині зображеного на рис. 3.6 циліндра з площею основи dS і висотою $\vec{v}t$

$$dW = \omega \mathrm{v} dt dS \cos\alpha = \omega\left(\vec{\mathrm{v}} d\vec{S}\right) dt$$

$$d\Phi = \omega\left(\vec{\mathrm{v}} d\vec{S}\right) = \vec{U} d\vec{S},$$

де $d\vec{S} = \vec{n} dS$ - вектор площадки dS; $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до площадки; α - кут між $\vec{\mathrm{v}}$ і $d\vec{S}$.

Вектор густини потоку енергії

$$\vec{U} = \omega \vec{\mathrm{v}} \tag{3.22}$$

називається **вектором Умова**. Вектор Умова спрямований в напрямку переносу енергії, а за модулем дорівнює відношенню потоку енергії через площадку dS до площі $dS_{\perp} = dS\cos\alpha$

$$U = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}. \tag{3.23}$$

Інтенсивність хвилі дорівнює модулю середнього значення вектора Умова

$$I = \left|\left\langle \vec{U} \right\rangle\right|. \tag{3.24}$$

Інтенсивність хвилі чисельно дорівнює енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі. Для синусоїдальної хвилі

$$I = \left|\left\langle \vec{U} \right\rangle\right| = \mathrm{v}\left\langle \omega \right\rangle = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v} A^2 \omega^2. \tag{3.25}$$

Під час поширення плоскої хвилі за однакові проміжки часу в коливальний рух залучаються однакові об’єми середовища. Тому інтенсивність і амплітуда плоскої хвилі не змінюються під час її поширення, якщо в середовищі не відбувається розсіювання енергії, тобто перетворення енергії коливань в інші види енергії.

Перетворення енергії хвиль в інші види енергії під час поширення хвиль в середовищі називається **поглинанням хвиль**.

В однорідному середовищі поглинання пружних хвиль обумовлено в основному процесами внутрішнього тертя і теплопровідності. Амплітуда і інтенсивність плоскої хвилі змінюються за експоненціальним законом

$$A = A_0 e^{-\alpha x}, I = I_0 e^{-2\alpha x}. \tag{3.26}$$

Тут A_0, I_0 - амплітуда і інтенсивність хвилі в точках $x = 0$; α - **лінійний коефіцієнт поглинання** пружних хвиль, який залежить від властивостей середовища і частоти хвилі.

3.7 СТОЯЧІ ХВИЛІ

Коли в середовищі розповсюджується кілька хвиль, то коливання частинок середовища виявляється геометричною сумою коливань, які б виконували частинки при розповсюдженні кожної з хвиль окремо. Згідно з **принципом суперпозиції** хвилі накладаються без змінювання одна одної.

Когерентними називаються хвилі із сталою різницею фаз. Під час додавання когерентних хвиль спостерігається явище **інтерференції** – виникнення стійкої картини максимумів і мінімумів в певних точках простору.

Дуже цікавий випадок інтерференції спостерігається під час накладання двох зустрічних плоских хвиль з однаковою амплітудою і частотою. Внаслідок виникає коливальний процес, який **називають стоячою хвилею.**

Напишемо рівняння двох плоских хвиль, які розповсюджуються в протилежних напрямках з початковою фазою, яка дорівнює нулю

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\}.$$

Додамо ці рівняння і перетворимо за формулою суми косинусів

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right),$$

враховуючи, що $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, отримаємо

$$\xi = 2A\cos\omega t\cos kx .$$

Згадаємо, що

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

тоді **рівняння стоячої хвилі** можна записати у вигляді

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cdot\cos\omega t . \tag{3.27}$$

Амплітуда стоячої хвилі

$$A_{cm} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{3.28}$$

В точках, в яких координати задовольняють умові

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi \quad (n = 1,2,3,\ldots); \quad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 1, \qquad (3.29)$$

сумарна амплітуда дорівнює максимальному значенню $A_{ст} = 2A$. Ці точки називають **пучностями стоячої хвилі**. **Координати пучностей**

$$x_{пучн} = \pm n\frac{\lambda}{2}. \qquad (3.30)$$

В точках, координати яких задовольняють умові

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots); \quad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$$

і сумарна амплітуда коливань дорівнює нулю спостерігаються **вузли стоячої хвилі. Координати вузлів**

$$x_{вузл} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (3.31)$$

Точки середовища, які знаходяться в вузлах коливань не виконують.

Утворення стоячих хвиль спостерігаються при відбиванні хвиль від перепон. На границі, де відбувається відбивання хвилі, утворюється пучність у випадку, коли середовище, від якого відбивається хвиля має меншу густину (рис. 3.7 а). коли густина середовища, від якого відбивається хвиля має більшу густину, то на границі утворюється вузол (рис.3.7 б).

Потрібно відзначити, що у випадку стоячої хвилі на відміну від біжучої не відбувається переносу енергії коливального руху, оскільки падаюча і відбита хвилі несуть однакову енергію в протилежних напрямках.

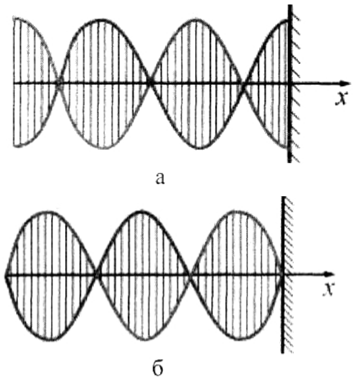

Рисунок 3.7 - Утворення стоячих хвиль при відбитті від перепон

3.8 ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

Рівняння, що описує рух будь-якої хвилі, є рішенням диференціального рівняння, яке називається **хвильовим.** Знайдемо загальний вигляд хвильового рівняння. Для цього двічі продиференцюємо рівняння плоскої хвилі за часом і за всіма координатами

$$\xi = A\cos(\omega t - kr),$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kr) = -\omega^2\xi \ ,$$

$$\xi = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dx^2} &= -k_x^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_x^2\xi \\
\frac{d^2\xi}{dy^2} &= -k_y^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_y^2\xi \\
\frac{d^2\xi}{dz^2} &= -k_z^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_z^2\xi
\end{aligned}\right\},$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2\xi,$$

або

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Врахуємо, що

$$v = \frac{\omega}{k}, \text{ а } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}.$$

Нарешті отримаємо **хвильове рівняння**

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}. \tag{3.27}$$

Це рівняння можна записати, використовуючи оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

тоді хвильове рівняння набуде вигляду

$$\nabla^2\xi = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}. \tag{3.28}$$

4 ЗВУКОВІ ХВИЛІ

4.1 ПРИРОДА ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ

Поняття «звук» можна розглядати з двох принципово різних позицій.

Звук як фізичне явище – це поширення поздовжніх коливань в пружному середовищі.

Звук як фізіологічне явище – це специфічне відчуття, викликане дією звукових хвиль на орган слуху.

Спочатку будемо розглядати звук як **фізичне явище**.

Звук може поширюватися тільки в **пружному середовищі,** тобто в такому середовищі, яке відновлює свою форму, деформовану внаслідок короткочасної дії сили. Пружність стиску і розтягу властива як твердим тілам, так і рідинам та газам. У пружному середовищі деформація передається послідовно від однієї точки середовища до сусідньої. Якщо, наприклад, вдарити по металевому стрижню молотком, то в місці удару утворюється ущільнення металу (деформація стиску), яке буде розповсюджуватися всередині стрижня з певною швидкістю $v_{зв}$ - швидкістю звуку в металі.

Джерелом звуку може бути будь-яке тіло, яке виконує пружні коливання – мембрана, дифузор, металева пластинка, струна, стовп повітря (в трубі) і т. ін. Звукові хвилі виникають завдяки пружним зв’язкам між частинками (молекулами та атомами) середовища, в якому знаходиться джерело звуку. Пружні механічні коливання джерела звуку викликають коливання найближчих до джерела частинок пружного середовища. Це приводить до періодичного стискання (збільшення густини) та розрідження середовища в цьому місці. В областях стискання тиск середовища збільшується, а в областях розрідження - зменшується, тобто виникає перепад тисків у найближчій до джерела області середовища і, як наслідок, надлишковий тиск в цьому місці. Надлишковий тиск «штовхає» сусідні елементи об’єму пружного середовища, які в свою чергу «штовхають» сусідні елементи об’єму і т.д. Таким чином, завдяки пружним зв'язкам між молекулами і атомами середовища виникає пружна хвиля.

Коли напрямок коливань частинок середовища збігається з напрямком поширення хвилі виникає **поздовжня хвиля**. Поздовжня хвиля являє собою чергування ущільнень та розріджень в пружному середовищі у напрямку руху хвилі.

Пружні поперечні хвилі спостерігаються у випадку, коли коливання частинок середовища відбуваються у напрямку переміщення хвилі. Поперечні пружні хвилі виникають у твердих тілах, а також на границі розділу середовищ.

Відзначимо, що **звукові хвилі – це поздовжні хвилі.**

Розглянемо особливості поширення звукових хвиль (звуку) в різних середовищах.

4.2 ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ В ТВЕРДИХ ПРУЖНИХ ТІЛАХ

Візьмемо для прикладу тонкий металевий стрижень кінцевої довжини L, з поперечним перерізом S і густиною ρ, по кінцю якого вдаримо молотком із силою F. За час Δt під дією сили F торець стрижня деформується і переміститься на відстань ΔL відносно його рівноважного стану до удару. Стиснутий елемент об'єму ΔV на кінці стрижня стискає граничний з ним елемент об'єму, який в свою чергу стискає наступний і т. д. Інакше кажучи, пружна деформація стиску (ущільнення), яка виникла внаслідок удару, буде переміщуватися зі швидкістю звуку вздовж стрижня. За час Δt кожна частинка елемента об'єму, який стискається, буде переміщуватися зі швидкістю

$$\mathrm{v}_E = \frac{\Delta L}{\Delta t}.$$

За той самий час пружна деформація пошириться на відрізок довжини стрижня L'

$$L' = v_{ЗВ}\Delta t \,.$$

Візьмемо $L' = L$. Виходячи з другого закону Ньютона, можна для даного випадку записати

$$F\Delta t = m v_E = \rho S L \cdot v_E = \rho S L \frac{\Delta L}{\Delta t}, \qquad (4.1)$$

де m - маса стрижня, яка почала рухатися за час Δt. Розділимо обидві частини рівності (4.1) на $S\Delta t$, а потім помножимо чисельник і знаменник на L. Тоді можна записати

$$\frac{F\Delta t}{S\Delta t} = \frac{\rho S L \cdot \Delta L}{S\Delta t \cdot \Delta t} \cdot \frac{L}{L} \,.$$

Врахуємо, що $F = F_{ПР}$,а механічна напруга дорівнює

$$\sigma = \frac{F_{ПР}}{S} \,. \qquad (4.2)$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$\sigma = \rho \left(\frac{L}{\Delta t} \right)^2 \frac{\Delta L}{L} = k \frac{\Delta L}{L},$$

де

$$k = \rho \left(\frac{L}{\Delta t} \right)^2 = \rho v_{ЗВ}^2 \,.$$

Тоді

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\,. \qquad (4.3)$$

Згідно із законом Гука механічна напруга прямопропорційна відносній деформації стрижня

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}, \qquad (4.4)$$

де $E = k$ - модуль Юнга, тоді вираз для швидкості поширення звуку в твердому тілі можна записати як

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \qquad (4.5)$$

Бачимо, що **швидкість поширення звукової хвилі в пружному твердому тілі** залежить від фізичних властивостей цього тіла (від його пружності та густини).

Швидкість звуку в металах знаходиться в межах $3\cdot10^3 - 5\cdot10^5\ \frac{м}{с}$. Це свідчить про великі пружні сили в цих матеріалах.

4.3 ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ В ГАЗАХ

Звук у газах передається рухом молекул середовища. В газах просторове положення молекул та атомів не фіксоване, як в металах і рух молекул має хаотичний характер. Внаслідок стикання молекул між собою їх швидкості весь час змінюються як за напрямком, так і за модулем. Саме тому для газів широко використовуються поняття **середньої швидкості і середньої довжини вільного пробігу** молекул або атомів.

Середньою довжиною вільного пробігу називається середня відстань, яку пролітає молекула між двома послідовними зіткненнями. Ця величина залежить від густини речовини. Із зменшенням густини газу середня довжина вільного пробігу молекул збільшується. При атмосферному тиску і температурі $t = 0^0C$ середня довжина вільного пробігу молекул повітря становить $\lambda = 10^{-8} - 10^{-7}\,м$.

Як відбувається процес поширення звукових хвиль у газах? Для цього достатньо розглянути поширення звуку в одному напрямку (одновимірний випадок). Нехай джерело звуку коливається у повітрі з певною частотою. Зазначимо той факт, що звуки різних частот незалежно від нашого розміщення відносно джерела звуку, сприймаються нами в тій самій послідовності, в якій вони створюються джерелом. Звідси випливає перший висновок: **звук поширюється в газах зі швидкістю, яка практично не залежить від частоти звукових коливань.**

Повернемося до нашого випадку. Джерело звуку під час коливання в газовому середовищі стискає (ущільнює) сусідній елемент об’єму газу з певною періодичністю. Кожне стискання відбувається за дуже малий проміжок часу Δt. Підкреслимо, що газ у процесі коливань буде стискатися тільки за умови того, що Δt буде дуже малим. При повільних коливаннях об’єкта газ буде встигати його обтікати. В процесі стискання газу виникає надлишковий тиск в цьому шарі відносно сусіднього елемента об’єму газу. Молекули стиснутого шару вилітають із ділянки з підвищеною густиною і тиском та передають імпульс сили $F\Delta t$ іншим молекулам, які знаходяться в сусідньому шарі. Цей елемент об’єму газу в свою чергу стискається, в ньому виникає надлишковий тиск і т. ін. Таким чином поширення звукової хвилі в газовому середовищі відбувається за рахунок пружної передачі імпульсу сили $F\Delta t$ від одного елемента об’єму до іншого у напрямку поширення хвилі. З точки зору кінетичної теорії, якщо в одному місці є велика густина молекул, а в сусідньому – менша, то молекули будуть переходити із області з більшою густиною в область, де густина менша так, щоб вирівняти густини в обох об'ємах. Звідси випливає другий важливий висновок: **звукова хвиля (звук) виникає тільки у випадку, якщо розміри області змін густини і тиску є набагато більшими за довжину вільного пробігу молекул.**

Аналогічно рівнянню (4.3) швидкість розповсюдження звукових хвиль в газах дорівнює

$$\mathrm{v}_{зв} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \tag{4.5}$$

де k - модуль об'ємної пружності газів; ρ - густина недеформованого середовища.

Для газів мірою деформації є відносна деформація $\frac{\Delta V}{V}$ стиску або розрідження об'єму газу під дією звукового тиску $p_{зв}$. Для газів аналогічно до виразу (4.4)

$$\sigma = p_{зв} = k\frac{V}{\Delta V}.$$

Звідси

$$k = p_{зв}\frac{V}{\Delta V},$$

тоді співвідношення (4.5) можна переписати у вигляді

$$\mathrm{v}_{зв} = \sqrt{p_{зв}\frac{V}{\rho\Delta V}}. \tag{4.6}$$

Звуковим тиском називають тиск, який виникає в газоподібному середовищі при проходженні через нього звукової хвилі

$$p_{ЗВ} = p_f - p_0 ,$$

де p_f - тиск на площу елемента об'єму газу, який спричиняється зовнішньою силою; p_0 - атмосферний тиск.

Процес деформації газу при поширенні в ньому звукових хвиль вважається адіабатичним.

Адіабатичне проходження процесу деформації газу враховується шляхом введення у вираз модуля об'ємної пружності показника адіабати

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} ,$$

де C_p і C_V - молярні теплоємності газу відповідно при сталому тиску і сталому об'ємі.

$$k = \gamma \frac{p_{ЗВ} V}{\Delta V} .$$

Тоді швидкість звуку в газі

$$v_{ЗВ} = \sqrt{p_{ЗВ} \frac{\gamma V}{\rho \Delta V}} . \qquad (4.7)$$

Гази за звичайних тисків і температур можна вважати ідеальними. Рівняння стану ідеального газу – це рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT ,$$

де p - тиск; V - об'єм; T - температура маси газу m ;

M - молярна маса газу; R - молярна газова стала. Візьмемо

$$p = p_{зв} \text{ і } m = \Delta m = \rho\Delta V ,$$

звідси

$$p_{зв} = \frac{\rho\Delta V}{MV} RT ,$$

Тоді для швидкості звуку у газі отримаємо вираз

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} . \qquad (4.8)$$

Таким чином, **швидкість поширення звуку залежить від температури газу і його фізичних властивостей.**

Підрахунок швидкості звуку в повітрі ($\gamma = 1,4$) для температури $T = 300\,K$ $\left(27^0 C\right)$ дає

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,4\cdot 8,31\cdot 300}{29\cdot 10^{-3}}} = 345\frac{м}{с} .$$

4.4 ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ В РІДИНАХ

В рідинах, як і в газах просторове положення частинок не фіксоване. Молекули рідини виконують теплові коливання навколо положення рівноваги. Через деякий час ці положення рівноваги зміщуються на відстань середньої довжини пробігу молекул ($10^{-10}\,м$). Ці переміщення виконуються не безперервно, а стрибкоподібно. Низка фактів свідчить, про подібність властивостей рідин і твердих тіл (наприклад незначна стисливість рідин) з одного боку, та рідин і газів (наприклад, хаотичність руху молекул, залежність середньої швидкості молекул від температури і т. і.) – з іншого. Процес деформації рідини при поширенні в ній звукової хвилі відбувається як і в газах адіабатично. З наведених та багатьох інших не наведених характеристик рідин випливає ідентичність аналітичних залежностей для швидкості поширення звукових хвиль в твердих тілах, газах і рідинах, а саме:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{a\rho}}\,, \qquad (4.9)$$

де k - модуль стискання рідини; ρ - густина рідини; $a = \frac{1}{k}$ - коефіцієнт стисливості. **Коефіцієнт стисливості** при сталій температурі $(t = const)$ дорівнює за модулем відносному зменшенню об’єму рідини при збільшенні тиску на одиницю, а саме:

$$a = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta p}\left(\frac{\Delta V}{V}\right). \qquad (4.10)$$

Розрахуємо швидкість поширення звука у воді, якщо відомо, що за температури $t = 8^0 C$ при зміні тиску на 10^5 Па (1атм) вода стискається на величину $5{\cdot}10^{-5}$ від свого початкового об’єму $\left(\frac{\Delta V}{V} = 5\cdot 10^{-5}\right)$. Підставимо у формулу (4.9) вихідні дані та отримаємо

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{1}{a\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}\Delta p\left(\frac{V}{\Delta V}\right)} = \sqrt{\frac{1}{10^3}10^5\frac{1}{5\cdot 10^{-5}}} = 1414\,\frac{м}{с}.$$

Для прикладу наведені в таблиці А.1 додатка А швидкості поширення звуку в різних середовищах.

З табличних даних, а також з викладених вище міркувань та аналітичних співвідношень для швидкості розповсюдження звукової хвилі в різних пружних середовищах, можна зробити узагальнюючий висновок: за однакових температур і тисках швидкость звуку більша там, де є меншою стисливість елементів об'єму. Незважаючи на те, що густина металів на 3-4 порядки більша за густину газів, та в 5-10 разів більша за густину рідин, все-таки швидкість звуку в металах більша за рахунок більш досконалої (з точки зору поширення звуку) структури металів.

4.6 ІНФРАЗВУКОВІ ТА УЛЬТРАЗВУКОВІ КОЛИВАННЯ

Людське вухо сприймає частоти від 16 Гц до 20000 Гц. Звукові коливання з частотою ν <20 Гц називають інфразвуком, а з ν >20000 Гц – ультразвуком. Найбільш високочастотні пружні хвилі у діапазоні $10^9 - 10^{13}$ Гц називають гіперзвуком. У таблиці А.6 додатка А наведено діапазон звукових частот і відповідних їм довжин хвиль для різних джерел звука.

Інфразвук – це механічні хвилі з частотами, меншими за 16 Гц. Область інфразвукових частот знизу практично нічим не обмежена. В природі трапляються інфразвукові коливання з частотою в тисячні частки герца.

Інфразвуки виникають внаслідок обдування вітром будівель, дерев, при роботі різних механізмів, при газових розрядах, вибухах бомб, пострілах гармат. У земній корі спостерігаються коливання і вібрації інфразвукових частот внаслідок обвалів, вулканічних вивержень тощо. Інфразвук дуже слабко поглинається в різних середовищах. Внаслідок цього такі хвилі в повітрі, в воді, в земній корі можуть поширюватися на досить великі відстані (десятки тисяч кілометрів). Ця властивість інфразвуку використовується в сейсмології. Інфразвуки вкрай негативно діють на людський організм, тому використовуються у воєнній техніці. Інфразвук певної частоти викликає розлад мозку, сліпоту і т. ін. Інфразвукові хвилі є дуже шкідливими і для інших живих істот.

Ультразвуком називаються механічні хвилі з частотами від $2\cdot10^4$ до 10^{10} Гц. Верхня межа визначається міжмолекулярними відстанями і тому залежить від агрегатного стану речовини, у якому поширюється ультразвукова хвиля.

Поширення ультразвукових хвиль у середовищі має ряд особливостей. У зв'язку з малою довжиною хвилі ультразвук випромінюється у вигляді вузьких спрямованих пучків. Відбиття ультразвукових хвиль на границі розподілу двох середовищ відбувається за законами геометричної оптики. Швидкість поширення і поглинання ультразвуку істотно залежить від властивостей середовища. Швидкість поширення ультразвуку у твердих тілах значно більша, ніж у рідинах.

Ультразвук сильно поглинається газами і у багато разів слабкіше – рідинами. Наприклад, коефіцієнт поглинання ультразвуку в повітрі приблизно в 1000 разів більший, ніж у воді. При поширенні ультразвукових хвиль у рідинах виникає явище кавітації – утворення і зникнення внутрішніх розривів суцільностей рідини. При цьому відбувається виділення енергії і нагрівання рідини. Перелічені властивості ультразвуку дозволяють широко використовувати його в техніці і медицині. Ультразвук прискорює проходження процесів дифузії і розчинення, впливає на швидкість хімічних реакцій. Ультразвук великої потужності викликає загибель вірусів і бактерій, це використовується для стерилізації середовищ. При впливі ультразвукових хвиль малої потужності збільшується проникність клітинних мембран і активізуються процеси обміну в тканинах.

У медицині ультразвук застосовується для лікування і діагностики. Здатність ультразвукових хвиль створювати механічну і теплову дію на тканини лежить в основі ультразвукової фізіотерапії. У хірургії для різання кісткової тканини застосовують «ультразвуковий» скальпель.

Частотний інтервал **гіперзвукових хвиль** має принципове обмеження, обумовлене атомною будовою середовища: в газах довжина пружної хвилі має бути більшою за довжину вільного пробігу молекул, а в рідинах і твердих тілах – більша за подвоєну відстань між атомами або молекулами. Гіперзвукові хвилі в кристалах іноді розглядають з точки зору корпускулярної теорії, співставляючи їм квазічастинки – фонони.

4.7 ОСНОВИ АКУСТИКИ

Акустика – це наука, яка вивчає звукові явища. Різке збільшення амплітуди (гучності) звуку при збігу частоти звукової хвилі із власною частотою системи, у якій поширюється звук, **називається акустичним резонансом.**

Відбиття звуку від перешкоди і повернення його у вихідну точку називається **луною**. Ця властивість звуку використовується в ехолотах для визначення глибини океану. Ехолокацію використовують деякі тварини, наприклад, кажани, сови й ін.

Звук як фізичне явище характеризується певною частотою, інтенсивністю та набором частот. Це – **об'єктивні характеристики звуку**. Людське вухо сприймає звук за гучністю, висотою і тембром. Це – **суб'єктивні характеристики звуку**.

Інтенсивність звуку визначається потоком енергії в одиниці об'єму простору. Інтенсивність звуку в системі СІ вимірюється і $\left[I\right]=\frac{Вт}{м^2}$. Інтенсивність звуку прямо пропорційна квадрату амплітуди хвилі.

Гучність звуку – це фізіологічна інтенсивність звуку. Поняття інтенсивності і гучності звуку не рівнозначні. Встановлено, що гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звуку. Суб'єктивна гучність звуку не піддається точному кількісному вимірюванню.

Висота звуку визначається його частотою. Чим більша частота, тим більша висота звуку. Тембр звуку визначається його спектральним складом.

Музикальний тон – це звук, який ми чуємо тоді, коли його джерело здійснює гармонічні коливання (рис. 4.1). Гучність тона будь-якої даної висоти визначається амплітудою коливання.

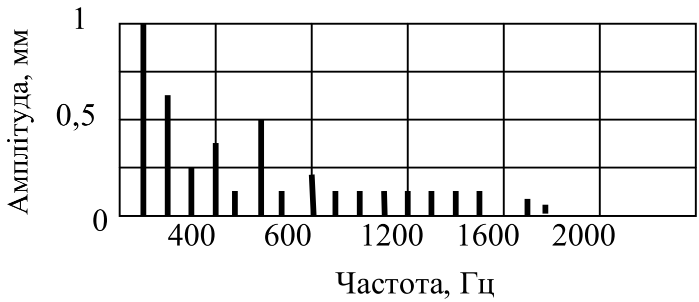

Рисунок 4.1 – Спектр звуків рояля (музикальні тони)

Майже всі звуки можна подати як суперпозицію чистих тонів з частотами $\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots n\nu_1$, де ν_1 - основна частота, яка визначає висоту звуку. Частоти $2\nu_1, 3\nu_1, \ldots \nu_1$ - є гармонічними складниками звуку, які утворюють його **тембр.**

Акорд – це одночасне звучання двох або кількох звуків (може викликати приємне – консонанс – та неприємне – дисонанс – слухове відчуття).

Шум – це аперіодична складна суміш звуків, спектр якої в певному інтервалі частот є безперервним (рис. 4.2).

Звуковий тиск. Під час поширення звуку відбувається коливання тиску в околі середнього значення характерного для даного середовища. Звуковий тиск – це змінна частина тиску, яка виникає в середовищі під час проходження звука.

4.8 СЛУХ

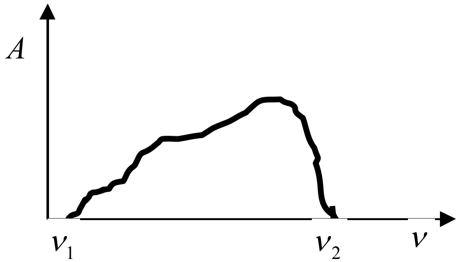

Рисунок 4.2 – Спектр безперервного шуму

Органи слуху встановлюють зв'язок між акустичним збудженням середовища і нашим фізіологічним відчуттям. Характеристики нашого слухового апарата можна співставити з характеристиками певного спектроскопа, який визначає амплітуду коливань за логарифмічною шкалою та їх частоту залежно від звукового рівня. Звукове відчуття в органі слуху людини може викликати тільки така звукова хвиля, інтенсивність якої не менша від деякого мінімального значення, яке називають **порогом чутності.**

Людське вухо має неоднакову чутливість до звукових хвиль різних частот. Здорове вухо найбільш чутливе до звуків, частота яких близька до 1000 Гц. При 1000 Гц поріг чутності для людей з нормальним слухом дорівнює близько 10^{12} Вт/м^2.

При зростанні інтенсивності звукової хвилі вище певної величини, ця хвиля перестає сприйматися як звук і викликає у вухах людини відчуття болю. Інтенсивність звукової хвилі, яка викликає біль у вусі, називається **порогом больового відчуття.**

На рисунку 4.3 подано усереднену діаграму чутності людського вуха. Нижня крива - це пороги чутності органу слуху людини для різних частот звуку. Людське вухо не сприймає звукові коливання, інтенсивність яких менші від порогу чутності.

Область, обмежена **порогом больового відчуття** та **порогом чутності** називається **областю чутності**.

Інтенсивності звуку відповідає відчуття його гучності. Воно зростає значно повільніше, ніж збільшується сила звуку і підкоряється закону Вебера - Фехнера. **Закон Вебера – Фехнера:** збільшення відчуття (фізіологічної сили звуку S)пропорційне логарифму відношення енергій (інтенсивності I) подразників, які порівнюються

$$S = k \lg \frac{I(\nu)}{I_0(\nu)}, \tag{4.11}$$

де $I_0(\nu)$ - граничне значення сили звуку на порозі чутності, яке залежить від частоти. Гучність виражається в белах (Бл), якщо $k = 1$ і в децибелах (дБл), якщо $k = 10$. Ця одиниця є зручною,

Рисунок 4.3 – Область чутності людського вуха

оскільки мінімальний приріст гучності, який сприймається вухом, приблизно дорівнює 1 дБл.

Для прикладу в таблиці А.7 додатка А наведено порівняльні характеристики деяких джерел звуку.

4.9 ЕФЕКТ ДОППЛЕРА В АКУСТИЦІ

Розглянемо ще одне явище, пов’язане з поширенням звукових хвиль – ефект Допплера. До цього ми вважали, що джерело звукової хвилі та приймач не рухаються відносно середовища, в якому відбувається поширення звукових коливань. Своєрідні ефекти, що проявляються при взаємному русі джерела та приймача звукових хвиль відносно нерухомого середовища, вперше виявив Допплер у 1842 р. Він звернув увагу на ту обставину, що при переміщенні тільки джерела або тільки приймача, або при їх одночасному переміщенні відносно середовища, в якому поширюється звукова хвиля, частота коливань, яка реєструється приймачем, змінюється. **Ефектом Допплера в акустиці** називається зміна частоти звукових коливань, які реєструються приймачем коливань, у порівнянні з частотою, яку випромінює джерело звуку, внаслідок відносного руху джерела звуку і приймача.

Наглядно проілюструвати ефект Допплера можна за допомогою простого прикладу, наведеного на рис. 4.3.

Ефект Допплера спостерігається, наприклад, при русі повз нас автомашини чи тепловоза, на яких працює сирена. При наближенні джерела сигналу (сирени) він сприймається таким, що має більш високий тон (більшу частоту), а при віддаленні від нас сигнал сирени сприймається вухом (чи іншим приймачем звуку) з більш низьким тоном (меншою частотою).

Ефект Допплера ґрунтується на принципі незалежності рухів (принципі суперпозиції). Згідно з цим принципом звукова хвиля, яка випромінюється джерелом, поширюється у середовищі абсолютно незалежно від руху джерела і приймача. Джерело і приймач можуть рухатися в будь-яких напрямках відносно напрямку поширення звукових коливань. При цьому їх швидкості мають векторно додаватися із швидкістю звукової хвилі згідно з принципом суперпозиції.

Чому взаємні переміщення приймача і джерела звуку

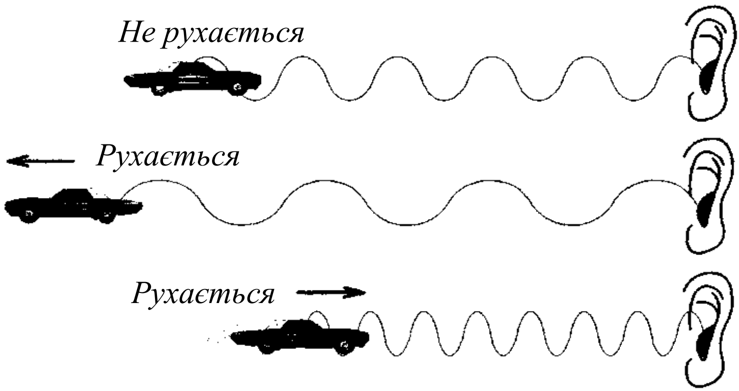

Рисунок 4.3 – До пояснення ефекту Допплера

призводять до зміни частоти звуку, який сприймає приймач, ми можемо зрозуміти з таких міркувань. Згадаємо зв'язок між довжиною хвилі, частотою коливань та швидкістю поширення хвилі (3.1), (3.2):

$$\lambda = \mathrm{v}T = \mathrm{v}/\nu,$$

де $\mathrm{v}_{зв}$ - швидкість поширення хвилі; $T = \dfrac{1}{\nu}$ - період;

ν - частота коливань.

Приймач визначає частоту коливань як кількість довжин хвиль λ, що приходять до нього за одиницю часу.

Припустимо, що в середовищі розміщені джерело звуку та приймач. Нехай джерело звуку генерує звукову хвилю з певною фіксованою довжиною $\lambda_Д$ (частотою ν_0). Параметри, які належать до джерела хвилі, будемо позначати індексом *«Д»*, а параметри, які пов'язані з приймачем – індексом *«П»*. Розглянемо різні варіанти взаємодії *П* і *Д*.

1) джерело і приймач не рухаються відносно середовища. В цьому випадку, частота, яка сприймається приймачем

$$\nu_Д = \nu_П .$$

2) припустимо, що приймач наближається до джерела із швидкістю $v_П$. В цьому випадку для приймача швидкість поширення звукової хвилі дорівнює

$$v' = v_{ЗВ} + v_П .$$

В такому випадку частота звуку, яку реєструє приймач, становить

$$\nu'_П = \frac{v_{ЗВ} + v_П}{\lambda} .$$

Визначимо, у скільки разів збільшилася частота $\nu'_П$ у порівнянні з частотою джерела ν_0

$$\frac{\nu'_П}{\nu_0} = \frac{v_{ЗВ} + v_П}{v_{ЗВ}} .$$

Звідки отримаємо

$$\nu'_{П} = \nu_0 \left(1 + \frac{\mathrm{v}_{П}}{\mathrm{v}_{ЗВ}} \right). \qquad (4.12)$$

У випадку, коли приймач буде віддалятися від джерела звуку, частота, що реєструється приймачем, буде зменшуватися. Тоді формула (4.12) набуде вигляду

$$\frac{\nu'_{П}}{\nu_0} = \frac{\mathrm{v}_{ЗВ} - \mathrm{v}_{П}}{\mathrm{v}_{ЗВ}}$$

$$\nu'_{П} = \nu_0 \left(1 - \frac{\mathrm{v}_{П}}{\mathrm{v}_{ЗВ}} \right). \qquad (4.13)$$

3) тепер розглянемо випадок, коли джерело *Д*, не змінюючи частоти звукових коливань, рухається назустріч нерухомому приймачу *П* із швидкістю $\mathrm{v}_{Д}$. В цьому випадку приймач буде сприймати більше число хвиль в одиницю часу (більшу частоту), ніж у випадку, коли *П* і *Д* не рухаються. Але частота буде більшою з іншої причини. Під час наближення джерела *Д* до нерухомого приймача *П* відстань між ними зменшується на величину Δl, але частота коливань, які генеруються джерелом – не змінюється, тобто число хвиль, які помістились у відрізку середовища між *П* і *Д* також не змінюється. Це є можливим тільки у разі зміни довжини хвилі, яка поширюється. Таким чином, довжина хвилі $\lambda''_{П}$, що реєструється приймачем, виявляється меншою за довжину хвилі $\lambda_{Д}$, джерела. Це означає, що частота $\nu''_{П}$, яка реєструється приймачем, більша за частоту ν_0 джерела

$$\nu''_{П} = \frac{\mathrm{v}_{ЗВ}}{\lambda''_{П}} = \frac{\mathrm{v}_{ЗВ}}{\lambda_{Д} - \Delta l} = \frac{\nu_0 \mathrm{v}_{ЗВ}}{\mathrm{v}_{ЗВ} - \Delta l \nu_0}.$$

Враховуючи, що

$$\Delta l \nu_0 = \mathrm{v}_Д ,$$

отримаємо

$$\nu''_П = \nu_0 \frac{\mathrm{v}_{ЗВ}}{\mathrm{v}_{ЗВ} - \mathrm{v}_Д} . \tag{4.14}$$

Зрозуміло, що у випадку віддалення джерела від приймача формула 4.14 набуде вигляду

$$\nu''_П = \nu_0 \frac{\mathrm{v}_{ЗВ}}{\mathrm{v}_{ЗВ} + \mathrm{v}_Д} . \tag{4.15}$$

Таким чином, ми довели, що при взаємному наближенні джерела і спостерігача частота випромінювання, яка реєструється приймачем, збільшується, а при віддаленні – зменшується.

Потрібно відзначити, що розглянуті вище варіанти є частинним випадком, оскільки вони описують ефект Допплера, коли і джерело і приймач рухаються тільки вздовж осі поширення звукових коливань (тобто, коли кут між векторами швидкості звуку і швидкостей руху приймача та джерела дорівнює нулю або 180^0.

У загальному випадку, коли швидкості поширення звуку, руху джерела та приймача звуку не збігаються за напрямком, є справедливим таке співвідношення:

$$\nu_П = \nu_0 \frac{1 + \frac{\mathrm{v}_П}{\mathrm{v}_{ЗВ}} \cos\theta_П}{1 + \frac{\mathrm{v}_Д}{\mathrm{v}_{ЗВ}} \cos\theta_Д} , \tag{4.15}$$

де $\theta_П$ і $\theta_Д$ - кути, які утворюють вектори $\vec{v}_Д$ та $\vec{v}_П$ з вектором, що з'єднує приймач хвиль з їх джерелом.

Ефект Допплера використовується в найрізноманітніших галузях людської діяльності для вимірювання швидкості об'єктів на відстані. Наприклад, у медицині за допомогою ультразвуку вимірюють швидкість проходження крові по судинах (ультразвукові витратоміри). Ультразвукові витратоміри використовуються також для аналогічних вимірювань у промисловості.

Використовуючи явище відбивання ультразвуку від тіл (або від меж розділу середовищ) і одночасно ефект Допплера, проводять ехолокацію під час руху кораблів (наприклад, дна русла рік чи морів). При цьому можна знайти не тільки швидкість кораблів чи інших об'єктів, але і одночасно провести сканування поверхні, а потім за допомогою ЕОМ майже миттєво побудувати їх обриси. Такими самими, але природними «приладами» оснащені деякі тварини: дельфіни, кити, кажани та ін.

4.10 КРІСТІАН ДОППЛЕР

Крістіан Допплер народився 29 листопада 1803 року в Зальцбурзі. В 1825 році закінчив Політехнічний інститут у Вені, з 1835 по 1847 рік працював у Празі, з 1847 року — професор Гірської та Лісної академій в Хемніці, з 1848 року — член Венської Академії Наук, з 1850 професор Венського університету и директор першого у світі Фізичного інституту, створеного при Венському університеті за його ініціативою.

Наукові інтереси Крістіана Допплера поширювались на такі області фізики, як оптика та акустика. Основні праці виконані з аберації світла, теорії мікроскопа і оптичного дальноміра, теорії кольорів та ін. У 1842 Допплер теоретично обґрунтував залежність частоти коливань, що сприймаються спостерігачем, від швидкості та напрямку руху джерела хвиль і спостерігача відносно один одного. Це явище було названо його іменем – ефект Допплера.

У 1848 році формула ефекту Допплера була уточнена французьким фізиком Арманом Фізо, а в 1990 році - і експериментально перевірена Білопольським на лабораторній установці. Принцип Допплера одержав численні застосування в астрономії для вимірювань швидкостей руху зірок уздовж променя зору та їх обертань навколо осі, турбулентних потоків у сонячній фотосфері та ін., а потім і в найрізноманітніших областях фізики й техніки (аж до радарів, використовуваних ДАІ).

Помер Крістіан Допплер 17 березня 1853 року у Венеції.