



MESSUNG DER IMPEDANZ AUSGEDEHNTER ERDERSYSTEME SOWIE DEREN BERECHNUNG MIT HILFE APPROXIMATIVER, ANALYTISCHER UND NUMERISCHER VERFAHREN

DIPLOMARBEIT

durchgeführt am

INSTITUT FÜR ELEKTRISCHE ANLAGEN

an der

Technischen Universität Graz
(Erzherzog Johann Universität)

vorgelegt von

Johann FREI

Begutachter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Lothar Fickert
Betreuer: Dipl.-Ing. Dr. techn. Ernst Schmutzner

Graz, Jänner 2001

VORWORT

Die Thematik der Erdung stellt einen wichtigen Bestandteil der elektrischen Energietechnik dar. In meiner Diplomarbeit habe ich daher versucht einen möglichst umfassenden Überblick über dieses interessante Gebiet, speziell über die Messung und Berechnung von Erdungswiderständen, zu geben. Es soll hierbei jedoch auf keinen Fall der Anspruch erhoben werden, dieses komplexe Thema vollständig behandelt zu haben. Nichtsdestotrotz war sowohl die Einarbeitung in das genannte Fachgebiet als auch die Niederschrift der vorliegenden Arbeit mit einem nicht unerheblichen Zeitaufwand verbunden.

Aus diesem Grund ist es mir zuallererst ein großes Anliegen, meinen Eltern für ihre unerschöpfliche Geduld und ihre beständige Förderung meiner Arbeit zu danken.

Weiters ist es mir eine angenehme Pflicht, mich bei den Mitarbeitern des Institutes für Elektrische Anlagen an der Technischen Universität Graz für ihre Mithilfe zu bedanken. Insbesondere gilt hierbei mein Dank den Herren Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Lothar Fickert und Dipl.-Ing. Dr.techn. Ernst Schmautzer für ihr reges Interesse an meiner Arbeit sowie für ihre wertvollen Anregungen und ihre kritische Durchsicht. Es muß an dieser Stelle auch noch ihre großzügige Unterstützung bei der Herstellung der gebundenen Diplomarbeiten erwähnt werden, für die ich mich ebenfalls herzlich bedanken möchte.

Schließlich möchte ich auch noch den Herren Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Renhart vom Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik für seine tatkräftige Mitarbeit bei der FEM-Berechnung, Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stephan Pack vom Institut für Hochspannungstechnik für seinen Anteil an der Meßausrüstung und Ass.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gunter Winkler vom Institut für Elektronik für die Bereitstellung des Hybridgenerators meinen Dank aussprechen.

Zu guter Letzt gilt meine Dankbarkeit auch meiner Lebenspartnerin Dipl.-Ing. Rosa Krainer. Sie hat sowohl durch ihre moralische Unterstützung als auch durch ihre Mithilfe bei der Formatierung des Textes und beim Ausdrucken der einzelnen Kapitel zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen.

Graz, 2001

Johann Frei

KURZFASSUNG

Neben der Erläuterung der theoretischen Grundlagen sowie der Vorgangsweisen für die Messung und die Berechnung des spezifischen Erdwiderstandes, des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßerdungswiderstandes liegt der Schwerpunkt der vorliegenden Diplomarbeit in der praktischen Anwendung der beschriebenen Verfahren. Zusätzlich zu den herkömmlichen Meß- und Berechnungsmethoden kommen dabei vor allem spezielle Verfahren zur Anwendung. Bezüglich des Ausbreitungswiderstandes ist das die Berechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. In bezug auf den Stoßerdungswiderstand sind das die Messung mit Stoßstrom, die Berechnung anhand der Ergebnisse aus der Messung mit Stoßstrom/Stoßspannung und die Berechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Überdies konnte für elektrische Leiter mit beliebigem Querschnitt eine analytische Lösung für die Stromverdrängung gefunden werden. Durch einen Vergleich mit den gemessenen Werten hat sich gezeigt, daß die Finite Elemente Methode sowohl für den Ausbreitungswiderstand als auch für den Stoßerdungswiderstand (bei Spannungsscheitelwerten bis ungefähr 8kV) ausgezeichnete Resultate liefert. Die ermittelten Fehler liegen im Bereich von etwa 0,5% bis maximal 5%. Eine durchgeführte Näherungsberechnung führt nur im Falle des Ausbreitungswiderstandes zu zufriedenstellenden Ergebnissen. Bei der Anwendung auf die Ermittlung von Stoßerdungswiderständen tritt hierbei ein sehr großer Fehler auf (im allgemeinen mehr als 50%).

Schlagwörter: Ausbreitungswiderstand, Erdung, Erdungsmessung, Finite Elemente Methode, Stoßerdungswiderstand, Stromverdrängung.

ABSTRACT

The first part of this thesis contains the explanation of the fundamental principles and methods for measuring and computing the resistivity of earth, the earth resistance and the impulse earth resistance. Its focus is the practical application of the described methods. In addition to the usual methods the application of special methods is primarily the purpose of this thesis. Concerning the earth resistance this is the computation by using Finite Element Method. In case of the impulse earth resistance this is the measurement with impulse current, the computation by using the results of the measurement and the computation by using Finite Element Method. Furthermore it was possible to find an analytical solution for the skin effect in conductors of arbitrary cross sections. Compared to the values of the measurement the results of the Finite Element Method are very good for both the earth resistance and the impulse earth resistance (for peak voltage of approximately 8kV). The calculated errors are in a range from 0,5% to maximal 5%. In case of the earth resistance an approximately computation has led to an acceptable solution. Using such a method for the computation of the impulse earth resistance can not be recommended (the errors exceed 50%).

Keywords: Earth connection, earth resistance, Finite Element Method, impulse earth resistance, measurement on grounding systems, skin effect.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Aufgabenstellung

2. Grundlagen

2.1 Definitionen

2.2 Der spezifische Erdwiderstand

2.2.1 Allgemeines

2.2.2 Messung des spezifischen Erdwiderstandes

2.2.2.1 Viersondenmethode

2.2.2.1.1 Prinzip der Viersondenmethode

2.2.2.1.2 Elektrodenanordnung nach Wenner

2.2.2.1.3 Elektrodenanordnung nach Schlumberger

2.2.2.2 Dreisondenmethode

2.3 Der Ausbreitungswiderstand

2.3.1 Allgemeines

2.3.2 Messung des Ausbreitungswiderstandes

2.3.2.1 Kompensationsmethode

2.3.2.2 Strom-Spannungsmessung

2.3.2.2.1 Grundprinzip

2.3.2.2.2 Strom-Spannungsmessung bei direkter Stromentnahme aus dem Netz

2.3.2.2.3 Strom-Spannungsmessung bei indirekter Stromentnahme aus dem Netz

2.3.2.2.4 Ausschaltung von Fremd- und Störspannungen

2.3.2.3 Strom-Leistungsmessung

2.3.2.4 Anordnung der Meßsonde und des Hilferders

2.3.3 Berechnung des Ausbreitungswiderstandes

2.3.3.1 Allgemeine Bemerkungen

2.3.3.2 Faustformeln für die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes

2.4 Der Stoßerdungswiderstand

2.4.1 Allgemeines

2.4.2 Messung des Stoßerdungswiderstandes

2.4.2.1 Übliche Verfahren

2.4.2.1.1 Messung mit Niederfrequenz

2.4.2.1.2 Messung mit Hochfrequenz

2.4.2.1.3 Messung mit äquivalenter Frequenz

2.4.2.2 Messung mit Stoßstrom

2.4.3 Berechnung des Stoßerdungswiderstandes

2.4.3.1 Herkömmliche Methoden

2.4.3.1.1 Näherungsverfahren

2.4.3.1.2 Exakte Berechnung

2.4.3.1.3 Netzwerkansatz

- 2.4.3.1.4 Leitungsansatz
- 2.4.3.1.5 Antennentheoretischer Ansatz

2.4.3.2 Berechnung mit der Methode der finiten Elemente

3. Die Methode der finiten Elemente (FEM)

3.1 Einführung

- 3.1.1 Allgemeines
- 3.1.2 Diskretisierung des Kontinuums

3.2 Anwendung der FEM auf die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßerdungswiderstandes

- 3.2.1 Problemstellung
- 3.2.2 Diskretisierung des Feldgebietes

- 3.2.2.1 Allgemeine Bemerkungen
- 3.2.2.2 Spezielle Erläuterungen zu den zugehörigen Fortran-Programmen

3.2.3 Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes

- 3.2.3.1 Grundsätzliches
- 3.2.3.2 Festlegung der Parameter für die FEM-Berechnung

- 3.2.3.2.1 Parameter für den Versuchsaufbau
- 3.2.3.2.2 Parameter für den Fundamenterder

3.2.3.3 Berechnung des Ausbreitungswiderstandes

- 3.2.3.3.1 Grundlagen
- 3.2.3.3.2 Ausbreitungswiderstand des Versuchsaufbaues
- 3.2.3.3.3 Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders

3.2.3.4 Berechnung des Stoßerdungswiderstandes

- 3.2.3.4.1 Grundlagen
- 3.2.3.4.2 Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaues
- 3.2.3.4.3 Stoßerdungswiderstand des Fundamenterders

4. Berechnung der Stromverdrängung in elektrischen Leitern und im Erdreich

4.1 Allgemeines

- 4.1.1 Wirbelströme und Stromverdrängung
- 4.1.2 Bessel-Differentialgleichung
- 4.1.3 Bessel-Funktionen

4.2 Berechnung der Stoßstromausbreitung in Leitern mit kreisförmigem Querschnitt

- 4.2.1 Berechnung der elektrischen Feldstärke und der Stromdichte
- 4.2.2 Berechnung der Leiterimpedanz

- 4.2.2.1 Leiterimpedanz im Bildbereich
- 4.2.2.2 Leiterimpedanz im Zeitbereich

4.3 Berechnung der Stoßstromausbreitung im Erdreich

- 4.3.1 Berechnung der elektrischen Feldstärke und der Stromdichte
- 4.3.2 Berechnung der Impedanz des Erdreiches

- 4.3.2.1 Impedanz des Erdreiches im Bildbereich der Laplace-Transformation
- 4.3.2.2 Impedanz des Erdreiches im Bildbereich der Fourier-Transformation

4.4 Berechnung der Stoßstromausbreitung in Leitern mit rechteckigem Querschnitt

- 4.4.1 Allgemeines
- 4.4.2 Die Stromverdrängungsintegralgleichung und deren iterative Lösung
- 4.4.3 Berechnung der Leiterimpedanz

5. Messungen an Erdersystemen

5.1 Messungen am Versuchsaufbau

- 5.1.1 Aufgabenstellung
- 5.1.2 Messung des spezifischen Erdwiderstandes
- 5.1.3 Messung der Ausbreitungswiderstände
- 5.1.4 Messung des Stoßerdungswiderstandes
 - 5.1.4.1 Meßschaltung
 - 5.1.4.2 Messung bei variablem Spannungsscheitelwert
 - 5.1.4.3 Messung bei konstantem Spannungsscheitelwert

5.2 Messungen am Fundamenterder

- 5.2.1 Aufgabenstellung
- 5.2.2 Messung des spezifischen Erdwiderstandes
- 5.2.3 Messung der Ausbreitungswiderstände
- 5.2.4 Messung des Stoßerdungswiderstandes
 - 5.2.4.1 Meßschaltung
 - 5.2.4.2 Messung bei variablem Spannungsscheitelwert
 - 5.2.4.3 Messung bei konstantem Spannungsscheitelwert

6. Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Erdungswiderständen

- 6.1 Allgemeines
- 6.2 Ausbreitungswiderstände

- 6.2.1 Ausbreitungswiderstände des Versuchsaufbaues
- 6.2.2 Ausbreitungswiderstände des Fundamenterders

6.3 Stoßerdungswiderstände

- 6.3.1 Stoßerdungswiderstände des Versuchsaufbaues
- 6.3.2 Stoßerdungswiderstände des Fundamenterders

7. Zusammenfassung

8. Literaturverzeichnis

ANHANG

(A) Fortran-Programme zur FEM-Berechnung

- (A.1) Programm ERDER
- (A.2) Programm ERDER1
- (A.3) Programm ERDER2
- (A.4) Programm ERDER_RB

1. AUFGABENSTELLUNG

Neben der Erläuterung der theoretischen Grundlagen sowie der grundsätzlichen Vorgangsweisen für die Messung und die Berechnung des spezifischen Erdwiderstandes, des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßerdungswiderstandes soll der Schwerpunkt der vorliegenden Diplomarbeit in erster Linie in der tatsächlichen Messung und in der Berechnung des Ausbreitungswiderstandes sowie des Stoßerdungswiderstandes vorgegebener Erdersysteme (Versuchsaufbau, Fundamenterder) liegen. Außer den herkömmlichen Meß- und Berechnungsmethoden sollen für diesen Zweck vor allem spezielle Verfahren zur Anwendung kommen. Diese Verfahren sind:

(A) Bezüglich des Ausbreitungswiderstandes:

- Berechnung des Ausbreitungswiderstandes mit der Methode der finiten Elemente (FEM).

(B) Bezüglich des Stoßerdungswiderstandes:

- Messung des Stoßerdungswiderstandes mit Stoßstrom.
- Berechnung des Stoßerdungswiderstandes anhand der Meßergebnisse aus der Messung mit Stoßstrom/Stoßspannung (laut VDE 0433 bzw. IEC 60-2).
- Berechnung des Stoßerdungswiderstandes mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM).

Bei der Berechnung des Stoßerdungswiderstandes mit Hilfe der FEM kann nur der Skineffekt im Erdreich und in den elektrischen Leitern (Erden) berücksichtigt werden. Versuche, auch andere Effekte (Bodenionisation, Trockeneffekt und dgl. mehr; siehe dazu Abschnitt 2.4.1) in diese Berechnung einfließen zu lassen, sind in der Literatur (siehe dazu besonders [8]) zu finden.

Was nun im besonderen die Stromverdrängung in den elektrischen Leitern (Erden) betrifft, soll auch die Möglichkeit einer analytischen Berechnung in Betracht gezogen werden. Dieser Kalkulation soll, wie auch im Falle der FEM-Berechnung, ein Näherungsansatz für den zeitlichen Verlauf des Stoßstromes zu Grunde gelegt werden.

Ein weiteres Ziel dieser Diplomarbeit soll letztendlich auch darin bestehen, durch einen Vergleich zwischen den Ergebnissen aus den einzelnen Messungen und den Resultaten der verschiedenen Berechnungen die Fehler der verwendeten Berechnungsmethoden aufzuzeigen, und in weiterer Folge auch den Rechenaufwand zu beurteilen.

2. GRUNDLAGEN

2.1 Definitionen

[6,S.194-196], [12,S.20-22], [22,S.55-58], [11,S.140-142], [13,S.26-27,552-555], [14,S.6-10], [33,S.C4-01], [34,S.11-12]

Erde: Die Bezeichnung Erde dient nicht nur für die Erde als Ort, sondern auch für die Erde als Stoff (Sand, Lehm, Gestein, ...).

Bezugserde: Die Bezugserde, auch neutrale Erde genannt, ist jener Teil der Erde, speziell der Erdoberfläche, außerhalb des Einflußbereiches eines Erders bzw. Erdersystemes, in dem zwischen zwei willkürlich ausgewählten Punkten keine merklichen, vom Erdungsstrom herrührenden Spannungen auftreten.

Erder: Erder, auch als Erdelektroden bezeichnet, sind Leiter oder leitende Metallteile, die in die Erde eingebettet sind und mit ihr dauernd in gut leitender Verbindung stehen, oder Leiter, die in Beton eingebettet sind, der mit der Erde ständig großflächig gut leitend verbunden ist (Fundamenterder).

Erdungsleitung: Eine Erdungsleitung ist eine elektrische Leitung, die einen zu erdenden Anlagenteil mit einem Erder oder auch mehrere Erder miteinander elektrisch verbindet, vorausgesetzt, daß sie entweder außerhalb der Erde oder isoliert in der Erde verlegt ist.

Erdungsanlage: Eine Erdungsanlage ist die Gesamtheit der galvanisch miteinander verbundenen Erder oder in gleicher Weise wirksamen Metallteile (Kabelmäntel aus Metall, Bewehrungen, ...) und Erdungsleitungen.

Erden: Verbindet man einen elektrisch leitfähigen Teil über eine Erdungsanlage mit der Erde, so spricht man vom Erden.

Natürlicher Erder: Ein natürlicher Erder ist ein mit der Erde oder auch mit Wasser direkt oder über Beton in Verbindung stehendes Metallteil, dessen Zweck zwar nicht die Erdung ist, das aber trotzdem als Erder wirkt (Stahlteile von Gebäuden, Rohrleitungen, ...).

Tiefenerder: Ein Tiefenerder ist ein Erder, der üblicherweise senkrecht in größere Tiefen eingebracht wird. Dieser Erder ist in der Regel zusammensetzbar und kann aus Rohr-, Rund- oder anderem Profilmaterial bestehen.

Oberflächenerder: Oberflächenerder sind Erder, die gewöhnlich in geringen Tiefen von ungefähr 0,5m bis 1m etwa parallel zur Erdoberfläche in der Erde verlegt werden. Sie können als Band-, Strahlen-, Ring- oder Maschenerder bzw. als Kombination aus diesen ausgeführt werden und aus Band- bzw. Rundmaterial oder aus einem Seil bestehen.

Fundamenterder: Ein Fundamenterder ist ein elektrischer Leiter, der in ein Betonfundament eingebettet ist, das großflächig mit der Erde in Berührung steht.

Steuererder: Ein Steuererder ist ein Erder, der seiner Form und Anordnung nach vor allem der Potentialsteuerung dient. Die Einhaltung eines bestimmten Ausbreitungswiderstandes tritt hier in den Hintergrund.

Erdoberflächenpotential: Das Erdoberflächenpotential φ_E ist die zwischen einem beliebigen Punkt der Erdoberfläche und der Bezugserde auftretende Spannung.

Erdungsspannung: Die Erdungsspannung U_E , auch Erderspannung genannt, ist die Spannung, die beim Stromfluß zwischen einer Erdungsanlage und der Bezugserde auftritt.

Berührungsspannung: Die Berührungsspannung U_B ist jener Teil der Erdungsspannung, der vom Menschen überbrückt werden kann. Der Stromweg verläuft dabei über den menschlichen Körper von Hand zu Fuß (der horizontale Abstand vom berührbaren Teil beträgt ungefähr 1m), oder von Hand zu

Hand. Oder anders ausgedrückt: Die Berührungsspannung U_B ist der Spannungsabfall am menschlichen Körper oder am Körper eines Nutztieres, wenn dieser vom elektrischen Strom durchflossen wird.

Schrittspannung: Die Schrittspannung U_S ist jener Teil der Erdungsspannung, der vom Menschen mit einem Schritt von 1m Länge überbrückt werden kann. Der Stromweg verläuft in diesem Fall über den menschlichen Körper von Fuß zu Fuß. Die Schrittspannung ist also auch eine Berührungsspannung, und zwar mit dem speziellen Stromweg von Fuß zu Fuß.

Spezifischer Erdwiderstand: Als spezifischen Erdwiderstand ρ_E bezeichnet man den spezifischen elektrischen Widerstand der Erde. Der spezifische Erdwiderstand ist der elektrische Widerstand eines Erdwürfels mit 1m Kantenlänge zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen.

Ausbreitungswiderstand: Unter dem Ausbreitungswiderstand R_A versteht man den elektrischen Widerstand der Erde zwischen dem Erder und der Bezugserde. Der Ausbreitungswiderstand kann als Wirkwiderstand aufgefaßt werden.

Stoßerdungswiderstand: Der beim Durchgang von Blitzströmen zwischen einem Punkt der Erdungsanlage und der Bezugserde wirksame elektrische Widerstand wird Stoßerdungswiderstand genannt.

Erdungsimpedanz: Der Wechselstromwiderstand der bei Betriebsfrequenz (Netzfrequenz) zwischen einer Erdungsanlage und der Bezugserde wirksam wird, wird als Erdungsimpedanz Z_E bezeichnet. Man erhält den Betrag von Z_E durch die Parallelschaltung der Ausbreitungswiderstände der Erder und der Impedanz angeschlossener Kettenleiter (Kabel mit Erderwirkung, Erdseile, ...).

Erdungsstrom: Als Erdungsstrom I_E definiert man den gesamten über die Erdungsimpedanz Z_E in die Erde eintretenden Strom. Der Erdungsstrom ist die Ursache für das Erdoberflächenpotential φ_E .

Potentialsteuerung: Durch Erder kann das Erdpotential, vor allem jedoch das Erdoberflächenpotential beeinflusst werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Potentialsteuerung.

2.2 Der spezifische Erdwiderstand

2.2.1 ALLGEMEINES

Der spezifische Erdwiderstand ist ausschlaggebend für die Größe des Ausbreitungswiderstandes R_A , des Stoßerdungswiderstandes R_{St} und der Erdungsimpedanz Z_E . Er ist von der Bodenzusammensetzung (Bodenart und Bodenkörnung), vom Bodendruck, von der Feuchtigkeit des Bodens sowie von der Temperatur abhängig. Die zeitliche Schwankung des spezifischen Erdwiderstandes wird je nach der Eingrabetiefe des Erders einerseits durch die Temperatur und andererseits durch die Bodenfeuchtigkeit (Beeinflussung durch Niederschläge) bestimmt. Aufgrund des negativen Temperaturkoeffizienten des Erdbodenwiderstandes beträgt die jahreszeitlich etwa sinusförmig verlaufende Änderung des spezifischen Erdwiderstandes bei Eingrabetiefen $<1,5\text{m} \pm 30\%$ und bei Eingrabetiefen $>1,5\text{m}$, speziell bei Tiefenerdern, $\pm 10\%$ (siehe Abbildung 2.1).

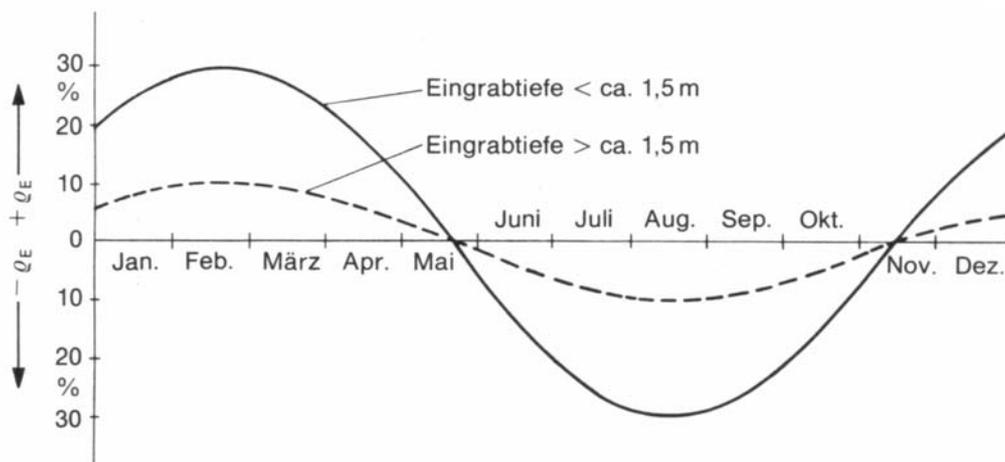


Abb. 2.1: Abhängigkeit des spezifischen Erdwiderstandes von der Jahreszeit (nach [4,S.54])

Untersuchungen in Rußland (Messungen an 3m-Tiefenerdern und 0,5m-Oberflächenerdern) haben zu folgendem Ergebnis geführt:

Wenn man alle oben genannten Einflußgrößen berücksichtigt, erhält man die Werte für den ungünstigsten Fall dadurch, daß man bei Tiefenerdern

- die Meßwerte bei feuchtem Boden mit dem Faktor 3 multipliziert
- die Meßwerte bei trockenem Boden mit dem Faktor 2 multipliziert

und bei Oberflächenerdern

- die Werte bei feuchtem Boden mit dem Faktor 4 multipliziert
- sowie die Meßwerte bei trockenem Boden mit dem Faktor 2 multipliziert.

2.2.2 MESSUNG DES SPEZIFISCHEN ERDWIDERSTANDES

Im allgemeinen Fall ist das Erdreich inhomogen. Demzufolge ändern sich sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung die Bodenzusammensetzung (Bodenschichtungen) und/oder die Feuchtigkeit des Bodens (Grundwasserspiegel). Daraus resultiert, daß sich mit der Bodenstruktur auch der spezifische Erdwiderstand ρ_E verändert.

Um nun bei der Planung einer Erdungsanlage die richtigen Erderformen (Oberflächenerder, Tiefenerder) auswählen zu können, müssen vorher gegebenenfalls vorhandene Bodenschichtungen ermittelt werden. Dabei kommen die anschließend beschriebenen meßtechnischen Verfahren zur Anwendung.

2.2.2.1 Viersondenmethode

2.2.2.1.1 Prinzip der Viersondenmethode

Die als Viersonden- oder Vierelektrodenmethode bekannte geoelektrische Widerstandsmessung eignet sich für die Untersuchung tieferer Bodenschichten und größerer Flächen besonders gut.

Unter günstigen Bedingungen sind mit diesem Meßverfahren auch sehr große Tiefen bis über 1000m erfaßbar, sodaß es auch bei der Grundwasser- und Lagerstättenerkundung, sowie bei Bodenuntersuchungen zur Anwendung kommt (siehe [15,S.261]).

Die grundsätzliche Funktionsweise der Viersondenmethode ist die, daß im Erdreich ein elektrisches Strömungsfeld erzeugt und an der Erdoberfläche zwischen zwei verschiedenen Punkten dieses Strömungsfeldes eine Potentialdifferenz abgegriffen wird (siehe Abbildung 2.2).

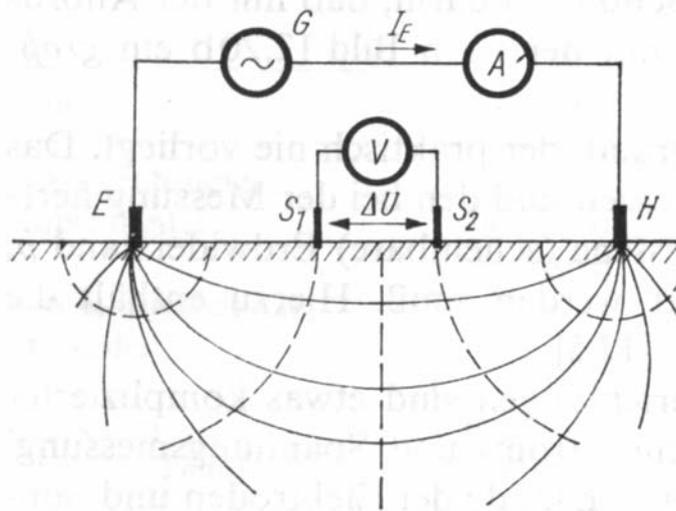


Abb. 2.2: Elektrisches Strömungsfeld im Erdreich
(nach [15,S.261])

Geht man nun von einem halbkugelförmigem Strömungsfeld aus, so gilt für den Widerstand R zwischen den Äquipotentiallinien (siehe Abbildung 2.2):

$$R = \frac{\Delta U}{I_E} \quad (2.1)$$

[15,S.261], [31,S.35]

und für den spezifischen elektrischen Widerstand:

$$\rho_E = k_E \cdot R \quad (2.2)$$

[15,S.262], [31,S.36]

k_E Konfigurationskonstante der Elektroden- und Sondenanordnung
(siehe dazu Gleichung (3.6) in [31,S.36])

Das oben vorausgesetzte halbkugelförmige Strömungsfeld kann sich nur im homogenen und isotropen Erdreich (das Erdreich hat also nach allen Richtungen hin gleiche physikalische und chemische

Eigenschaften) ausbilden. Aus diesem Grund muß der gemessene spezifische Erdwiderstand auf den im schlechtesten Fall möglichen Wert umgerechnet werden (siehe dazu auch Abschnitt 2.2.1).

Die in der Abbildung 2.2 dargestellte Strom- Spannungsmessung kommt in der Praxis nur sehr selten zur Anwendung (z.B. für sehr kleine Widerstände bei weit ausgedehnten Erdungsanlagen). Vielmehr kommen aufgrund der schwankenden Erdübergangswiderstände der Sonden (als Sonden bezeichnet man die Elektroden, die bei abgeglichenen Meßschaltung stromlos sind) und Elektroden zur meßtechnischen Bestimmung des spezifischen Erdwiderstandes Erdungsmeßgeräte zum Einsatz, deren Funktionsweise auf dem Prinzip der Kompensation (die Kompensations- oder Abgleichverfahren werden auch als Nullmethoden bezeichnet) beruht. Es bleibt aber auch bei diesen Geräten das oben beschriebene Grundprinzip erhalten.

Typisch für Erdungsmeßgeräte (Erdungsmeßbrücken) ist die Kompensationsschaltung nach Behrend (siehe Abbildung 2.3).

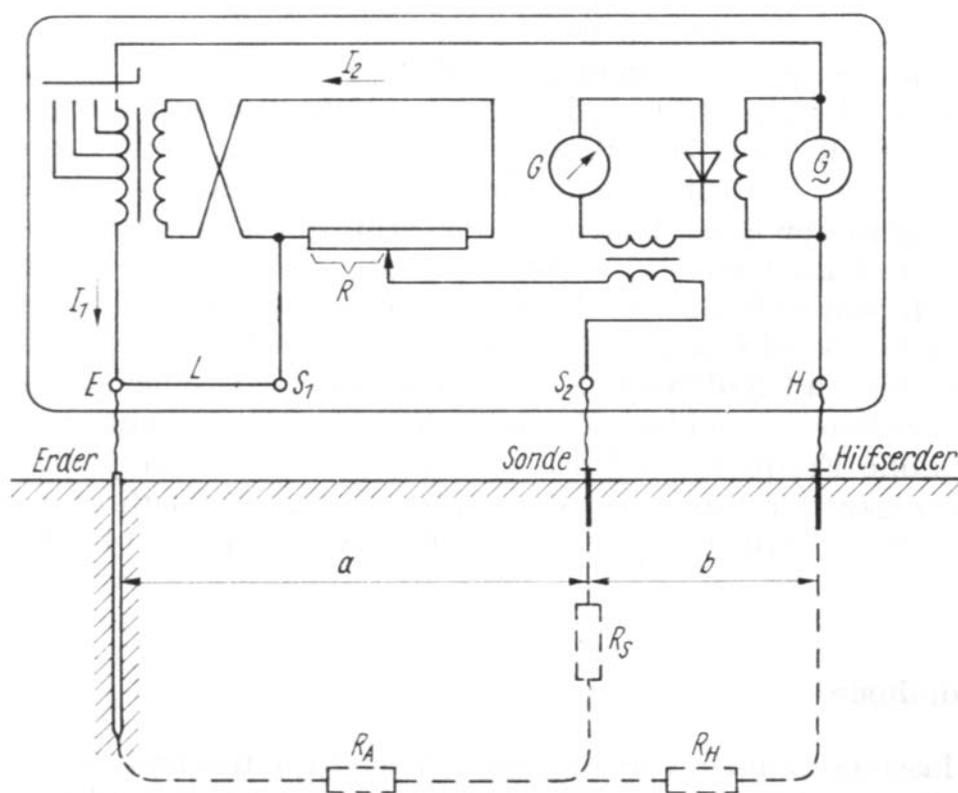


Abb. 2.3: Kompensationsschaltung nach Behrend
(nach [31,S.88])

Infolge des Schaltungsaufbaues wird in dieser Meßbrücke in Vierklemmen ausführung der Quotient $R = \Delta U / I_E$ (siehe Gleichung (2.1)) gebildet. An dieser Stelle sollte vielleicht noch angemerkt werden, daß alle Messungen im Erdreich mit Wechselstrom (es kommen dabei Meßfrequenzen von 65Hz bis 140Hz zur Anwendung) durchgeführt werden müssen, da Gleichstrom (und auch niederfrequente Wechselströme) Polarisationserscheinungen (durch die Elektrolyse des im Wasser gelösten Erdreiches tritt die sogenannte Konzentrationspolarisation auf, d.h. durch die stofflichen Veränderungen an den Elektroden tritt eine Gegenspannung, die Polarisations- oder Zerstörungsspannung auf, die der von außen angelegten Spannung entgegenwirkt) zwischen der Erdoberfläche und dem direkt an grenzenden Erdreich bewirken würde (da das Erdreich mit Salzen angereichert sein kann, muß es als Elektrolyt betrachtet werden, der in wäßriger Lösung, also z.B. im stehenden Grundwasser, in seine Ionen zerfällt; man spricht in diesem Zusammenhang auch von elektrolytischer Dissoziation). Diese Polarisationserscheinungen sind dann die Ursache für eine Verfälschung der Meßergebnisse.

2.2.2.1.2 Elektrodenanordnung nach Wenner

Das Meßverfahren nach Wenner eignet sich sehr gut für die Messung des spezifischen Erdwiderstandes. Der Meßvorgang ist bei dieser Viersondenmethode der folgende:

Ausgangspunkt ist ein fester Mittelpunkt M, der auch bei den nachfolgenden Messungen beibehalten wird (siehe Abbildung 2.4).

Weiters werden vier Erdspeieße (die Elektroden E_1 und HE zur Einspeisung des Wechselstromes, und die Sonden E_2 und S zum Abgreifen der Potentialdifferenz ΔU) in gleichen Abständen a entlang einer Geraden angeordnet und in den Boden gedreht (die Angaben darüber, wie tief die Sonden in das Erdreich eingebracht werden dürfen, sind in der Literatur sehr unterschiedlich, so wird z.B. in [34] 0,3m bis 0,4m, in [33] und [11] etwa **0,2m** bis 0,4m, in [19] $a/3$ und in [4] sowie in [7] $0,05a$ speziell für die bei den mittleren Speieße).

Die vier Erdspeieße werden entsprechend der Abbildung 2.4 über Meßleitungen mit einer Erdungsmeßbrücke in Vierklemmenausführung verbunden.

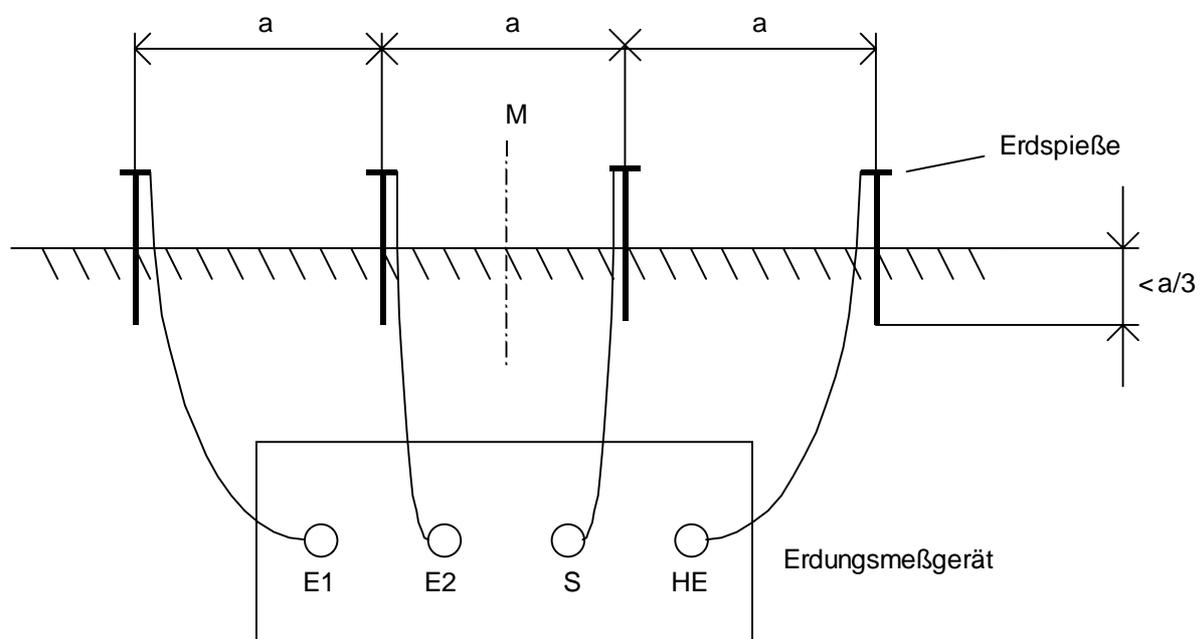


Abb. 2.4: Elektrodenanordnung nach Wenner

Für den scheinbaren spezifischen Erdwiderstand ρ_S gilt dann:

$$\rho_S = 2\pi \cdot a \cdot R \quad (2.3)$$

[33,S.C4-02], [19,S.97], [7,S.157], [11,S.144], [34,S.48]

a Abstand zwischen den Erdspeießen
 R mit der Meßbrücke gemessener Widerstand
 ρ_S scheinbarer spezifischer Erdwiderstand

Der scheinbare spezifische Erdwiderstand ergibt sich aus den einzelnen spezifischen Erdwiderständen der untereinanderliegenden Bodenschichten.

Bei homogenem Erdreich würde gelten:

$$\rho_s = \rho_E \quad (2.4)$$

ρ_sscheinbarer spezifischer Erdwiderstand

ρ_E"echter" spezifischer Erdwiderstand

Mit der Methode nach Wenner wird der Widerstand R des Erdreiches bis zu einer Tiefe erfaßt, die ungefähr dem Abstand a zwischen den Erdspeisen entspricht. Wird nun der Abstand a verändert, so kann auf diese Weise der Widerstand R und somit auch der scheinbare spezifische Erdwiderstand ρ_s in Abhängigkeit von der Tiefe ermittelt werden.

Je nach dem Abstand a zwischen den Erdspeisen sind die folgenden Punkte zu beachten:

- Kleiner Abstand a :

- Da sie Meßleitungen keine zu großen Induktivitäten besitzen dürfen, müssen sie vollständig von den Trommeln abgespult und z.B. nach Abbildung 2.5 verlegt werden.
- Befindet sich auf einem Sandboden mit schlechter elektrischer Leitfähigkeit eine nasse Grasdecke mit sehr guter elektrischer Leitfähigkeit, so ist es sinnvoll, um einen Kurzschluß zwischen den Erdspeisen über die feuchte Oberfläche zu vermeiden, für die Spieße einen Aushub von ungefähr einer Spatentiefe zu machen.

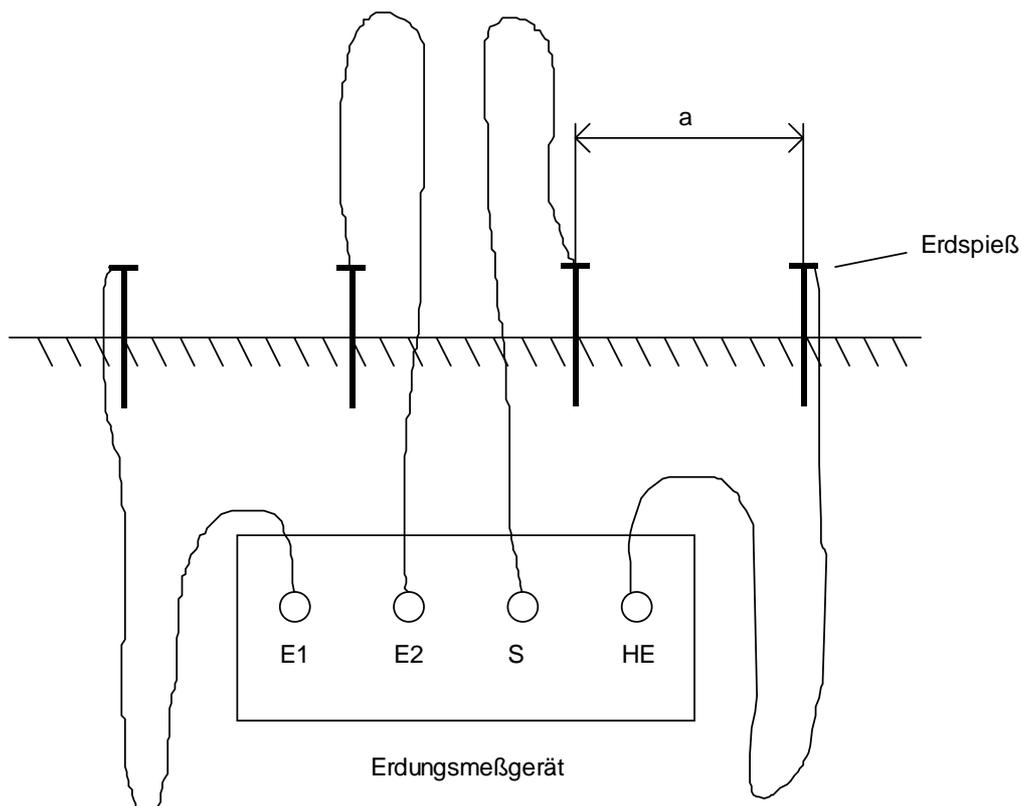


Abb. 2.5: Messung bei kleinem Sondenabstand a

- Abstand a , der wenige Meter überschreitet:

- Sind parallel zur Meßanordnung (Gerade auf der sich die Erdspeise befinden) z.B. Gleisanlagen oder unterirdische Rohrleitungen bzw. Kabel verlegt, so liefert die Methode nach Wenner zu kleine Meßwerte für den scheinbaren spezifischen Erdwiderstand. Es ist dann notwendig, sowohl pa-

parallel als auch senkrecht zu den Rohrleitungen bzw. Kabeln Messungen durchzuführen, damit deren Einfluß abgeschätzt werden kann.

- Um größere Meßfehler zu verhindern, muß der Ausbreitungswiderstand der Erdspeieße, speziell der der äußeren, entsprechend klein ($<500\Omega$) sein. Aus diesem Grund müssen für Böden mit großem spezifischen Erdwiderstand (etwa trockene Sandböden) für die beiden äußeren Elektroden mehrere Erdspeieße verwendet werden (diese werden dann nach Abbildung 2.6 auf dem Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser $d \leq a/20$ so tief wie möglich in die Erde gedreht und miteinander verbunden).

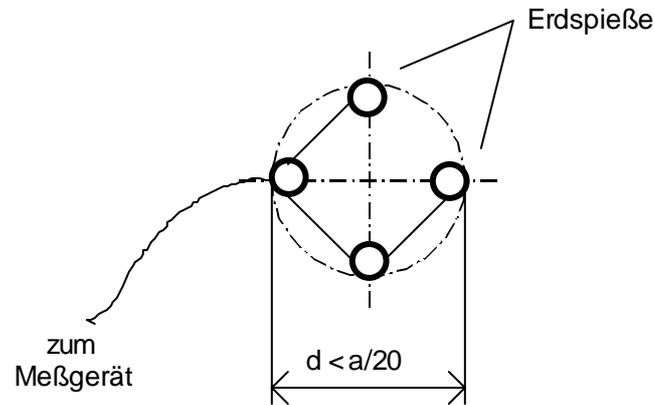


Abb. 2.6: Verwendung mehrerer Erdspeieße für eine äußere Elektrode

- Sehr großer Abstand a ($a > 50\text{m}$):

- Im Falle eines kleinen spezifischen Erdwiderstandes ist die Eindringtiefe des Wechselstromes infolge des Skin-Effektes sehr gering. Unter diesen Umständen sind Messungen mit sehr großen Abständen zwischen den Erdspeießen nicht sehr sinnvoll, in der Regel aber auch nicht notwendig (siehe [19,S.98]).

2.2.2.1.3 Elektrodenanordnung nach Schlumberger

Die Methode nach Schlumberger (siehe [19,S.100]) ist in allen wesentlichen Punkten mit dem Verfahren nach Wenner (siehe Abschnitt 2.2.2.1.2) identisch.

Die beiden Meßmethoden unterscheiden sich nur durch die Abstände zwischen den Erdspeießen (siehe Abbildung 2.7).

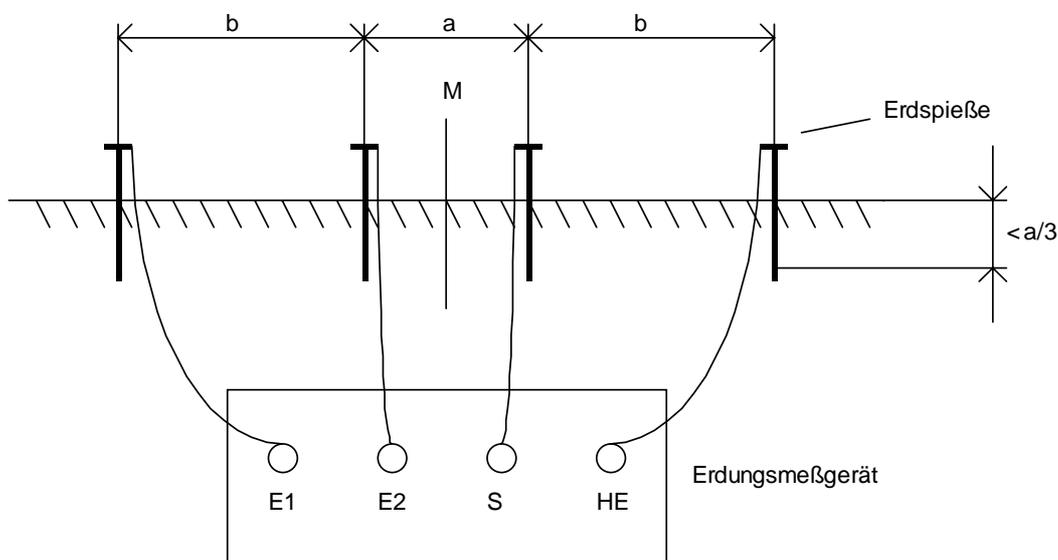


Abb. 2.7: Elektrodenanordnung nach Schlumberger

Nach Schlumberger werden die beiden inneren Spieße, die Meßsonden, im Abstand a voneinander angeordnet. Dieser Abstand bleibt während der gesamten Messung konstant. Die Abstände b zwischen den äußeren und den inneren Spießern können beliebig verändert werden.

Der Widerstand R des Erdreiches wird bei diesem Verfahren bis zu einer Tiefe erfaßt, die ungefähr dem Abstand b entspricht. Es kann also auch hier durch das Variieren von b die Abhängigkeit des Widerstandes R bzw. des scheinbaren spezifischen Widerstandes ρ_S von der Tiefe bestimmt werden.

Für ρ_S gilt dabei:

$$\rho_S = \pi \cdot b \cdot R \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) \quad (2.5)$$

[19,S.100]

ρ_S scheinbarer spezifischer Erdwiderstand
 R mit der Meßbrücke gemessener Widerstand
 a Abstand zwischen den inneren Erdspießern
 b Abstand zwischen den inneren und den äußeren Erdspießern

Aufgrund der Tatsache, daß beim Verfahren nach Schlumberger bei $b > a$ nur eine relativ kleine Potentialdifferenz ΔU zwischen den inneren Spießern (Meßsonden) abgegriffen wird, ist bei sehr großen Werten von b eine Erdungsmeßbrücke mit einer entsprechend hohen Empfindlichkeit erforderlich.

2.2.2.2 Dreisondenmethode

Der mittlere spezifische Erdwiderstand ρ_M kann durch die Messung des Ausbreitungswiderstandes eines Probeerders näherungsweise bestimmt werden. Bei der Messung des Ausbreitungswiderstandes ist eine Meßbrücke in Dreiklemmenausführung ausreichend, daher der Name Dreisondenmethode (siehe dazu Abschnitt 2.3.2).

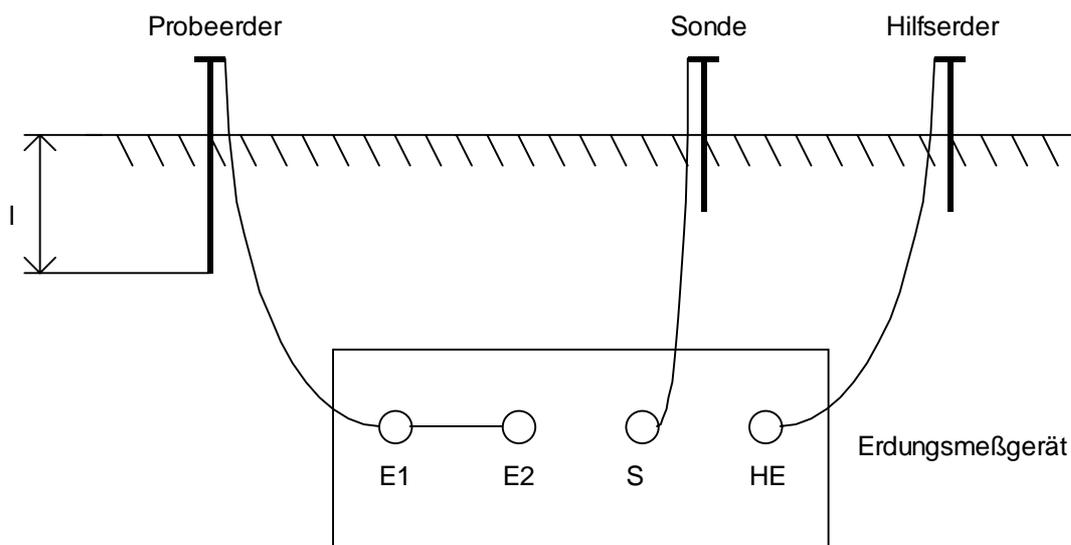


Abb. 2.8: Dreisondenmethode

Als Probeerde dient ein Metallstab (z.B. ein Wasserleitungsrohr oder ähnliches) der senkrecht ins Erdreich eingebracht wird. Für den mittleren spezifischen Erdwiderstand ρ_M , der in einem weiten Bereich vom Stabdurchmesser d unabhängig ist (nach [34] gilt $d \approx 20\text{mm}$, nach [7] gilt $d = 25\text{mm} \dots 50\text{mm}$) erhält man dann:

$$\rho_M \approx I \cdot R_A \quad (2.6)$$

[34,S.48], [7,S.157]

I Einschlagtiefe des Metallstabes
 R_A Ausbreitungswiderstand des Probeerders

Für das elektrisch homogene Erdreich würde wieder gelten:

$$\rho_M = \rho_E \quad (2.7)$$

ρ_M mittlerer spezifischer Erdwiderstand
 ρ_E "echter" spezifischer Erdwiderstand

Der mittlere spezifische Erdwiderstand wird bei dieser Meßmethode bis zu einer Tiefe erfaßt, die ungefähr der Einschlagtiefe des Probeerders entspricht.

In [31] wird eine Methode angegeben, die sich geringfügig vom oben beschriebenen Verfahren unterscheidet. Die Durchführung der Messung ändert sich dabei nicht, verläuft also genauso, wie sie oben dargestellt wurde. Der Unterschied beruht lediglich auf der exakteren Auswertung des Meßergebnisses, d.h. auf der Berechnung des mittleren spezifischen Erdwiderstandes.

Die Vorgangsweise ist hierbei die folgende:

$$\rho_M = k \cdot R_A \quad (2.8)$$

[31,S.34], [15,S.261]

ρ_M mittlerer spezifischer Erdwiderstand
 R_A Ausbreitungswiderstand des Probeerders
 K Faktor nach Gleichung (2.9)

mit

$$k = \frac{2\pi \cdot I}{I \ln \frac{4I}{d}} \quad (2.9)$$

[31,S.34], [15,S.261]

I Einschlagtiefe des Probeerders
 d Außendurchmesser des Probeerders

Es gehen also bei diesem Berechnungsverfahren sowohl die Einschlagtiefe als auch der Außendurchmesser des Probeerders direkt in die Auswertung der Messung ein.

2.3 Der Ausbreitungswiderstand

2.3.1 ALLGEMEINES

Der Ausbreitungswiderstand eines Erders, auch Erdausbreitungswiderstand oder stationärer Ausbreitungswiderstand genannt, setzt sich zusammen aus:

- dem Widerstand der Metallelektrode (dieser ist im allgemeinen vernachlässigbar klein),
- dem Übergangswiderstand Erder-Erdreich: Der elektrische Strom teilt sich beim Übergang von der Metallelektrode in das Erdreich auf viele kleine Berührungsstellen auf, daher entsteht der Übergangswiderstand Erder-Erdreich aus der Parallelschaltung all dieser Berührungsstellen,
- und dem Widerstand des Erdreiches: Dieser Widerstand ist in der unmittelbaren Umgebung des Erders groß, weil dort der leitende Querschnitt der Erde klein ist. Mit zunehmendem Abstand vom Erder vergrößert sich dieser Erdquerschnitt, woraus folgt, daß der elektrische Widerstand des Erdreiches kleiner wird (siehe Abbildung 2.9). Schließlich wird in einem Abstand von ungefähr 20m der Widerstand des Erdreiches so klein, daß die Erde als elektrischer Leiter betrachtet werden kann (siehe dazu [7,S.35]).

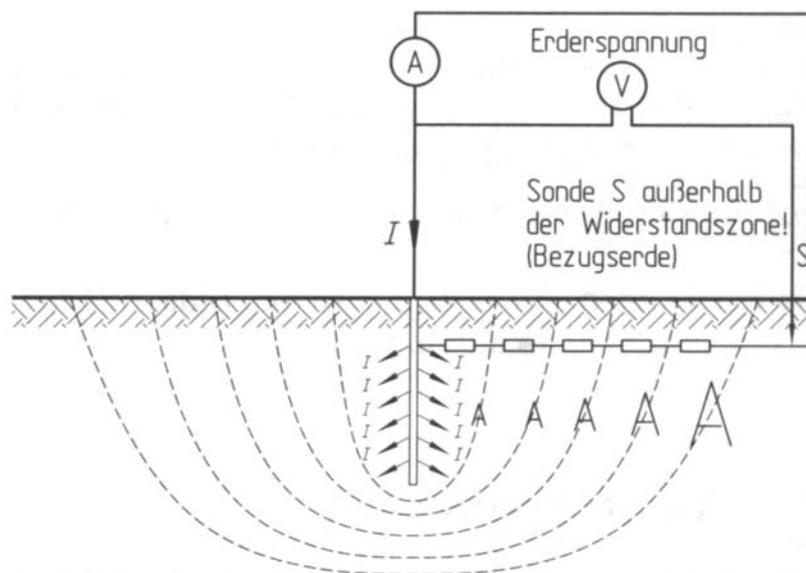


Abb. 2.9: Widerstand des Erdreiches (nach [7,S.34])

Zusammenfassend kann man sagen, daß sich der Ausbreitungswiderstand eines Erders auf einen Bereich von etwa 20m rund um den Erder konzentriert, und hauptsächlich von den Abmessungen des Erders (Widerstand der Metallelektrode, Übergangswiderstand Erder-Erdreich) sowie vom spezifischen Erdwiderstand (Widerstand des Erdreiches) abhängig ist.

Eine Möglichkeit, das Strömungsfeld im Erdreich (Verlauf der Stromdichte, der elektrischen Feldstärke und des Potentials im Erdreich) und auch der Ausbreitungswiderstand in einer sehr übersichtlichen Form zu berechnen, bietet das Beispiel des Kugelerders. Es soll dies an den folgenden drei Modellen veranschaulicht werden:

(A) Kugelelektrode im unendlich ausgedehnten, homogenen, isotropen und linearen Medium mit der mäßigen Leitfähigkeit σ (siehe [31,S.38], [23,S.58], [27,S.160-162] und [20,S.63-65]):

Dieser idealisierte Fall trifft mit einer ausreichenden Genauigkeit auf einen Kugelerder zu, der sich in einer sehr großen Tiefe in der Erde befindet. Weiters wird für die Berechnung, um ein kugelsymmetrisches Strömungsfeld zu erhalten (siehe Abbildung 2.10), eine konzentrische, unendlich weit entfernte Kugelfläche als Gegenelektrode angenommen (würde man von einer sehr weit, jedoch nicht unendlich weit entfernten Gegenelektrode mit einer anderen geometrischen Form ausgehen, so würde man

lediglich in der unmittelbaren Umgebung des Kugelerders, und auch in diesem Fall nur näherungsweise, ein kugelsymmetrisches Feld erhalten).

Da sich nun der insgesamt dem Kugelerder zugeführte Strom I gleichmäßig auf konzentrische Kugelflächen (diese Kugelflächen sind Äquipotentialflächen; es kann auch die Oberfläche der Metallelektrode als Äquipotentialfläche betrachtet werden, wenn, was hier der Fall ist, die Leitfähigkeit der Elektrode sehr groß

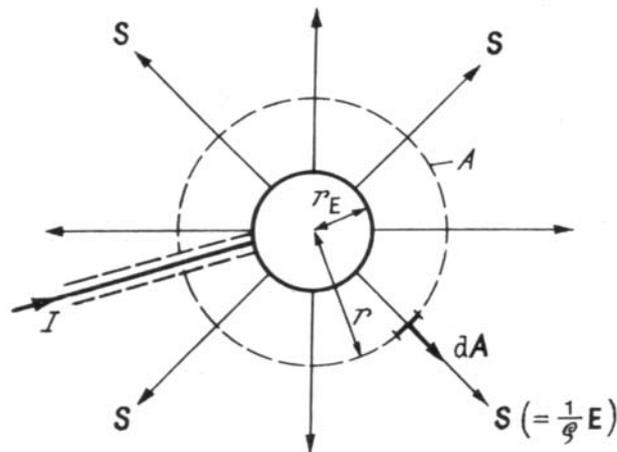


Abb. 2.10: Elektrisches Strömungsfeld des Kugelerders
(nach [27,S.160])

gegenüber der Leitfähigkeit des Erdreiches ist) um den Erder verteilt, gilt für den Betrag der Stromdichte:

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (2.10)$$

J Stromdichte

I zugeführter Strom

r Abstand vom Mittelpunkt des Kugelerders

Entsprechend dem Ohmschen Gesetz

$$J = \sigma \cdot E \quad (2.11)$$

σ Leitfähigkeit der Erde

berechnet sich der Betrag der elektrischen Feldstärke zu:

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi \sigma r^2} \quad (2.12)$$

E Betrag der elektrischen Feldstärke

Der Vektor \vec{E} der elektrischen Feldstärke zeigt, genauso wie der Vektor \vec{J} der Stromdichte, in radialer Richtung vom Kugelmittelpunkt weg oder zum Kugelmittelpunkt hin (je nach Stromrichtung).

Für die Spannung zwischen der Kugeloberfläche und einem beliebigen Punkt P innerhalb des Erdreiches erhält man somit:

$$\begin{aligned}
 U_{OP} &= \int_{r_0}^r \vec{E} \circ d\vec{s} = \int_{r_0}^r E \cdot dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_0}^r = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

r_0Radius des Kugelerders
 rEntfernung zum Punkt P

Berechnet man die Spannung zwischen der unendlich weit entfernten Gegenelektrode ($r \rightarrow \infty$, Bezugserde) und der Oberfläche des Kugelerders, so ergibt sich die Erdungsspannung U_E (siehe Abschnitt 2.1) zu:

$$U_E = \lim_{r \rightarrow \infty} U_{OP} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma r_0}
 \tag{2.14-1}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.14-1) kann man für die Formel (2.13) auch schreiben:

$$U_{OP} = U_E \cdot \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)
 \tag{2.14-2}$$

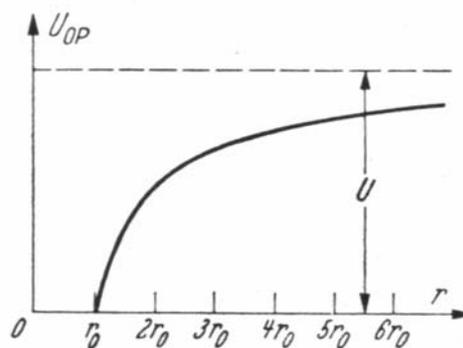


Abb. 2.11-1: Spannungsverteilung um den Kugelerder
(nach [20,S.64])

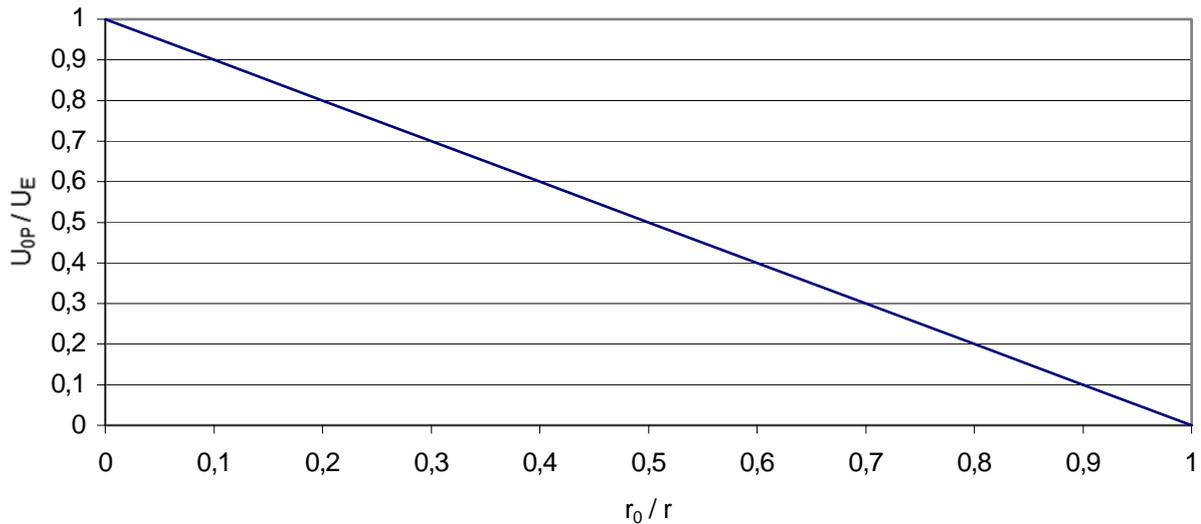


Abb. 2.11-2: Spannungsverlauf um den Kugelerder bei variablem Radius des Kugelerders
(siehe Gleichung (2.14-2))

Die Spannungsverteilung nach Abbildung 2.11-1 stellt die Begrenzungsfläche des sogenannten Spannungstrichters dar. Aufgrund der Tatsache, daß der Spannungsverlauf nach Abbildung 2.11-1 konzentrisch um den Kugelerder erfolgt, erhält man im dreidimensionalen Raum ein Rotationshyperboloid, das üblicherweise als Spannungstrichter bezeichnet wird (siehe Abbildung 2.12).

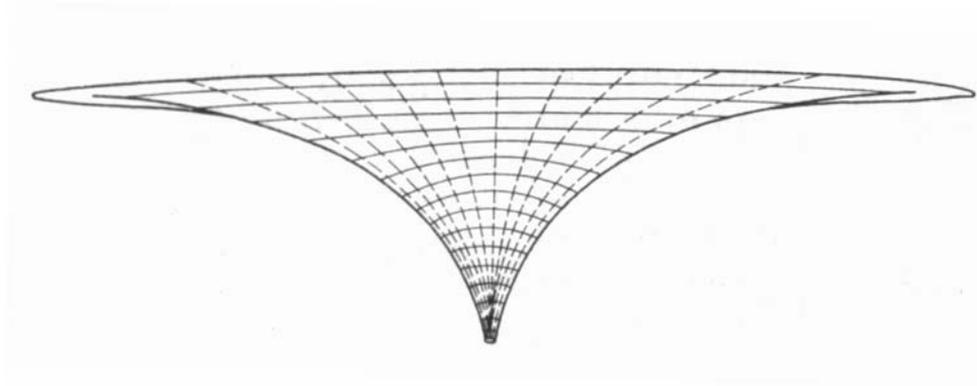


Abb. 2.12: Spannungstrichter
(nach [31,S.41])

Für den Ausbreitungswiderstand des Kugelerders erhält man somit:

$$R_A = \frac{U_E}{I} = \frac{1}{4\pi \sigma r_0} = \frac{\rho_E}{4\pi r_0} \quad (2.15-1)$$

R_A Ausbreitungswiderstand
 ρ_E spezifischer Erdwiderstand

Der Kurvenverlauf für die Größe des Ausbreitungswiderstandes in Abhängigkeit von der Entfernung x vom Erdmittelpunkt (siehe Abbildung 2.13) kann folgendermaßen erklärt werden:

Wie oben bereits dargestellt wurde, verteilt sich der insgesamt dem Kugelerder zugeführte Strom I gleichmäßig auf konzentrische Kugelflächen (diese Kugelflächen sind Niveauflächen, auch Äquipotentialflächen genannt) mit konstanter Spannung. Demzufolge sind auch hier wieder die Gleichungen (2.10) bis (2.12) gültig (siehe oben).

Nun kann jeder Schicht zwischen zwei solchen Niveauflächen ein elektrischer Widerstand zugeordnet werden. Für dessen Berechnung nimmt man der Einfachheit halber in diesem Bereich für die elektrische Feldstärke E einen festen Wert an (die mittlere elektrische Feldstärke, also den Betrag der Feldstärke auf der Kugeloberfläche, die exakt in der Mitte der betrachteten Niveauflächen liegt; siehe dazu auch [33,S.C4-02]).

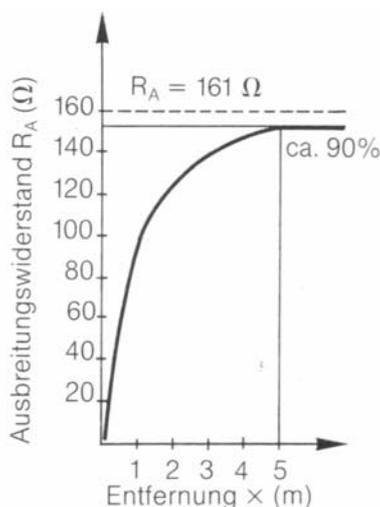


Abb. 2.13: Ausbreitungswiderstand des Kugelerders (nach [33,S.C4-02])

Für diesen konstanten Wert gilt nach Gleichung (2.12):

$$\bar{E} = \frac{I}{4\pi\sigma\bar{r}^2} = \frac{I \cdot \rho_E}{4\pi \cdot \bar{r}^2} \tag{2.15-2}$$

- \bar{E} Mittelwert der elektrischen Feldstärke
- \bar{r} Abstand der mittleren Kugeloberfläche vom Erdmittelpunkt
- σ Leitfähigkeit der Erde
- I Stromstärke
- ρ_E spezifischer Erdwiderstand

Daraus resultiert für den Spannungsabfall an einer Kugelschicht:

$$\Delta U_E = \frac{I \cdot \rho_E \cdot \Delta x}{4\pi \cdot \bar{r}^2} := \frac{I \cdot \rho_E \cdot \Delta x}{q} \tag{2.15-3}$$

- ΔU_E Spannungsabfall an einer Kugelschicht
- Δx Dicke der Kugelschicht
- q mittlere Kugeloberfläche

Und daher für deren Ohmschen Widerstand (siehe auch [33,S.C4-02]):

$$R_A = \frac{\Delta U_E}{I} = \frac{\rho_E \cdot \Delta X}{4\pi \cdot \bar{r}^2} = \frac{\rho_E \cdot \Delta X}{q} \quad (2.15-4)$$

Der gesamte Ausbreitungswiderstand entspricht dann der Summe der gemäß der Gleichung (2.15-4) berechneten Teilwiderstände (siehe Abbildung 2.13). Dieser Wert wird näherungsweise (ungefähr 90% des Gesamtwertes, siehe Abbildung 2.13) schon bei einer Distanz von etwa 5m, gemessen vom Erdmittelpunkt, erreicht. Daraus läßt sich schließen, daß in erster Linie die unmittelbare Umgebung eines Erders für dessen Ausbreitungswiderstand maßgebend ist (siehe auch Abschnitt 2.3.1 und [7,S.35]).

Da es in der Praxis unmöglich ist, einen Kugelerder in sehr (unendlich) großer Tiefe zu vergraben, rechnet man auch mit den folgenden beiden Modellen:

(B) Modell für Oberflächenerder, die näherungsweise durch eine Halbkugel ersetzt werden können (siehe [23,S.58], [27,S.163-165] und [20,S.65]):

Eine Halbkugelelektrode befindet sich in einem homogenen, isotropen und linearen Medium mit der mäßigen Leitfähigkeit σ . Abweichend vom Modell (A) wird hier der gesamte Raum in zwei Halbräume aufgeteilt (siehe Abbildung 2.14).

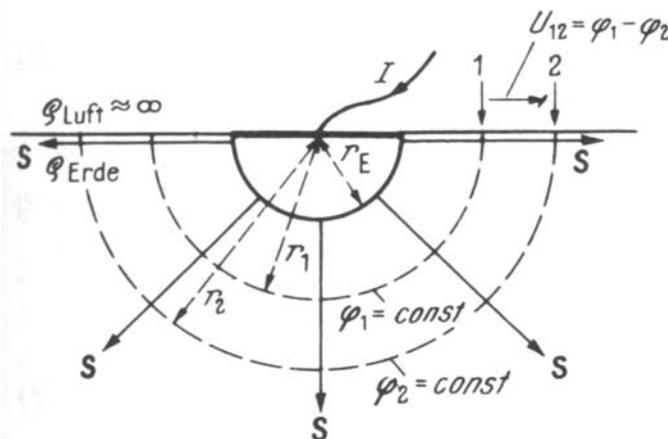


Abb. 2.14: Elektrisches Strömungsfeld des Halbkugelerders
(nach [27,S.163])

Die Schnittebene zwischen diesen beiden Halbräumen ist mit der Erdoberfläche identisch. An der Oberfläche des unteren Halbraumes befindet sich, eingebettet in das oben beschriebene Medium (idealisierte Annahme für das Erdreich), die Halbkugelelektrode. Der obere Halbraum soll nichtleitend sein (idealisierte Annahme für die Luft; die Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft, die durch die in ihr enthaltenen Ionen verursacht wird, kann gegenüber der Leitfähigkeit des Erdreiches tatsächlich vernachlässigt werden), d.h. es soll sich dort kein elektrisches Strömungsfeld ausbilden können ($\sigma=0$). Der eingespeiste Strom I verteilt sich wieder gleichmäßig auf konzentrische Halbkugelflächen (Äquipotentialflächen) rund um den Erder. Daraus resultiert für den Betrag der Stromdichte:

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (2.16)$$

J.....Stromdichte

I.....eingespeister Strom

R.....Abstand vom Mittelpunkt des Halbkugelerders

Durch die Anwendung des Ohmschen Gesetzes (siehe Gleichung (2.11)) erhält man für den Betrag der elektrischen Feldstärke:

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \quad (2.17)$$

Die elektrische Feldstärke und die Stromdichte sind dabei wieder radial zum Mittelpunkt der Halbkugel hin oder radial vom Mittelpunkt der Halbkugel weg gerichtet (je nach der Richtung des Stromes I).

Für die Spannung zwischen der Halbkugeloberfläche und irgendeinem Punkt P innerhalb des unteren Halbraumes gilt nun:

$$\begin{aligned} U_{0P} &= \int_{r_0}^r \vec{E} \circ d\vec{s} = \int_{r_0}^r E \cdot dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_0}^r = \frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

r_0Radius des Halbkugelerders

rEntfernung zum Punkt P

Daraus berechnet sich analog zur Gleichung (2.14-1) die Erderspannung U_E für den Halbkugelerder zu:

$$U_E = \lim_{r \rightarrow \infty} U_{0P} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = \frac{I}{2\pi\sigma r_0} \quad (2.19)$$

Demzufolge gilt für den Ausbreitungswiderstand des Halbkugelerders:

$$R_A = \frac{U_E}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma r_0} = \frac{\rho_E}{2\pi r_0} \quad (2.20)$$

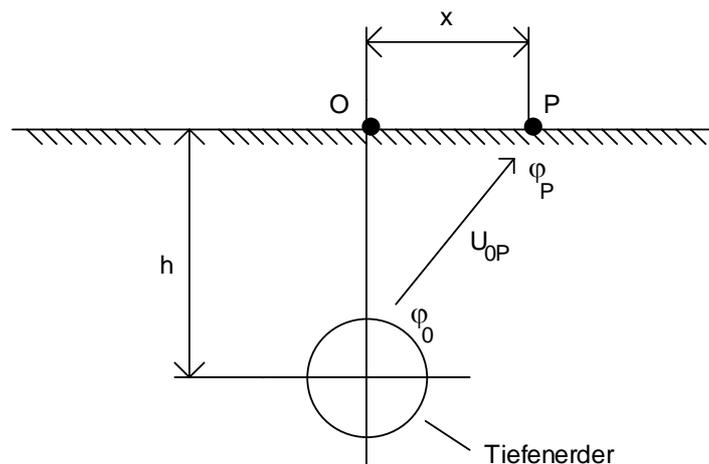
R_AAusbreitungswiderstand

ρ_Espezifischer Erdwiderstand

Was den Verlauf der Spannung U_{0P} und des Ausbreitungswiderstandes R_A betrifft, so sind auch hier wieder die Abbildungen 2.11-1 und 2.13 gültig.

(C) Modell für Tiefenerder, die näherungsweise durch eine Kugel ersetzt werden können (siehe [20,S.68-69]):

Eine Kugelelektrode befindet sich in einem homogenen, isotropen und linearen Medium mit der mäßigen Leitfähigkeit σ . Im Unterschied zum Modell (A) wird auch in diesem Fall der gesamte Raum wieder in zwei Halbräume unterteilt (siehe Abbildung 2.15), wobei die Schnittebene wiederum der Erdoberfläche entspricht.



OEingrabstelle
Pbeliebiger Punkt

Abb. 2.15: Modell für einen Tiefenerder

Unter der Oberfläche des unteren Halbraumes befindet sich in einer bestimmten Tiefe h , eingebettet in das oben beschriebene Medium (Erdreich), eine kugelförmige Elektrode. Der obere Halbraum hat die Leitfähigkeit $\sigma=0$ (Luft). Das Strömungsfeld in der Erde hat dann den Verlauf entsprechend der Abbildung 2.16:

Aus der Gleichung (2.12) wird ersichtlich, daß das elektrische Feld im Erdreich vom Radius r_0 der Kugel- elektrode unabhängig ist. Demzufolge kann man sich als Ursache für dieses Feld eine im Mittelpunkt der Kugel gelegene punktförmige Elektrode denken. Setzt man nun voraus, daß der Radius r_0 der Kugelelektrode gegenüber der Tiefe h sehr klein ist, kann man bei der nachfolgenden Berechnung des Ausbreitungswiderstandes von einer punktförmigen Elektrode ausgehen (siehe [20,S.68]).

Die Erfüllung der Grenzbedingung an der Erdoberfläche (die Normalkomponente der Stromdichte muß stetig sein, die Tangentialkomponenten der Stromdichte verhalten sich an der Grenzfläche wie die Leitfähigkeiten der aneinandergrenzenden Stoffe) macht es notwendig, mit dem Prinzip der Spiegelung zu rechnen (siehe Abbildung 2.17, sowie [20,S.68-69], [23,S.32-33], [25,S.153], [26,S.168-172], [27,S.48-49,165-166], [36,S.42-45]).

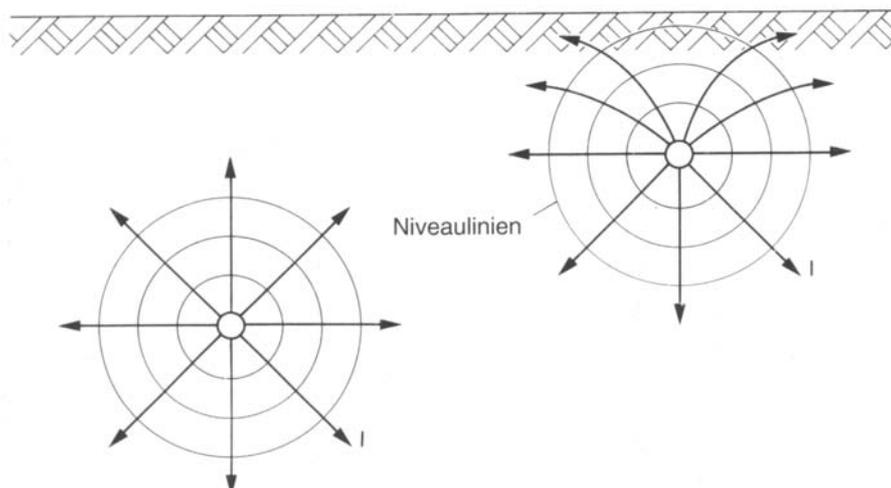


Abb. 2.16: Elektrisches Strömungsfeld des Tiefenerders
(nach [33,S.C4-02])

Da punktförmige Elektroden und ein lineares Medium vorausgesetzt wurden, können die beiden Einzelpotentiale (das von der Kugelelektrode und das von der gespiegelten Elektrode herrührende Potential) überlagert werden (Superpositionsprinzip).

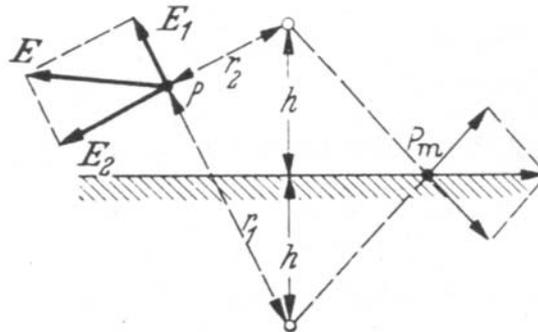


Abb. 2.17: Spiegelungsprinzip
(nach [20,S.68])

Für das Potential φ_P im Abstand r von einer punktförmigen Elektrode gilt:

Die Spannung U_{0P} zwischen der Kugeloberfläche und einem beliebigen Punkt P im Erdreich (siehe Gleichung (2.13)) kann auch als Differenz zwischen dem Potential φ_0 der Kugeloberfläche (verursacht durch die Punktquelle im Zentrum der Kugelelektrode) und dem Potential φ_P des Punktes P in der Form

$$U_{0P} = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} - \frac{I}{4\pi\sigma r} = \varphi_0 - \varphi_P \quad (2.21)$$

dargestellt werden.

Aus Gleichung (2.21) erhält man:

$$\varphi_P = \frac{I}{4\pi\sigma r} + \varphi_0 - \frac{I}{4\pi\sigma r_0} \quad (2.22)$$

Dabei gilt:

$$\varphi_0 - \frac{I}{4\pi\sigma r_0} = C = \text{const.} \quad (2.23)$$

und somit:

$$\varphi_P = \frac{I}{4\pi\sigma r} + C \quad (2.24)$$

Für das Potential φ_P des Punktes p_{ij} im Unendlichen ergibt sich:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_P = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{I}{4\pi\sigma r} + C \right) = C = \varphi_\infty \quad (2.25)$$

Definiert man nun:

$$\varphi_{\infty} = C = 0 = \text{const.} \quad (2.26)$$

so berechnet sich aus Gleichung (2.23) das Potential φ_0 an der Kugeloberfläche zu:

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} \quad (2.27)$$

Für das Potential des beliebigen Punktes P innerhalb des Erdreiches resultiert aus den Gleichungen (2.26) und (2.24):

$$\varphi_P = \frac{I}{4\pi\sigma r} \quad (2.28)$$

Wendet man nun das Prinzip der Spiegelung an (siehe Abbildung 2.17), so ergibt aus den Gleichungen (2.27) und (2.28) mit $r=2h$ (siehe Gleichung (2.28)) sich für das Potential an der Kugeloberfläche:

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} + \frac{I}{4\pi\sigma 2h} = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) \quad (2.29)$$

und für das Potential im Punkt P:

$$\varphi_P = \frac{I}{4\pi\sigma r_1} + \frac{I}{4\pi\sigma r_2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.30)$$

Folglich erhält man für die Spannung zwischen der Kugeloberfläche und dem beliebigen Punkt P:

$$U_{0P} = \varphi_0 - \varphi_P = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.31)$$

Somit ergibt sich für die Erderspannung U_E (siehe Abschnitt 2.1):

$$U_E = \lim_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} U_{0P} = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) \quad (2.32)$$

Demnach gilt für den Ausbreitungswiderstand des kugelförmigen Tiefenerders:

$$\begin{aligned} R_A = \frac{U_E}{I} &= \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{4\pi\sigma r_0} \cdot \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right) = \\ &= \frac{\rho_E}{4\pi r_0} \cdot \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

R_AAusbreitungswiderstand

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

2.3.2 MESSUNG DES AUSBREITUNGSWIDERSTANDES

2.3.2.1 Kompensationsmethode

Der große Vorteil der Kompensationsmethode liegt neben dem geringen Geräteaufwand auch in der Unempfindlichkeit gegenüber hohen und/oder schwankenden Ausbreitungswiderständen der Meßsonden oder Meßelektroden. Alle gebräuchlichen Erdungsmeßgeräte (Erdungsmeßbrücken), deren Funktionsweise auf dem Prinzip der Kompensation (die Kompensationsmethoden werden auch Abgleichverfahren oder Nullmethoden genannt) beruht, arbeiten zur Vermeidung von Polarisationserscheinungen im Erdreich ausschließlich mit Wechselstrom (siehe dazu auch Abschnitt 2.2.2.1.1).

Diese Meßgeräte sind üblicherweise mit einer Kompensationsschaltung nach Behrend ausgerüstet (siehe Abbildung 2.18). Dabei müssen Erdungsmeßgeräte in Vierklemmenausführung, wie sie zur Messung des spezifischen Erdwiderstandes verwendet werden (siehe speziell dazu Abschnitt 2.2.2.1.1), und solche in Dreiklemmenausführung unterschieden werden.

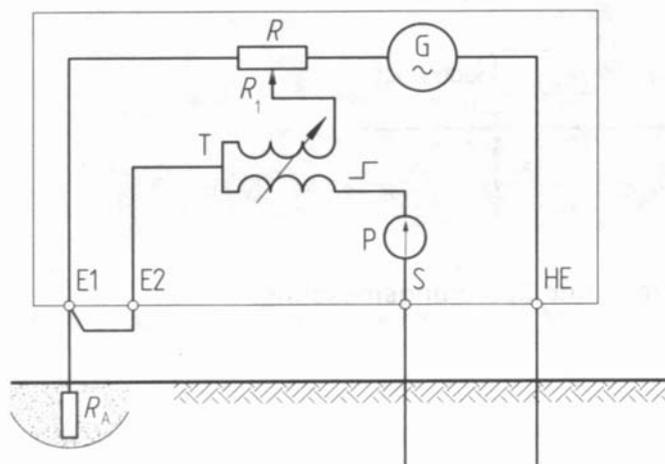


Abb. 2.18: Kompensationsschaltung nach Behrend
(nach [7,S.154])

Zur Messung von Ausbreitungswiderständen sind Meßbrücken in Dreiklemmenausführung (siehe Abbildung 2.19) ausreichend.

Bei Vierklemmen-Meßgeräten muß entsprechend der Abbildung 2.18 eine Kurzschlußlasche zwischen die Anschlußklemmen E1 und E2 eingelegt werden. Bei der Messung sehr kleiner Ausbreitungswiderstände ($R_A \leq 1\Omega$) sollten anstatt der Kurzschlußlasche zwei getrennte Meßleitungen verwendet werden (siehe Abbildung 2.20), um die Messung nicht durch den Kontaktwiderstand der Anschlußklemme am Erder und den Ohmschen Widerstand der Meßleitung Meßgerät-Erder zu beeinflussen.

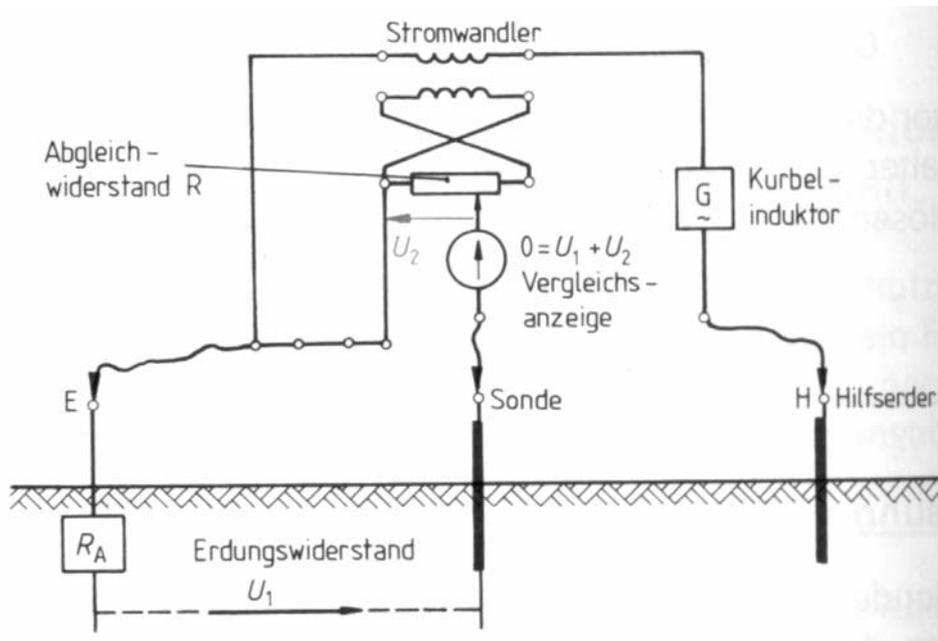


Abb. 2.19: Meßbrücke in Dreiklemmenausführung (nach [17,S.396])

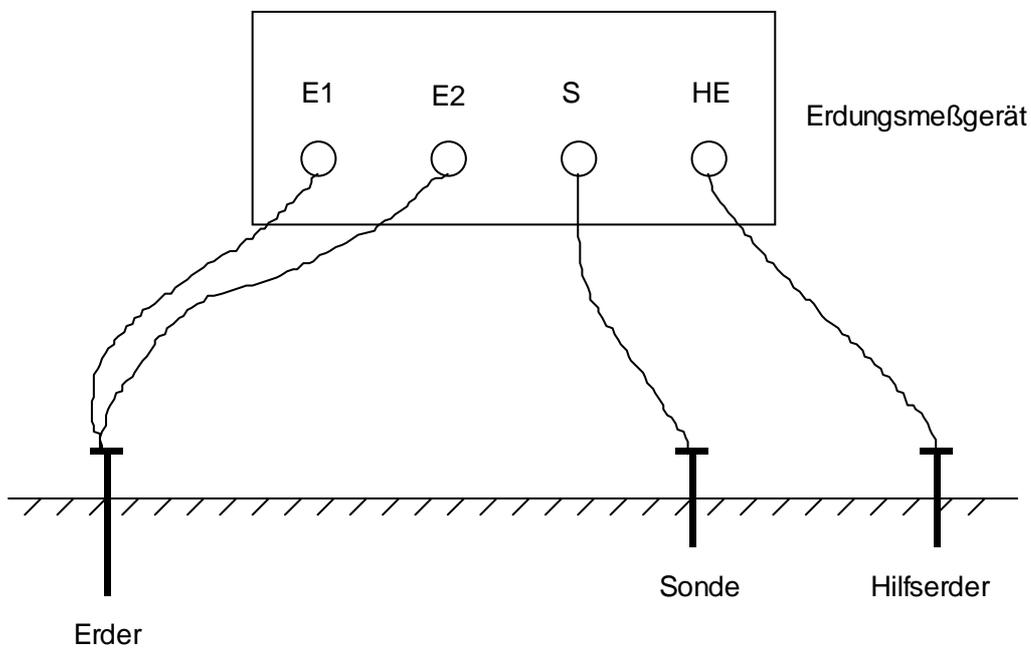


Abb. 2.20: Messung sehr kleiner Ausbreitungswiderstände

Neben der bisher erwähnten Kompensationsschaltung nach Behrend gibt es unter anderem auch die Möglichkeit, Ausbreitungswiderstände mit der Wiechert-Zipp-Brücke (siehe Abbildung 2.21) zu messen.

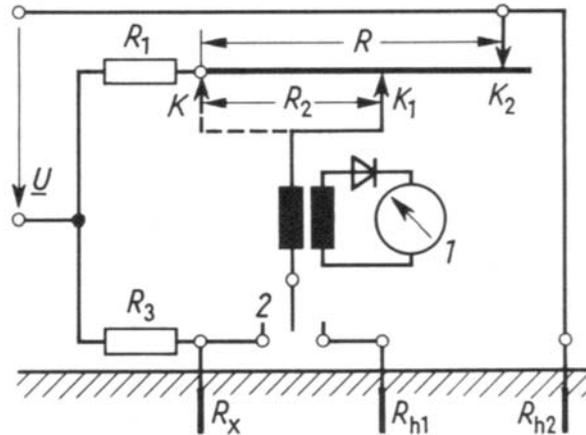


Abb. 2.21: Wiechert-Zipp-Brücke
(nach [16,S.225])

Während der Messung muß hier die Brücke zweimal abgeglichen werden. Zuerst wird der Nullzweig mit dem Erder verbunden und mit dem Schleifkontakt K_2 ein Abgleich durchgeführt. Der Schleifkontakt K_1 bleibt dabei am Punkt K stehen. Anschließend wird der Nullindikator mit der Meßsonde (R_{h1}) verbunden und bei feststehendem Schleifer K_2 die Brücke mit dem Schleifkontakt K_1 erneut abgeglichen.

Für den Ausbreitungswiderstand erhält man dann:

$$R_A = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_1} \quad (2.34)$$

Bei konstanten Widerständen R_1 und R_3 kann der Ausbreitungswiderstand R_A direkt abgelesen werden (der Meßdraht wird dazu mit einer Skala versehen). Eine Änderung von R_1 und/oder R_3 ergibt einen anderen Meßbereich.

Schließlich gibt es auch noch die Möglichkeit, den Ausbreitungswiderstand mit einer Wheatstonschen Brücke zu messen. Bei dieser etwas umständlichen Methode werden durch drei aufeinanderfolgende Messungen die Widerstände

$$R_1 = R_A + R_S \quad (2.35)$$

$$R_2 = R_A + R_H \quad (2.36)$$

und

$$R_3 = R_S + R_H \quad (2.37)$$

R_AAusbreitungswiderstand des Erders
 R_SAusbreitungswiderstand der Sonde
 R_HAusbreitungswiderstand des Hilfserders

ermittelt (siehe Abbildung 2.22).

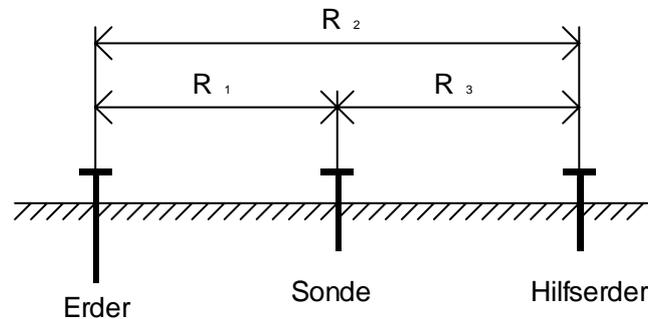


Abb. 2.22: Messung mit einer Wheatstonschen Brücke

Aus den Gleichungen (2.35) bis (2.37) läßt sich dann der Ausbreitungswiderstand in der Form

$$R_A = \frac{R_1 + R_2 - R_3}{2} \quad (2.38)$$

berechnen. Bei diesem Meßverfahren kann also der Ausbreitungswiderstand nicht direkt abgelesen werden.

2.3.2.2 Strom-Spannungsmessung

2.3.2.2.1 Grundprinzip

Im Falle ausgedehnter Erdungsanlagen mit kleinen Ausbreitungswiderständen ($R_A \leq 0.5 \Omega$) können mit Erdungsmeßgeräten (Erdungsmeßbrücken), die nach dem Prinzip der Kompensation (siehe Abschnitt 2.3.2.1) arbeiten, keine genauen Meßergebnisse erzielt werden. Der Grund dafür liegt darin, daß die kleinen Meßströme (diese liegen im Milliamperebereich) dieser Meßgeräte bei derartig kleinen Ausbreitungswiderständen die Erdungsspannung U_E (siehe Abschnitt 2.1) nur auf einen schwer meßbaren Wert anheben. Um trotzdem zuverlässige Meßwerte zu erhalten, empfiehlt es sich daher, die Strom-Spannungsmessung anzuwenden.

Genauso, wie die Methoden zur Messung des spezifischen Erdwiderstandes (siehe Abschnitt 2.2.2), beruht auch das Verfahren der Strom-Spannungsmessung auf der Erzeugung eines elektrischen Strömungsfeldes im Erdreich. Der Potentialverlauf in diesem Feld ist in der Abbildung 2.23 dargestellt.

Wie aus der Abbildung 2.24 hervorgeht, wird das Strömungsfeld durch das Anlegen einer Wechselspannung (diese kann direkt oder indirekt aus dem Starkstromnetz aber z.B. auch einem Notstromaggregat entnommen werden) zwischen dem Erder und einer Gegenelektrode (Hilfserder) erzeugt. Mit einer Meßsonde wird nun die Erdungsspannung U_E (Spannung zwischen Erder und Bezugs Erde, siehe auch Abschnitt 2.1), also der Spannungsabfall am Ausbreitungswiderstand R_A , abgegriffen (siehe Abbildung 2.24). Die Meßsonde muß sich dabei im Bereich der Bezugs Erde (siehe Abschnitt 2.1), also im Bereich der geringsten Potentialdifferenz an der Erdoberfläche befinden (bezüglich der exakten Anordnung der Meßsonde und des Hilfserders siehe Abschnitt 2.3.2.4).

Die Erdungsspannung U_E kann mit einem Voltmeter gemessen werden, zusätzlich wird mit einem Amperemeter der Erdungsstrom I_E (siehe Abschnitt 2.1) bestimmt (siehe Abbildung 2.23). Der Quotient dieser beiden Meßwerte ergibt den Ausbreitungswiderstand R_A in der Form:

$$R_A = \frac{U_E}{I_E} \tag{2.39}$$

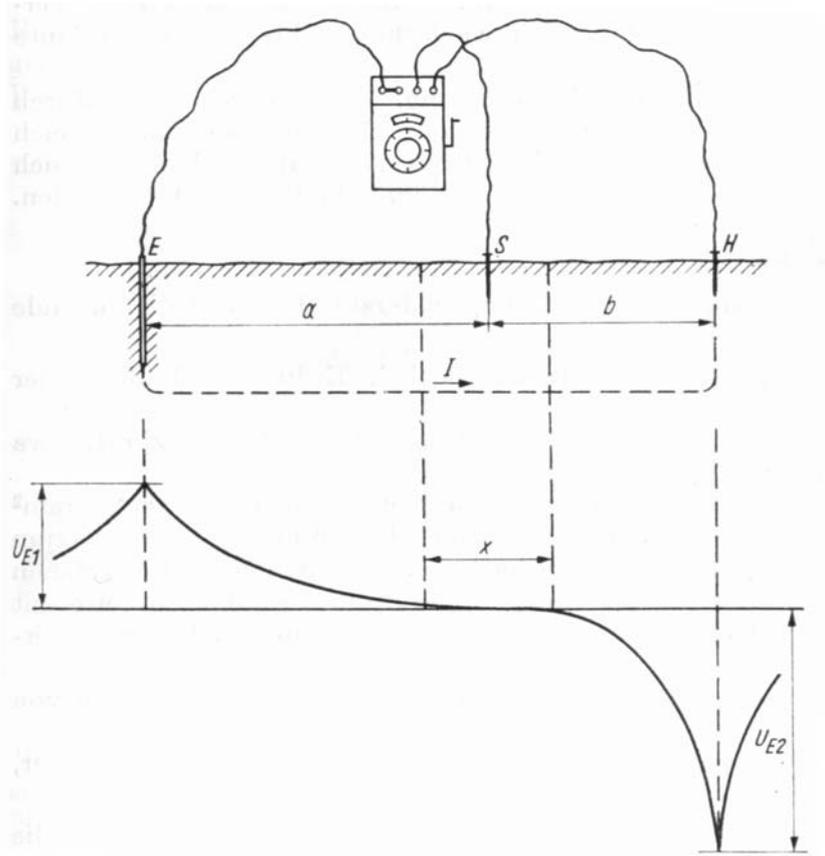


Abb. 2.23: Potentialverlauf im Erdreich (nach [31,S.89])

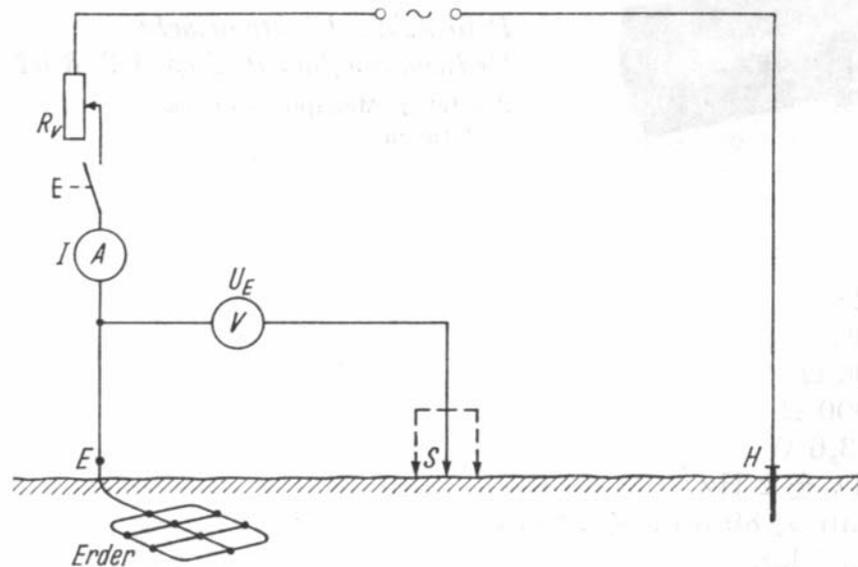


Abb. 2.24: Strom-Spannungsmessung
(nach [31,S.94])

Strenggenommen müßte gelten:

$$Z_E = \frac{U_E}{I_E} \quad (2.40)$$

Z_E Betrag der Erdungsimpedanz (siehe Abschnitt 2.1)

und

$$R_A = \frac{U_E}{I_E} \cdot \cos \varphi_E = Z_E \cdot \cos \varphi_E \quad (2.41)$$

Man geht aber stillschweigend von der Annahme

$$\cos \varphi_E = 1 \quad (2.42)$$

aus, d.h. daß die Erdungsimpedanz als reiner Wirkwiderstand betrachtet wird. Diese Annahme gilt sowohl für alle vorhergehenden als auch für alle nachfolgenden Abschnitte.

Eine exakte Messung des tatsächlichen Ausbreitungswiderstandes nach Gleichung (2.41) ist mit der Strom-Leistungsmessung (siehe Abschnitt 2.3.2.3) möglich.

Damit der relative Fehler bei der Messung des Ausbreitungswiderstandes nicht größer wird als 10%, ist es notwendig, daß zur Messung der Erdungsspannung U_E ein Voltmeter verwendet wird, dessen Innenwiderstand R_i (auch Eingangswiderstand bzw. Eingangsimpedanz genannt) mindestens das zehnfache des Ausbreitungswiderstandes R_{AS} der Meßsonde beträgt. Besonders vorteilhaft ist hier die Anwendung elektronischer Meßgeräte (Verstärkerspannungsmessgeräte), bei denen durch spezielle Meßverstärker (siehe dazu [89,S.130-136], [88,S.128-135], [87,S.209-210,285-290], [30,S.387-391,400-403] und [16,S.54-62]) im Eingangsschaltkreis Eingangswiderstände bis zu $10^{14}\Omega$ (z.B. mit Elektrometervverstärkern, siehe oben) erreicht werden können. In [19,S.133] wird für den Innenwiderstand R_i des Voltmeters ein Wert von mehr als $75k\Omega/V$ empfohlen. Gemäß [131,S.27] soll das Voltmeter zur Messung der Erdungsspannung einen Innenwiderstand von etwa $40k\Omega$ haben. Im Unterschied dazu werden zur meßtechnischen Ermittlung der Berührungsspannung für Menschen Span-

nungsmesser mit einem Eingangswiderstand von $1\text{k}\Omega$ (siehe [19,S.133]) bzw. $3\text{k}\Omega$ (siehe [131,S.37]) verwendet (mit diesem Widerstandswert soll der Körperwiderstand des Menschen nachgebildet werden; siehe hierzu auch [31,S.19]).

Ist es nicht möglich, die Bedingung $R_i > 10R_{AS}$ (siehe [31,S.94]) zu erfüllen, dann muß das Meßergebnis entsprechend korrigiert werden.

Man multipliziert dazu das Meßergebnis mit dem Korrekturfaktor

$$k = \frac{R_i + R_{AS}}{R_i} \quad (2.43-1)$$

R_i Innenwiderstand des Voltmeters

R_{AS} Ausbreitungswiderstand der Sonde

Demzufolge gilt für $R_i < 10R_{AS}$:

$$R_A = k \cdot \frac{U_E}{I_E} \quad (2.43-2)$$

Der Ausbreitungswiderstand R_{AS} der Meßsonde kann entweder mit einer Erdungsmeßbrücke (Kompensationsmethode, siehe Abschnitt 2.3.2.1) oder ebenfalls mit der Strom-Spannungsmessung bestimmt werden.

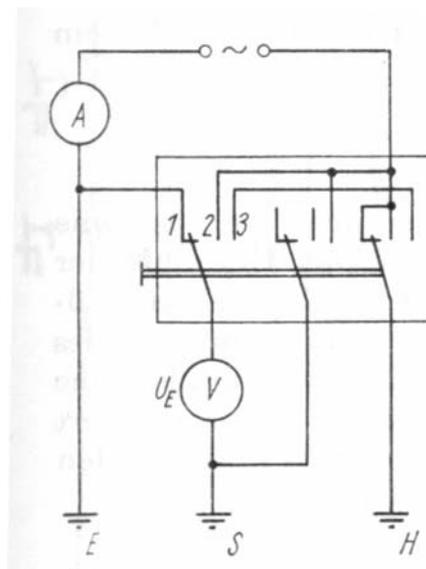


Abb. 2.25: Messung des Ausbreitungswiderstandes des Erders E, des Hilferders H und der Meßsonde S (nach [31,S.97])

Eine spezielle Schaltung zur Messung des Ausbreitungswiderstandes des Erders E (Schalterstellung 1), des Hilferders H (Schalterstellung 2) und der Meßsonde S (Schalterstellung 3) zeigt die Abbildung 2.25.

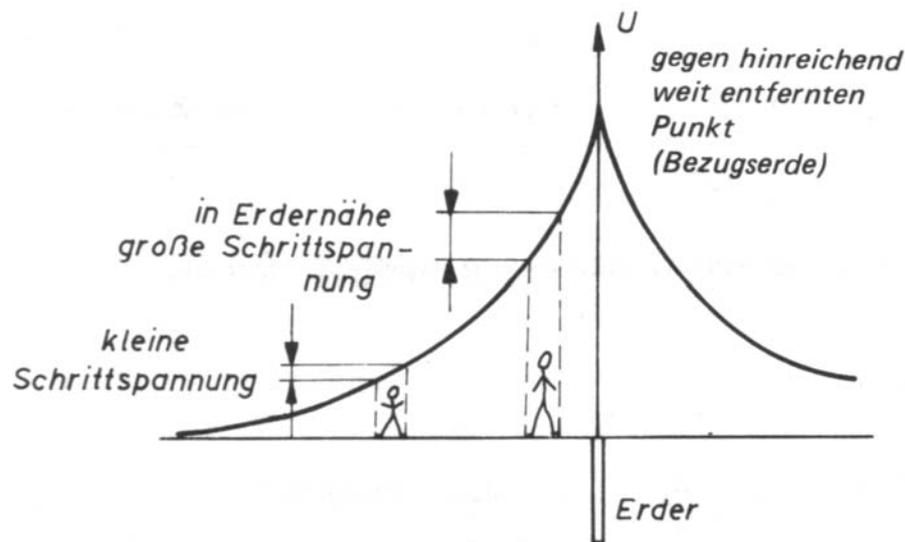


Abb. 2.26: Schrittspannung im Bereich des Erders
(nach [7,S.36])

Abschließend sollte vielleicht noch angemerkt werden, daß bei der Strom-Spannungsmessung aufgrund der relativ großen Meßströme auch entsprechend große Erdungsspannungen U_E auftreten können. Es ist daher auf eine Abgrenzung des Spannungstrichters (die Schrittspannung ist in Erdenähe am größten, siehe dazu Abbildung 2.26) und/oder eine Begrenzung der Erdungsspannung auf 50V zu achten (siehe [131,S.33], [7,S.12] und [31,S.46]).

In bezug auf die Erdungsspannung und die zulässige Berührungsspannung müssen bei der Bemessung von Erdungen in Nieder- und Hochspannungsanlagen die Werte laut den Tabellen 15-1 in [145,S.29] und 17-1 in [131,S.64] eingehalten werden.

2.3.2.2.2 Strom-Spannungsmessung bei direkter Stromentnahme aus dem Netz

Wird die Strom-Spannungsmessung mit einer unmittelbaren Stromentnahme aus dem Starkstromnetz durchgeführt, so ist bei dieser Messung kein separater Hilfserder notwendig, da diese Funktion der Betriebserder des Drehstromnetzes (mit Ausnahme des Schutzleitungssystemes muß in Mehrleiteranlagen mit Nennspannungen über 250V zwischen den Außenleitern der neutrale Punkt unmittelbar geerdet werden) übernimmt. Der Aufbau der Meßanordnung kann der Abbildung 2.27 entnommen werden.

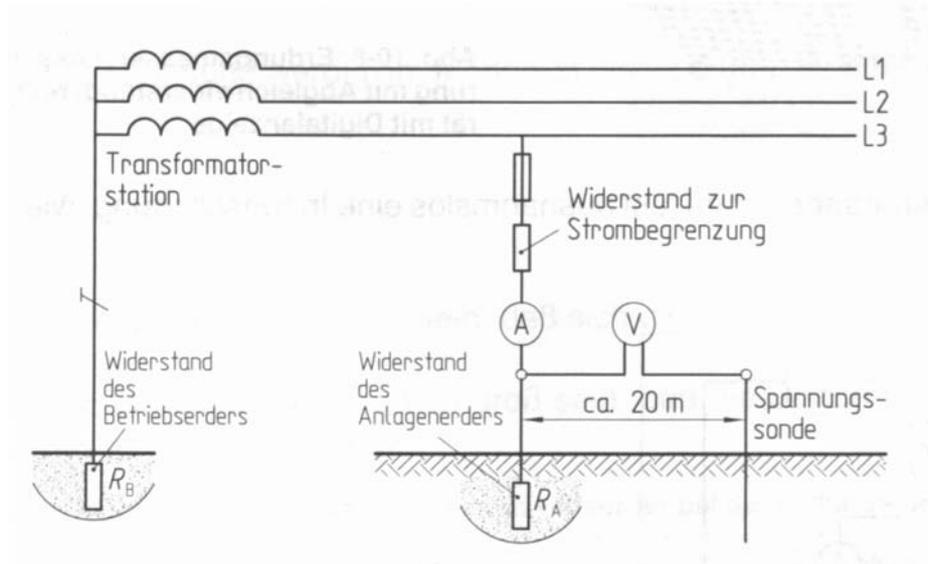


Abb. 2.27: Strom-Spannungsmessung bei direkter Stromentnahme aus dem Starkstromnetz (nach [7,S.153])

Für den Fall, daß kein Netzpunkt betriebsmäßig geerdet ist (z.B. im Schutzleitungssystem) und auch keine Überspannungsschutzeinrichtung zwischen den aktiven Leitern (L_1 , L_2 , L_3 , N) und der Erde vorhanden sind, die während der Messung überbrückt werden könnten, ist es unter der Zustimmung des EVU's möglich, für die Dauer der Durchführung der Messung einen aktiven Leiter, vorzugsweise über eine Sicherung und einen Widerstand zur Strombegrenzung, zu erden.

In beiden Fällen gelten für die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes R_A anhand der Meßwerte U_E und I_E wieder die Formeln (2.39), (2.43) und (2.44).

2.3.2.2.3 Strom-Spannungsmessung bei indirekter Stromentnahme aus dem Netz

Um störende Beeinflussungen aus dem Starkstromnetz zu verhindern, und/oder die Kurzschlußleistung des Meßkreises zu begrenzen, ist es auch möglich, die zur Messung notwendige Wechselspannung einem Transformator (z.B. einem Regeltransformator) mit galvanisch getrennten Wicklungen zu entnehmen. Wie aus dem Aufbau der Meßschaltung (siehe dazu Abbildung 2.28) hervorgeht, ist zur Durchführung der Messung im Unterschied zur Strom-Spannungsmessung mit direkter Stromentnahme aus dem Netz (siehe Abschnitt 2.3.2.2.2) wieder ein Hilferder notwendig.

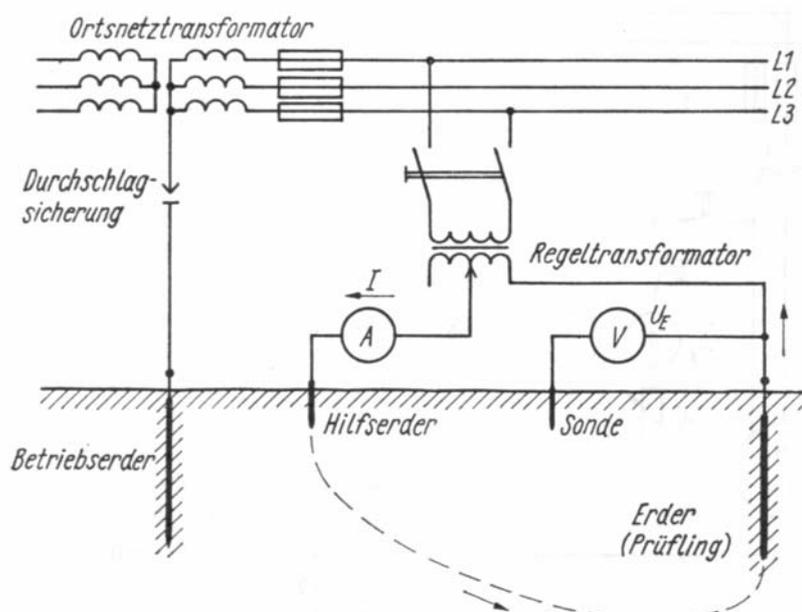


Abb. 2.28: Strom-Spannungsmessung bei indirekter Stromentnahme aus dem Starkstromnetz (nach [31,S.96])

Für die rechnerische Ermittlung des Ausbreitungswiderstandes aus den ermittelten Meßwerten U_E und I_E sind wiederum die Gleichungen (2.39), (2.43) und (2.44) gültig.

2.3.2.2.4 Ausschaltung von Fremd- und Störspannungen

Bei der Durchführung von Erdungsmessungen mit Hilfe der Strom-Spannungsmessung (siehe Abschnitt 2.3.2.2) können bei weit ausgedehnten Erdungsanlagen (z.B. in Umspannwerken oder bei Freileitungen) Fehler durch Fremd- oder Störspannungen verursacht werden (etwa infolge einer induktiven Beeinflussung durch benachbarte Stromkreise).

In der Praxis kommen die folgenden Verfahren zur Eliminierung von Fremd- und Störspannungen zur Anwendung (siehe [145,S.56-57]).

(A) Schwebungsmethode: Die Frequenz der zwischen der Erdungsanlage und einer Gegenelektrode angelegten Wechselspannung weicht nur geringfügig (einige Zehntel Hz) von der Netzfrequenz ab. Der vom Meßstrom am Meßsystem verursachte Spannungsabfall (=Erdungsspannung bei der Messung) oszilliert mit der gleichen Frequenz. Dieser Spannungsabfall interferiert mit einer eventuell vorhandenen netzfrequenten Störspannung in der Art, daß die daraus resultierende Spannung mit der Frequenzdifferenz zwischen einem Maximalwert (Summe aus den beiden Spannungs-scheitelwerten) und einem Minimalwert (Differenz zwischen den beiden Spannungs-scheitelwerten) schwingt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der sogenannten Schwebung (siehe [149,S.32-36] und [150,S.388-390]). Für den vom Meßstrom (Versuchsstrom (siehe Abb. 127-1 in [145,S.52]) verursachten Spannungsabfall, also für die Erdungsspannung bei der Messung kann man dann schreiben (siehe [145,S.57]):

$$\Delta U = U_{EV} = \frac{|U_{\max}| + |U_{\min}|}{2} \tag{2.44-1}$$

U_{EV} Erdungsspannung bei der Messung

(B) Umpolungsmethode: Der vom Versuchsstrom hervorgerufenen Spannungsabfall (=Erdungsspannung bei der Messung) kann bei diesem Verfahren mit zwei Meßschritten bestimmt werden. Im ersten Schritt wird zwischen der Erdungsanlage und einer Gegenelektrode eine netzsynchrone Wechselspannung angelegt. Gemessen wird die auftretende Erdungsspannung. Im zweiten Schritt wird die Meßspannung um 180° el. gedreht. Es wird erneut auftretende Erdungsspannung gemessen. Weiters wird die Störspannung bei abgeschaltetem Meßstrom ermittelt. Für den vom Meßstrom (Versuchsstrom (siehe Abb. 127-1 in [145,S.52]) verursachten Spannungsabfall, d.h. für die tatsächliche Erdungsspannung bei der Messung gilt somit (siehe [145,S.57]):

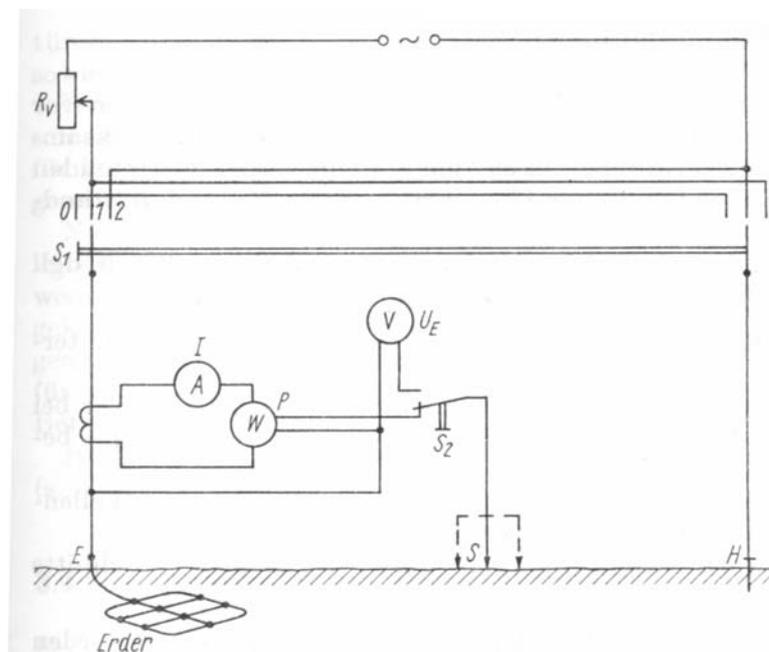
$$\Delta U = U_{EV} = \sqrt{\frac{U_a^2 + U_b^2}{2} - U_s^2} \quad (2.44-1)$$

U_{EV} Erdungsspannung bei der Messung
 U_a Erdungsspannung vor der Umpolung
 U_b Erdungsspannung nach der Umpolung
 U_s Störspannung

(C) Kompensationsverfahren: Bei der Verwendung längerer Meßleitungen (siehe Abb. 127-1 in [145,S.52]) muß darauf geachtet werden, daß diese rechtwinkelig zur Versuchsleitung angeordnet werden. Sollte das nicht möglich sein, so kann die infolge des Meßstromes (Versuchsstrom, siehe Abb. 127-1 in [145,S.52]) in den Meßleitungen induzierte Spannung mittels einer Kompensationschaltung (siehe [150,S.47]) eliminiert werden.

(D) Abblockung von Gleichströmen: Im Falle hoher Gleichspannungsanteile in der Fremd- oder Störspannung müssen Meßgeräte (Spannungsmesser) verwendet werden, mi denen derartige Gleichspannungen abgeblockt werden können.

2.3.2.3 Strom-Leistungsmessung



Eine Strom-Spannungsmessung erfolgt durch das Umschalten von S_2 .

Abb. 2.29: Strom-Leistungsmessung
(nach [31,S.99])

Fremdströme mit der Frequenz des Meßstromes können für den Fall, daß sehr kleine Ausbreitungswiderstände gemessen werden müssen, einen beträchtlichen Einfluß auf das Meßergebnis der Strom-Spannungsmessung (siehe Abschnitt 2.3.2.2) haben. Aus diesem Grund wurde die Strom-Leistungsmessung entwickelt. Die entsprechende Meßschaltung kann der Abbildung 2.29 entnommen werden.

Mit diesem Meßverfahren kann der Einfluß von Fremdströmen auf das Meßergebnis eliminiert werden. Man bildet dazu den arithmetischen Mittelwert \bar{P} aus den gemessenen Wirkleistungen P_{E1} (Schalterstellung 1 von S_1 bei U_E und I_E) und P_{E2} (Schalterstellung 2 von S_1 bei U_E und I_E). Anschließend subtrahiert man vom arithmetischen Mittelwert \bar{P} die gemessene Wirkleistung P_F (Schalterstellung 0 von S_1 bei U_F und I_F), die ausschließlich vom Fremdstrom I_F verursacht wird.

Daraus resultiert dann die Wirkleistung

$$\bar{P}' = \bar{P} - P_F = U_E \cdot I_E \cdot \cos \varphi_E \quad (2.45)$$

Aus der Wirkleistung \bar{P}' kann somit der Ausbreitungswiderstand, also der Realteil der Erdungsimpedanz Z_E , ermittelt werden (siehe dazu auch Gleichung (2.40) bis (2.42)).

Es gilt:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{\bar{P}'}{I_E^2} = \frac{U_E \cdot I_E \cdot \cos \varphi_E}{I_E^2} = \\ &= \frac{U_E}{I_E} \cdot \cos \varphi_E = Z_E \cdot \cos \varphi_E = R_A \end{aligned} \quad (2.46)$$

Für den Fall, daß der Innenwiderstand R_i der Spannungsspule des Wattmeters kleiner ist als das zehnfache des Ausbreitungswiderstandes R_{AS} der Meßsonde, wodurch der Meßfehler größer als 10% wird, kann das Meßergebnis wieder mit dem Korrekturfaktor k (siehe Gleichung (2.43)) berichtigt werden.

Man erhält dadurch:

$$R_A = k \cdot \frac{\bar{P}'}{I_E^2} \quad (2.47)$$

2.3.2.4 Anordnung der Meßsonde und des Hilfserders

Die Voraussetzung für ein richtiges Ergebnis bei der Messung des Ausbreitungswiderstandes R_A ist die korrekte Anordnung der Meßsonde und des Hilfserders (der Hilfserder wird auch Gegenelektrode oder Gegenerder genannt). Das gilt sowohl für die Kompensationsmethode (Abschnitt 2.3.2.1) als auch für die Strom-Spannungsmessung (Abschnitt 2.3.2.2) und die Strom-Leistungsmessung (Abschnitt 2.3.2.3).

Es ist also sehr wichtig, daß sich einerseits die Potentialtrichter des Erders und des Hilfserders nicht überlappen und sich andererseits die Meßsonde im Bereich der Bezugserde (siehe Abschnitt 2.1)

befindet. Demzufolge ist die Kenntnis des Potentialverlaufes (siehe dazu Abbildung 2.23) zwischen dem Erder und dem Hilfserder für die Messung von großer Bedeutung.

Für die Mindestabstände zwischen Erder und Sonde bzw. zwischen Sonde und Hilfserder gilt nach [31,S.90] und [7,S.155] (der Erder, die Meßsonde und der Hilfserder liegen dabei in etwa auf einer Geraden):

$$l \leq 4m: a \geq 20m, b \geq 20m \quad (2.48)$$

$$l > 4m: a = 5l, b \geq 40m \quad (2.49)$$

lLänge des Band- oder Staberders bzw. Durchmesser der Ersatzkreiplatte des Strahlen-, Ring-
oder Maschenerders

aAbstand zwischen dem Erder und der Meßsonde

bAbstand zwischen der Meßsonde und dem Hilfserder

Andere Vorschläge für die Festlegung der Mindestabstände sind in der Literatur zu finden (siehe dazu [11,S.175-177], [14,S.604], [19,S.112] und [9,S.163-164]).

Da in vielen Fällen der Potentialverlauf zwischen dem Erder und dem Hilfserder nicht bekannt ist, bzw. die Kenntnis über die räumliche Anordnung des Erders im Erdreich und/oder über galvanische Verbindungen zu natürlichen Erdern (z.B. Wasserrohre, leitende Kabelmäntel, ...) fehlt, kann es notwendig sein, die Bezugserde meßtechnisch zu bestimmen.

Die Vorgangsweise dabei ist die folgende:

Es finden drei Messungen statt. Bei der ersten muß der Abstand Erder-Sonde den Wert a (Mindestabstand, siehe oben) haben, bei der zweiten $0,8a$ und schließlich bei der dritten $1,2a$. Sollte der Unterschied zwischen diesen drei Messungen mehr als 10% ausmachen, ist es erforderlich erneut zu messen. Die Abstände a (Abstand Erder-Meßsonde) und b (Abstand Meßsonde-Hilfserder) sind dabei solange zu vergrößern, bis die oben angegebene maximale Differenz von 10% unterschritten wird. Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, daß die Abstände a und b aufgrund von Hindernissen (Straßen, Häuser, ...) nicht eingehalten werden können. In diesem Fall kann die Messung mit den größtmöglichen Abständen durchgeführt werden. Im Anschluß daran erfolgt eine mathematische Ermittlung (Extrapolationsmethode) des Ausbreitungswiderstandes.

Eine Alternative zum oben beschriebenen Verfahren, bei dem der Erder, die Meßsonde und der Hilfserder ungefähr auf einer Linie liegen, ist die Anordnung der drei Elektroden im Dreieck (90°-Methode). Es ist dabei ein rechter Winkel zwischen der Meßleitung vom Erder zur Meßsonde und der Meßleitung vom Erder zum Hilfserder anzustreben (siehe Abbildung 2.30).

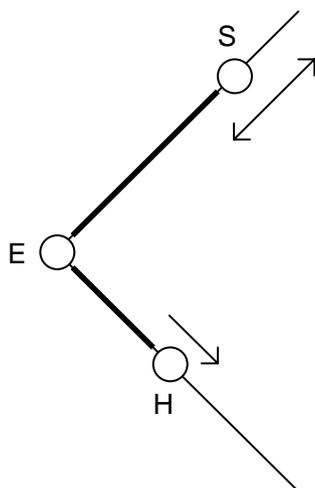


Abb. 2.30: 90°-Methode

In weiterer Folge wird nun der Standort der Meßsonde (dieser kann zunächst willkürlich gewählt werden) beibehalten und der Hilfserder solange vom Erder entfernt, bis der Meßwert konstant bleibt. Es überlappen sich dann der Potentialtrichter des Erders und der des Hilfserders nicht mehr. Hierauf wird die Lage der Meßsonde solange variiert, bis sich wiederum der Meßwert nicht mehr ändert (der Standort des Hilfserders darf dabei nicht verändert werden). Dadurch erreicht man, daß sich die Meßsonde im Bereich der Bezugserde befindet.

Auf diese Weise lassen sich ohne großen Aufwand einwandfreie Meßbedingungen herstellen.

Abschließend werden noch ein paar weitere Punkte angeführt, die zur Vermeidung von Meßfehlern beachtet werden sollten.

- (1) Bei der Anwendung der Kompensationsmethode soll sich die Frequenz des Meßstromes der Erdungsmeßbrücke von der Frequenz technischer Wechselströme bzw. deren Oberschwingungen unterscheiden (die Abweichung sollte dabei mindestens 5Hz betragen). Es muß dabei jedoch berücksichtigt werden, daß die Meßfrequenz nicht größer als 150Hz sein darf.
- (2) Die Meßsonde und der Hilfserder sollten bei gestreckten Erdern (z.B. bei Bänderdern) nach Möglichkeit rechtwinkelig zur größten Ausdehnung des Erders angeordnet werden.
- (3) Es ist darauf zu achten, daß der Ausbreitungswiderstand der Meßsonde, speziell jedoch der des Hilfserders, nicht zu groß ist. Sollte es notwendig sein, können für die Meßsonde und/oder den Hilfserder mehrere Erdspeieße in einem Abstand von ungefähr 1m bis 2m in das Erdreich eingebracht und miteinander verbunden werden.

2.3.3 BERECHNUNG DES AUSBREITUNGSWIDERSTANDES

2.3.3.1 Allgemeine Bemerkungen

[20,S.160-162,470-480], [23,S.14-21], [25,S.31-43], [21,S.24-47], [24,S.10,17-49], [26,S.102-116], [27,S.377-412,472-475,496-502], [78,S.11], [79,S.273-314], [50,S.217,243,259], [91,S.169], [90,S.126-128,308], [92,S.79-80]

Die exakte Berechnung des Ausbreitungswiderstandes R_A für zeitlich veränderliche Ströme, also auch für technische Wechselströme (z.B. Wechselstrom mit Netzfrequenz), würde nichts anderes bedeuten, als die Maxwellschen Gleichungen in ihrer allgemeingültigen Form zu lösen.

Die Maxwellschen Gleichungen für das nichtstationäre (rasch veränderliche) elektromagnetische Feld lauten (Literaturangaben siehe oben):

1.Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (2.50)$$

mit

$$\vec{J} = \vec{J}_I + \vec{J}_K + \vec{J}_V \quad (2.51)$$

2.Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{rot} (\vec{E}_w + \vec{E}_b) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.52)$$

mit

$$\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.53)$$

3.Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{wa} \quad (2.54)$$

4. Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.55)$$

Zusätzlich gelten noch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \quad (2.56)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (2.57)$$

und das erweiterte Ohmsche Gesetz in Differentialform

$$\vec{J}_l = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot (\vec{E}_w + \vec{E}_q + \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_e) \quad (2.58)$$

[20, S.60], [23, S.55], [24, S.10], [25, S.34], [27, S.153-156, 411-412], [90, S.85], [91, S.170]

Für die Konvektionsstromdichte gilt:

$$\vec{J}_k = \rho_{wa} \cdot \vec{v} \quad (2.59)$$

Für die Verschiebungsstromdichte gilt:

$$\vec{J}_v = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.60)$$

Für die eingeprägte Stromdichte gilt (siehe auch Gleichung (2.58)):

$$\vec{J}_e = \sigma \cdot \vec{E}_e \quad (2.61-1)$$

\vec{H} magnetische Erregung (magnetische Feldstärke)

\vec{B} magnetische Flußdichte (magnetische Induktion)

\vec{E} gesamte elektrische Feldstärke

\vec{E}_e eingeprägte elektrische Feldstärke (Feldstärke nichtelektrischer Natur)

\vec{E}_w elektrische Feldstärke des vom magnetischen Schwund herrührenden elektrischen Wirbelfeldes
(induzierendes elektrisches Wirbelfeld)

\vec{E}_q elektrische Feldstärke des vom induzierenden elektrischen Wirbelfeld herrührenden elektrischen Quellenfeldes

\vec{E}_b von der Lorentz-Kraft herrührende elektrische Feldstärke (bewegungsinduzierte elektrische Feldstärke)

\vec{D} elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte)

\vec{J} gesamte elektrische Stromdichte

\vec{J}_e eingeprägte elektrische Stromdichte

\vec{J}_k Konvektionsstromdichte (beliebige mit wahrer Raumladung geladene Körper, die sich im Raum
.....bewegen)

\vec{J}_l Leitungsstromdichte (bewegte elektrische Ladungen)

\vec{J}_v Verschiebungsstromdichte (zeitliche Ladungsänderung)
 ρ_{wa} wahre Raumladungsdichte
 ε absolute Permittivität (absolute Dielektrizitätskonstante)
 ε_0 Permittivität des Vakuums (elektrische Feldkonstante)
 ε_r relative Permittivität (Permittivitätszahl, Dielektrizitätszahl)
 μ absolute Permeabilität
 μ_0 Permeabilität des Vakuums (magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante)
 μ_r relative Permeabilität (Permeabilitätszahl)
 σ elektrische Leitfähigkeit
 \vec{V} Geschwindigkeit

Im allgemeinen treten im Erdreich weder Konvektionsströme noch bewegungsinduzierte elektrische Feldstärken auf. Außerdem kann man im Falle technischer Wechselströme davon ausgehen, daß die Ausdehnungen des betrachteten Bereiches in der Erde (Bereich des elektrischen Strömungsfeldes zwischen den Erdelektroden im Erdreich) im Verhältnis zur Wellenlänge λ der Feldgrößen sehr klein sind. Einer elektromagnetischen Welle mit der Frequenz f kann in einem Dielektrikum mit der relativen Permittivität ε_r und der relativen Permeabilität μ_r die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} \quad (2.61-2)$$

c Lichtgeschwindigkeit ($c=2,99792458 \cdot 10^8$ m/s - siehe [90,S.309])
 f Frequenz
 ε_r relative Permittivität (Permittivitätszahl, Dielektrizitätszahl)
 μ_r relative Permeabilität (Permeabilitätszahl)

zugeordnet werden (siehe dazu [90,S.305], [91,S.331,336,344] und [92,S.1-2]).

Diese Wellenlänge beträgt bei einer Netzfrequenz von 50Hz z.B. im Vakuum 5995,85km, im Wasser 666,21km und in der Luft 5994,07km (siehe Gleichung (2.61-2), Tab.2.1 in [90,S.47] und Tab.4.1 in [90,S.130]). Für das Erdreich ergibt sich mit $\mu_r=1$ und $\varepsilon_r=6$ (siehe [94,S.410]) ein Wert von $\lambda=2447,80$ km (die Wellenlänge für das Erdreich liegt je nach dessen Zusammensetzung immer zwischen der von der Luft und der vom Wasser).

Da sich zudem die Feldgrößen nur langsam ändern (etwa bei technischen Wechselströmen, also auch bei einer Netzfrequenz von 50Hz; man spricht in diesem Zusammenhang vom quasistationären oder zeitlich langsam veränderlichen elektromagnetischen Feld, siehe dazu [26,S.112-116], [23,S.81], [21,S.899], [79,S.287], [91,S.171] und [27,S.388-412]) vereinfachen sich unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Stromverdrängung (Skinneffekt, Hauteffekt) vernachlässigt wird (das induzierende elektrische Wirbelfeld und das daraus resultierende elektrische Quellenfeld werden vernachlässigt, siehe dazu auch Gleichung (2.52), Gleichung (2.58) und Gleichung (2.69)), die Maxwellschen Gleichungen zu:

1. Maxwellsche Gleichung:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_e \quad (2.62)$$

2. Maxwellsche Gleichung:

$$\text{rot } \vec{E}_w = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.63)$$

3. Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{wa} \quad (2.64)$$

4. Maxwellsche Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.65)$$

Für die Materialgleichungen gilt dann:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}_e = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}_e \quad (2.66)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (2.67)$$

Das Ohmsche Gesetz lautet dann:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.68)$$

Da der Skineneffekt nicht berücksichtigt wird (siehe oben), gilt dabei für die Stromdichte (siehe dazu Gleichung (2.51) und Gleichung (2.61)):

$$\vec{J}_l = \sigma \cdot (\vec{E}_w + \vec{E}_q) = 0 \quad (2.69)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_e = \vec{J}_e \quad (2.70)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \cdot \vec{E}_e \quad (2.71)$$

Für die gesamte elektrische Feldstärke erhält man also:

$$\vec{E} = \vec{E}_e \quad (2.72)$$

Setzt man nun zusätzlich eine zeitlich konstante eingeprägte Feldstärke \vec{E}_e (diese elektrische Feldstärke entsteht durch die Umwandlung von z.B. thermischer, mechanischer oder chemischer Energie in elektrische Energie und wird daher auch als Feldstärke nichtelektrischer Natur bezeichnet), also

$$\vec{E}_e = \vec{E}_e(t) = \text{const.} \quad (2.73)$$

voraus, dann beschreiben die Gleichungen (2.62) bis (2.73) das stationäre elektromagnetische Feld (siehe auch [20, S.59-72, 321-322], [79, S.273-275] und [26, S.111-112, 237-245]). Das für die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes ausschlaggebende stationäre elektrische Feld, auch stationäres elektrisches Strömungsfeld genannt, wird durch die Gleichungen (2.63), (2.64), (2.66) und (2.68) bis (2.73) charakterisiert. Eine näherungsweise Lösung dieser Gleichungen ist im allgemeinen Fall, d.h. bei asymmetrischem Feldverlauf mit Hilfe numerischer Berechnungsverfahren (Finite-Elemente-Methode, Finite-Differenzen-Verfahren, Ersatzladungsverfahren, ...) möglich. Liegen dagegen einfache Verhältnisse, d.h. symmetrische und raumladungsfreie ($\rho_{wa}=0$) stationäre elektrische Strömungsfelder vor, dann kann der Ausbreitungswiderstand R_A auch mit dem Ansatz

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}_e \quad (2.74)$$

$$I = \int_A \vec{J} \circ d\vec{A} = \sigma \cdot \int_A \vec{E}_e \circ d\vec{A} \quad (2.75)$$

berechnet werden (siehe Fall (A) und (B) im Abschnitt 2.3.1). Gegebenenfalls besteht auch die Möglichkeit, das Prinzip der Spiegelung anzuwenden. Voraussetzung dafür ist das Vorhandensein von Symmetrielinien bzw. Symmetrieflächen (siehe Fall (C) im Abschnitt 2.3.1).

2.3.3.2 Faustformeln für die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes von Erdern

Da die exakte Berechnung der Ausbreitungswiderstände von Erdern bzw. Erdersystemen in vielen Fällen nur mit großem Aufwand möglich ist (siehe Abschnitt (2.3.3.1), wurden für die Praxis Berechnungsmethoden entwickelt, die eine im allgemeinen ausreichend genaue Ermittlung der Ausbreitungswiderstände erlauben. Diese Näherungsformeln (Faustformeln) dienen unter anderem auch dazu, um aus den gemessenen Ausbreitungswiderständen die Hauptabmessungen der Erder (Erderlänge, Erderdurchmesser, ...) zu bestimmen.

Eine Übersicht über die Berechnungsgleichungen (genaue Berechnung bei einfachen geometrischen Formen bzw. spezielle Näherungsgleichungen) und die Faustformeln (näherungsweise Berechnung) für die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes der wichtigsten Erder stellt die folgende Zusammenstellung dar (bzgl. der Messung des spezifischen Erdwiderstandes ρ_E siehe Abschnitt 2.2.2).

(A) Horizontalerder (Banderder, Oberflächenerder):

Berechnungsgleichung (siehe [11,S.156], [22,S.66], [31,S.72], [19,S.35], [35,S.269], [10,S.364], [1,S.496] und auch [5,S.164], [34,S.43]):

$$R_A = \frac{\rho_E}{\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{2l}{d} \quad (2.76)$$

Faustformel (siehe [7,S.35], [19,S.39], [9,S.73], [34,S.44], [4,S.59], [1,S.496]):

$$R_A \approx \frac{2 \cdot \rho_E}{l} \quad (2.77)$$

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

l Erderlänge

d Durchmesser des Erders bzw. Ersatzdurchmesser des Erders (halbe Breite, z.B. 15mm bei ei-

nem Bandstahl mit dem Querschnitt 3mm×30mm)

(B) Vertikalerder (Staberder, Tiefenerder):

Berechnungsgleichung (siehe [23,S.59], [22,S.66], [31,S.70], [19,S.35], [5,S.164], [35,S.269], [34,S.45], [10,S.362,364], [1,S.496] und auch [11,S.157]):

$$R_A = \frac{\rho_E}{2\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \quad (2.78)$$

Faustformel (siehe [7,S.35], [19,S.45], [9,S.73], [34,S.46], [4,S.59], [1,S.496]):

$$R_A = \frac{\rho_E}{l} \quad (2.79)$$

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

l Erderlänge

d Durchmesser des Erders bzw. Ersatzdurchmesser des Erders (halbe Breite, z.B. 15mm beieinem Bandstahl mit dem Querschnitt 3mm×30mm)

(C) Ringerder:

Berechnungsgleichung (siehe [22,S.66], [10,S.364] und auch [11,S.159], [31,S.75], [19,S.35], [5,S.164], [35,S.269]):

$$R_A = \frac{\rho_E}{\pi^2 D} \cdot \ln \frac{8D}{d} \quad (2.80)$$

Faustformel (siehe [9,S.73], [4,S.59] und auch [7,S.35], [19,S.35,39], [34,S.45]):

$$R_A \approx \frac{2\rho_E}{3D} \quad (2.81)$$

mit (siehe [4,S.59] und [9,S.73]):

$$D = 1,13 \cdot \sqrt{A} \quad (2.82)$$

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

d Durchmesser des Erders bzw. Ersatzdurchmesser des Erders (halbe Breite, z.B. 15mm beieinem Bandstahl mit dem Querschnitt 3mm×30mm)

D Durchmesser bei Kreisfläche (z.B. bei Ringerder, aber auch Ersatzkreisdurchmesser z.B. bei

Maschenerder)

A vom Erder eingeschlossene Fläche

(D) Plattenerder:

Berechnungsgleichung: Siehe Tafel 1.7 in [23,S.59]

Faustformel:

Für rechteckige Platten gilt (siehe [4,S.59]):

$$R_A \approx \frac{\rho_E}{4,5a} \quad (2.83)$$

Für runde Platten gilt (siehe [22,S.66], [10,S.364]):

$$R_A \approx \frac{\rho_E}{2D} \quad (2.84)$$

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

D Durchmesser bei Kreisfläche (z.B. bei Ringerder, aber auch Ersatzkreisdurchmesser z.B. bei

Maschenerder)

a Kantenlänge bei quadratischer Erderplatte, bei Rechteckplatten ist $\sqrt{b \cdot c}$ einzusetzen (mit b, c

Rechteckseiten)

(E) Vierstrahlerender:

Berechnungsgleichung: siehe Tafel 1.7 in [23,S.59]

Faustformel (siehe [1,S.496] und auch [11,S.156], [31,S.78], [35,S.270], [34,S.44], [10,S.366]):

$$R_A \approx \frac{\rho_E}{2\pi l} \cdot \left(\ln \frac{4l}{d} + 2,5 \right) \quad (2.85)$$

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

l Erderlänge

d Durchmesser des Erders bzw. Ersatzdurchmesser des Erders (halbe Breite, z.B. 15mm beieinem Bandstahl mit dem Querschnitt 3mm×30mm)

(F) Maschenerder:

Berechnungsgleichung: Eine exakte Berechnung bzw. eine spezielle Näherung zur Berechnung des Ausbreitungswiderstandes von Maschenerdern war in der Literatur nicht zu finden.

Faustformel (siehe [1,S.496] und auch [31,S.78-79], [6,S.203], [19,S.42], [5,S.164], [9,S.73], [35,S.270], [34,S.45]):

$$R_A \approx \frac{\rho_E}{2D} + \frac{\rho_E}{l_{\text{ges}}} \quad (2.86)$$

mit D nach Gleichung (2.82).

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

D Durchmesser bei Kreisfläche (z.B. bei Ringerder, aber auch Ersatzkreisdurchmesser z.B. bei

Maschenerder)

l_{ges} Gesamtlänge

(G) Kugelerder:

Berechnungsgleichung: siehe Abschnitt (2.3.1), Gleichung (2.15-1) und [23,S.58], [20,S.64], [27,S.161] sowie [31,S.39].

Faustformel: Nicht notwendig.

(H) Halbkugelerder:

Berechnungsgleichung: siehe Abschnitt 2.3.1, Gleichung (2.20) und [23,S.58], [20,S.65], [22,S.66], [27,S.163], [31,S.39], [19,S.35], [9,S.73] sowie [10,S.364].

Faustformel: Nicht notwendig.

2.4 Der Stoßerdungswiderstand

2.4.1 ALLGEMEINES

Bei der Ableitung von Blitzentladungen in das Erdreich werden die Erder bzw. die Erdersysteme durch aperiodische transiente Ströme (Stoßströme) mit großer Steilheit di/dt (Anstieg auf große Scheitelwerte bei kleinen Stirnzeiten) im Bereich der Stirn (Front) beansprucht. Den zeitlichen Verlauf eines solchen Blitzstromes zeigt die Abbildung 2.31.

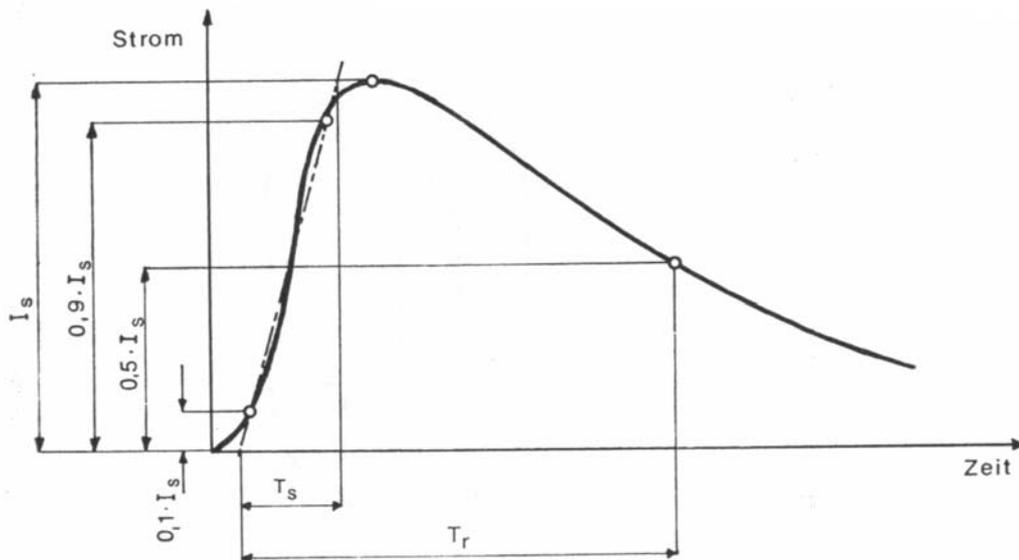


Abb. 2.31: Normalblitz
(nach [34,S.9])

Für diese Blitzströme ist daher nicht der Ausbreitungswiderstand R_A , sondern der sogenannte Stoßerdungswiderstand R_{St} , auch Stoßausbreitungswiderstand genannt, von Erdern oder Erdersystemen ausschlaggebend.

Im allgemeinen unterscheidet sich der Stoßerdungswiderstand vom Ausbreitungswiderstand.

Die Gründe dafür sind:

- (1) Die vom Blitzstrom im Erdreich verursachte Joulesche Wärme führt zur Verdampfung feuchter Schichten. Dadurch wird der spezifische Erdwiderstand ρ_E (siehe Abschnitt 2.2.1) und in weiterer Folge auch der Stoßerdungswiderstand R_{St} erhöht (siehe [93,S.105] und [10,S.368-371]). Man spricht in diesem Zusammenhang vom sogenannten Trockeneffekt (die Änderung, also die Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Stoßerdungswiderstandes bezieht sich immer auf den Ausbreitungswiderstand).
- (2) Bei großen Blitzstromamplituden besteht die Möglichkeit, daß die elektrische Feldstärke im Erdreich sehr hohe Werte annimmt. Beim Überschreiten der Durchschlagfestigkeit (Durchschlagfeldstärke), der kritische Wert liegt in diesem Fall bei ungefähr 3kV/cm bis 5kV/cm, kommt es zu elektrischen Entladungen in der im Boden enthaltenen Luft (es erfolgt also in der Umgebung des Erders eine Ionisierung der Luft im Erdreich). Dadurch wird der spezifische Erdwiderstand (siehe Abschnitt 2.2.1) und infolgedessen auch der Stoßerdungswiderstand verkleinert. Dieser Effekt

wird als Bodenionisation (siehe [11,S.153-156], [94,S.409-413], [96,S.506-507] und [8,S.45-48]) bezeichnet.

- (3) Beim Auftreten des oben beschriebenen Vorganges (Punkt (2)) kommt es im Erdreich zur Bildung von Funken bzw. Lichtbögen. Durch die dabei entstehende Wärme werden die Erdpartikel bis zum Aneinanderhaften erhitzt und auch schlechtleitende Fremdschichten zwischen den Erdpartikeln zerstört. Die daraus resultierende Verkleinerung des spezifischen Erdwiderstandes führt zu einer Abnahme des Stoßerdungswiderstandes. Dieser Prozeß wird Fritteffekt genannt (siehe dazu auch [93,S.105,137]).
- (4) Linienförmige Erder (z.B. Tiefenerder oder Oberflächenerder) können näherungsweise auch als Kettenleiter (bzgl. der Kettenleitermodelle siehe auch Abschnitt 2.4.3.1) betrachtet werden. (diese Kettenleiter bestehen aus mehreren π -Vierpolelementen, siehe Abbildung 2.34). Daraus kann sich eine reduzierte wirksame (effektive) Erderlänge ergeben, sodaß dadurch der Stoßerdungswiderstand vergrößert wird. Die maximal wirksame Länge eines linienförmigen Erders wird durch die Eindringgeschwindigkeit (Wellengeschwindigkeit, Ausbreitungsgeschwindigkeit) der Stoßwelle in den Erder bestimmt (siehe [11,S.151]). Im Bereich höherer Frequenzen (wie sie im Frequenzspektrum von Stoßströmen enthalten sind) dient nur mehr ein kleiner Teil des Erders der Ableitung des Stromes in das Erdreich. Man spricht in diesem Zusammenhang von der wirksamen (effektiven) Erderlänge (siehe auch [8,S.73]). Da wirksame Erderlängen von mehr als 30m nur mehr unwesentlich zur Verringerung des Stoßerdungswiderstandes beitragen, ist es zielführend, kürzere Einzelerder zu kombinieren (siehe dazu [7,S.171], [19,S.34,279], [8,S.72-73], [34,S.20] und [11,S.149-153]).
- (5) Wird ein Erder bzw. ein Erdersystem mit einem Stoßstrom (Blitzstrom) beaufschlagt, dann tritt sowohl in den Erdungsleitungen (Verbindungsleitungen zwischen Erder und zu erdenden Anlagenteilen, sofern diese außerhalb des Erdreiches bzw. isoliert im Erdreich verlegt sind) und den Erdern selbst als auch im Erdreich der Effekt der Stromverdrängung (Hauteffekt, Skineffekt) auf. Das führt zur Verdrängung des Stromes an die Leiteroberfläche (Erdungsleitungen, Erder) und an die Oberfläche des Erdreiches (siehe auch [19,S.34], [3,S.198-199]). Die damit verbundene Reduzierung des wirksamen leitenden Querschnittes führt zur Vergrößerung des Stoßerdungswiderstandes.

Je nachdem, welche der beschriebenen Effekte (Punkt (1) bis (5)) nun über wiegen, wird der Stoßerdungswiderstand größer bzw. kleiner als der Ausbreitungswiderstand.

2.4.2 MESSUNG DES STOSSERDUNGSWIDERSTANDES

2.4.2.1 Übliche Verfahren

2.4.2.1.1 Messung mit Niederfrequenz

Der Ausbreitungswiderstand R_A des Erders bzw. des Erdersystemes wird mit einer der herkömmlichen Meßmethoden (siehe Abschnitt 2.3.2 und auch [93,S.140]) bestimmt. Da diese Messungen mit Wechselströmen niedriger Frequenz (NF, die Meßfrequenzen von Erdungsmeßbrücken liegen im Bereich von etwa 65Hz bis 140Hz) durchgeführt werden, spricht man auch von sogenannten NF-Messungen. Im Anschluß daran wird mit Hilfe eines Korrekturfaktors α der Stoßerdungswiderstand R_{St} näherungsweise berechnet (siehe Abschnitt 2.4.3.1.1).

2.4.2.1.2 Messung mit Hochfrequenz

Im Unterschied zu den NF-Messungen (siehe Abschnitt 2.4.2.1.1) entspricht bei der meßtechnischen Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes mit hochfrequenten Wechselströmen (es kommen hier Meßfrequenzen bis zu 20kHz zur Anwendung) das Strömungsfeld im Erdreich sowie in den Erdern in hohem Maße dem, daß im Falle einer Blitzdurchströmung auftritt.

$$T_s = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (2.89)$$

erhält man demzufolge:

$$f' = \frac{1}{4 \cdot T_s} = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 125 \text{ kHz} \quad (2.90)$$

bzw.

$$\omega' = 2\pi f' = 785398 \text{ s}^{-1} \quad (2.91-1)$$

In [130,S.16-16] wird für die Ersatzfrequenz (äquivalente Frequenz) eines Blitzstromes im Bereich der Stirnzeit (Stirndauer) die folgende Formel angegeben:

$$f' = \frac{1}{2\pi \cdot T_s} \quad (2.91-2)$$

bzw.

$$\omega' = 2\pi f' = \frac{1}{T_s} \quad (2.91-3)$$

f' Ersatzfrequenz (äquivalente Frequenz)

ω' äquivalente Kreisfrequenz

T_s Stirndauer (Stirnzeit) des Blitzstromes

Für den Normalblitz gemäß ÖVE-E49 (siehe oben) ergibt sich demzufolge:

$$f' = \frac{1}{2\pi \cdot T_s} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 79,58 \text{ kHz} \quad (2.91-4)$$

bzw.

$$\omega' = 2\pi f' = 500016 \text{ s}^{-1} \quad (2.91-5)$$

Aufgrund der Tatsache, daß sich die Strömungsverhältnisse bei äquivalenter Frequenz stark von denen bei Blitzstrombeaufschlagung unterscheiden, wird diese Meßmethode heute nicht mehr angewendet (siehe [93,S.141]).

2.4.2.2 Messung mit Stoßstrom

Bei diesem Meßverfahren (siehe [93,S.140]) wird er Erder bzw. das Erdersystem mit einem Stoßstrom belastet. Mit einem Oszilloskop werden die Erderspannung $u_E(t)$ und der Erdungsstrom (Stoßstrom) $i_E(t)$ gemessen. Aus diesen beiden Meßwerten kann der exakte Wert des Stoßerdungswiderstandes berechnet werden (siehe Abschnitt 2.4.3.1.2 und Abschnitt 5).

2.4.3 BERECHNUNG DES STOSSERDUNGSWIDERSTANDES

2.4.3.1 Herkömmliche Methoden

2.4.3.1.1 Näherungsverfahren

$$R_{St} = \alpha \cdot R_A \quad (2.92)$$

α Korrekturfaktor

R_{St} Stoßerdungswiderstand

R_A Ausbreitungswiderstand

Für Oberflächenerder (Bänderer, Strahlenerder, Ringerder) werden in [105,S.135] für den Korrekturfaktor α (siehe Gleichung (2.92)) die folgende Formeln angegeben:

$$\alpha = \frac{1,13}{\sqrt{\tau_s}} \quad (2.93)$$

für

$$\tau_s < 0,4 \quad (2.94)$$

und

$$\alpha = 1 + \frac{1}{3\tau_s} \quad (2.95)$$

für

$$\tau_s > 0,4 \quad (2.96)$$

Der Parameter τ_s ist dabei wie folgt festgelegt:

$$\tau_s = \frac{T \cdot R_A}{l \cdot L'} \quad (2.97)$$

R_A Ausbreitungswiderstand

TStirndauer (siehe Abbildung 2.33)

L' Induktivität pro Längeneinheit (Induktivitätsbelag, Induktionsbelag)

lLänge der Erderstrahlen

Die Stirndauer ist dabei durch die Abbildung 2.33 definiert.

Weiters wird in [105,S.133,134,136] für die Berechnung des Stoßerdungswiderstandes ein Induktivitätsbelag von $L' = 1,8 \mu\text{H}$ vorgeschlagen.

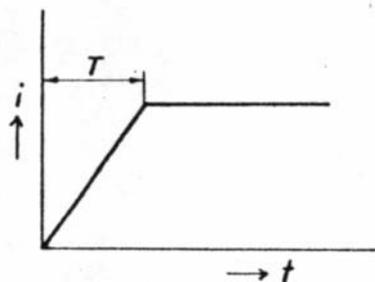


Abb. 2.33: Stirndauer einer Stoßwelle
(nach [105,S.129])

Eine Tatsache, die an dieser Stelle noch angeführt werden muß, ist die, daß beim hier beschriebenen Näherungsverfahren (siehe Gleichung (2.92) bis Gleichung (2.97)) die Kapazität des Erders nicht berücksichtigt wird. Strenggenommen ist diese Methode daher nur unter der Voraussetzung gültig, daß sich die Stoßwelle mit einer unendlich großen Ausbreitungsgeschwindigkeit im Erder fortpflanzt (siehe [105,S.135]). Tatsächlich muß jedoch von einer Phasengeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit, Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellengeschwindigkeit, Wirkungsgeschwindigkeit) von

etwa 100 bis 140m/μs ausgegangen werden (siehe [105,S.129,133,136]), wobei diese Geschwindigkeit für große Frequenzen und demzufolge auch für Stoßvorgänge in erster Linie von den Eigenschaften des Erdreiches (Permeabilität, Permittivität) abhängig ist (siehe [90,S.305] und [91,S.336]).

Der Korrekturfaktor α kann sowohl größer als auch kleiner als 1 sein, je nach Wirkung der Bodenionisation, des Fritzeffektes (siehe oben bzw. [93,S.105,137]), des Skineffektes usw. (siehe Abschnitt 2.4.1). Für Erder geringer räumlicher Ausdehnung, für Tiefenerder bis zu einer Länge von 10m und für Strahlenerder mit $l_{\max}=30\text{m}$ (maximale Strahlenlänge) gilt näherungsweise auch (siehe dazu auch [7,S.171], [34,S.20], [9,S.69,73] und [11,S.149]):

$$R_{St} = R_A \quad (2.98)$$

Zusätzlich gibt es noch die Möglichkeit, speziell den Einfluß der Bodenionisation (Ionisation des Erdreiches, siehe Abschnitt 2.4.1) auf die Größe des Stoßerdungswiderstandes in Form eines Reduktionsfaktors, der zur Unterscheidung vom Korrekturfaktor α mit β bezeichnet werden soll, in Rechnung zu stellen.

Diese Idee gründet sich auf die folgenden Annahmen (siehe [8,S.45-48] und [11,S.153-156]):

1. Durch den aus dem Erder (Erdelektrode) austretenden elektrischen Strom wird in der Umgebung des Erders ein elektrisches Feld erzeugt.
2. In einem bestimmten Bereich um den Erder, der durch den sogenannten effektiven Radius r_{eff} begrenzt wird (siehe Gleichung (2.100) und Gleichung (2.102)), wird die Durchschlagfeldstärke E_{krit} (Einsatzfeldstärke, Durchschlagfestigkeit, siehe Gleichung (2.99)) überschritten, sodaß es in diesem Teil des Erdreiches zu Ionisationserscheinungen kommt (das Auftreten der Bodenionisation tritt schon bei Ableitströmen von etwa 20A/m auf, siehe dazu auch [8,S.47]).
3. Aufgrund der damit verbundenen Verkleinerung des spezifischen Erdwiderstandes kann diese Zone als Vergrößerung des Leiterquerschnittes betrachtet werden. Mit Hilfe des oben genannten Reduktionsfaktors β (siehe Gleichung (2.101) und Gleichung (2.103)) ist es nun möglich, die daraus resultierende Reduzierung des Stoßerdungswiderstandes gegenüber dem Ausbreitungswiderstand zu ermitteln.

Der effektive Radius r_{eff} , die Einsatzfeldstärke E_{krit} und der Reduktionsfaktor β können auf die folgende Weise berechnet werden (siehe dazu auch [8,S.46-47] und [11,S.154-156]):

$$\frac{E_{\text{krit}}}{\text{kV/m}} = 241 \cdot \left(\frac{\rho_E}{\Omega \text{ m}} \right)^{0,215} \quad (2.99)$$

Für Tiefenerder (Vertikalerder) gilt:

$$r_{\text{eff}} = \hat{i}_E \cdot \frac{\rho_E}{2\pi l} \cdot \frac{1}{E_{\text{krit}}} \quad (2.100)$$

$$\beta = \frac{\ln \frac{2\pi l^2 \cdot E_{\text{krit}}}{\hat{i}_E \cdot \rho_E}}{\ln \frac{l}{r_0}} \quad (2.101)$$

Für Oberflächenerder (Horizontalerder) gilt:

$$r_{\text{eff}} = \hat{i}_E \cdot \frac{\rho_E}{\pi l} \cdot \frac{1}{E_{\text{krit}}} \quad (2.102)$$

$$\beta = \frac{\ln \frac{\pi l^2 \cdot E_{\text{krit}}}{\hat{i}_E \cdot \rho_E}}{\ln \frac{l}{r_0}} \quad (2.103)$$

E_{krit}Einsatzfeldstärke (Durchschlagfestigkeit, Durchschlagfeldstärke)

r_{eff}effektiver Radius

r_0Radius des Erderquerschnittes

lLänge des Erders

ρ_E spezifischer Erdwiderstand

\hat{i}_E Scheitelwert des Stoßstromes

Für die Stoßerdungswiderstände gilt analog zur Gleichung (2.92):

$$R_{\text{St}} = \beta \cdot R_A \quad (2.104)$$

R_{St}Stoßerdungswiderstand

R_AAusbreitungswiderstand

βReduktionsfaktor

2.4.3.1.2 Exakte Berechnung

Der exakte Wert des Stoßerdungswiderstandes kann auch entsprechend der Definition

$$R_{\text{St}} = \frac{\hat{u}_E}{\hat{i}_E} \quad (2.105)$$

berechnet werden. Der Nachteil dieser Methode liegt in der aufwendigen meßtechnischen Ermittlung von \hat{u}_E und \hat{i}_E (Einspeisung eines Stoßstromes $i_E(t)$ mit dem Scheitelwert \hat{i}_E mit einem Stoßgenerator und Messung von $u_E(t)$ mit dem Scheitelwert \hat{u}_E mit einem Oszilloskop, siehe dazu auch Abschnitt 2.4.2.2).

Im allgemeinen ist der Stoßerdungswiderstand eine Funktion der Zeit (siehe auch [93,S.140]), denn es gilt:

$$r_{\text{St}}(t) = \frac{u_E(t)}{i_E(t)} \quad (2.106)$$

Gültig ist aber der Wert gemäß Gleichung (2.105), wobei angemerkt werden muß, daß dieser Wert eine reine Rechengröße darstellt (die Scheitelwerte von Strom und Spannung werden nicht zum gleichen Zeitpunkt erreicht) und daher lediglich ein Kriterium zur Abschätzung der Blitzeinwirkung ist (siehe auch [11,S.150-151], [62,S.21] und auch [93,S.140]).

2.4.3.1.3 Netzwerkansatz

Hierbei ist die gesamte Erdungsanlage als Ersatznetzwerk in Form einer Kettenschaltung von π -Vierpolelementen dargestellt (grundsätzlich ist auch eine Beschreibung des Ersatznetzwerkes mit Hilfe von L- oder T-Vierpolelementen oder einer Kombination der genannten Vierpole möglich, siehe dazu auch [100,S.138-140] und [20,S.459-469]). Die Verbindung der einzelnen Bauelemente (R,L,C,M) untereinander erfolgt hierbei mittels scheinwiderstandslosen Drähten. Eine Alternative dazu stellt die Einführung sogenannter Wellenleiterschaltungen (siehe [101,S.163-170]) dar, bei denen die Drähte mit der vernachlässigbar kleinem Impedanz durch Wellenleiter (das sind Leitungen mit einem konstanten Querschnitt) ersetzt werden. Dieses Modell eignet sich vor allem zur Untersuchung hochfrequenter Vorgänge.

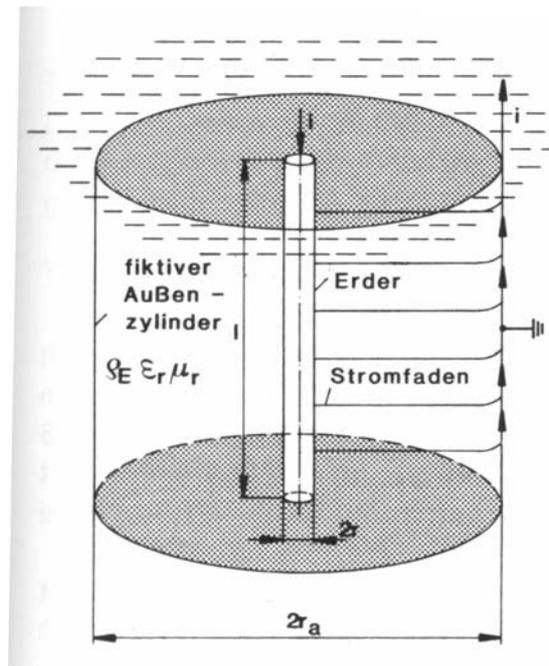


Abb. 2.34: Tiefenerder in Koaxialdarstellung (nach [11,S.149])

Das Vierpolelement für einen Tiefenerder in Koaxialdarstellung (siehe Abbildung 2.34) hat dann zum Beispiel die folgende Form (siehe dazu auch Zylindermodell für Tiefenerder in [62,S.41-43]):

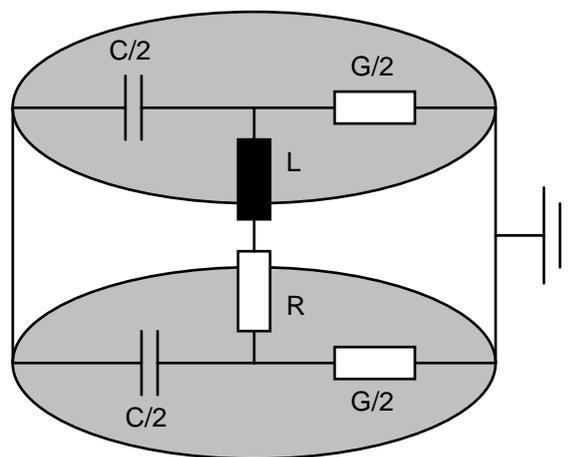


Abb. 2.35: Vierpolelement für einen Tiefenerder (bestehend aus konzentrierten Elementen)

Durch die Auflösung der Netzwerkgleichung (z.B. mit einem Netzwerkprogramm) können die interessierenden Größen berechnet werden (die induktive Kopplung zwischen einzelnen Erdersegmenten kann mit Hilfe von Übertragern berücksichtigt werden, für diesen Fall ergeben sich RLCM-Netzwerke).

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Netzwerkansatzes sind:

1. Die Verwendung von konzentrierten passiven Elementen (RLCM) muß zulässig sein. Das bedeutet, daß die gesamte Erdungsanlage mit ihren kontinuierlich verteilten Parametern (Widerstands-

belag R' , Induktivitätsbelag L' und M' , Kapazitätsbelag C' , Ableitungsbelag G') in ausreichend kleine Teilstücke unterteilt werden muß, die dann wie Netzwerke mit konzentrierten Elementen (π -, L- oder T-Vierpolelemente bestehend aus den Netzwerkelementen R, L, C und M) behandelt werden können. Auf diese Weise werden die partiellen Differentialgleichungen der Leitung (auch Leitungsgleichungen oder Telegraphengleichungen genannt, siehe [99,S.35-37], [104,S.368-373], [100,S.115-119], [20,S.426-432], [90,S.300-302], [25,S.117-119], [21,S.578-584], [80,S.6-10] und [23,S.194-197]) durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ersetzt. Diese Gleichungen können auch entsprechend einfacher gelöst werden, wobei angemerkt werden muß, daß bei einer extrem feinen Unterteilung der Erdungsanlage der dazu notwendige Rechenaufwand durch den hohen Grad des resultierenden Gleichungssystems sehr groß wird.

2. Die Verschiebungsströme müssen gegenüber den Leitungsströmen vernachlässigbar klein sein.
3. Die Erder müssen in Abschnitte unterteilt werden, die klein gegenüber der kleinsten betrachteten Wellenlängen sind.
4. Die Feldgrößen dürfen sich zeitlich nur langsam ändern (in [104,S.361] wird als Richtwert für die maximale Frequenz der Feldgrößen ein Wert von 10MHz angegeben, für elektrische Leiter in der Luft entspricht das einer Wellenlänge von $\lambda=30\text{m}$; siehe Punkt 2).

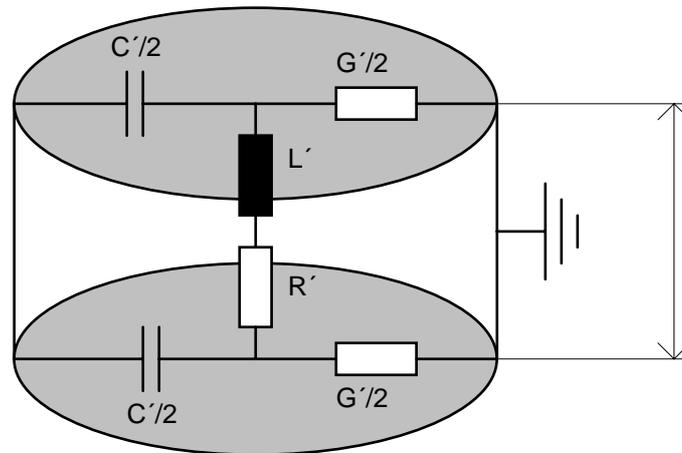
Die drei letztgenannten Punkte bedeuten nichts anderes, als daß die Bedingungen für ein quasistationäres elektromagnetisches Feld erfüllt werden müssen (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3.1 und [26,S.112-116], [23,S.81], [21,S.899], [79,S.287], [91,S.171] und [27,S.388-412]).

2.4.3.1.4 Leitungsansatz

Der Koaxialdarstellung des Tiefenerders aus der Abbildung 2.34 kann auch eine Wanderwellenleitung zugeordnet werden. Man kann sich dabei jeden der π -Vierpole (bzw. L- oder T-Vierpole) durch eine homogene Leitung ersetzt denken. Die konzentrierten Elemente (R, L, C, M) werden in diesem Fall durch Leitungsbeläge (Leitungsconstanten R, L, C, M pro Länge l) ersetzt (siehe Abbildung 2.34). Daraus können dann der Wellenwiderstand, auch Wellenimpedanz der Leitung genannt, und die Fortpflanzungskonstante, die auch als Übertragungskonstante oder Ausbreitungskonstante bezeichnet wird, berechnet werden.

Verfahren zur Ermittlung der Leitungsbeläge sowie der Leitungsparameter für die Ausbreitung sinusförmiger Größen auf der Leitung (Wellenimpedanz, Fortpflanzungskonstante, ...) sind in [93,S.100-108,138-140] und in [62,S.41-50] zu finden. Diese beiden Modelle unterscheiden sich durch die folgenden Eigenschaften:

1. In [93] werden die Induktivität $L=L_E$ und die Kapazität $C=C_E$ als konzentrierte Bauelemente betrachtet (siehe [93,S.100-101,103-104,108,140]). Sind die geometrischen Abmessungen des Erders nicht bekannt, so können sowohl dessen Induktivität als auch dessen Kapazität meßtechnisch ermittelt werden (Messung mit Hochfrequenz oder äquivalenter Frequenz, siehe [93,S.140-143]).
2. Weiters wird in [93] zwischen dem statischen Eigenwiderstand und dem dynamischen Eigenwiderstand des Erders unterschieden (siehe [93,S.101-102]). Der dynamische Eigenwiderstand tritt hier bei einer Beaufschlagung des Erders mit Stoßstrom in Kraft. Nach dem Erreichen der Scheitelzeit nimmt dieser Widerstand einen Wert an, der ungefähr dem statischen Eigenwiderstand entspricht (siehe [93,S.102]).
3. In [62] wird je nach Erdertyp zwischen dem Zylindermodell (für Tiefenerder, siehe [62,S.41-43] und auch Abbildung 2.36 sowie [11,S.149]) und dem Halbzylindermodell (für Horizontalerder, siehe [62,S.43-45]) differenziert.



lLänge des Tiefenerders

Abb. 2.36: Vierpolelement für einen Tiefenerder
(bestehend aus kontinuierlich verteilten Elementen)

Die Zustände auf der Wanderwellenleitung können mit Hilfe der Telegraphengleichungen (Leitungsgleichungen) ermittelt werden. Für die zeitliche Bestimmung der Strom- und Spannungsverläufe entlang der Leitung kommen auch die Verfahren (Wanderwellenverfahren) von Bewley und Bergeron (siehe [37,S.183-185], [78,S.157-169], [99,S.031-032] und [99] allgemein) zur Anwendung.

2.4.3.1.5 Antennentheoretischer Ansatz

Dieses Verfahren beruht darauf, Erder bzw. Erdersysteme als elektrodynamische Modelle auf der Grundlage der Antennentheorie darzustellen. Die Basis für diese Theorie bildet die Tatsache, daß alle elektromagnetischen Felder mit Hilfe von elektrischen Elementardipolen (Hertzsche Dipole) und/oder magnetischen Elementardipolen (Fitzgeraldsche Dipole) darstellbar sind. Die Lösung des Feldproblems kann somit auf die Lösung der Wellengleichung für den Hertzschen bzw. Fitzgeraldschen Vektor zurückgeführt werden (der Ansatz erfolgt hier stets über das skalare Potential und das Vektorpotential). Die Feldverteilung für den gesamten Feldraum erhält man durch die Superposition dieser Elementarlösungen.

Der große Aufwand bei der (numerischen) Lösung der oben genannten Wellengleichungen macht es unmöglich, größere Erdungsanlagen zu berechnen.

2.4.3.2 Berechnung mit der Methode der finiten Elemente

Die Berechnung des Stoßerdungswiderstandes setzt die Kenntnis der elektrischen Strömungsverhältnisse sowohl im Erdreich als auch in den elektrischen Leitern einer Erdungsanlage voraus (bzgl. der Berechnung der Stoßimpedanz von Leitern siehe Abschnitt 4).

Die Ermittlung des elektrischen Strömungsfeldes ist an die Lösung der dieses Feld beschreibenden Differentialgleichungen (z.B. Maxwell-Gleichungen, Wellengleichungen, siehe auch Abschnitt 2.4.3.1.5) gebunden. Von einfachen Fällen (symmetrische Anordnungen, homogene Medien, ...) abgesehen, kann die mathematische Behandlung dieser Differentialgleichungen nur näherungsweise erfolgen. Eines dieser Näherungsverfahren ist die sogenannte Methode der finiten Elemente (FEM). Dieses Diskretisierungsverfahren beruht darauf, ein Kontinuum (in diesem speziellen Fall das den Erder umgebende Erdreich) in eine bestimmte Anzahl einzelner Elemente, die sogenannten finiten (endlichen) Elemente, zu zerlegen, und anschließend die Beträge der Feldgrößen (elektrische Feldstärke, Stromdichte, ...) in allen Knotenpunkten des diskretisierten Feldgebietes zu berechnen (eine genauere Beschreibung dieses Verfahrens ist im Abschnitt 3 zu finden). Auf diese Weise kann also

das elektrische Strömungsfeld im Erdreich und demzufolge auch der zugehörige Stoßerdungswiderstand selbst im Falle komplizierter Erdersysteme berechnet werden.

3. DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE (FEM)

3.1 Einführung

3.1.1 ALLGEMEINES

Derzeit stellt die Methode der finiten (endlichen) Elemente (FEM) sowohl in den Ingenieurwissenschaften als auch im Bereich der mathematischen Physik eines der wichtigsten Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen und Variationsproblemen dar.

Dieses Verfahren wurde etwa 1960 von Ingenieuren zur Untersuchung von mechanischen Systemen für den Flugzeugbau und die Raumfahrt entwickelt. Die Anwendungsbereiche der FEM wurden in weiterer Folge ständig erweitert (Festkörpermechanik, Baustatik, ...) und umfaßt zum gegenwärtigen Zeitpunkt viele wissenschaftliche Gebiete.

Der Begriff "Finite Elemente" hat seinen Ursprung in der Baustatik. Gemeint sind damit die endlichen Bauelemente (Stäbe, Stützen, ...) von Fachwerken. Überträgt man diese Begriffe direkt in den Bereich der Elektrotechnik, so entspricht dem Fachwerk ein elektrisches Netzwerk. Die Bauelemente, und damit die Finiten Elemente in ihrem ursprünglichen Sinn, sind dann die konzentrierten Netzwerkelemente in Form von elektrischen Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten und dergleichen mehr (verschiedene Techniken für die Berechnung elektromagnetischer Felder mit Hilfe der FEM wurden schon um 1970 von Anderson und Sylvester vorgestellt, siehe [147] und [148]). Heute versteht man unter den Finiten Elementen die Unterteilung eines Kontinuums (z.B. eines elektrischen Strömungsfeldes) in viele kleine Elemente, das heißt in viele kleine Gebiete, die das gesamte Kontinuum ausfüllen.

Die Methode der finiten Elemente ist also ein diskretisierendes Verfahren, mit dessen Hilfe ein kontinuierliches System, das heißt ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, in ein diskontinuierliches (diskretes) System mit endlich vielen Freiheitsgraden transformiert werden kann. Unter den Freiheitsgraden ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Größen (Parameter), die zur vollständigen Beschreibung des Systemzustandes erforderlich sind, zu verstehen. Da diese Größen nicht in jedem Fall Koordinaten im elementargeometrischen Sinn (z.B. kartesische Koordinaten) sein müssen, sondern auch Zustandsgrößen (Spannungen, Potentiale, ...) beziehungsweise Größen ohne direkte physikalische Bedeutung sein können, spricht man in diesem Fall auch von den sogenannten generalisierten (allgemeinen, verallgemeinerten) Koordinaten.

Die Art und Weise, nach der ein kontinuierliches Randwertproblem (die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, die das System beschreiben, also z.B. die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (Maxwellsche Gleichungen), muß hier an die auf den Rändern vorgeschriebenen Randwerte angepaßt werden) mit Hilfe der FEM gelöst werden kann, ist die folgende:

1. Unterteilung (Diskretisierung) des Kontinuums (z.B. des Feldgebietes) in einzelne Elemente.
2. Bestimmen einer Ansatzfunktion für die betreffende Feldgröße innerhalb der einzelnen Elemente.
3. Ermittlung der sogenannten Elementgleichungen (Elementmatrizen) aus den Ansatzfunktionen.
4. Zusammenfügen der Elementgleichungen zur Systemgleichung (Systemmatrix).
5. Lösen des so erhaltenen linearen Gleichungssystems (an dieser Stelle werden auch die Randbedingungen berücksichtigt).

Im folgenden sollen nun die Diskretisierung näher erläutert werden.

3.1.2 DISKRETISIERUNG DES KONTINUUMS

Um ein gegebenes Problem mit Hilfe der FEM lösen zu können, ist es notwendig, das entsprechende kontinuierliche System zu diskretisieren, das heißt in eine bestimmte Anzahl einzelner Elemente zu unterteilen. Man bezeichnet diese Zerlegung (Diskretisierung) des Grundgebietes auch als Netzgenerierung.

Eine problemgerechte Diskretisierung setzt die geeignete Wahl der Elementtypen (z.B. Dreiecke, Vierecke, Parallelogramme, Zylinder, Würfel, ...) voraus (siehe Abbildung 3.1).

Dieser Vorgang wird im wesentlichen von der geometrischen Form des Grundgebietes beeinflusst. So ist es z.B. zielführend, geradlinig begrenzte Gebiete in Elemente zu zerlegen, die ebenfalls aus geraden Stücken zusammengesetzt sind. Im zweidimensionalen Fall (der Einfachheit halber wird im folgenden immer von zweidimensionalen Problemen ausgegangen) sind das etwa Dreiecke oder Vierecke.

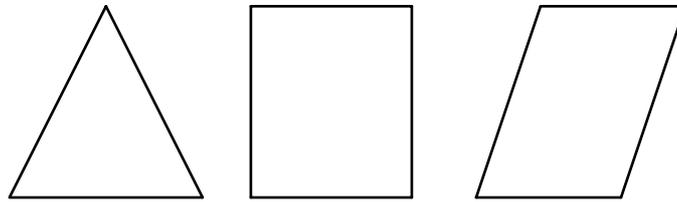


Abb. 3.1: Elementtypen

Die Berandung eines Gebietes kann aber auch krummlinig sein. Solche Ränder können mit Hilfe von Polygonzügen relativ gut approximiert werden (siehe Abbildung 3.2).

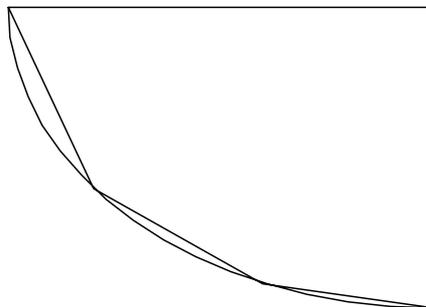
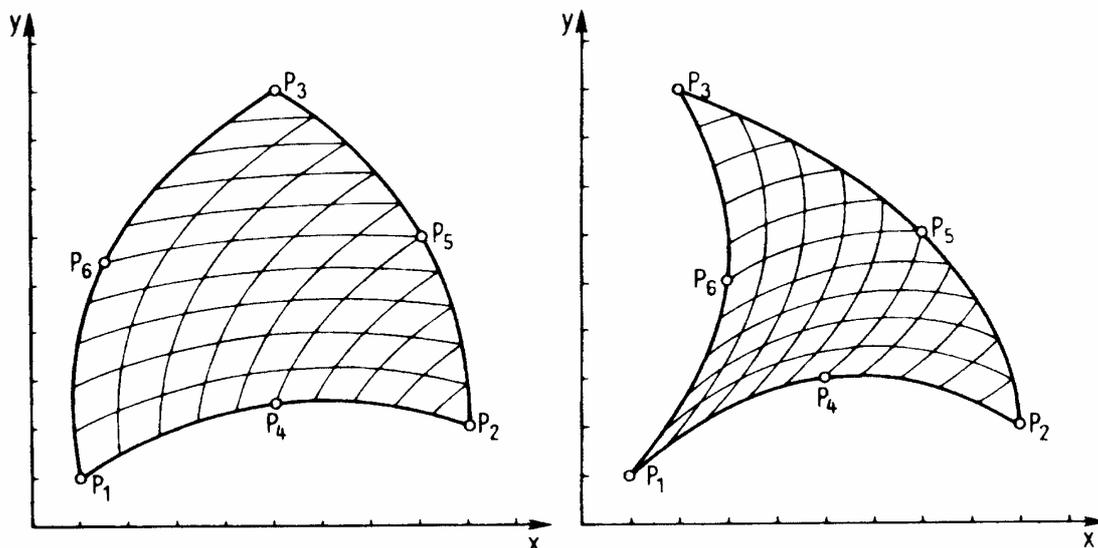


Abb. 3.2: Approximation eines krummlinigen Randes mit einem Polygonzug

Abb. 3.3: Isoparametrische Elemente
(nach [44,S.103])

Bei sehr starken Krümmungen erweist sich diese Methode jedoch als ineffizient, da hier eine extrem feine Unterteilung notwendig wäre. In solchen Fällen kommen die sogenannten isoparametrischen Elemente (siehe Abbildung 3.3 sowie [43,S.179-182], [44,S.100-104,138], [46,S.130-135], [127,S.13-16] und [48,S.72-74]) zum Einsatz.

Wie aus der Abbildung 3.3. ersichtlich wird, entstehen isoparametrische Elemente durch die Verzerrung einzelner Ränder geradlinig begrenzter Elemente. Diese Verzerrung erfolgt durch die Transformation des kartesischen Koordinatensystems der geradlinig begrenzten Elemente in ein krummliniges Koordinatensystem (siehe dazu [44,S.100-104], [43,S.179-187], [140,S.117-122], [42,S.135-138] und [48,S.72-74]). Mit solchen Elementen kann ein Netz gegebenenfalls besser an die geometrische Gestalt eines vorgegebenen Gebietes angepaßt werden.

Nachdem die geeigneten Elementtypen ausgewählt wurden, kann das Netz endgültig generiert werden. Dabei sind die folgenden wichtigen Regeln zu beachten:

1. Alle Elemente sollen vorzugsweise konvex sein (siehe auch Bild 3-2 in [47,S.105]), d.h. mit jeweils zwei Punkten A, B innerhalb eines Elementes gehören auch sämtliche Punkte der Verbindungsgeraden zwischen A und B zum Element (siehe [111,S.115-118] und [49,S.244]).

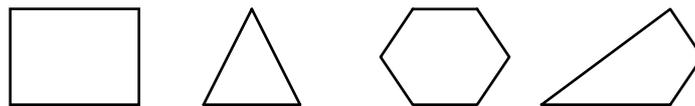


Abb. 3.4: Konvexe Elemente

2. Um numerische Probleme zu verhindern, sollten Elemente mit sehr spitzen oder sehr stumpfen Winkeln vermieden werden (siehe [44,S.51]).



Abb. 3.5: Elemente mit sehr spitzen oder sehr stumpfen Winkeln

3. Die einzelnen Elemente dürfen nicht so angeordnet werden, daß die Ecke eines Elements auf den Rand eines anderen Elements stößt (siehe auch Bild 3-1 in [47,S.104] und Abb.7 in [46,S.40]).

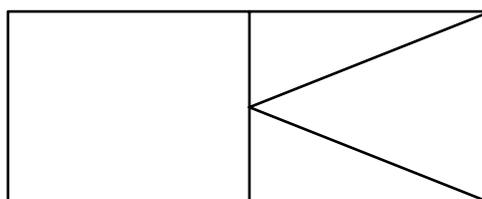


Abb. 3.6: Elementecke stößt auf Elementrand

4. Die Elemente dürfen sich nicht überlappen.

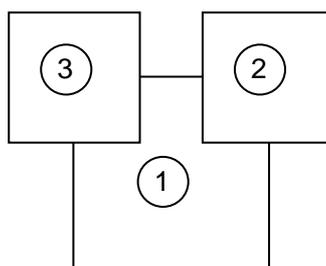


Abb. 3.7: Sich überlappende Elemente

- 5. Es dürfen keine Freiräume zwischen den einzelnen Elementen vorhanden sein.

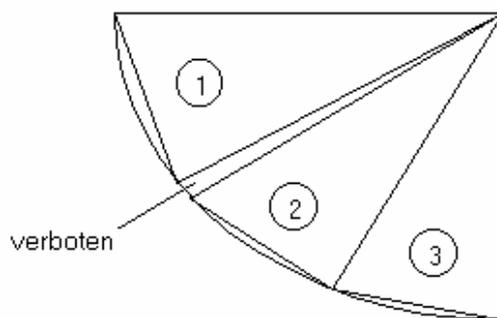


Abb. 3.8: Freiräume zwischen einzelnen Elementen

Der Generierung des Netzes folgt die Numerierung der Knotenpunkte beziehungsweise Knotenvariablen und der Elemente. Grundsätzlich kann dabei jedem Knoten und jedem Element eine beliebige Nummer zugeordnet werden. Da sich die Wahl dieser Nummern jedoch auf die Größe (Anzahl der Gleichungen) des sich ergebenden linearen Gleichungssystems und damit auf den Rechenaufwand bei dessen Lösung auswirkt, ist auf eine optimale Numerierung zu achten (siehe [44,S.152], [47,S.111] und Abbildung 3.9)

Nicht allzu ungünstige Anfangsnumerierungen der Knotenvariablen können mit Hilfe der Algorithmen von Rosen und Cutthill / Mc Kee (siehe dazu [44,S.152-166] und [47,S.112-114]) verbessert werden.

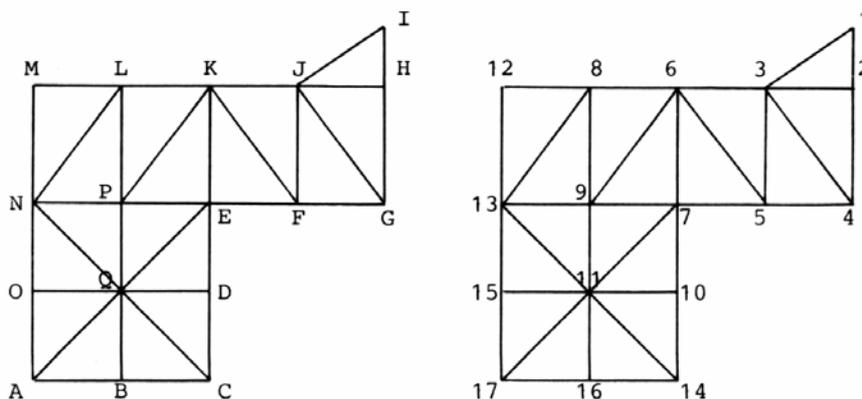


Abb. 3.9: Optimale Numerierung der Knotenpunkte mit dem Algorithmus von Cuthill / Mc Kee (nach [47,S.113])

Die Genauigkeit der FEM-Berechnung kann auch durch eine Verfeinerung des Netzes erhöht werden. Diese Verfeinerung geht so vor sich, daß die bereits vorhandenen Elemente (einfache Elementtypen sind hier von Vorteil) weiter unterteilt werden (siehe Abbildung 3.10 und auch Fig. 6.2 bis Fig. 6.4 in [44,S.286], Bild 3-4 in [47,S.107] sowie Abb. 1.4-4 in [48,S62]). Auf diese Weise ist es möglich, auch örtlich begrenzte Bereiche mit sehr starken Änderungen der Feldgrößen optimal zu berücksichtigen.

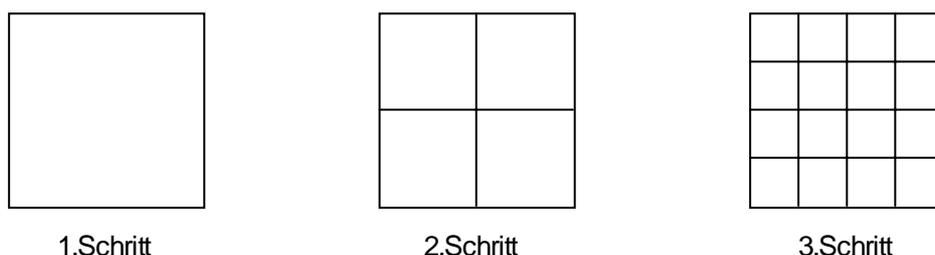


Abb. 3.10: Netzverfeinerung

Abschließend sollte vielleicht noch angemerkt werden, daß die FEM am besten auf Probleme mit abgeschlossenen Grundgebieten angewendet werden kann, da Gebiete mit fehlender Berandung eine unendlich große Anzahl von Elemente benötigen würden.

In [24], [42], [43], [44], [45], [46], [47] und [48] sind ausführliche Berechnungsbeispiele zur Methode der finiten Elemente (FEM) zu finden. Diese Beispiele beinhalten:

1. Diskretisierung des Kontinuums (siehe Abschnitt 3.1.2 und [149,S.55-59]).
2. Bestimmen der Approximationsfunktionen (siehe besonders [24,S.172-174], [42,S.42-50], [44,S.51-53,54-61] und [149,S.59-61]).
3. Ermittlung der Elementgleichungen nach dem Verfahren von Ritz (siehe [64,S.245-250], [65,S.377-382], [66,S.148-151], [67,S.491-498], [23,S.93-94], [25,S.137], [49,S.397-398], [42,S.26-35,99-108], [44,S.37-40], [48,S.47-49] und [149,S.61-63]) oder dem Verfahren von Galerkin (siehe [65,S.382-383], [67,S.522-524], [23,S.94], [44,S.40-42], [60,S.24-263], [43,S.64-65,82-84], [42,S.35-41,108-113,167-175] und [149,S.63]).
4. Berechnung der Systemgleichung (siehe [44,S.141], [48,S.56], [42,S.13], [141,S.55-58], [149,S.64-67] und [24,S.176]).
5. Lösen des Gleichungssystems (siehe unter anderem [24,S.178-179] sowie [149,S.67-69]).

3.2 Anwendung Der FEM auf die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßwiderstandes

3.2.1 PROBLEMSTELLUNG

Da der Ausbreitungswiderstand nur in sehr einfachen Fällen (Kugelerder, Halbkugelerder, ...) exakt berechnet werden kann (siehe Abschnitt 2.3.3), soll der Ausbreitungswiderstand der Erdersysteme gemäß den Abschnitten 5.1 und 5.2 mit der Methode der finiten Elemente berechnet werden.

Mit Hilfe der FEM-Berechnung ist es auch möglich, die Ausbreitungswiderstände ohne großen Aufwand für verschiedene Frequenzen zu ermitteln. Dadurch wird es möglich, die Ausbreitungswiderstände sowohl für die Netzfrequenz (50Hz) als auch für die Meßfrequenzen (94Hz, 105Hz, 111Hz und 128Hz) zu berechnen, und somit die Meßwerte (siehe Abschnitt 5.1.3 und Abschnitt 5.2.3) mit den Berechnungsergebnissen zu vergleichen.

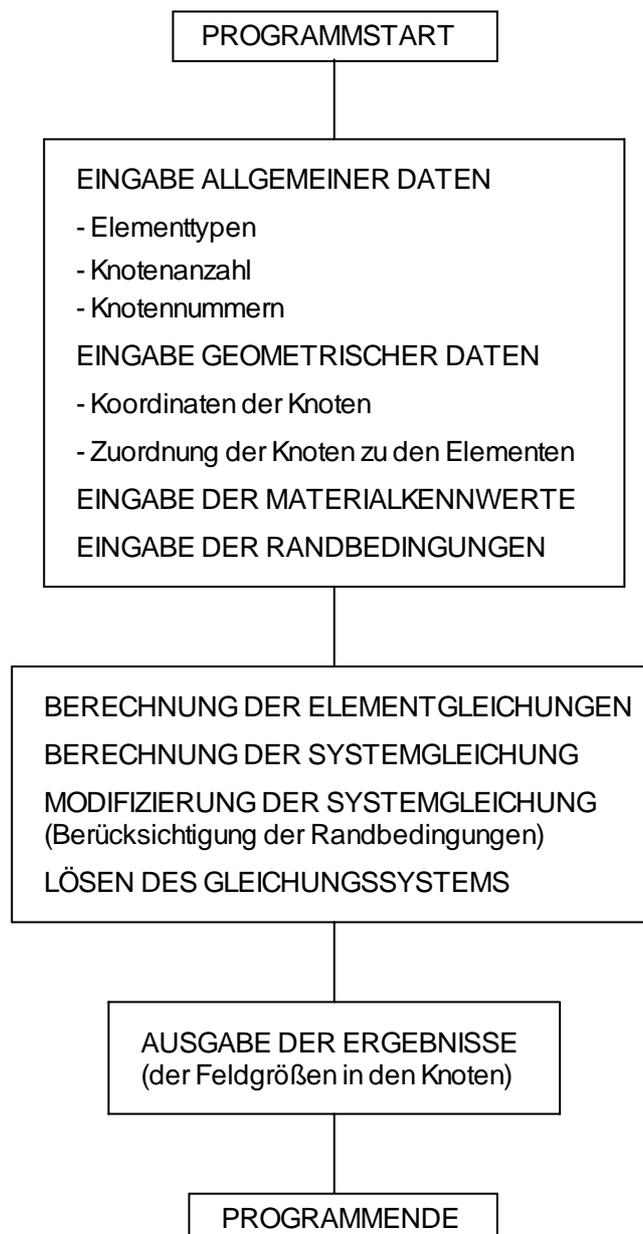


Abb. 3.11: Aufbau eines FEM-Programmes

Weiters soll von den oben genannten Erdersystemen (siehe Abschnitt 5.1 und 5.2), die mit unterschiedlichen, vorgegebenen Stoßspannungen (siehe Abschnitt 3.2.3.4) beaufschlagt werden, der

Stoßerdungswiderstand berechnet werden. Für die mathematische Behandlung dieser transienten Vorgänge (im Zusammenhang mit der Stromverdrängung werden diese Vorgänge auch als Wirbelstromprobleme bezeichnet) im Erdreich eignet sich die Methode der finiten Elemente (FEM) besonders gut.

Das Ziel dieser Berechnung besteht vor allem darin, die Vergrößerung des Stoßerdungswiderstandes durch den Effekt der Stromverdrängung (Skinneffekt, Hauteffekt) zu ermitteln und anhand einer graphischen Darstellung des elektrischen Strömungsfeldes innerhalb des Erdreiches zu erklären. Weiters soll das Ergebnis der FEM-Berechnung mit den meßtechnisch ermittelten Werten der Stoßerdungswiderstände (siehe Abschnitt 5.1.4 und 5.2.4) verglichen werden.

Andere Einflüsse auf die Größe des Stoßerdungswiderstandes, wie etwa die Bodenionisation, der Trockeneffekt und dergleichen mehr (siehe Abschnitt 2.4.1) werden im Rahmen dieser Berechnung nicht berücksichtigt (die Behandlung dieser Effekte ist in [8, S.43-48,74-78] zu finden).

Da es, wie sich noch zeigen wird (siehe speziell dazu Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3), praktisch unmöglich ist, für die vorgegebenen Erdersysteme die FEM-Berechnung "per Hand" durchzuführen, kommt dafür ein FEM-Programm zum Einsatz (siehe Abbildung 3.11).

Für den Anwender eines solchen FEM-Programmes ist in erster Linie die Zusammenstellung der Eingabedaten (geometrische Daten, Materialkennwerte, Randbedingungen, ...) von Bedeutung. Eine wichtige Rolle spielt natürlich auch die Bewertung der Berechnungsergebnisse (Werte der Feldgrößen, Feldbilder, ...; siehe dazu Abschnitt 3.2.3.3 und 3.2.3.4).

3.2.2 DISKRETISIERUNG DES FELDGEBIETES

3.2.2.1 Allgemeine Bemerkungen

Wie schon im Abschnitt 3.1.2 erwähnt wurde, setzt eine Feldberechnung mit Hilfe der FEM die Diskretisierung des betrachteten Grundgebietes voraus. Bei dieser Zerlegung des Feldgebietes müssen grundsätzlich alle im Abschnitt 3.1.2 angeführten Regeln eingehalten werden. Im Falle der Berechnung des Stoßerdungswiderstandes umfaßt dieses dreidimensionale Grundgebiet das die Erdungsanlage umgebende Erdreich, sowie auch die Erder selbst.

In diesem Abschnitt soll nun die Vorgangsweise bei der Generierung eines geeigneten Netzes für die vorgegebenen Erdersysteme beschrieben werden. Ferner wird in diesem Zusammenhang erläutert, wie das gewählte Netz und die Materialkennwerte in das verwendete FEM-Programm eingegeben werden müssen.

Die Diskretisierung des Feldgebietes erfolgt vorerst zweidimensional. Es wird also zunächst die Erdoberfläche im Bereich des elektrischen Strömungsfeldes in finite Elemente zerlegt. Der symmetrische Aufbau der Versuchsanordnung (siehe Abbildungen 5.1-1 und 5.1-2) wirkt sich hierbei insofern vorteilhaft aus, als daß nur ein Viertel des betrachteten Feldgebietes diskretisiert werden muß.

Für die Diskretisierung wurden die folgenden Elementtypen ausgewählt (siehe Abbildung 3.12 und Abbildung 3.13):

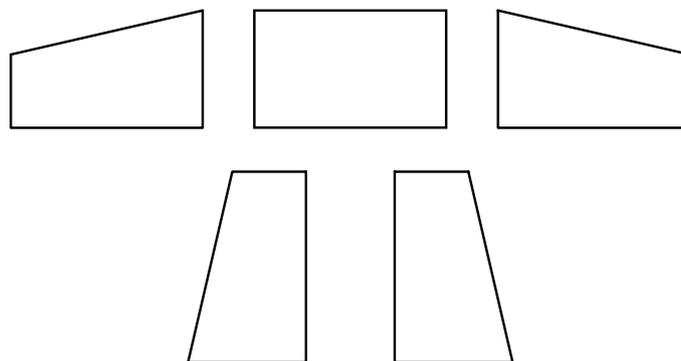


Abb. 3.12: Ausgewählte Elementtypen

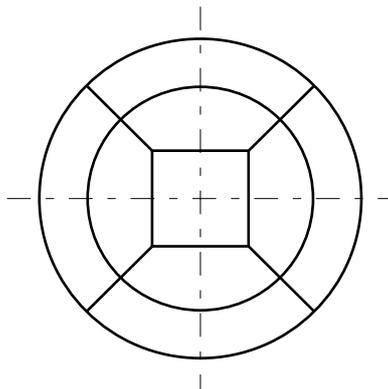


Abb. 3.13: Diskretisierung der einzelnen Erdelektroden

Die Grobeinteilung der Erdoberfläche hat demnach die folgende Form:

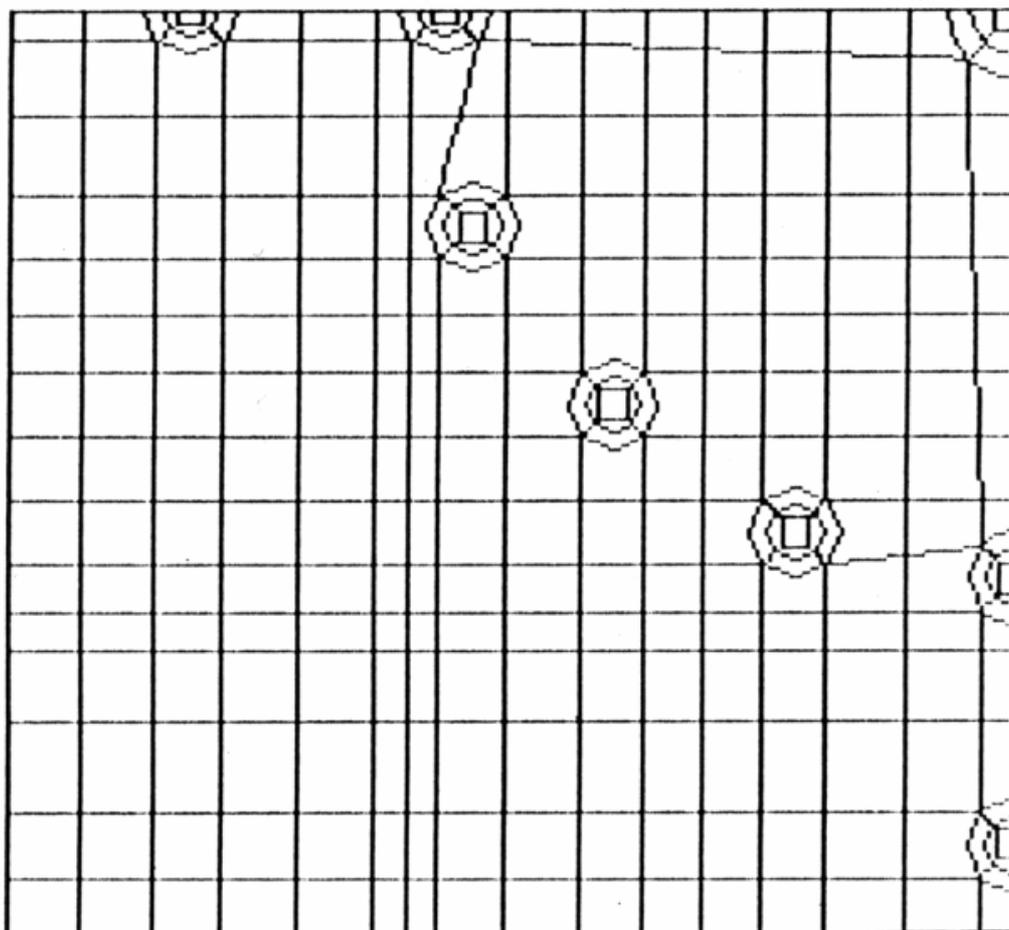


Abb. 3.14: Grobeinteilung der Erdoberfläche
(Darstellung des 1. Quadranten mit den einzelnen Erdelektroden)

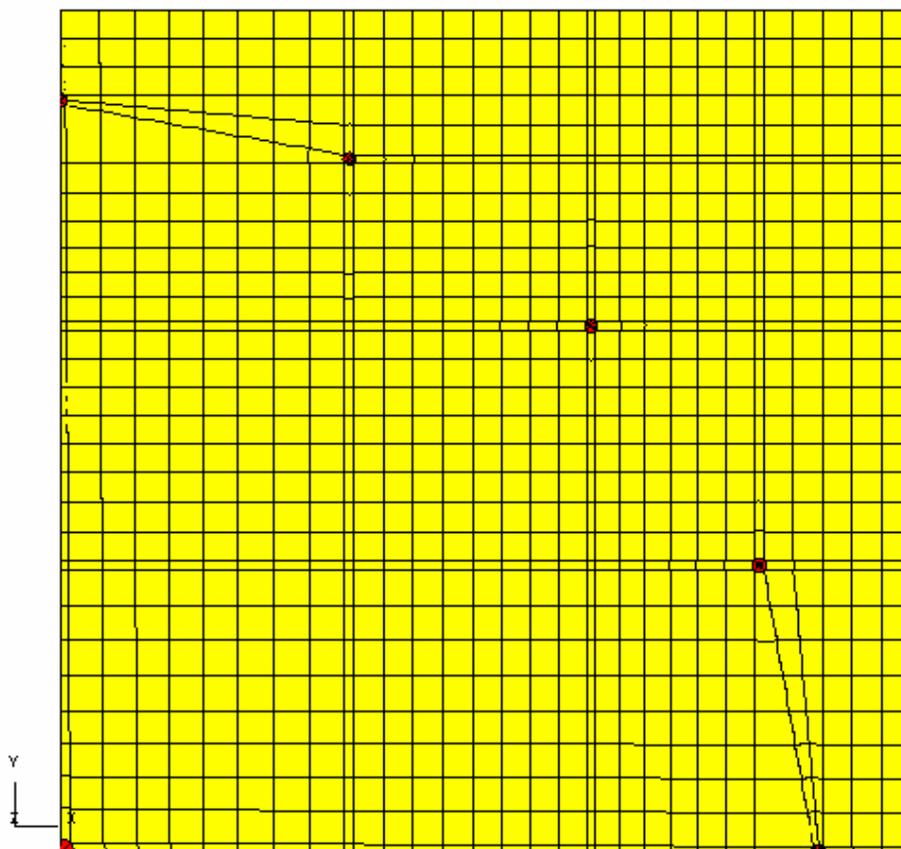


Abb. 3.15: Grobeinteilung der Erdoberfläche

Jede Seite eines Elements besitzt drei Knoten, d.h. zwei äußere Knoten an den Eckpunkten und einen inneren Knoten im Seitenmittelpunkt (siehe Abbildung 3.16).

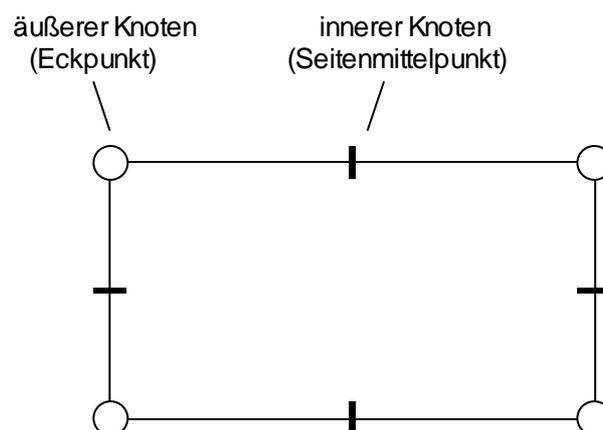


Abb. 3.16: Anzahl der Knoten pro Element

Für die weitere Arbeit mit den Finiten Elementen ist nun erforderlich, die Knoten der einzelnen Elemente wie auch die Elemente selbst zu nummerieren. Diese Nummerierung kann grundsätzlich beliebig erfolgen. Um den Aufwand bei der Lösung des linearen Gleichungssystems möglichst klein zu halten, sollte sie jedoch optimal gewählt werden (siehe Abschnitt 3.1.2).

Eine optimale Numerierung erhält man, ausgehend von einer Startnumerierung, etwa durch die Anwendung des Algorithmus von Cuthill / Mc Kee oder des Algorithmus von Rosen (siehe dazu auch [44,S.152-161]).

Einen Ausschnitt aus der gewählten Numerierung für die Grobeinteilung des Versuchsaufbaues (siehe Abbildung 5.1-1) zeigt die Abbildung 3.17.

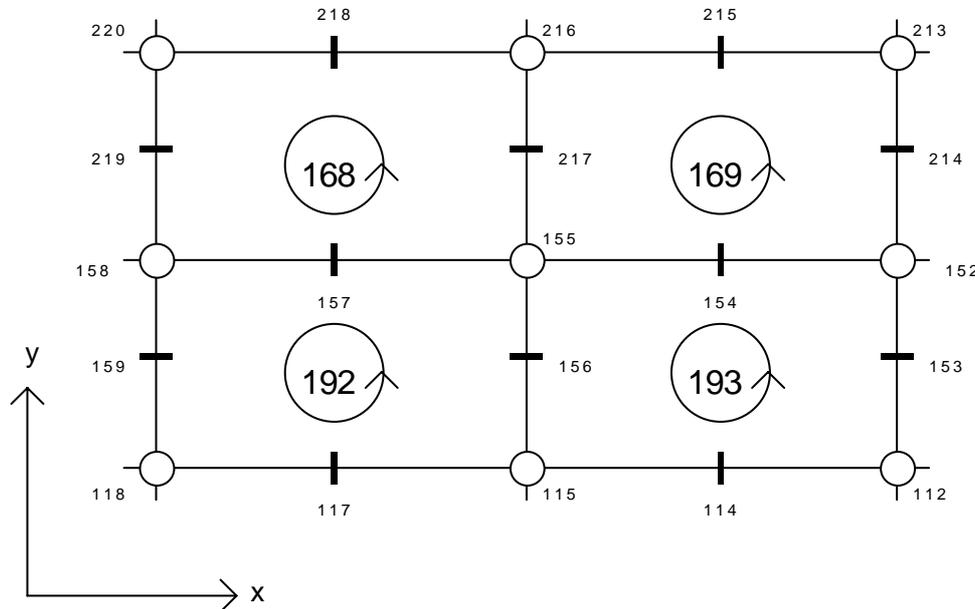


Abb. 3.17: Ausschnitt aus der in der vorliegenden Diplomarbeit gewählten Numerierung für den Versuchsaufbau

Angelangt an dieser Stelle kann man nun die Koordinaten sämtlicher Knotenpunkte ermitteln. Als Koordinatenursprung dient für diesen Zweck der Mittelpunkt der zentralen Elektrode (siehe Abbildung 5.1-1). Um den Aufwand bei der Ermittlung der Knotenkoordinaten in vertretbaren Grenzen zu halten, wurde die Lage der Knotenpunkte durch relativ wenige (in bezug auf die Gesamtanzahl der Knoten) Parameter (Variablen) festgelegt (die tatsächlichen Koordinaten werden aus diesen Parametern berechnet, siehe dazu Anhang: (A.2) Programm ERDER1). Diese Parameter können dann mühelos den tatsächlichen Abmessungen der Versuchsanordnung angepaßt werden. Die Formeln für die Berechnung der Knotenkoordinaten bleiben dabei immer dieselben (siehe dazu Anhang: (A.2) Programm ERDER1).

Ein weiterer wichtiger Punkt ist nun die Zuordnung der Knoten zu den einzelnen Elementen. Wie aus der Abbildung 3.17 ersichtlich wird, müssen jedem Element genau acht Knoten zugeordnet werden (vier äußere und vier innere Knoten). Bei dieser Zuordnung muß darauf geachtet werden, daß sie bei allen Elementen ausgehend vom jeweils gleichen Anfangspunkt (z.B. linker unterer Knoten) entweder im oder entgegen dem Uhrzeigersinn durchgeführt wird. Wählt man den Anfangspunkt und die Richtung so, wie sie in der Abbildung 3.17 dargestellt sind, muß die Zuordnung der Knoten zu den Elementen lauten (siehe dazu Anhang: (A.1) Programm ERDER):

Element 168: 158, 157, 155, 217, 216, 218, 220, 219

Element 169: 155, 154, 152, 214, 213, 215, 216, 217

Element 192: 118, 117, 115, 156, 155, 157, 158, 159

Element 193: 115, 114, 112, 153, 152, 154, 155, 156

Schließlich kann man noch, um den Fehler bei der FEM-Berechnung zu verkleinern, das grobe Netz aus der Abbildung 3.17 (die Elemente der groben Unterteilung werden auch als Makroelemente bezeichnet, siehe [127,S.7]) verfeinern (siehe dazu auch Abschnitt 3.1.2). Es werden für diesen Fall wieder eigene Parameter definiert, die je nach der gewünschten zusätzlichen Unterteilung (Feinunterteilung) der schon vorhandenen (Makro)Elemente in sogenannte (Mikro)Elemente (siehe [127,S.7]) festgelegt werden können. Es besteht hierbei die Möglichkeit, die Unterteilungen für die x- und y-Richtung jeweils getrennt voneinander zu wählen.

Für eine x-Unterteilung von "I=4" und eine y-Unterteilung von "J=3" ergibt sich das folgende, verfeinerte Netz (siehe Abbildung 3.18, die Bedeutung der Parameter I und J wird auch im Abschnitt 3.2.2.2 beschrieben).

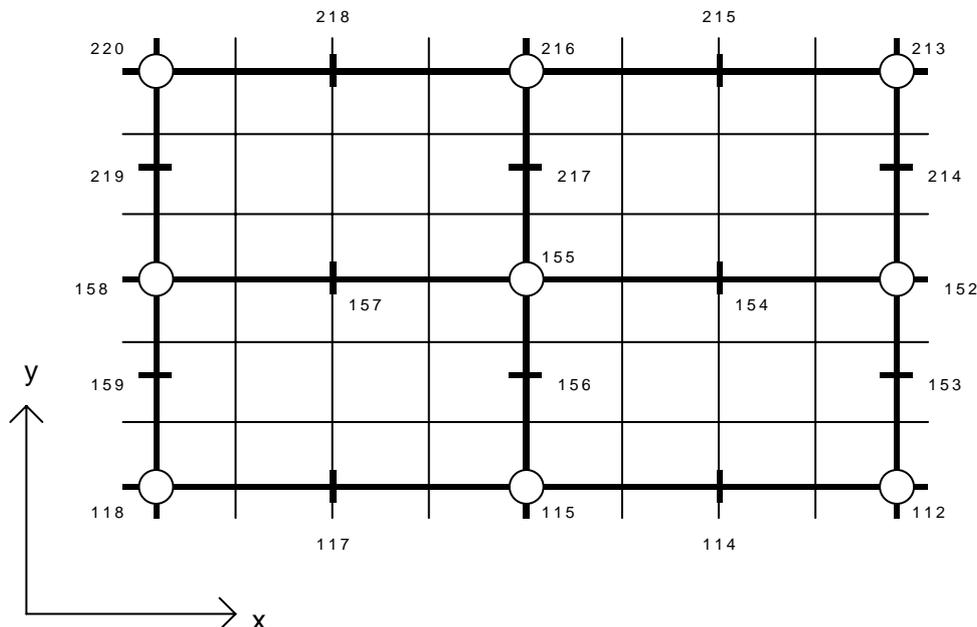


Abb. 3.18: Verfeinertes Netz

Somit sind sämtliche allgemeinen Daten (Elementtypen, Knotenanzahl, ...) und alle geometrischen Daten (Knotenkoordinaten, Zuordnung der Knoten zu den Elementen, ...) für die zunächst zweidimensionale Betrachtung bestimmt.

Da sich das elektrische Strömungsfeld jedoch im dreidimensionalen Raum (Feldvolumen) ausbreitet, muß noch eine dritte Koordinatenrichtung (die z-Richtung) eingeführt werden. Die räumliche Diskretisierung des Feldvolumens erhält man dann durch das "in die Tiefe Ziehen" der ebenen Diskretisierung der Erdoberfläche. Dabei wird die Ausdehnung in die Tiefe (z-Richtung) zusätzlich noch in mehrere Schichten unterteilt (siehe Abbildung 3.19).

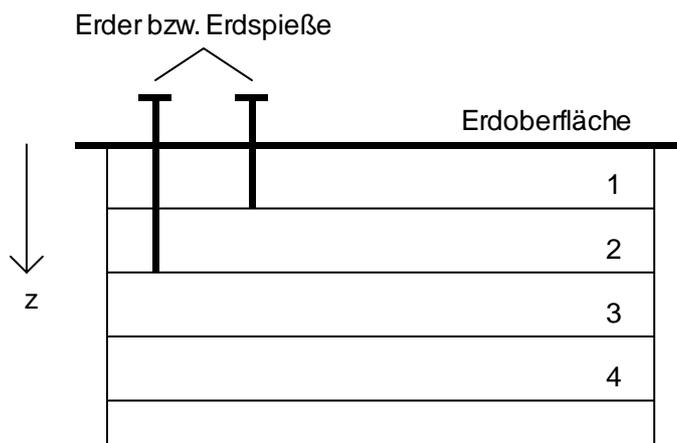


Abb. 3.19: Unterteilung der z-Richtung

Diese zunächst grobe Unterteilung kann bei Bedarf noch weiter verfeinert werden (siehe Abbildung 3.20). Es besteht auch hier wieder die Möglichkeit, den Grad der Verfeinerung separat für jede einzelne Schicht durch eigens dafür vorgesehene Parameter festzulegen. Die folgende Abbildung zeigt eine Feinunterteilung in z-Richtung von "K=3" (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2.2).

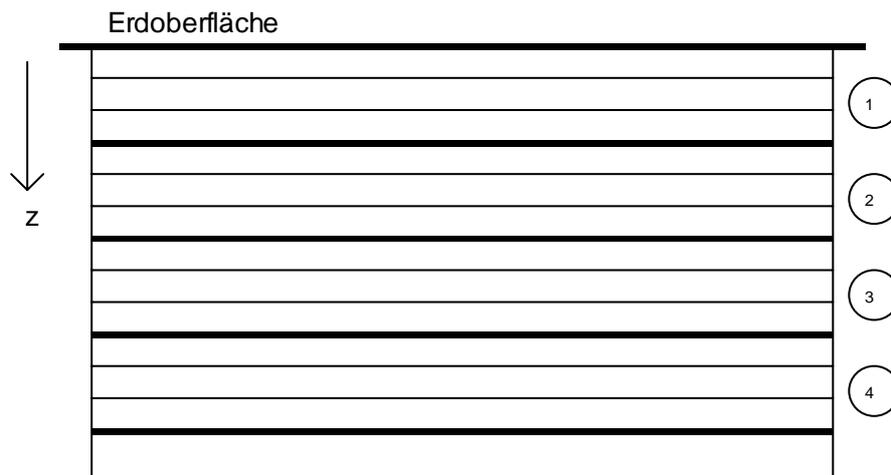


Abb. 3.20: Feinere Unterteilung der z-Schichten (gleiche Unterteilung in allen Schichten)

Aus den Vierecken in der Ebene (zweidimensionale Diskretisierung) werden also Prismen im Raum (dreidimensionale Diskretisierung). Das gleiche gilt natürlich auch für alle anderen Elemente (aus Kreisen in der Ebene werden Zylinder im dreidimensionalen Raum, ...).

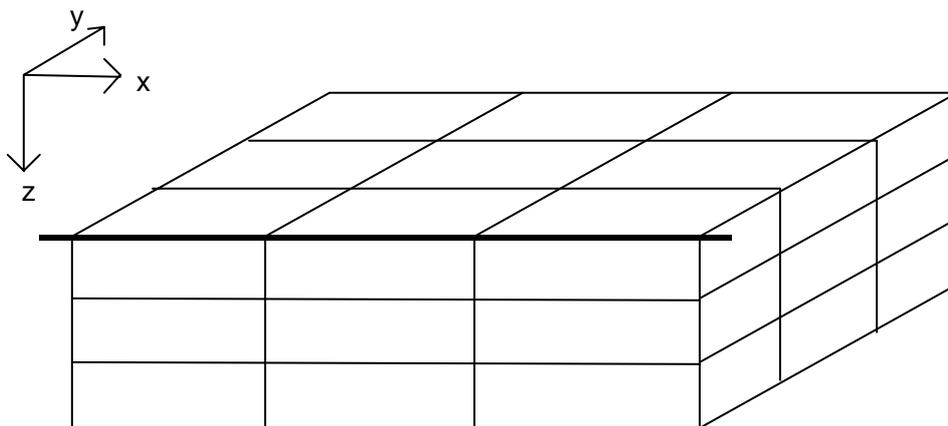


Abb. 3.21: Ausschnitt aus der räumlichen Diskretisierung

Letztendlich müssen noch die Materialkennwerte (es wird in diesem Fall sowohl bei den Elektroden als auch beim Erdreich von einem homogenen und isotropen Material ausgegangen) definiert werden.

Die Materialkennwerte sind:

- die elektrische Leitfähigkeit der Elektroden
- die elektrische Leitfähigkeit des Erdreiches
- die Permeabilität der Elektroden
- die Permeabilität des Erdreiches

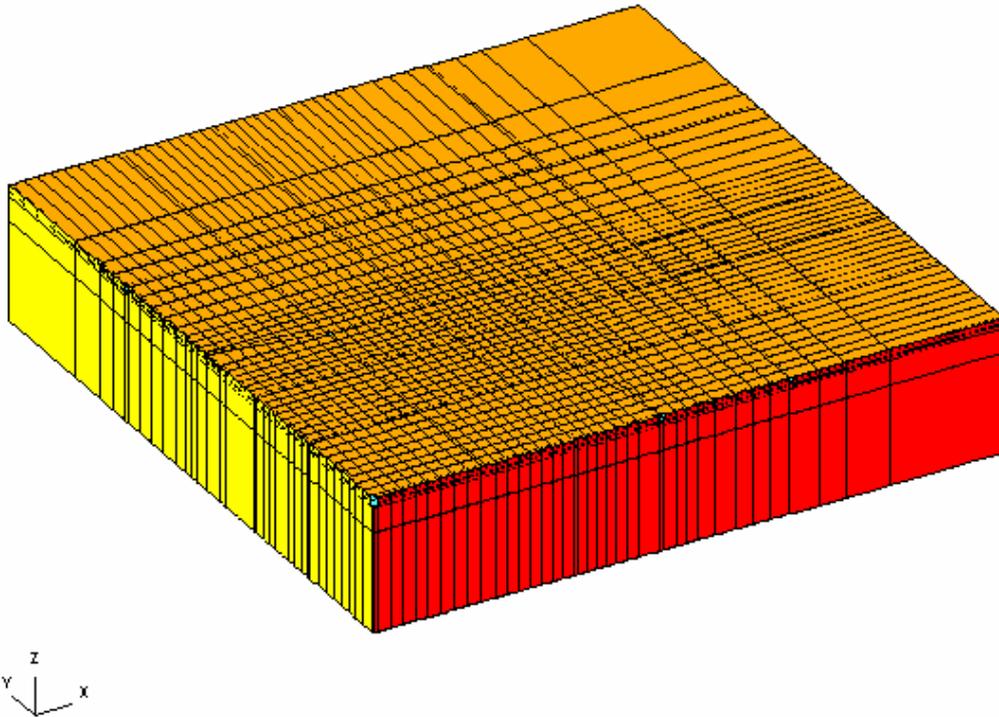


Abb. 3.22: Dreidimensionale Diskretisierung des gesamten Feldvolumens

Somit sind nun alle Daten, die bei der Diskretisierung des Feldvolumens berücksichtigt werden müssen, festgelegt worden.

3.2.2.2 Spezielle Erläuterungen zu den zugehörigen Fortran-Programmen

Das Ziel dieses Abschnittes ist, die Bedeutung der in den FEM-Programmen (siehe Anhang Teil (A)) vorkommenden Parameter zu erklären.

(1) Parameter für die Feinunterteilung der (Makro)Elemente in (Mikro)Elemente (siehe Anhang: (A.1) Programm ERDER, Abbildung 3.18 und Abbildung 3.20):

- x-Richtung: I1 bis I32
- y-Richtung: J1 bis J16
- z-Richtung: K1 bis K4

(2) Parameter für die Koordinaten der Elementknoten (siehe Anhang: (A.2) Programm ERDER1 sowie Abbildung 3.23 und Abbildung 3.24):

- x-Richtung: XM7, XM10, XM12, XM13, XM14, XM15, XM21, XM22, XM23
- y-Richtung: YM7, YM10, YM12, YM13, YM14, YM15, YM21, YM22, YM23
- z-Richtung: ZM1 bis ZM5

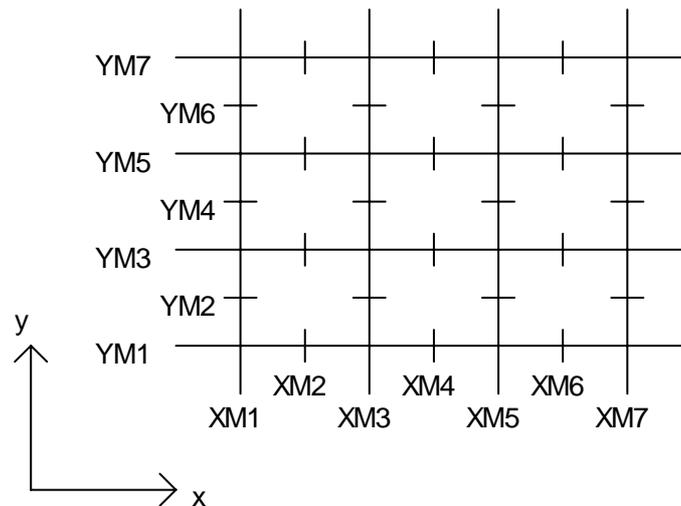


Abb. 3.23: Beispiel für die Koordinaten der Elementknoten in der x/y-Ebene

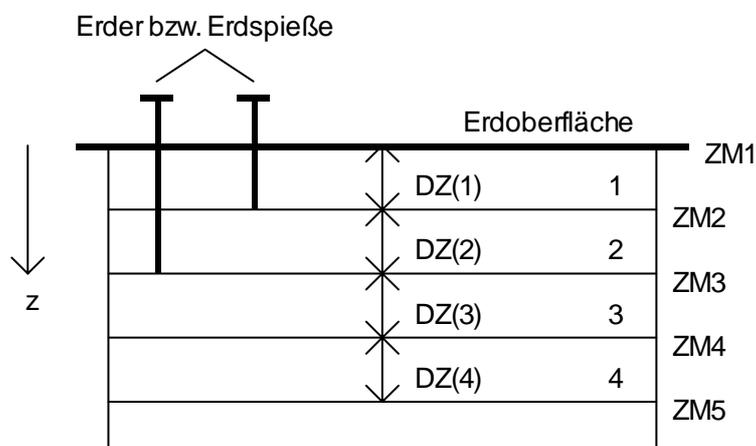


Abb. 3.24: Tatsächliche Koordinaten der z-Schichten (DZ(n): Schichtdicken)

(3) Parameter für die Elektrodenmittelpunkte (siehe Anhang: (A.2) Programm ERDER1 und Abbildung 3.25):

Elektrode 1: (XM1/YM1)
 Elektrode 2: (XM2/YM2)
 Elektrode 3: (XM3/YM3)
 Elektrode 4: (XM4/YM4)
 Elektrode 5: (XM5/YM5)
 Elektrode 6: (XM6/YM6)
 Elektrode 7: (XM18/YM18)
 Elektrode 8: (XM8/YM8)

(4) Parameter für die Elektrodenradien und die Radien der Erdelemente um die Elektroden (siehe Anhang: (A.2) Programm ERDER1 und Abbildung 3.25):

Elektrode 1: R1, R2
 Elektrode 2: R3, R4
 Elektrode 3: R5, R6
 Elektrode 4: R7, R8
 Elektrode 5: R9, R10
 Elektrode 6: R11, R12
 Elektrode 7: R15, R16
 Elektrode 8: R13, R14

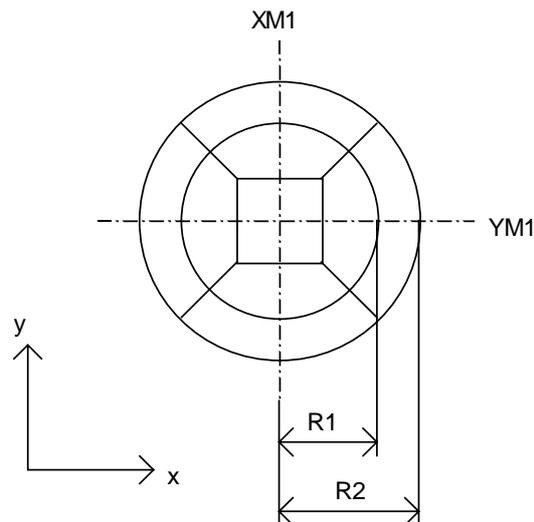


Abb. 3.25: Beispiel für die Parameter einer Elektrode (hier: Elektrode 1)

XM_1 x-Koordinate des Mittelpunktes der Elektrode 1 (siehe oben)

YM_1 y-Koordinate des Mittelpunktes der Elektrode 1 (siehe oben)

R_1 Radius der Elektrode 1 (siehe oben)

R_2 Radius des Erdelementes um die Elektrode 1 (siehe oben)

(5) Parameter für die elektrischen Leitfähigkeiten (siehe Anhang: (A.3) Programm ERDER2):

Elektrode 1: S1

Elektrode 2: S2

Elektrode 3: S3

Elektrode 4: S4

Elektrode 5: S5

Elektrode 6: S6

Elektrode 7: S7

Elektrode 8: S8

Erdreich: SE

(6) Flächennummern (siehe Abbildung 3.26) für die Zuordnung der Randwerte zu den einzelnen Volumenelementen und Anzugsfaktoren (siehe Abbildungen 3.27, 3.28-1 und 3.28-2) für die Verschiebung der Seitenmittelnknoten (innere Knoten, siehe auch Abbildung 3.16) auf einer Elementseite (auf diese Weise kann die Diskretisierung optimal an das jeweilige Problem angepaßt werden).

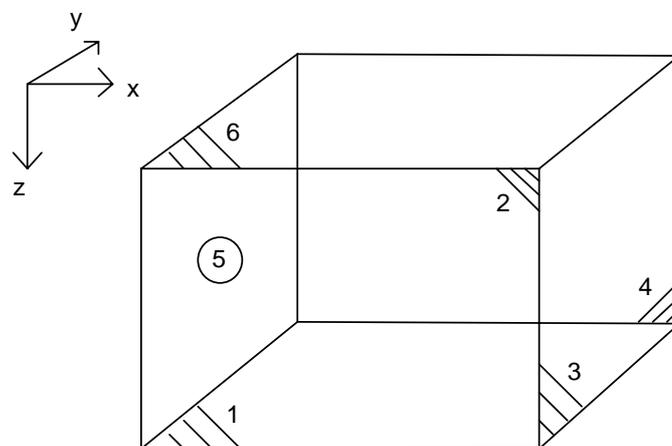


Abb. 3.26: Flächennummern eines Volumenelementes

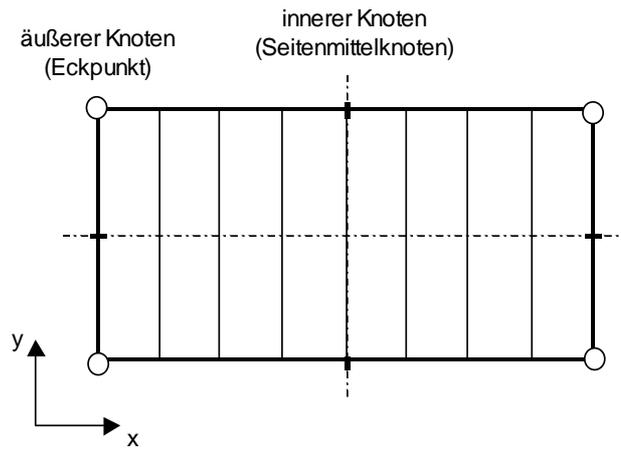


Abb. 3.27: Anzugsfaktor $AZ=0,5$ mit $AZ \in [0.35,0.65]$

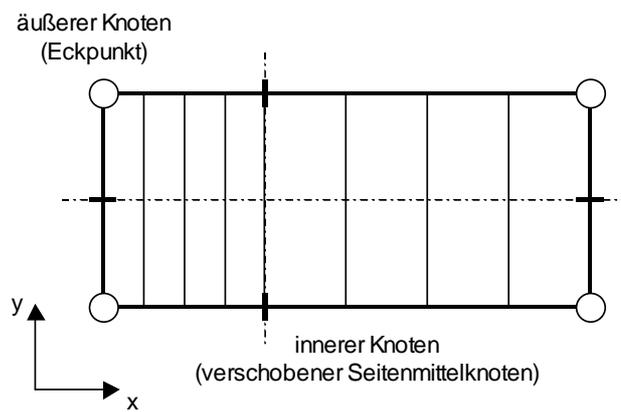


Abb. 3.28-1: Anzugsfaktor $AZ<0,5$ mit $AZ \in [0.35,0.65]$

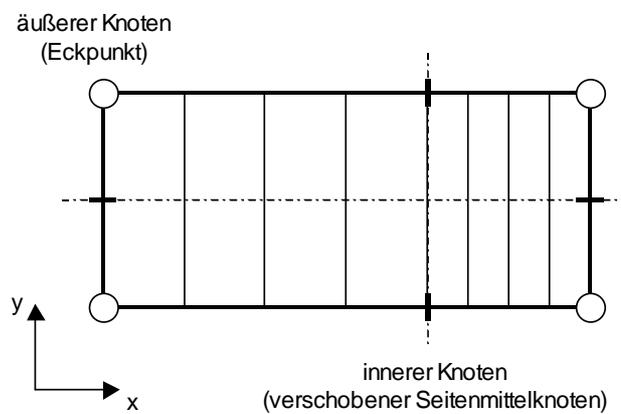


Abb. 3.28-2: Anzugsfaktor $AZ>0,5$ mit $AZ \in [0.35,0.65]$

3.2.3 BERECHNUNG DES ELEKTRISCHEN STRÖMUNGSFELDES

3.2.3.1 Grundsätzliches

Die Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes bedeutet nichts anderes, als die Maxwell'schen Gleichungen (siehe dazu auch Gleichung (2.50) bis (2.55) bzw. Gleichung (2.62) bis (2.65)) zu lösen. Die Praxis hat jedoch gezeigt, daß es vorteilhaft ist, diese miteinander gekoppelten Differential- bzw. Integralgleichungen vor ihrer Verarbeitung in eine mathematisch angenehmere Form zu bringen. Ein Modell zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen stellt die sogenannte $\vec{T}, \Phi - \Phi$ Formulierung (siehe [149, S.80-90]) dar. Im Unterschied zur herkömmlichen mathematischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, also direkt mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen, wird in diesem speziellen Fall das elektrische Feld durch das elektrische Vektorpotential \vec{T} dargestellt. Für die Berechnung des magnetischen Feldes wird das magnetische Skalarpotential Φ eingeführt.

Es stehen dann die gesamten Mittel der Potentialtheorie (siehe dazu speziell [143], [144] und [152]) zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zur Verfügung

Der Vollständigkeit halber muß jedoch noch angemerkt werden, daß das betrachtete Feldvolumen nicht den gesamten (unendlich großen) Raum ausfüllt und im allgemeinen auch aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzt ist (inhomogene, d.h. ortsabhängige Materialeigenschaften). Infolgedessen ist es erforderlich, sogenannte Rand- und Grenzflächenbedingungen einzuhalten, d.h. auf den Rand- und Grenzflächen des Feldgebietes wird das Verhalten der entsprechenden Feldgrößen (Stromdichte, Vektorpotential, ...) vorgeschrieben.

3.2.3.2 Festlegung der Parameter für die FEM-Berechnung

Um den Ausbreitungswiderstand und den Stoßerdungswiderstand der vorgegebenen Erdersysteme (Versuchsaufbau - siehe Abschnitt 5.1.1 und Fundamentarder - siehe Abschnitt 5.2.1) mit Hilfe eines FEM-Programmes (siehe Abbildung 3.11) berechnen zu können, müssen die im Abschnitt 3.2.2.2 beschriebenen Parameter (geometrische Daten, Materialkennwerte, Randbedingungen, ...) den tatsächlichen Werten entsprechend definiert werden (siehe auch Anhang (A): Fortran-Programme zur FEM-Berechnung).

Die hierfür vorgesehenen Fortran-Programme sind im Anhang ((A.1) bis (A.4)) zu finden, und übernehmen die folgenden Aufgaben:

1. Programm ERDER (Anhang (A.1)): Hier wird die Anzahl der 2D-(Makro)Elemente (siehe Abbildung 3.12 bis Abbildung 3.18), der z-Schichten (siehe Abbildung 3.19) und der 3D-(Makro)Elemente (siehe Abbildung 3.21) festgelegt. Überdies werden die Parameter für die Feinunterteilung, also für die Größe der (Mikro)Elemente (siehe Abbildung 3.18 und 3.20), sowohl in x-Richtung als auch in y- und z-Richtung, die Parameter für die sogenannten Anzugsfaktoren und die Parameter für die z-Koordinaten der Elementknoten angegeben (siehe auch Abschnitt 3.2.2.2). Eine weitere Funktion dieses Programmes ist die Berechnung der Koordinaten aller z-Schichten und deren Schichtdicke (siehe Abbildung 3.24). Zusätzlich erfüllt dieses Programm auch die wichtige Aufgabe der Zuordnung der Elementknoten (Knotennummern, siehe dazu Abschnitt 3.2.2.1) und die Zuordnung der Parameter für die Feinunterteilung (siehe hierzu auch Abbildung 3.18 und Abbildung 3.20) zu den entsprechenden 3D-Elementen. Schließlich übernimmt das Programm ERDER auch die Ausgabe der Flächenmittelkoordinaten an das FEM-Berechnungsprogramm (siehe dazu auch Abbildung 3.11).
2. Programm ERDER1 (siehe Anhang (A.2)): In diesem Programm werden verschiedene Konstanten (z.B. $\sin 45^\circ$, $\sin 22,5^\circ$, ...), die zur Berechnung der Knotenkoordinaten nötig sind, definiert. Außerdem erfolgt hier die Festlegung der Parameter (diese Parameter können an eine grobe geometrische Struktur des zu berechnenden Systems angepaßt werden und dienen in weiterer Folge der rechnerischen Ermittlung der Koordinaten der äußeren und inneren Knoten aller vorhandenen Elemente, siehe auch Abschnitt 3.2.2.1 und Abschnitt 3.2.2.2) für die Koordinaten Elektrodennittelpunkte (XM1 bis XM8 und YM1 bis YM8), der Parameter für die Elektrodenradien (R1 bis R16) und der Parameter für die Koordinaten der Elementknoten (XM7 bis XM23 und YM7 bis YM23). Letztendlich werden im Programm ERDER1 auch, wie oben bereits erwähnt wurde, die Koordinaten sämtlicher Elementknoten berechnet.

3. Programm ERDER2 (siehe Anhang (A.3)): Hier werden alle Materialkennwerte, also die elektrischen Leitfähigkeiten der Erdelektroden und der verschiedenen Schichten des Erdreiches sowie deren relative Permeabilität festgelegt. Weiters werden auch Angaben über die Struktur des Elektrodenmaterials und des Erdreiches gemacht (z.B. homogene und isotrope Stoffe). Neben diesen Daten werden auch noch die Randbedingungen (RB), also die Skalarpotentiale der Elektroden an der Erdoberfläche (siehe auch Programm ERDER_RB und Abschnitt 3.2.2.2), und der Typ der Randbedingungen (in diesem Fall Dirichletsche Randbedingungen, siehe Abschnitt 3.2.2.1) angegeben. Überdies erfolgt in diesem Programm auch noch die Zuordnung der elektrischen Leitfähigkeiten und der Randbedingungen (speziell hier muß auch die Fläche, also die Flächennummer - siehe Abbildung 3.26 - eines jeden Elementes angegeben werden, auf der die Randbedingung erfüllt werden soll) zu den entsprechenden Makroelementen (Finiten Elementen).
4. Programm ERDER_RB (siehe Anhang (A.4)): Das Programm ERDER_RB dient der Ausgabe der vorgegebenen Randbedingungen (Skalarpotentiale der Erdelektroden an der Erdoberfläche, siehe auch Programm ERDER2 und Abschnitt 3.2.2.2) an das FEM-Berechnungsprogramm (siehe Abbildung 3.11).

3.2.3.2.1 Parameter für den Versuchsaufbau

Für die Diskretisierung des Versuchsaufbaues (siehe Abbildung 5.1-1) wurden die oben beschriebenen Parameter wie folgt festgelegt (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2.2):

1. Parameter, die durch die geometrische Struktur und die geometrischen Abmessungen des Erdersystems bestimmt sind (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER und Anhang (A.2): Programm ERDER1):

- Parameter für die Elektrodenmittelpunkte (siehe Abbildung 3.25):

Elektrode 1: $(XM1 / YM1) = (0,00 / 0,00)m$
 Elektrode 2: $(XM2 / YM2) = (11,00 / 0,00)m$
 Elektrode 3: $(XM3 / YM3) = (10,16 / 4,21)m$
 Elektrode 4: $(XM4 / YM4) = (7,78 / 7,78)m$
 Elektrode 5: $(XM5 / YM5) = (4,21 / 10,16)m$
 Elektrode 6: $(XM6 / YM6) = (0,00 / 11,00)m$
 Elektrode 7: $(XM18 / YM18) = (16,58 / 0,00)m$
 Elektrode 8: $(XM8 / YM8) = (0,00 / 16,90)m$

- Parameter für die Elektrodenradien und die Radien der Erdelemente um die Elektroden (siehe Abbildung 3.25):

Elektrode 1: $R1 = 0,009m / R2 = 0,20m$
 Elektrode 2: $R3 = 0,005m / R4 = 0,10m$
 Elektrode 3: $R5 = 0,005m / R2 = 0,10m$
 Elektrode 4: $R7 = 0,005m / R8 = 0,10m$
 Elektrode 5: $R9 = 0,005m / R10 = 0,10m$
 Elektrode 6: $R11 = 0,005m / R12 = 0,10m$
 Elektrode 7: $R15 = 0,005m / R16 = 0,40m$
 Elektrode 8: $R13 = 0,005m / R14 = 0,40m$

- Parameter für die Koordinaten der Elementknoten (2D-Diskretisierung, siehe auch Abbildung 3.23):

$(XM7 / YM7) = (2,16 / 2,16)m$
 $(XM10 / YM10) = (6,25 / 6,25)m$
 $(XM12 / YM12) = (9,25 / 9,25)m$
 $(XM13 / YM13) = (12,89 / 12,89)m$
 $(XM14 / YM14) = (13,56 / 13,56)m$
 $(XM15 / YM15) = (14,38 / 14,38)m$
 $(XM21 / YM21) = (18,74 / 18,74)m$
 $(XM22 / YM22) = (20,50 / 20,50)m$
 $(XM23 / YM23) = (25,00 / 25,00)m$

- Parameter für die z-Schichten (3D-Diskretisierung, siehe auch Abbildung 3.24): Diese Parameter werden unter anderem durch die Einschlagtiefen der Erder festgelegt (Tiefe der Erdspeißer = 0,2m / Tiefe der zentralen Erdelektrode = 0,4m - siehe Abbildung 3.24 und Abbildung 5.1-1)

ZM1 = 0,0m
 ZM2 = 0,2m
 ZM3 = 0,4m
 ZM4 = 1,4m
 ZM5 = 5,4m

2. Parameter, die durch die Beschaffenheit des Elektrodenmaterials und des Erdreiches bestimmt sind (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2.2 und Anhang (A.3): Programm ERDER2):

- Elektrische Leitfähigkeit der Erdelektroden (Erder, Material: Legierter Kaltarbeitsstahl 115CrV3 nach DIN17350, siehe [72,S.457]):

Elektrode 1: $S1 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 2: $S2 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 3: $S3 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 4: $S4 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 5: $S5 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 6: $S6 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 7: $S7 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m
 Elektrode 8: $S8 = 1,67 \cdot 10^6$ S/m

- Elektrische Leitfähigkeit des Erdreiches (ergibt sich aus dem spezifischen Erdwiderstand der einzelnen Erdschichten, siehe hierzu Abschnitt 5.1.2 - Tabelle 5.1 und auch Abbildung 3.24):

Schicht 1 (0,00 bis 0,20m Tiefe): 0,02 S/m
 Schicht 2 (0,20 bis 0,40m Tiefe): 0,02 S/m
 Schicht 3 (0,40 bis 1,40m Tiefe): 0,02 S/m
 Schicht 4 (1,40 bis 5,40m Tiefe): 0,02 S/m

- Relative Permeabilität der Erdelektroden: $\mu_r=1$ (Sättigung, siehe z.B. Tabelle 5.6)

- Relative Permeabilität des Erdreiches: $\mu_r=1$

3. Parameter für die Feinunterteilung (Netzverfeinerung, siehe Abbildung 3.18 und Abbildung 3.20) des diskretisierten Erdersystems (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER):

Diese Parameter wurden experimentell ermittelt, d.h. im Rahmen mehrerer einzelner FEM-Berechnungen sowohl an die Gradienten des elektrischen Strömungsfeldes als auch an die geometrische Struktur des Erdersystems angepaßt.

Feinunterteilung in x-Richtung:

x-Unterteilung	zugehörige Parameter
2	I1, I4, I7, I9, I10, I14, I17 bis I32
3	I2, I3, I5, I6, I8, I11, I12, I13, I15, I16

Tab. 3.0-1: Feinunterteilung in x-Richtung (Versuchsaufbau)

Feinunterteilung in y-Richtung:

y-Unterteilung	zugehörige Parameter
2	J3, J7, J8, J10, J13, J16
3	J1, J2, J4, J5, J6, J9, J11, J12, J12, J14, J15

Tab. 3.0-2: Feinunterteilung in y-Richtung (Versuchsaufbau)

Feinunterteilung in z-Richtung:

z-Unterteilung	zugehörige Parameter
2	K1, K2, K3, K4

Tab. 3.0-3: Feinunterteilung in z-Richtung (Versuchsaufbau)

4. Spezielle Parameter für das FEM-Programm (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER):

- Parameter für die Anzugsfaktoren (siehe Abbildungen 3.27 und 3.28):

$$P1 = 0,50$$

$$P2 = 0,50$$

$$P3 = 0,65$$

$$P4 = 0,65$$

3.2.3.2.2 Parameter für den Fundamenterder

Die Parameter für die Diskretisierung des Fundamenterders (siehe Abbildung 5.18 und Abbildung 5.19) wurden wie folgt festgelegt (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.3.2.1 und Abschnitt 3.2.2.2):

1. Parameter, die durch die geometrische Struktur und die geometrischen Abmessungen des Erdersystems bestimmt sind (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER und Anhang (A.2): Programm ERDER1):

- Parameter für die Elektrodenmittelpunkte (siehe auch Abbildung 3.25):

$$\text{Elektrode 1: (XM1 / YM1) = (0,00 / 0,00)m}$$

$$\text{Elektrode 2: (XM2 / YM2) = (11,00 / 0,00)m}$$

$$\text{Elektrode 3: (XM3 / YM3) = (10,16 / 4,21)m}$$

$$\text{Elektrode 4: (XM4 / YM4) = (7,78 / 7,78)m}$$

$$\text{Elektrode 5: (XM5 / YM5) = (4,21 / 10,16)m}$$

$$\text{Elektrode 6: (XM6 / YM6) = (0,00 / 11,00)m}$$

$$\text{Elektrode 7: (XM18 / YM18) = (16,58 / 0,00)m}$$

$$\text{Elektrode 8: (XM8 / YM8) = (0,00 / 16,90)m}$$

- Parameter für die Elektrodenradien (siehe auch Abbildung 3.25):

Der Fundamenterder wird, wie es auch bei der näherungsweise Berechnung des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßerdungswiderstandes möglich ist (siehe [4,S.59], [9,S.73], [11,S.159-160] und [19,S.53-54]), durch einen Plattenerder mit kreisförmigem Querschnitt angenähert (siehe Abschnitt 3.2.3.3.3 und Abschnitt 6.2.2). Daher muß für den Elektrodenradius R_1 (Radius der zentralen Elektrode) der Ersatzradius des genannten Plattenerders eingesetzt werden. Dieser berechnet sich aus der Fundamentfläche $A_F=10\text{m}\cdot 16\text{m}$ (siehe Abbildung 5.18) gemäß der Formel (6.7) zu:

$$R_1 = \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{A_F}{\pi}} = 7,14 \text{ m} \quad (3.1)$$

Demzufolge gilt für die Elektrodenradien (die Radien der äußeren, kreisförmig um die zentrale Elektrode angeordneten Elektroden - siehe Abbildung 5.1-1 - bleiben unverändert):

Elektrode 1: $R_1 = 7,14\text{m} / R_2 = 8,00\text{m}$
 Elektrode 2: $R_3 = 0,005\text{m} / R_4 = 0,10\text{m}$
 Elektrode 3: $R_5 = 0,005\text{m} / R_2 = 0,10\text{m}$
 Elektrode 4: $R_7 = 0,005\text{m} / R_8 = 0,10\text{m}$
 Elektrode 5: $R_9 = 0,005\text{m} / R_{10} = 0,10\text{m}$
 Elektrode 6: $R_{11} = 0,005\text{m} / R_{12} = 0,10\text{m}$
 Elektrode 7: $R_{15} = 0,005\text{m} / R_{16} = 0,40\text{m}$
 Elektrode 8: $R_{13} = 0,005\text{m} / R_{14} = 0,40\text{m}$

- Parameter für die Koordinaten der Elementknoten (2D-Diskretisierung, siehe auch Abbildung 3.23):

$(X_{M7} / Y_{M7}) = (3,06 / 3,06)\text{m}$
 $(X_{M10} / Y_{M10}) = (8,72 / 8,72)\text{m}$
 $(X_{M12} / Y_{M12}) = (13,05 / 13,05)\text{m}$
 $(X_{M13} / Y_{M13}) = (17,50 / 17,50)\text{m}$
 $(X_{M14} / Y_{M14}) = (19,00 / 19,00)\text{m}$
 $(X_{M15} / Y_{M15}) = (20,50 / 20,50)\text{m}$
 $(X_{M21} / Y_{M21}) = (23,50 / 23,50)\text{m}$
 $(X_{M22} / Y_{M22}) = (25,00 / 25,00)\text{m}$
 $(X_{M23} / Y_{M23}) = (26,50 / 26,50)\text{m}$

- Parameter für die z-Schichten (3D-Diskretisierung, siehe auch Abbildung 3.24):

$Z_{M1} = 0,0\text{m}$
 $Z_{M2} = 0,2\text{m}$
 $Z_{M3} = 0,4\text{m}$
 $Z_{M4} = 1,4\text{m}$
 $Z_{M5} = 5,4\text{m}$

2. Parameter, die durch die Beschaffenheit des Elektrodenmaterials und des Erdreiches bestimmt sind (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2.2 und Anhang (A.3): Programm ERDER2):

- Elektrische Leitfähigkeit der Erdelektroden (Erder, Material: Legierter Kaltarbeitsstahl 115CrV3 nach DIN17350, siehe [72,S.457]):

Elektrode 1: $S_1 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 2: $S_2 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 3: $S_3 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 4: $S_4 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 5: $S_5 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 6: $S_6 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 7: $S_7 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
 Elektrode 8: $S_8 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$

- Elektrische Leitfähigkeit des Erdreiches (ergibt sich aus dem spezifischen Erdwiderstand der einzelnen Erdschichten, siehe hierzu Abschnitt 5.1.2 - Tabelle 5.1 und auch Abbildung 3.24):

Schicht 1 (0,00 bis 0,20m Tiefe): $0,01 \text{ S/m}$
 Schicht 2 (0,20 bis 0,40m Tiefe): $0,01 \text{ S/m}$
 Schicht 3 (0,40 bis 1,40m Tiefe): $0,01 \text{ S/m}$
 Schicht 4 (1,40 bis 5,40m Tiefe): $0,01 \text{ S/m}$

- Relative Permeabilität der Erdelektroden: $\mu_r=1$ (Sättigung, siehe z.B. Tabelle 5.12)

- Relative Permeabilität des Erdreiches: $\mu_r=1$

3. Parameter für die Feinunterteilung (Netzverfeinerung, siehe Abbildung 3.18 und Abbildung 3.20) des diskretisierten Erdersystems (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER):

Wie schon bei den Parametern für den Versuchsaufbau (siehe Abschnitt 3.2.3.2.1) wurde auch hier der Versuch unternommen, die Parameter für die Netzverfeinerung experimentell (im Rahmen mehrerer einzelner FEM-Berechnungen) zu bestimmen. Es war jedoch wider Erwarten nicht möglich, auf diese Weise eine Diskretisierung für ein zweckmäßiges FEM-Berechnungsergebnis zu finden. Die unbrauchbaren Resultate, wie unter anderem die stark verzerrten Feldbilder, können mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit auf den großen Radius (siehe Gleichung (3.1)) des Ersatz-Plattenerders (siehe oben) zurückgeführt werden. Aufgrund dieser Tatsache ist es nicht möglich, in die nachfolgenden Tabellen definitive Werte für die x-Unterteilung (siehe Tabelle 3.0-4), die y-Unterteilung (siehe Tabelle 3.0-5) und die z-Unterteilung (siehe Tabelle 3.0-6) einzutragen.

Feinunterteilung in x-Richtung:

x-Unterteilung	zugehörige Parameter
siehe oben, Punkt 4	I1, I4, I7, I9, I10, I14, I17 bis I32
siehe oben, Punkt 4	I2, I3, I5, I6, I8, I11, I12, I13, I15, I16

Tab. 3.0-4: Feinunterteilung in x-Richtung (Fundamenterder)

Feinunterteilung in y-Richtung:

y-Unterteilung	zugehörige Parameter
siehe oben, Punkt 4	J3, J7, J8, J10, J13, J16
siehe oben, Punkt 4	J1, J2, J4, J5, J6, J9, J11, J12, J12, J14, J15

Tab. 3.0-5: Feinunterteilung in y-Richtung (Fundamenterder)

Feinunterteilung in z-Richtung:

z-Unterteilung	zugehörige Parameter
siehe oben, Punkt 4	K1, K2, K3, K4

Tab. 3.0-6: Feinunterteilung in z-Richtung (Fundamenterder)

4. Spezielle Parameter für das FEM-Berechnungsprogramm (siehe Anhang (A.1): Programm ERDER):

- Parameter für die Anzugsfaktoren (Erklärung siehe Abschnitt 3.2.2.2, Punkt (6), speziell Abbildungen 3.27 sowie 3.28-1 und 3.28-2):

$$P1 = 0,50$$

$$P2 = 0,50$$

$$P3 = 0,65$$

$$P4 = 0,65$$

3.2.3.3 Berechnung des Ausbreitungswiderstandes

3.2.3.3.1 Grundlagen

Üblicherweise legt man der Berechnung des Ausbreitungswiderstandes (auch stationärer Ausbreitungswiderstand genannt, siehe Abschnitt 2.3.3) ein stationäres elektrisches Strömungsfeld zugrunde. Das bedeutet nichts anderes, als das man zeitlich konstante Feldgrößen (Gleichströme, Gleichspannungen, ...) voraussetzt, und daher der Ausbreitungswiderstand ein reiner Wirkwiderstand (Gleichstromwiderstand) ist. Man kann dennoch davon ausgehen, daß der stationäre Ausbreitungswiderstand auch für niederfrequente Wechselströme (z.B. Wechselströme mit Netzfrequenz) in vielen Fällen eine repräsentative Größe darstellt.

Der Ausbreitungswiderstand kann also mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes berechnet werden. Man verwendet dafür am besten das Ohmsche Gesetz in der Integralform. Somit ergibt sich:

$$R_A = \frac{U_E}{I_E} = \frac{\int_s \vec{E}_e \circ d\vec{s}}{\int_A \vec{J}_e \circ d\vec{A}} \quad (3.2)$$

U_E Erdungsspannung

I_E Erdungsstrom

\vec{E}_e eingeprägte elektrische Feldstärke

\vec{J}_e eingeprägte elektrische Stromdichte

Eine andere Möglichkeit stellt die Berechnung des Ausbreitungswiderstandes über die Joulesche Wärme im Leiter (Erdreich) dar.

Für die je Volumeneinheit in Wärme umgewandelte Leistung gilt:

$$\begin{aligned} dP &= dU_e \cdot dI_e = (\vec{E}_e \circ d\vec{s}) \cdot (\vec{J}_e \circ d\vec{A}) = (|\vec{E}_e| \cdot ds) \cdot (|\vec{J}_e| \cdot dA) = \\ &= |\vec{E}_e| \cdot |\vec{J}_e| \cdot ds \cdot dA = |\vec{E}_e| \cdot |\vec{J}_e| \cdot dV \end{aligned} \quad (3.3)$$

Durch das Einsetzen des Ohmschen Gesetzes in Differentialform (siehe Gleichung (2.57) bzw. Gleichung (2.82)) in die Formel (3.3) erhält man:

$$dP = \sigma \cdot |\vec{E}_e|^2 \cdot dV = \frac{|\vec{J}_e|^2}{\sigma} \cdot dV \quad (3.4)$$

σ elektrische Leitfähigkeit des Erdreiches

Die Gleichung (3.4) stellt das sogenannte Joulesche Gesetz in Differentialform dar.

Man erhält aus dieser Formel für die Leistungsdichte:

$$p = \frac{dP}{dV} = \sigma \cdot |\vec{E}_e|^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot |\vec{J}_e|^2 \quad (3.5)$$

Für die Joulesche Wärme im gesamtem Feldvolumen gilt somit:

$$P = \int_V dP = \int_V p \cdot dV = \sigma \cdot \int_V |\vec{E}_e|^2 \cdot dV = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_V |\vec{J}_e|^2 \cdot dV \quad (3.6)$$

Aus der allgemeinen Beziehung

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (3.7)$$

folgt schließlich:

$$R_A = \frac{P}{I_E^2} = \frac{U_E^2}{P} \quad (3.8)$$

mit:

$$I_E = \int_A \vec{J}_e \circ d\vec{A} \quad (3.9)$$

$$U_E = \int_s \vec{E}_e \circ d\vec{s} \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) ist es aber auch möglich, den tatsächlichen Wechselstromwiderstand, also die Impedanz (bzw. den Betrag der Impedanz) des Erdersystems für die Netzfrequenz (50Hz) oder die Meßfrequenzen (94Hz, 105Hz, 111Hz und 128Hz; siehe dazu Abschnitt 5.1.3 und Abschnitt 5.2.3) zu berechnen.

3.2.3.3.2 Ausbreitungswiderstand des Versuchsaufbaues

Für einen Vergleich mit den Meßergebnissen (siehe dazu Abschnitt 6.2.1) bezieht sich das Ergebnis der FEM-Berechnung auf die Meßspannung des digitalen Erdungsmeßgerätes (Typ: NORMA-UNILAP GEO X - siehe Abschnitt 5.1.2), d.h. auf eine sinusförmige Erdungsspannung (siehe Abschnitt 2.1) mit einem Effektivwert von:

$$U_E = 20 \text{ V} \quad (3.11)$$

Die Berechnung wurde für alle Meßfrequenzen (94Hz, 105Hz, 111Hz und 128Hz) durchgeführt. Das Ergebnis für die Verlustleistung (Joulesche Wärme) im Feldvolumen war stets das gleiche. Es lautet:

$$P = 4,4145 \text{ W} \quad (3.12)$$

Geht man der Einfachheit halber von einer konstanten Leistungsdichte aus, so resultiert daraus für die Joulesche Wärme im Feldgebiet (siehe Gleichungen (3.3) bis (3.6)):

$$P = \int_V p \cdot dV = p \cdot V \quad (3.13)$$

Die Abmessungen für das Feldvolumen kann man dem Abschnitt 3.2.3.2.1 (Parameter für den Versuchsaufbau) entnehmen. Volumenberechnung ergibt schließlich:

$$V = 4 \cdot X_{M23} \cdot Y_{M23} \cdot Z_{M5} = 4 \cdot 25\text{m} \cdot 25\text{m} \cdot 5,4\text{m} = 13500\text{m}^3 \quad (3.14)$$

Aus den Gleichungen (3.12) bis (3.14) berechnet sich die mittlere Leistungsdichte zu:

$$p = \frac{4,4145\text{W}}{13500\text{m}^3} = 0,327 \frac{\text{mW}}{\text{m}^3} \quad (3.15)$$

Gemäß der Gleichung (3.8) erhält man für den Ausbreitungswiderstand:

$$R_A = \frac{U_E^2}{P} = \frac{20^2}{4,4145} \Omega = 90,61 \Omega \quad (3.16)$$

Dieses FEM-Resultat in Form der Gleichung (3.16) wird im Abschnitt 6.2.1 im Sinne eines Vergleiches mit den näherungsweise berechneten bzw. mit den gemessenen Ausbreitungswiderständen ausgewertet.

Zum Abschluß werden noch die Bilder des elektrischen Strömungsfeldes im Erdreich und in den Elektroden des Versuchsaufbaues - siehe Abbildung 3.29 bis Abbildung 3.32) aus der FEM-

Berechnung graphisch dargestellt und erklärt. Alle genannten Abbildungen sind Momentaufnahmen, d.h. es kann jedes Feldbild einem bestimmten Zeitpunkt der Sinuskurve (gerechnet wurde mit einer eingepprägten Sinusspannung) zugeordnet werden. Alle geometrischen Daten sowie auch die Materialkenngrößen können den Programmen im Anhang entnommen werden.

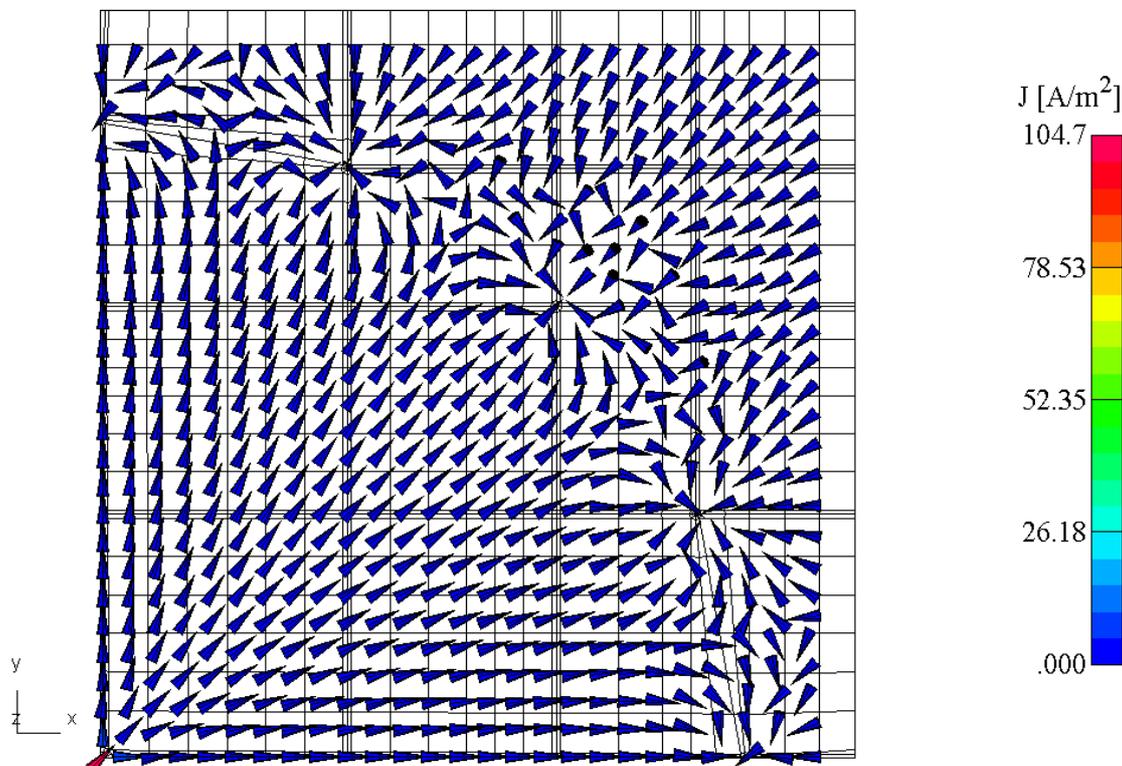


Abb. 3.29: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) nahe der Erdoberfläche (Versuchsaufbau, Ausschnitt „¼-Kreis“ - siehe auch Abbildungen 3.14 und 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.29 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingepprägte Sinusspannung - Effektivwert: 20V

Frequenz: 105Hz

Zeitpunkt: $t=2,38\text{ms}$ (für den Scheitelwert)

Diese Abbildung zeigt den Betrag und die Richtung der elektrischen Stromdichte direkt an der Erdoberfläche. Den Erwartungen entsprechend hat die geometrische Symmetrie des Erdersystemes (siehe Abbildung 5.1-1) auch ein symmetrisches (bezüglich der Mittelachse der zentralen Elektrode) elektrisches Strömungsfeld zur Folge. Betrachtet man die Stromdichte in der unmittelbaren Umgebung der Erdspeie (äußere Elektroden, siehe auch Abbildung 3.14) genauer, so wird durch deren räumliche Verteilung (rotationssymmetrisch jeweils auf eine Elektrode hinzielende Strömung) ein trichterförmiger Verlauf des Erdoberflächenpotentials (Potentialtrichter, Spannungstrichter - siehe Abbildung 2.12) um die Erdspeie bestätigt. Weiters kann der Abbildung 3.29 entnommen werden, daß der Betrag der elektrischen Stromdichte nahe der zentralen Elektrode sein Maximum hat, und dann in radialer Richtung relativ schnell, d.h. innerhalb eines kreisförmigen Bereiches von etwa 40cm Durchmesser (siehe Parameter für den Versuchsaufbau, Abschnitt 3.2.3.2.1), abnimmt (siehe dazu auch Abbildung 3.30 und Abbildung 3.31).

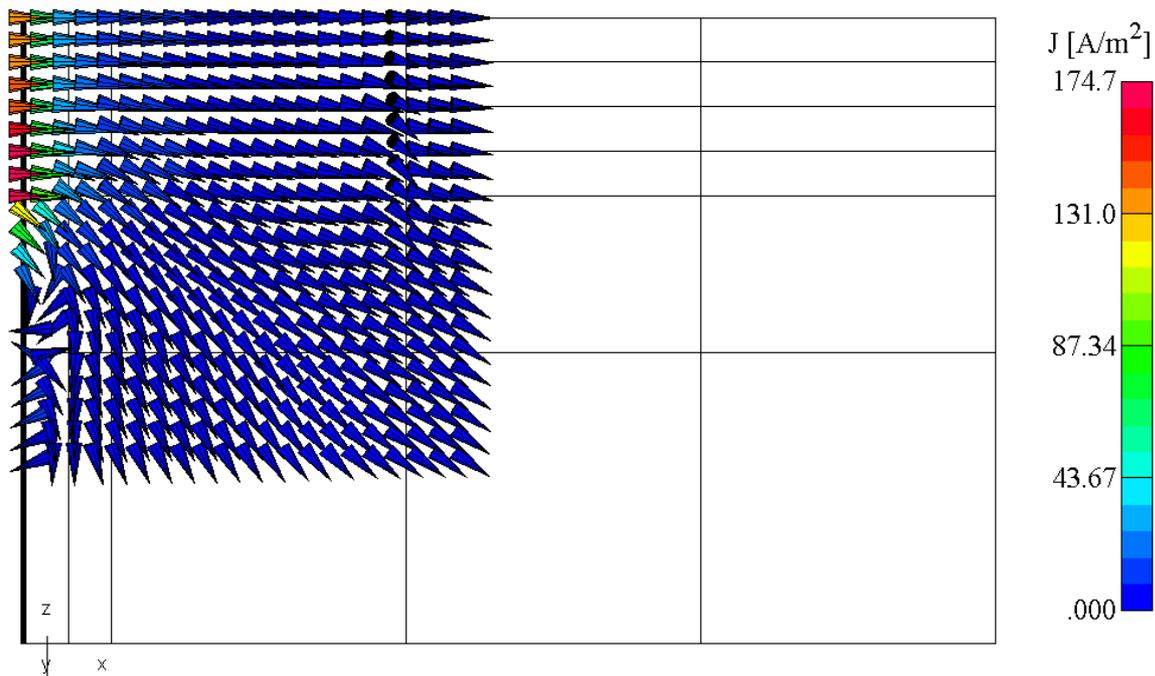


Abb. 3.30: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) im Erdreich in der Umgebung der zentralen Elektrode (Versuchsaufbau - siehe Abbildung 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.30 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingeprägte Sinusspannung - Effektivwert: 20V

Frequenz: 105Hz

Zeitpunkt: $t=2,38\text{ms}$ (für den Scheitelwert)

Es wird hier in der x-z-Ebene das elektrische Strömungsfeld (der Stromdichte-Vektor) im Bereich der zentralen Elektrode (siehe Abbildung 5.1-1) dargestellt (siehe auch Abbildung 3.31). Diese Elektrode reicht bis in eine Tiefe von 0,4m (4. horizontale Linie in der Abbildung 3.30). Erwartungsgemäß steht der Vektor der elektrischen Stromdichte senkrecht auf die Leiteroberfläche (die Oberfläche der Metallelektrode kann als Äquipotentialfläche betrachtet werden, wenn, wie es im vorliegenden Fall zutrifft, die elektrische Leitfähigkeit der Elektrode sehr groß gegenüber der Leitfähigkeit des Erdreiches ist). Der Betrag der Stromdichte an der Elektrodenoberfläche steigt mit zunehmender Tiefe und erreicht sein Maximum an der Spitze der Elektrode (roter Bereich). Mit wachsendem Abstand vom Leiter wird dieser Betrag kleiner, wobei die Stromdichte an der Erdoberfläche und in den oberflächennahen Schichten (bis etwa 0,2m) verhältnismäßig (in Relation zum jeweiligen Betrag der Stromdichte an der Leiteroberfläche) groß ist. Man kann also schon bei einer (kleinen) Frequenz von 105Hz eine Stromverdrängung hin zur Erdoberfläche beobachten (siehe dazu auch [3,S.198-199]). Weiters kann der Abbildung 3.30 entnommen werden, daß das elektrische Strömungsfeld in den oberen Erdschichten (im wesentlichen bis zum Ende der zentralen Elektrode, d.h. bis in eine Tiefe von 0,4m) parallel zur Oberfläche ausgerichtet ist. Die ebenfalls vorhandene Ausbreitung in tiefere Schichten ist aufgrund ihrer sehr geringen Intensität nur von untergeordneter Bedeutung.

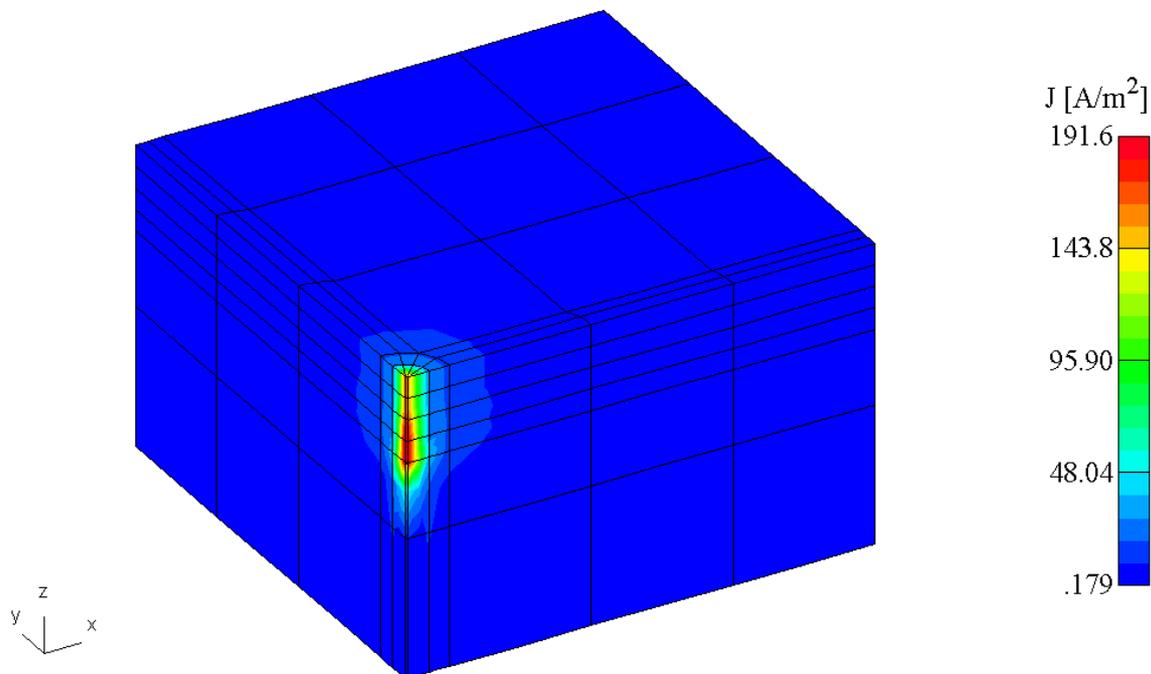


Abb. 3.31: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) im Bereich der zentralen Elektrode (Versuchsaufbau - siehe Abbildung 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.31 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingeprägte Sinusspannung - Effektivwert: 20V

Frequenz: 105Hz

Zeitpunkt: $t=2,38\text{ms}$ (für den Scheitelwert)

Diese Abbildung dient der graphischen Veranschaulichung der elektrischen Strömung im Erdreich in der näheren Umgebung der zentralen Elektrode (siehe Abbildung 5.1-1). Sie enthält grundsätzlich die gleichen Aussagen wie das Bild 3.30 (siehe oben). Die skalare Darstellung läßt zwar keine Schlüsse in bezug auf die Ausbreitungsrichtung der elektrischen Strömung zu, jedoch wird durch die dreidimensionale Ansicht die räumliche Symmetrie des Strömungsfeldes deutlich (siehe auch Abbildung 3.29).

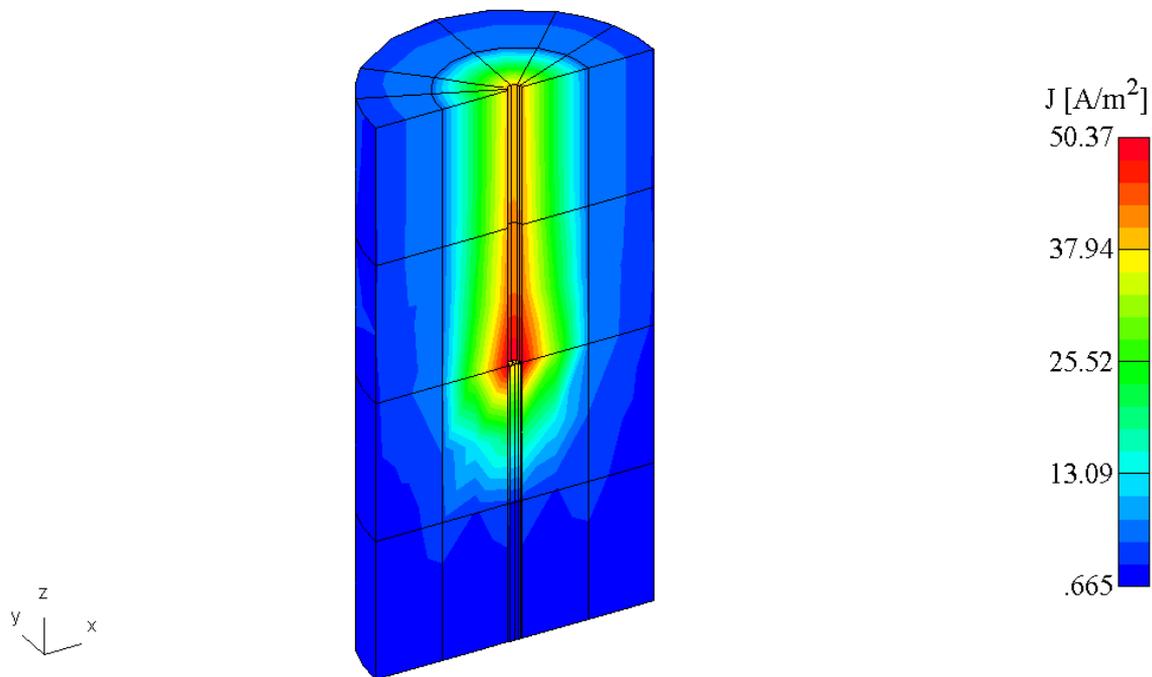


Abb. 3.32: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) in einem Erdspeiß und dessen unmittelbarer Umgebung, horizontale Unterteilung = 0,1m
(Versuchsaufbau - siehe Abbildung 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.32 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingeprägte Sinusspannung - Effektivwert: 20V

Frequenz: 105Hz

Zeitpunkt: $t=2,38ms$ (für den Scheitelwert)

Die Abbildung 3.32 zeigt die Stromdichteverteilung in und um einen der 16 Erdspeiße (siehe Abbildung 5.1-1, die räumliche Lage dieser äußeren Elektrode kann der Abbildung 3.38 entnommen werden). Wie bei der zentralen Elektrode (siehe Abbildung 3.29 bis Abbildung 3.31) wird der Betrag der Stromdichte an der Oberfläche des Erdspeißes mit zunehmender Tiefe größer und erreicht sein Maximum an der Elektrodenspitze (in 0,2m Tiefe, roter Bereich). Die räumliche Symmetrie des Strömungsfeldes wird durch die dreidimensionale Darstellung klar erkennbar. Außerdem wird, wie erwartet, auch hier mit wachsendem Abstand vom Leiter der Betrag der elektrischen Stromdichte kleiner. Aus der Abbildung 3.32 kann weiters abgeleitet werden, daß die größte Stromdichte im Bereich der oberflächennahen Schichten (bis ungefähr 0,3m Tiefe) erreicht wird (siehe dazu auch [3,S.198-199]).

3.2.3.3.3 Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders

Um einen Vergleich mit den gebräuchlichen Näherungsverfahren zur Berechnung des Ausbreitungswiderstandes eines Fundamenterders (siehe [4,S.59], [9,S.73], [11,S.159-160], [19,S.53-54] und Abschnitt 6.2.2) zu ermöglichen, soll das Ziel dieser FEM-Berechnung sein:

1. Approximation des tatsächlichen Fundamenterders durch einen Ersatzerder. Für die Wahl des Ersatzerders kommt das im Abschnitt 6.6.2 beschriebene Verfahren (Berechnung eines Ersatzdurchmessers für einen kreisförmigen Plattenerder aus der vom Fundamenterder eingeschlossenen Fläche - siehe Abbildung 5.18 und Abbildung 5.19 sowie Gleichung (6.7)) zur Anwendung (die Ergebnisse der Näherungsberechnung beziehen sich ebenfalls auf dieses Modell).
2. Zur Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes soll die bereits vorhandene Diskretisierung des Versuchsaufbaues (siehe Abschnitt 3.2.2) verwendet werden. Es müssen für diesen Zweck lediglich die entsprechenden Parameter (für die geometrische Struktur und die geometrischen Abmessungen des Erdersystems, für die Beschaffenheit des Elektrodenmaterials und des Erdreiches, für die Randbedingungen sowie für die Feinunterteilung - siehe hierzu Abschnitt 3.2.3.2.2) an die tatsächlichen Verhältnisse (siehe Abschnitt 5.2) angepaßt werden.

Wie im Abschnitt 3.2.3.2.2 (Parameter für den Fundamenterder) bereits angemerkt wurde, war es jedoch nicht möglich, eine für die FEM-Berechnung brauchbare Diskretisierung (genau genommen: Netzverfeinerung) zu ermitteln (siehe dazu besonders Punkt 5 im Abschnitt 3.2.3.2.2). Demzufolge haben die daraus resultierenden Ergebnisse für den Ausbreitungswiderstand auch keinerlei praktische Relevanz.

3.2.3.4 Berechnung des Stoßerdungswiderstandes

3.2.3.4.1 Grundlagen

Die rechnerische Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes erfolgt entsprechend seiner Definition (siehe dazu Abschnitt 2.4.3.1.2) in der Form

$$R_{St} = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}_E} \quad (2.105)$$

Dieser Wert ist, wie im Abschnitt 2.4.3.1.2 bereits angemerkt wurde, als reine Rechengröße zur Abschätzung der Blitzeinwirkung zu betrachten (siehe auch [11,S.150-151], [62,S.21] und auch [93,S.140]).

Überdies besteht die Möglichkeit, den Stoßerdungswiderstand als eine Funktion der Zeit (siehe [93,S.140]) darzustellen, denn es gilt (siehe Abschnitt 2.4.3.1.2):

$$r_{St}(t) = \frac{u_E(t)}{i_E(t)} \quad (2.106)$$

Die Aufgabe der FEM-Berechnung besteht nun darin, den zur vorgegebenen Stoßspannungserregung $u_E(t)$ (Erdungsspannung, siehe Abschnitt 2.1) gehörigen Strom $i_E(t)$ (Erdungsstrom, siehe Abschnitt 2.1) zu ermitteln. Mit Hilfe dieser beiden Größen kann anschließend der Stoßerdungswiderstand gemäß den Gleichungen (2.105) und (2.106) bestimmt werden.

Die Spannungserregung, eine Blitzstoßspannung mit einer Stirnzeit von $T_S=1,2\mu s \pm 30\%$ und einer Rückenhalbwertszeit von $T_R=50\mu s \pm 30\%$ (nach VDE 0433 bzw. IEC 60-2; die gleiche Stoßspannung wird auch bei der Messung des Stoßerdungswiderstandes von einem sogenannten Hybridgenerator

erzeugt; siehe dazu Abschnitt 5.1.4 und [75,S.1102-1105]), wird durch eine Doppelsexponentialfunktion angenähert.

Für diese zeitabhängige Funktion gilt (siehe Abbildungen 3.29 und 3.30):

$$u_E(t) = C \cdot \hat{u}_E \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \quad (3.17)$$

\hat{u}_E Scheitelwert der Stoßspannung
 C, a, bKonstanten
 tZeit

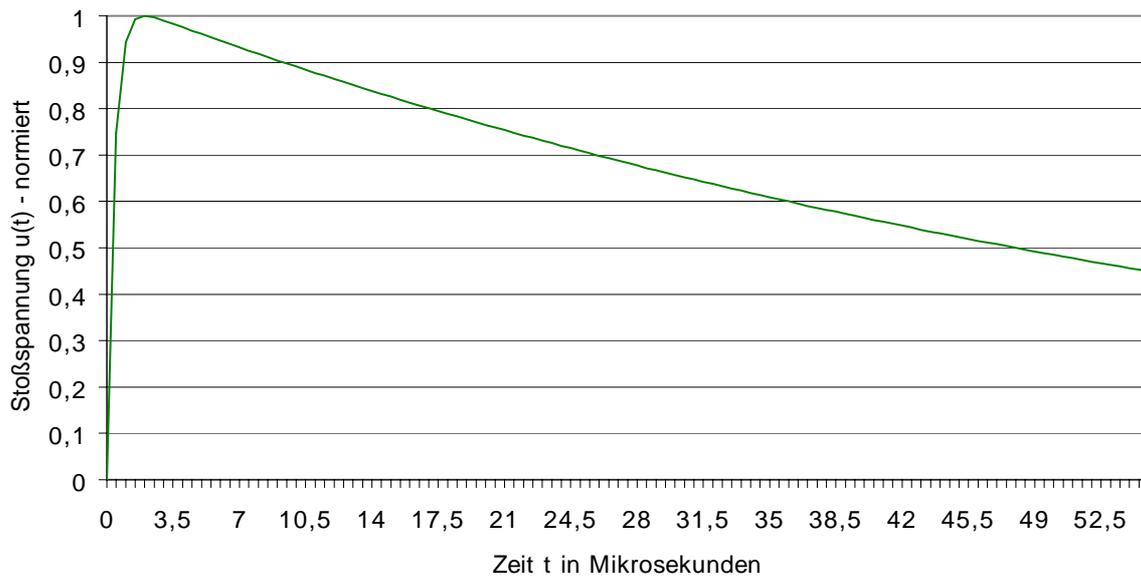


Abb. 3.33: Zeitlicher Verlauf der Stoßerregung
 (eingeprägte Stoßspannung, normierte Darstellung)

Aus den geforderten Zeitwerten von $T_S=1,2\mu s \pm 30\%$ und $T_R=50\mu s \pm 30\%$ (siehe oben) resultieren für die Konstanten C, a und b die Werte:

1. $C=1,037$
2. $a=1,52 \cdot 10^4$
3. $b=2,60 \cdot 10^6$

Daraus ergeben sich die tatsächlichen Zeiten zu (siehe Abbildungen 3.33 und 3.34):

1. Stirnzeit: $T_S=1,195\mu s$
2. Rückenhalbwertszeit: $T_R=47,99\mu s$

Beide Werte liegen also innerhalb der Toleranzgrenzen (siehe oben).

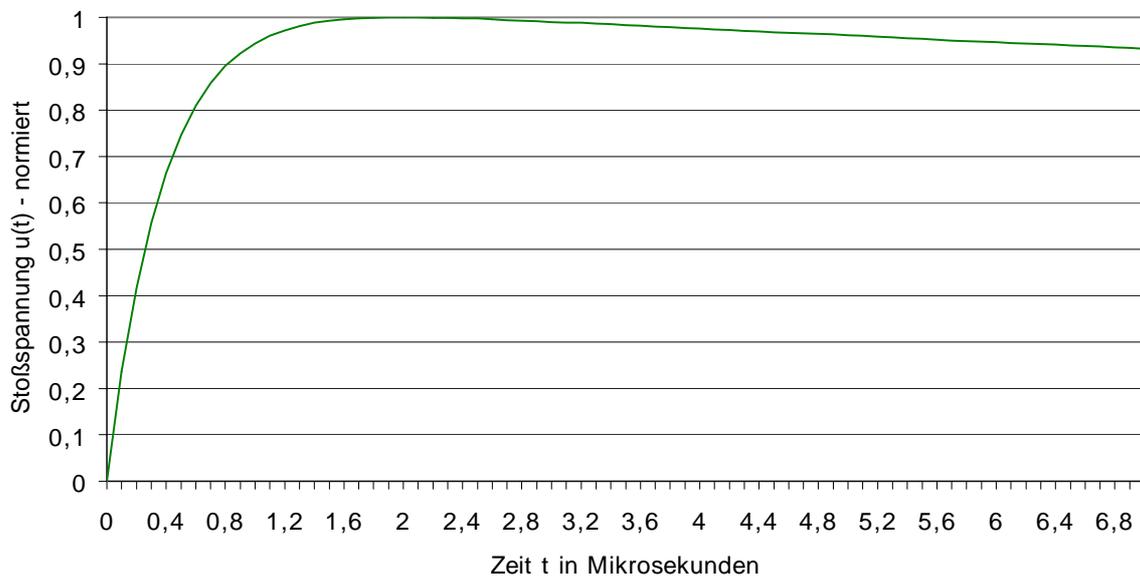


Abb. 3.34: Ausschnitt aus dem zeitlichen Verlauf der Stoßerregung (eingepögte Stoßspannung, normierte Darstellung)

Die Ergebnisse der finite Elemente Berechnung (FEM-Berechnung) sind in den beiden nachfolgenden Abschnitten zu finden.

3.2.3.4.2 Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaues

Die FEM-Berechnung (die Parameter dafür wurden im Abschnitt 3.2.3.2.1 definiert) der elektrischen Stromstärke (Erdungsstrom, siehe Abschnitt 2.1) im Erdsystem (Versuchsaufbau, siehe Abbildung 5.1-1 und Abbildung 5.1-2), also in den Erden (Erdungselektroden) und im Erdreich, und die damit verbundene Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes (siehe oben, Gleichung (2.105) und Gleichung (2.106)) führt zu den folgenden Ergebnissen:

$t / \mu\text{s}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$i(t) / \text{A}$	0	110	143	151	152	151	150	149	148	147	146	145	144
$t / \mu\text{s}$	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5
$i(t) / \text{A}$	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131

Tab. 3.1: Stromstärke bei einem positiven Spannungsscheitelwert von 1kV (mit 16 Erdspeissen)

In der Abbildung 3.35 (normierte Darstellung, d.h. alle Werte sind auf den Scheitelwert der Stromstärke bezogen) und der Abbildung 3.36 (tatsächliche Stromstärken) ist dieses Berechnungsergebnis graphisch dargestellt.

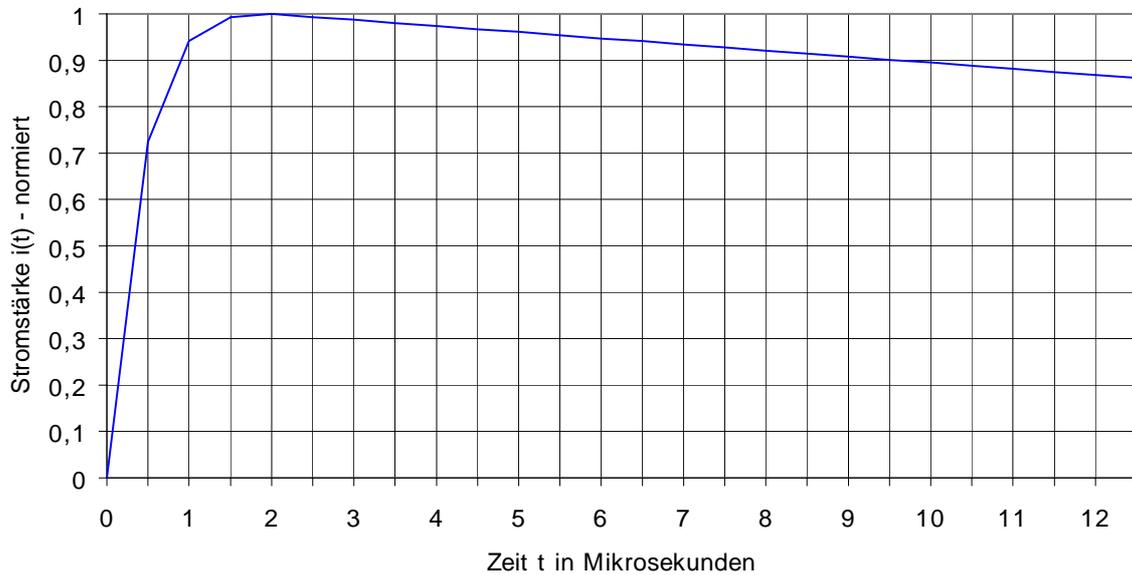


Abb. 3.35: Strom im Erdungssystem als Funktion der Zeit
(normierte Darstellung für positive Stoßerregungen)

Für eine Stoßspannungserregung mit einem positiven Scheitelwert von 1kV ergeben sich für das Erdungssystem nach der Abbildung 5.1-1 (mit $h=3,2\text{m}$; $D=22\text{m}$ und $t=0,5\text{m}$) die folgenden Absolutwerte für den zeitlichen Verlauf des Stromes (siehe Tabelle 3.1 und Abbildung 3.36):

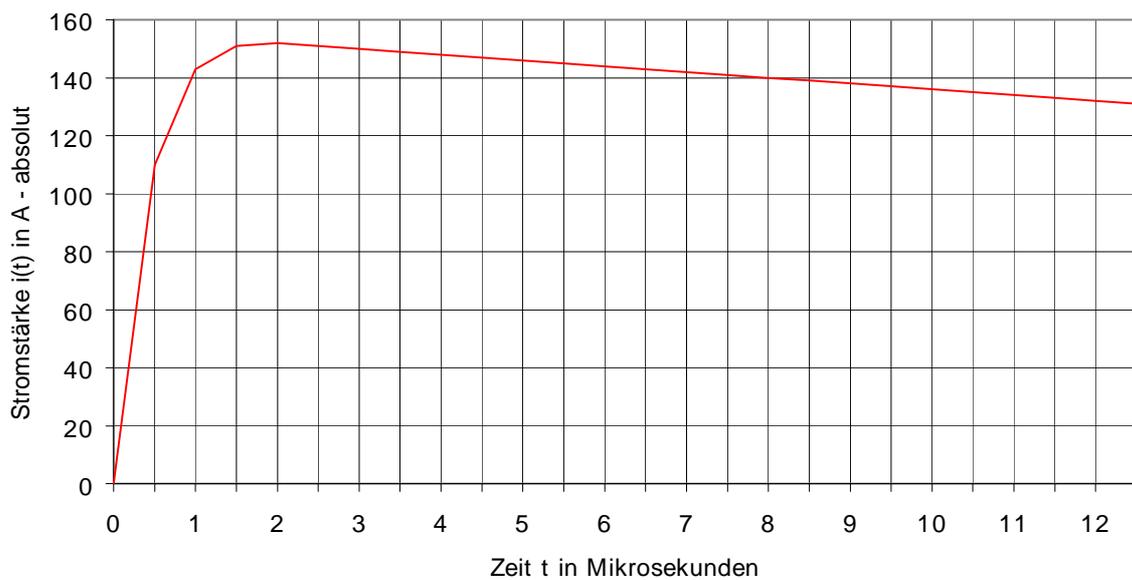


Abb. 3.36: Stromstärke bei einem positiven Spannungsscheitelwert von 1kV

(mit 16 Erdspießsen)

Die Berechnung der Erdungsströme für die Stoßspannungserregungen mit den Scheitelwerten von - 1kV, ±2kV bis ±8kV ergibt:

1. Der zeitliche Verlauf aller Ströme entspricht exakt der Abbildung 3.35 (normierte Darstellung des Erdungsstromes). Negative Stoßspannungen verursachen dabei natürlich auch negative Ströme. Für die graphische Darstellung des zugehörigen normierten Stromes bedeutet das eine Spiegelung der positiven Werte (siehe Abbildung 3.35) an der Zeitachse (siehe Abbildung 3.37).
2. Die einzelnen Ströme unterscheiden sich ausschließlich durch ihre Beträge. Diese Werte steigen, laut dem Ergebnis der FEM-Berechnung, gemäß der Formel (3.18) linear mit dem Scheitelwert der eingepprägten Stoßspannung. Das bedeutet nichts anderes, als daß der Betrag des Stoßerdungswiderstandes konstant bleibt (siehe Tabelle 3.5). Dieses Resultat stimmt in einem relativ großen Bereich (1kV bis 7kV Spannungsscheitelwert) mit dem Meßergebnis überein. Eine Abweichung von den Meßwerten tritt erst im Bereich höherer Spannungsscheitelwerte auf (siehe dazu Tabelle 3.3 und Tabelle 3.4, sowie Abschnitt 5.1.4 und Abschnitt 6.3.1). Dies kann man mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit auf den Trockeneffekt, den Fritteffekt und in erster Linie auf die Erscheinung der Bodenionisation (siehe Abschnitt 2.4.1) zurückführen (Meßfehler in dieser Größenordnung können ausgeschlossen werden). Diese Phänomene konnten im vorliegenden Berechnungsmodell nicht berücksichtigt werden (die Behandlung dieser Effekte ist in [8,S.43-48,74-78] zu finden).

$$i_E(t)_{\hat{U}_E} = i_E(t)_{\hat{U}_E=1kV} \cdot \frac{\hat{U}_E}{1000} \tag{3.18}$$

\hat{U}_E Scheitelwert der Stoßspannung (Erdungsspannung)
 $i_E(t)_{\hat{U}_E}$ Erdungsstrom (Zeitverlauf) für eine Spannungserregung mit dem Scheitelwert \hat{U}_E
 $i_E(t)_{\hat{U}_E=1kV}$ Erdungsstrom (Zeitverlauf) für die Spannungserregung mit dem Scheitelwert $\hat{U}_E = 1kV$ (siehe Tabelle 3.1 und Abbildung 3.36)

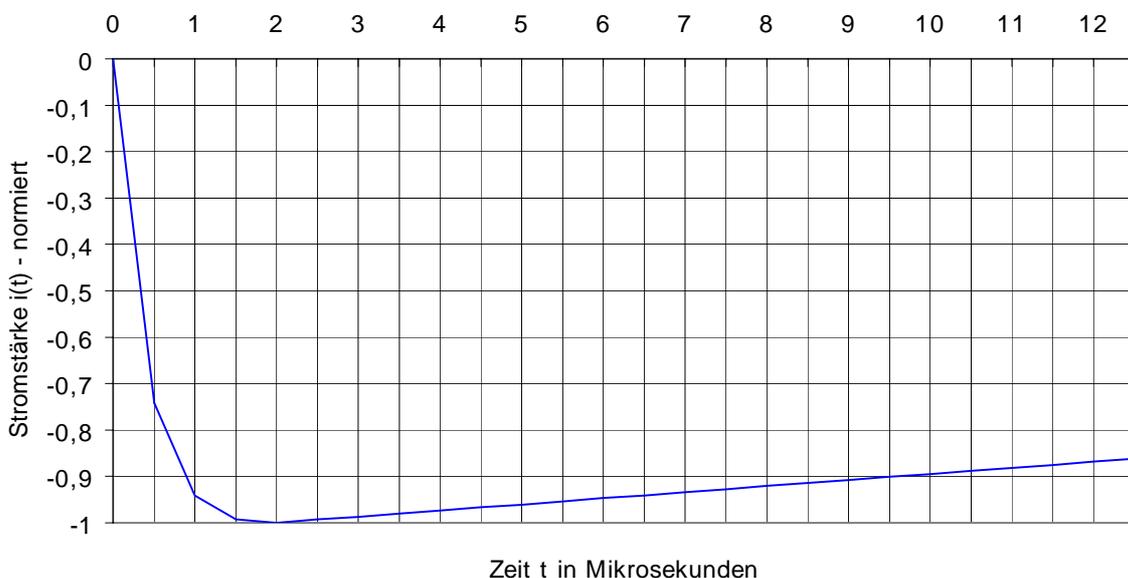


Abb. 3.37: Strom im Erdungssystem als Funktion der Zeit
(normierte Darstellung für negative Stoßerregungen)

t / μs	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
i(t) / A	0	-110	-143	-151	-152	-151	-150	-149	-148	-147	-146	-145	-144
t / μs	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5
i(t) / A	-143	-142	-141	-140	-139	-138	-137	-136	-135	-134	-133	-132	-131

Tab. 3.2: Stromstärke bei einem negativen Spannungsschmelwert von -1kV
(mit 16 Erdspießen)

Ein Vergleich der gemessenen Stromschmelwerte (siehe Abschnitt 5.1.4.2: Messung bei variablem Spannungsschmelwert, Tabelle 5.6 und Tabelle 5.7) mit den FEM-Ergebnissen (siehe Gleichung (3.18) und auch Tabelle 3.1 bis Tabelle 3.5) ergibt:

Stromschmelwerte in A				
\hat{u}_E in kV	1	2	3	4
Meßwert	151,22	292,68	429,27	585,37
FEM-Wert	152,00	304,00	456,00	608,00
Differenz	-0,78	-11,32	-26,73	-22,63
Fehler in %	-0,52	-3,87	-6,23	-3,87
\hat{u}_E in kV	5	6	7	8
Meßwert	741,46	878,05	1053,66	1756,10
FEM-Wert	760,00	912,00	1064,00	1216,00
Differenz	-18,54	-33,95	-10,34	540,10
Fehler in %	-2,50	-3,87	-0,98	30,76

Tab. 3.3: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten (FEM) Stromschmelwerten
(für positive Stoßspannungen)

Stromschmelwerte in A				
\hat{u}_E in kV	-1	-2	-3	-4
Meßwert	-165,85	-312,20	-468,30	-624,40
FEM-Wert	-152,00	-304,00	-456,00	-608,00
Differenz	-13,85	-8,20	-12,30	-16,40
Fehler in %	8,35	2,63	2,63	2,63
\hat{u}_E in kV	-5	-6	-7	-8
Meßwert	-741,46	-897,56	-1053,66	-1756,10
FEM-Wert	-760,00	-912,00	-1064,00	-1216,00
Differenz	18,54	14,44	10,34	-540,10
Fehler in %	2,50	1,61	0,98	-30,76

Tab. 3.4: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten (FEM) Stromschmelwerten
(für negative Stoßspannungen)

Die in den Tabellen 3.3 und 3.4 angegebenen relativen Fehler (Fehler in %) beziehen sich jeweils auf die gemessenen Stromschmelwerte.

An dieser Stelle können nun die Stoßerdungswiderstände ermittelt werden (siehe dazu Gleichung (2.105)). Das Resultat dieser Berechnung zeigt die nachfolgende Tabelle (Tabelle 3.5). Ein Vergleich mit den Meßwerten ist im Abschnitt 6.3.1 (Tabelle 6.3, Tabelle 6.4, Abbildungen 6.3, 6.5, 6.6 und 6.8) zu finden.

\hat{u}_E in kV	± 1	± 2	± 3	± 4
R_{St} in Ω	6,58	6,58	6,58	6,58

\hat{U}_E in kV	± 5	± 6	± 7	± 8
R_{St} in Ω	6,58	6,58	6,58	6,58

Tab. 3.5: Stoßerdungswiderstände des Versuchsaufbaues
(Werte aus der FEM-Berechnung)

Abschließend werden in diesem Abschnitt noch die Felddiagramme (elektrisches Strömungsfeld im Erdreich und in den Elektroden des Versuchsaufbaues - siehe Abbildung 3.34 bis Abbildung 3.39) aus der FEM-Berechnung graphisch dargestellt und interpretiert. Es sind dabei alle genannten Abbildungen als Momentaufnahmen, d.h. jedes einzelne Felddiagramm kann einem diskreten Zeitpunkt der Strom- bzw. Spannungskurve (siehe Abbildung 3.33 bis Abbildung 3.37) zugeordnet werden. Alle geometrischen Daten und die Materialkenngrößen können den Programmen im Anhang entnommen werden.

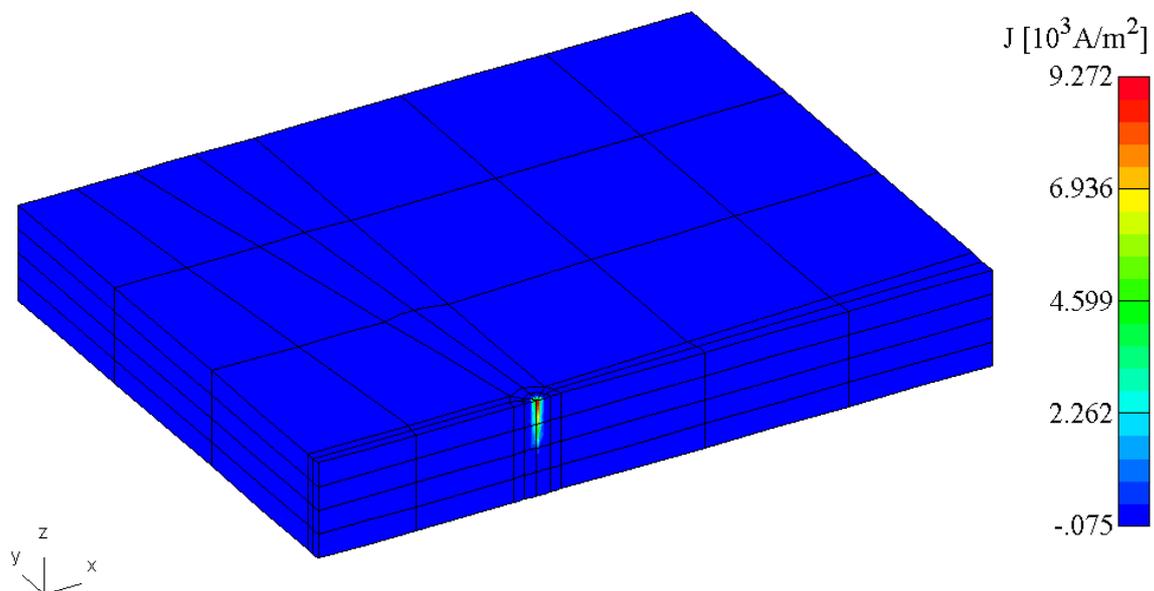


Abb. 3.38: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) im Bereich eines Erdspießes
(Versuchsaufbau - siehe Abbildung 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.38 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingepreßte Stoßspannung $u[1,2/50]\mu\text{s}$ - Scheitelwert: 4kV
Zeitpunkt (siehe Abbildung 3.33 und Abbildung 3.34): $t=2\mu\text{s}$

In dieser Abbildung wird die räumliche Position eines Erdspießes (siehe auch Abbildung 3.32) innerhalb des diskretisierten Feldgebietes (siehe Abbildung 3.14, Abbildung 3.15 und Abbildung 3.22) dargestellt. Es wird aus ihr ersichtlich, daß der Betrag der elektrischen Stromdichte innerhalb eines sehr kleinen Gebietes (mit einem Radius von etwa 0,1m - siehe dazu Parameter für die Elektrode 2 im

Abschnitt 3.2.3.2.1) stark absinkt (blauer Bereich). Diese Tatsache ist auf den unendlich großen Querschnitt des Erdreiches zurückzuführen (siehe hierzu auch [3,S.199]).

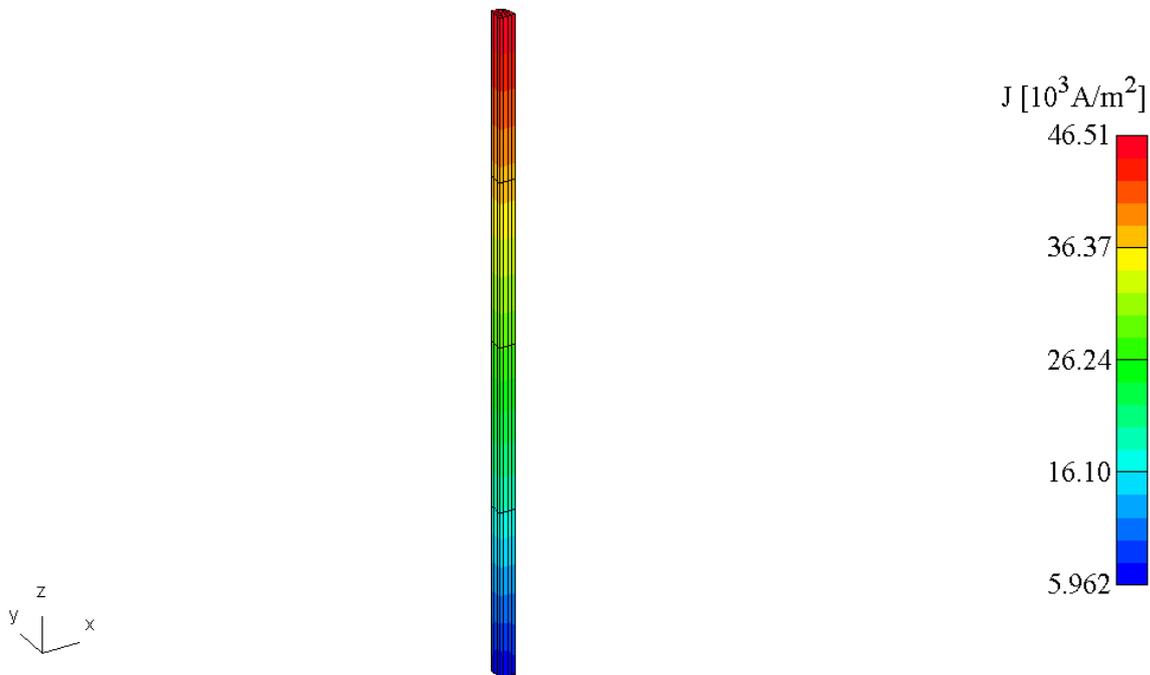


Abb. 3.39: Elektrisches Strömungsfeld (Elektrische Stromdichte) an der zentralen Elektrode (Länge $l=0,4\text{m}$ / Versuchsaufbau - siehe Abbildung 5.1-1)

Erläuterung der Abbildung 3.39 (**geometrische Daten** gemäß den Programmen ERDER und ERDER1, siehe Anhang (A.1) und (A.2)):

Erregung: Eingepreßte Stoßspannung $u[1,2/50]\mu\text{s}$ - Scheitelwert: 4kV
 Zeitpunkt (siehe Abbildung 3.33 und Abbildung 3.34): $t=2\mu\text{s}$

Man kann der Abbildung 3.39 die Ortsabhängigkeit der elektrischen Stromdichte an der Oberfläche der zentralen Elektrode entnehmen (siehe zum Vergleich auch Abbildung 3.31). Es ist der Betrag der Stromdichte im oberen (der Erdoberfläche nächsten) Teil am größten. Es kann daraus abgeleitet werden, daß der Gradient des elektrischen, skalaren Potentials in diesem Bereich sein Maximum erreicht.

3.2.3.4.3 Stoßerdungswiderstand des Fundamenterders

Für die FEM-Berechnung des Stoßerdungswiderstandes gelten ebenfalls die in den Abschnitten 3.2.3.2.2 (Parameter für den Fundamenterder) und 3.2.3.3.3 (Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders) angestellten Überlegungen.

4. BERECHNUNG DER STROMVERDRÄNGUNG IN ELEKTRISCHEN LEITERN

4.1 Allgemeines

4.1.1 WIRBELSTRÖME UND STROMVERDRÄNGUNG

Sobald sich elektrisch leitfähige Stoffe in einem magnetischen Wechselfeld befinden (dieses Magnetfeld kann auch durch den Leiterstrom selbst verursacht werden), werden in diesen Leitern sogenannte Wirbelströme induziert. Diese Wirbelströme überlagern sich dem eventuell vorhandenen Leitungsstrom, wodurch eine ungleichmäßige Stromverteilung über den Leiterquerschnitt entsteht. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der sogenannten Stromverdrängung. Wirbelstromprobleme können stets wie quasistationäre Vorgänge behandelt werden (siehe weiter unten und [26,S.298]).

Im elektromagnetischen Feld besteht zwischen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke eine Verknüpfung, die mit Hilfe der 1. und 2. Maxwellschen Gleichung beschrieben werden kann.

1. Maxwellsche Gleichung (Differentialform des Durchflutungsgesetzes):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_l + \vec{J}_k + \vec{J}_v = \vec{J}_l + \rho_{wa} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.1)$$

\vec{H} Vektor der magnetischen Erregung (magnetischen Feldstärke)

\vec{J}_l Vektor der Leitungsstromdichte

\vec{J}_k Vektor der Konvektionsstromdichte

\vec{J}_v Vektor der Verschiebungsstromdichte

\vec{D} Vektor der elektrischen Flußdichte (Verschiebungsdichte)

ρ_{wa} wahre Raumladungsdichte

2. Maxwellsche Gleichung (Differentialform des Induktionsgesetzes):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.2)$$

\vec{E} Vektor der elektrischen Feldstärke

\vec{B} Vektor der magnetischen Flußdichte (magnetischen Induktion)

\vec{v} Vektor der Leitergeschwindigkeit

In der folgenden Berechnung wird jedoch die Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{D} / \partial t$ im Dielektrikum (welches die elektrischen Leiter umgibt) bzw. der entsprechende Ladestromanteil im elektrischen Leiter selbst (dieser Ladestrom wird eben durch den oben genannten Verschiebungsstrom im Dielektrikum fortgesetzt, siehe dazu auch [27,S.388-390]) gegenüber der Leitungsstromdichte \vec{J}_l vernachlässigt. Man spricht in diesem Fall vom quasistationären elektromagnetischen Feld oder vom langsam veränderlichen Feld (siehe dazu [26,S.112-116], [23,S.81], [21,S.899], [79,S.287], [91,S.171] und [27,S.388-412]). Diese Vorgangsweise ist aber nur dann zulässig, wenn die Ausdehnungen der betrachteten Leiter im Verhältnis zur Wellenlänge λ (bezüglich der Berechnung dieser Wellenlänge siehe Gleichung (2.61-2), [90,S.305], [91,S.331,336,344], [92,S.1-2], Tab.2.1 in [90,S.47] und Tab.4.1 in [90,S.130]) der elektrischen Feldgrößen sehr klein sind (siehe hierzu auch Abschnitt 2.3.3.1).

So gilt zum Beispiel für elektrische Leiter in Luft:

1. $f=50\text{Hz} / \lambda=5994,06\text{km}$
2. $f=1\text{kHz} / \lambda=299,70\text{km}$
3. $f=2\text{kHz} / \lambda=149,85\text{km}$
4. $f=10\text{kHz} / \lambda=29,97\text{km}$
5. $f=30\text{kHz} / \lambda=9,99\text{km}$
6. $f=100\text{kHz} / \lambda=2,99\text{km}$
7. $f=1\text{MHz} / \lambda=299,70\text{m}$
8. $f=10\text{MHz} / \lambda=29,97\text{m}$

Geht man also von den gebräuchlichen geometrischen Abmessungen elektrischer Bauteile aus, so kann man auch noch bei relativ hohen Frequenzen einen quasistationären Fall voraussetzen (in [104,S.361] wird für die obere Frequenzgrenze der Feldgrößen ein Betrag von 10MHz angegeben, für elektrische Leiter in der Luft entspricht das einer Wellenlänge von $\lambda=29,97\text{m}$ (siehe oben und auch Abschnitt 2.4.3.1.3). Betrachtungen dieser Natur wären demzufolge für lange elektrische Leitungen, wie sie z.B. im Bereich der elektrischen Energieübertragung vorkommen, falsch.

Schließt man darüber hinaus das Auftreten einer Bewegungsinduktion aus (der Leiter wird also nicht durch ein von außen eingepprägtes Magnetfeld hindurch bewegt, $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$), dann vereinfachen sich die beiden genannten Maxwellschen Gleichungen zu (siehe auch Abschnitt 2.3.3.1):

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_l \quad (4.3)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Für das elektrische Strömungsfeld im Leiter gilt im allgemeinen Fall (siehe auch Gleichung (2.51) und (2.58) bis (2.61)):

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_k + \vec{J}_v \quad (4.5)$$

\vec{J} gesamte Stromdichte

\vec{J}_l Leitungsstromdichte (bewegte elektrische Ladungen)

\vec{J}_k Konvektionsstromdichte (beliebige mit wahrer Raumladung geladene Körper, die sich im Raum bewegen)

\vec{J}_v Verschiebungsstromdichte (zeitliche Ladungsänderung)

σ elektrische Leitfähigkeit

ϵ absolute Permittivität (absolute Dielektrizitätskonstante)

Auch hier dürfen die Konvektionsstromdichte und die Verschiebungsstromdichte ($\vec{v} = \vec{0}$) vernachlässigt werden. Man erhält dann das Ohmsche Gesetz:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (4.6)$$

oder:

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \quad (4.7)$$

ρ spezifischer elektrischer Widerstand

Durch die Gleichungen (4.3), (4.4), (4.6) und (4.7) ist nun das für die Berechnung des Skineffektes relevante quasistationäre elektrische Strömungsfeld vollständig beschrieben (siehe dazu auch [20,S.326-340], [26,S.284-298] und [23,S.82-86]).

4.1.2 BESSEL-DIFFERENTIALGLEICHUNG

Im Zuge der nachfolgenden Berechnungen tritt mehrmals die Besselsche Differentialgleichung auf. Eine einführende Erklärung erfolgt in diesem Abschnitt.

Die Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n (siehe [25,S.81], [21,S.219,221-223], [10,S.404], [83,S.192-195], [71,S.58], [81,S.351-355] und [77,S.224-241]) hat im allgemeinen die folgende Form:

$$z^2 \cdot y'' + z \cdot y' + (z^2 - n^2) \cdot y = 0 \quad (4.8)$$

$z \in \mathbf{C}$ (komplex)

Daher lautet speziell die Bessel-Differentialgleichung der Ordnung $n=0$:

$$z^2 \cdot y'' + z \cdot y' + z^2 \cdot y = 0 \quad (4.9)$$

Durch eine Umformung (die ganze Gleichung (4.9) wird durch z^2 dividiert) kommt man schließlich zu folgendem Ergebnis:

$$y'' + \frac{1}{z} \cdot y' + y = 0 \quad (4.10)$$

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $n=0$ ist:

$$y = y(z) = A \cdot J_0(z) + B \cdot N_0(z) \quad (4.11)$$

$J_0(z)$Bessel-Funktion 1.Art (Zylinderfunktion) der Ordnung $n=0$
 $N_0(z)$Bessel-Funktion 2.Art (Neumann-Funktion) der Ordnung $n=0$
 A, BIntegrationskonstanten

4.1.3 Bessel-Funktionen

Wie sich in den folgenden Abschnitten noch zeigen wird, sind bei der Lösung des vorgegebenen Problems nur Bessel-Funktionen 1.Art (Zylinderfunktionen) mit $n \in \mathbf{Z}$ (ganzzahlig) von Bedeutung. Die Reihendarstellung der genannten Bessel-Funktionen lautet (siehe auch [100,S.424], [20,S.328], [53,S.104], [83,S.194], [71,S.25], [26,S.135], [21,S.223-224], [81,S.355,449], [77,S.224] und [23,S.295]):

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(z/2)^{2k+n}}{(n+k)!} \quad (4.12)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

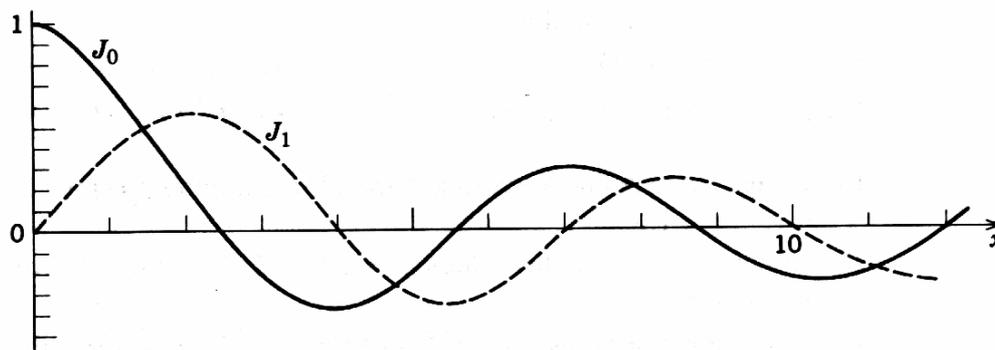


Abb. 4.1: Bessel-Funktionen 1.Art (Zylinderfunktionen) der Ordnung $n=0$ (J_0) und $n=1$ (J_1)
(nach [54,S.211])

Weitere Abbildungen zu den Besselfunktionen: [100,S.425], [26,S.136], [80,S.273], [53,S.103], [83,S.194-195], [23,S.295,297] und [77,S.224].

4.2 Berechnung der Stoßstromausbreitung in Leitern mit kreisförmigem Querschnitt

4.2.1 BERECHNUNG DER ELEKTRISCHEN FELDSTÄRKE UND DER STROMDICHTE

Siehe hierzu speziell [20,S.326-330], [26,S.292-298], [149,S.113-152] und [23,S.82-86] und auch Abschnitt 4.4.2.1.

Wird auf beiden Seiten der Gleichung (4.4) nochmals die Rotation gebildet, so folgt daraus:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (4.13)$$

Setzt man nun

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.14)$$

in die Gleichung (4.13) ein, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß $\mu = \text{const.}$ ist:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (4.15)$$

Oder:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) \quad (4.16)$$

Nun kann man in die Gleichung (4.16) die Gleichungen (4.3) und (4.6) einsetzen. Daraus resultiert:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.17)$$

Mit Hilfe des Nablakalküls (siehe dazu [49,S.576-577]) kann der Ausdruck $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$ umgeformt werden in:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \nabla) \vec{E} = \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung (4.3) (hier wurde die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt) die Divergenz, so erhält man:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{J} \quad (4.19)$$

Dabei gilt immer:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H}) = 0 \quad (4.20)$$

Und infolgedessen auch:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (4.21)$$

Setzt man jetzt die Beziehung $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ (Gleichung (4.6)) in die Gleichung (4.21) ein, und nimmt $\sigma = \text{const.}$ an, so ergibt sich hier für die elektrische Feldstärke:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (4.22)$$

Dadurch vereinfacht sich Gleichung (4.18) zu:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (4.23)$$

Somit erhält man aus den Gleichungen (4.23) und (4.17):

$$\Delta \vec{E} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.24)$$

In Gleichung (4.24) wird der Laplace-Operator auf den Vektor \vec{E} angewendet. In diesem Fall ist $\Delta \vec{E}$ durch die Gleichung (4.18) in folgender Form definiert (siehe dazu [49,S.575]):

$$\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} \quad (4.25)$$

Durch $\text{div } \vec{E} = 0$ (dieser Zusammenhang ist für reine Wirbelfelder immer gültig, siehe Gleichung (4.22)) ergibt sich:

$$\Delta \vec{E} = -\text{rot rot } \vec{E} \quad (4.26)$$

In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\vec{E} = E_r \cdot \vec{e}_r + E_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + E_z \cdot \vec{e}_z \quad (4.27)$$

Geht man nun davon aus, daß die elektrische Feldstärke im Leiter nur eine z-Komponente hat (also nur axial gerichtet ist, siehe Abbildung 4.2), und diese außerdem nur vom Abstand r von der Achse des zylindrischen Leiters abhängig ist ($E_z = E_z(r)$), so ergeben sich dadurch die nachfolgenden Zusammenhänge:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E_z(r) \cdot \vec{e}_z \quad (4.28)$$

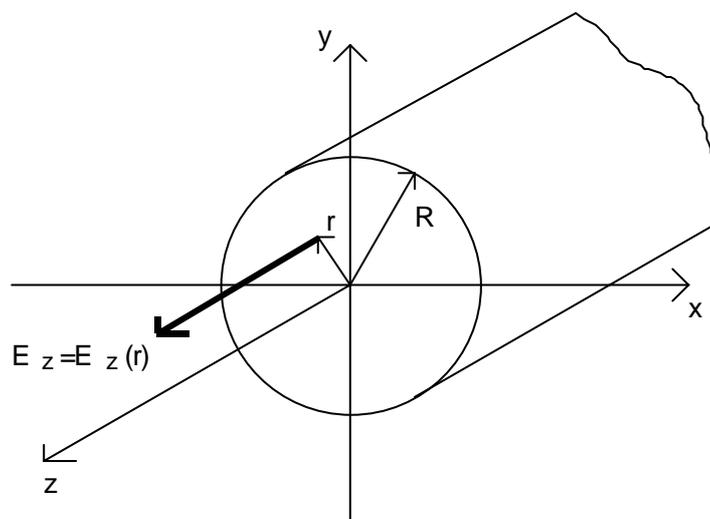


Abb. 4.2: Leiter mit kreisförmigem Querschnitt

In der weiteren Berechnung wird die z-Komponente E_z der elektrischen Feldstärke kurz mit $E(r)=E$ bezeichnet. Demzufolge ist:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E_z(r) \cdot \vec{e}_z = E \cdot \vec{e}_z \quad (4.29)$$

Für die Rotation des Vektors \vec{E} (siehe [23,S.302], [49,S.574] und Formel (21) in [54,S.504]) erhält man in diesem speziellen Fall:

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_r - \frac{\partial E}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi = -\frac{\partial E}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (4.30)$$

Aus der nochmaligen Bildung der Rotation folgt:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \frac{\partial^2 E}{\partial r \partial z} \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_z = \\ &= -\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \right) \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.31)$$

Somit resultiert aus den Gleichungen (4.26) und (4.29):

$$\Delta E = \Delta(E \cdot \vec{e}_z) = -\text{rot rot } \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (4.32)$$

Die vollständige Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke lautet nach den Gleichungen (4.24) und (4.32):

$$\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \right) \cdot \vec{e}_z = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \vec{e}_z \quad (4.33)$$

Man erhält also für die z-Komponente der elektrischen Feldstärke:

$$\frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E(r,t)}{\partial r} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} \quad (4.34)$$

Die Differentialgleichung (4.34) kann auf sehr einfache Weise im Bildbereich gelöst werden. Mit Hilfe der Laplace-Transformation (diese lineare Funktionaltransformation wird in [134] ausführlich behandelt), und hierbei speziell mit dem Differentiationssatz (siehe [23,S.318], [49,S.634] und Formel (4) in [54,S.250]) erhält man dann aus Gleichung (4.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(r,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E(r,s)}{\partial r} &= \\ &= \mu \cdot \sigma \cdot [s \cdot E(r,s) - E(r,0)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Es wird nun angenommen:

$$E(r,0) = \lim_{t \rightarrow 0} E(r,t) = 0 \quad (4.36)$$

Das bedeutet, daß der betrachtete Leiter im Augenblick des Einschaltens (bzw. im Augenblick der Beaufschlagung mit einer Stoßspannung) spannungslos ist.

Daher lautet die Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke im Bildbereich:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(r, s)}{\partial r} - \mu \cdot \sigma \cdot s \cdot \mathbf{E}(r, s) = 0 \quad (4.37)$$

Mit der Definition

$$k^2 = -\mu \cdot \sigma \cdot s \quad (4.38)$$

oder

$$k = \sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} = j \cdot \sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \quad (4.39)$$

kann die Gleichung (4.37) in der Form

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(r, s)}{\partial r} + k^2 \cdot \mathbf{E}(r, s) = 0 \quad (4.40)$$

angeschrieben werden.

Dividiert man nun die gesamte Differentialgleichung (4.40) durch k^2 , dann erhält man:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, s)}{\partial (kr)^2} + \frac{1}{kr} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(r, s)}{\partial (kr)} + \mathbf{E}(r, s) = 0 \quad (4.41)$$

Es handelt sich bei der Gleichung (4.41) um eine Besselsche Differentialgleichung (siehe Gleichung (4.10)). Als Lösung ergibt sich in diesem Fall (siehe auch Gleichung (4.11)):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, s) = A \cdot \mathbf{J}_0(kr) \quad (4.42)$$

AIntegrationskonstante

Die Integrationskonstante A kann über die Gesamtstromstärke im Leiter berechnet werden. Nach einer Zwischenrechnung lautet das Ergebnis:

$$A = \frac{k \cdot I(s)}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\mathbf{J}_1(kR)} \quad (4.43)$$

Die Berechnung der elektrischen Feldstärke (es existiert nur die z-Komponente, siehe oben) im zylindrischen Leiter führt nach den Gleichungen (4.42) und (4.43) zu folgendem Resultat:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, s) = E_z(r, s) = \frac{k \cdot I(s)}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{\mathbf{J}_0(kr)}{\mathbf{J}_1(kR)} \quad (4.44)$$

Hierbei ist:

RRadius des zylindrischen Leiters

r.....Radius innerhalb des zylindrischen Leiters

σelektrische Leitfähigkeit

Die z-Komponente der Stromdichte kann jetzt aus den Gleichungen (4.6) und (4.44) bestimmt werden (siehe auch Abschnitt 4.4.2.1, besonders Gleichung (4.196)):

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}(r, s) = J_z(r, s) = \sigma \cdot \mathbf{E}(r, s) = \\ &= \frac{k \cdot I(s)}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{J_0(kr)}{J_1(kR)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die elektrische Feldstärke als Funktion des Ortes und der Zeit kann durch die Rücktransformation der elektrischen Feldstärke aus dem Bildbereich (siehe Gleichung (4.44)) berechnet werden. Es gilt also:

$$\mathbf{E}(r, t) = L^{-1}\{\mathbf{E}(r, s)\} \quad (4.46)$$

Setzt man nun in die Gleichung (4.44) die Gleichung (4.39) ein, so ergibt sich daraus:

$$\mathbf{E}(r, s) = \frac{\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot I(s)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot r)}{J_1(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot R)} \quad (4.47)$$

Die elektrische Feldstärke im Zeitbereich berechnet sich also gemäß der Gleichung (4.46) zu:

$$\mathbf{E}(r, t) = L^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot I(s)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot r)}{J_1(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot R)} \right\} \quad (4.48)$$

Um diese Rücktransformation durchführen zu können, ist es notwendig, die sogenannte komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation anzuwenden. Diese lautet (siehe dazu speziell [56, S.145-149]):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds \quad (4.49)$$

Da sich das Umkehrintegral (4.49) mit den Methoden der reellen Integralrechnung nicht lösen läßt, muß der Residuensatz verwendet werden. Nach dem Residuensatz gilt:

$$\frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{C_n} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds = \sum_{l=1}^n \text{Res}[F(s) \cdot e^{st}, s_l] \quad (4.50)$$

C_n geschlossene Kurve (um die Polstellen herum)

s_l Polstellen der Funktion $F(s)$ innerhalb der Kurven C_n

n Anzahl der Polstellen s_l (für das vollständige Ergebnis gilt: $n = \infty$)

Daraus resultiert für den zeitlichen Verlauf der elektrischen Feldstärke:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, t) &= \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{E}(r, s) \cdot e^{st} \cdot ds = \sum_{l=1}^n \text{Res}[\mathbf{E}(r, s) \cdot e^{st}, s_l] = \\ &= \sum_{l=1}^n \text{Res}\left[\frac{\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot I(s)}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot r)}{J_1(\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot R)} \cdot e^{st}, s_l \right] = \\ &= \sum_{l=1}^n u(r, s_l) \cdot e^{s_l t} = u(r, s_1) \cdot e^{s_1 t} + u(r, s_2) \cdot e^{s_2 t} + u(r, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

respektive für die Zeitabhängigkeit der elektrischen Stromdichte:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sigma \cdot \sum_{l=1}^n \mathbf{u}(\mathbf{r}, s_l) \cdot e^{s_l t} = \\ &= \sigma \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, s_1) \cdot e^{s_1 t} + \sigma \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, s_2) \cdot e^{s_2 t} + \sigma \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, s_1) \cdot e^{s_1 t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, s_2) \cdot e^{s_2 t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nähert man nun den Stoßstrom $i(t)$ durch eine Doppelpotentialfunktion der Form

$$i(t) = C \cdot i_B \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \quad (4.53)$$

an, so erhält man für den Bildbereich (die entsprechende Korrespondenz ist in den Büchern [23], [49], [55], [56], [57], [71] und [76] zu finden):

$$I(s) = C \cdot i_B \cdot \frac{b - a}{(s + a) \cdot (s + b)} \quad (4.54)$$

Die Polstellen der Bildfunktion $E(\mathbf{r}, s)$ ergeben sich zu:

Index l	1	2	3	4	5	6
Polst. s_l	-0,341	-1,145	-2,407	-4,128	-6,308	-8,948

Tab. 4.1: Polstellen der Bildfunktion $E(\mathbf{r}, s)$

Die in der Tabelle 4.1 angeführten Zahlen gelten unter den folgenden Voraussetzungen:

- (1) Material: Silberstahl (115CrV3 nach DIN 17350, Werkstoff-Nr. 1.2210, siehe [72,S.457])
- (2) Absolute Permeabilität: $\mu = 1,03 \text{ H/m}$
- (3) Elektrische Leitfähigkeit: $\sigma = 1,67 \text{ Sm/mm}^2 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ (bei 20°C, siehe [72,S.480])
- (4) Leiterradius: $R=5\text{mm}$

Da in der entsprechenden DIN-Norm (DIN 17350) die elektrischen Kennwerte für den Silberstahl nicht enthalten sind, wurden die oben angegebenen Werte durch einen Vergleich mit anderen Stahlsorten ähnlicher Zusammensetzung ermittelt.

Für sehr große Stromstärken (z.B. für Blitzströme) treten in ferromagnetischen Werkstoffen, also auch im Silberstahl, magnetische Sättigungserscheinungen auf. Für die Materialkenngrößen gilt dann:

- (1) Material: Silberstahl (115CrV3 nach DIN 17350, Werkstoff-Nr. 1.2210)
- (2) Absolute Permeabilität: $\mu = \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
- (3) Elektrische Leitfähigkeit: $\sigma = 1,67 \text{ Sm/mm}^2 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
- (4) Leiterradius: $R=5\text{mm}$

Daraus resultiert für die Polstellen:

Index l	1	2	3	4	5	6
Polst. s_l	-279807	-937967	-1971997	-3382301	-5168868	-7332113

Tab. 4.2: Polstellen der Bildfunktion $E(\mathbf{r}, s)$ für sehr große Stromstärken

In die beiden Resultate (4.51) und (4.52) können jetzt die Polstellen s_l eingesetzt werden. Da es nicht möglich ist, für diesen Zweck tatsächlich alle existierenden Pole (es sind unendlich viele) zu verwenden

den, werden zur Darstellung der Endergebnisse nur die Polstellen aus den Gleichungen (4.187) und (4.188) sowie die aus der Tabelle 4.1 herangezogen.

Mit dem Normalblitz $i_{[2/50]}\mu\text{s}$ (gemäß ÖVE-E49/1988, siehe [34,S.9]) mit (siehe Gleichung (4.53))

$$a = 1,52 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \quad (4.55)$$

$$b = 1,19 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (4.56)$$

$$C = 1,07 \quad (4.57)$$

$$i_B = 60 \text{ kA} \quad (4.58)$$

erhält man die folgenden konkreten Ergebnisse für die elektrische Feldstärke bzw. für die elektrische Stromdichte (siehe dazu Gleichung (4.59) bis Gleichung (4.66) und Abbildung 4.3 bis Abbildung 4.13):

Die Werte (es gilt $E=E_z$, siehe Gleichung (4.29))

$$E(r, t) \Big|_{\substack{r=0,001\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -10971 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.59)$$

(siehe dazu Abbildung 4.3)

$$E(r, t) \Big|_{\substack{r=0,002\text{m} \\ t=0\text{s}}} = 14148 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.60)$$

(siehe dazu Abbildung 4.5)

$$E(r, t) \Big|_{\substack{r=0,004\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -5563,70 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.61)$$

(siehe dazu Abbildung 4.9)

$$E(r, t) \Big|_{\substack{r=0,00499\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -39501 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.62)$$

(siehe dazu Abbildung 4.11)

$$J(r, t) \Big|_{\substack{r=0,001\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -18321,57 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \quad (4.63)$$

(siehe dazu Abbildung 4.4)

$$J(r, t) \Big|_{\substack{r=0,002\text{m} \\ t=0\text{s}}} = 23627,16 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \quad (4.64)$$

(siehe dazu Abbildung 4.6)

$$J(r, t) \Big|_{\substack{r=0,004\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -9291,38 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \quad (4.65)$$

(siehe dazu Abbildung 4.10)

$$J(r,t) \Big|_{\substack{r=0,00499\text{m} \\ t=0\text{s}}} = -65966,67 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \quad (4.66)$$

(siehe dazu Abbildung 4.12)

wurden wegen der in den Größenordnungen großen Unterschiede zu den anderen, zugehörigen Funktionswerten und den daraus resultierenden Unübersichtlichkeiten in den zeitlichen Darstellungen der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte nicht in die entsprechenden Abbildungen (siehe unten) eingetragen. Die einzelnen Zeitwerte (siehe Abbildung 4.3 bis Abbildung 4.12) können mit Hilfe der Gleichungen (4.51) und (4.52) ermittelt werden.

Die Resultate für die elektrische Stromdichte unterscheiden sich von denen für die elektrische Feldstärke nur quantitativ durch den Faktor σ (elektrische Leitfähigkeit, siehe auch Gleichung (4.52)). Ein qualitativer Unterschied zwischen den jeweiligen Zeitfunktionen besteht nicht (siehe Abbildung 4.3 bis Abbildung 4.12)

In alle nachfolgenden Zeitdiagramme für die elektrische Stromdichte $J(r,t)$ (siehe Abbildungen 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 und 4.12) wurde, um die Wirkung der Stromverdrängung deutlich zu machen, auch der Zeitverlauf der fiktiven, homogenen Stromdichteverteilung eingetragen (siehe hierzu auch unten: Gleichung (4.68), Abbildung 4.15 und Tabelle 4.13).

Wie sich die elektrische Stromdichte innerhalb des zylindrischen Leiters, also in Abhängigkeit vom Radius, ändert, ist besonders anschaulich in der Abbildung 4.13 dargestellt, in der die Abbildungen 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 und 4.12 zusammengefaßt sind.

1. $r=0,001\text{m}$:

l	1	2	3	4
Polstelle S_l	-279807	-937967	-1971997	-3382301
$u(r, S_l)$	1424,20	-4360,20	-4510,74	-0,3919
$v(r, S_l)$	2378,41	-7281,53	-7532,94	-0,6545
l	5	6	7	8
Polstelle S_l	-5168868	-7332113	-15200	-1190000
$u(r, S_l)$	-0,0115	-0,00084	537,41	-4061,60
$v(r, S_l)$	-0.0192	-0,00140	897,47	-6782,87

Tab. 4.3: Berechnungsergebnisse für $r=0,001\text{m}$

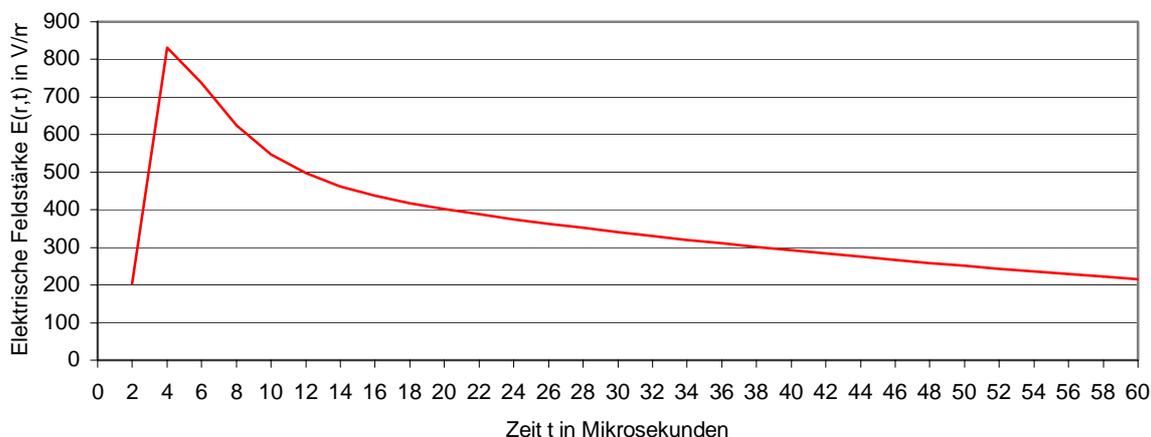


Abb. 4.3: Zugehöriger Feldstärkeverlauf für $r=0,001\text{m}$ (Betrag von $E(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.59))

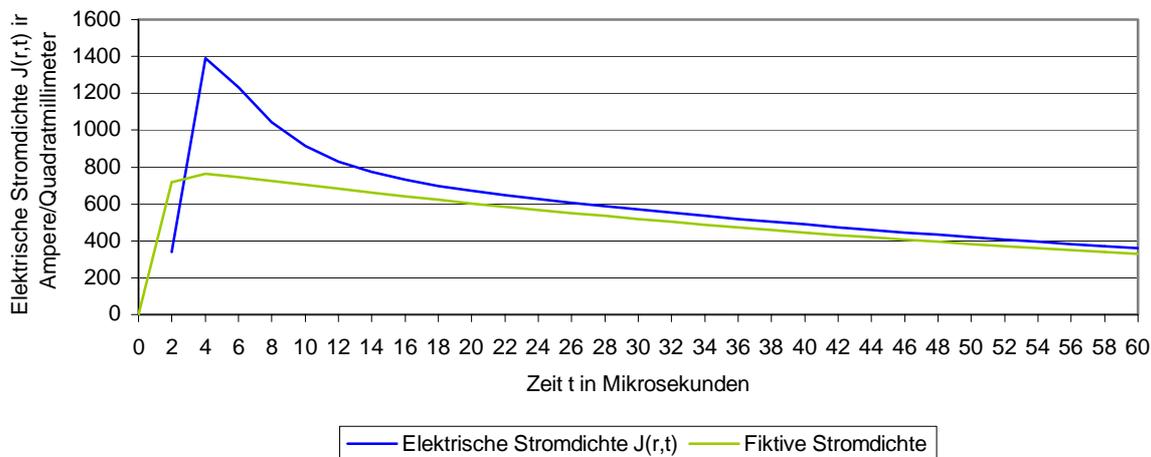


Abb. 4.4: Zugehöriger Stromdichteverlauf für $r=0,001\text{m}$ (Betrag von $J(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.63))

2. $r=0,002\text{m}$:

l	1	2	3	4
Polstelle S_l	-279807	-937967	-1971997	-3382301
$u(r, S_l)$	818,65	1447,83	8661,51	-0,2033
$v(r, S_l)$	1367,15	2417,88	14464,72	-0,3395
l	5	6	7	8
Polstelle S_l	-5168868	-7332113	-15200	-1190000
$u(r, S_l)$	0,0091	-0,00044	524,58	2696,51
$v(r, S_l)$	0,0152	-0,00073	876,05	4503,17

Tab. 4.4: Berechnungsergebnisse für $r=0,002\text{m}$

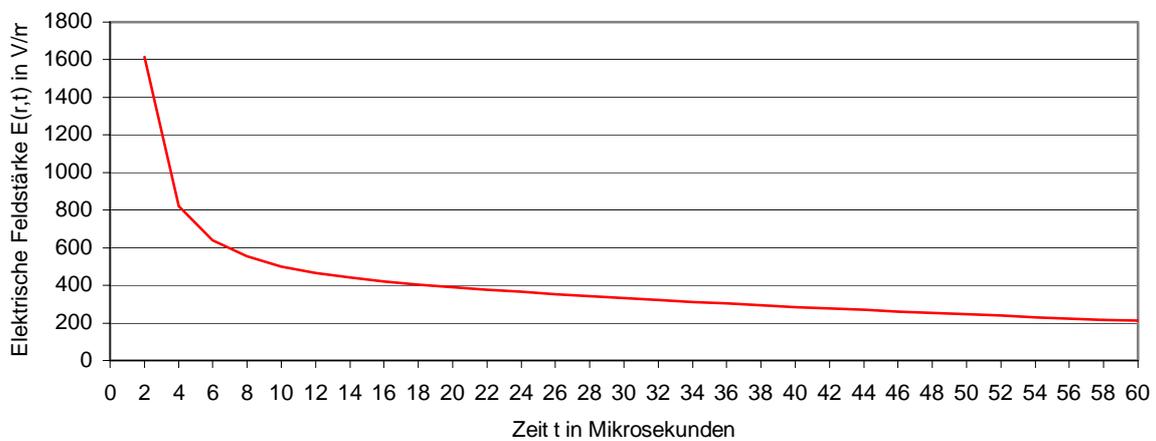


Abb. 4.5: Zugehöriger Feldstärkeverlauf für $r=0,002\text{m}$ (Betrag von $E(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.60))

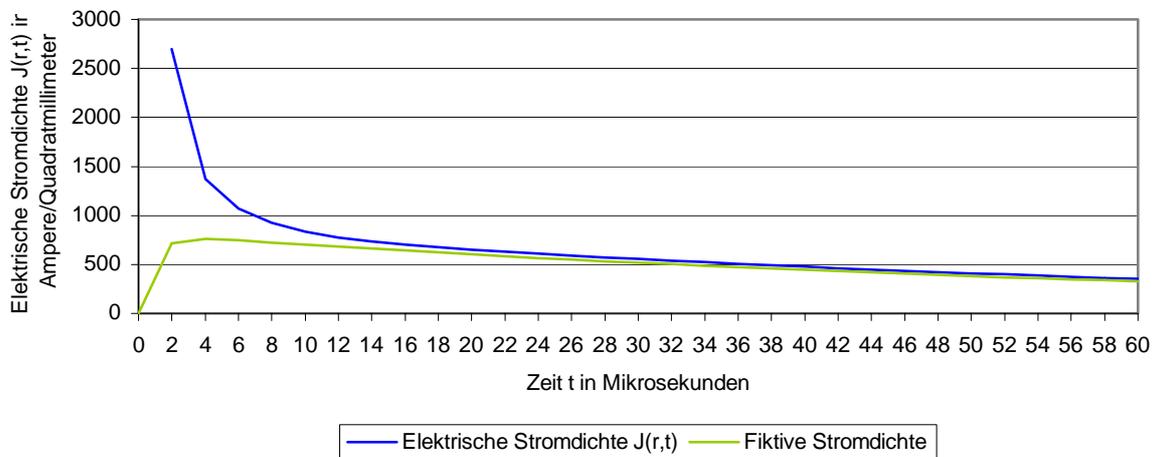


Abb. 4.6: Zugehöriger Stromdichteverlauf für $r=0,002\text{m}$

(Betrag von $J(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.64))

3. $r=0,003m$:

l	1	2	3	4
Polstelle S_i	-279807	-937967	-1971997	-3382301
$u(r, S_i)$	92,86	2894,94	-3942,66	0,5659
$v(r, S_i)$	155,08	4834,55	-6584,24	0,9451
l	5	6	7	8
Polstelle S_i	-5168868	-7332113	-15200	-1190000
$u(r, S_i)$	0,0249	-0,0905	503,52	2242,49
$v(r, S_i)$	0,0416	-0,1511	840,88	3744,96

Tab. 4.5: Berechnungsergebnisse für $r=0,003m$

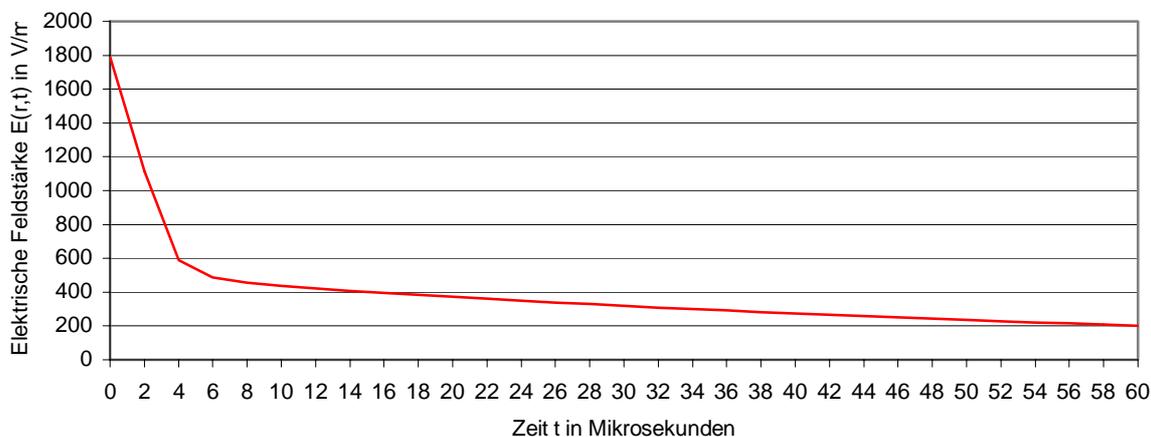


Abb. 4.7: Zugehöriger Feldstärkeverlauf für $r=0,003m$

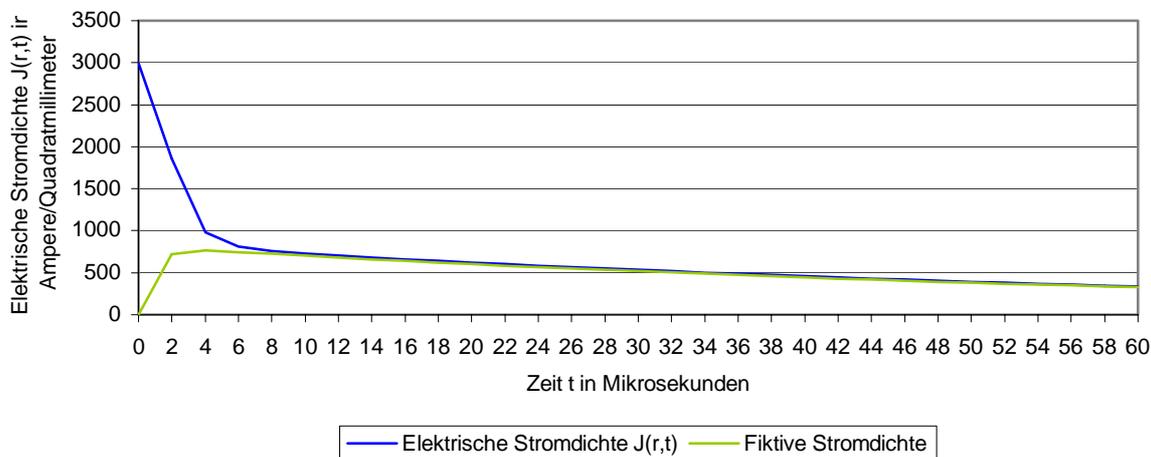
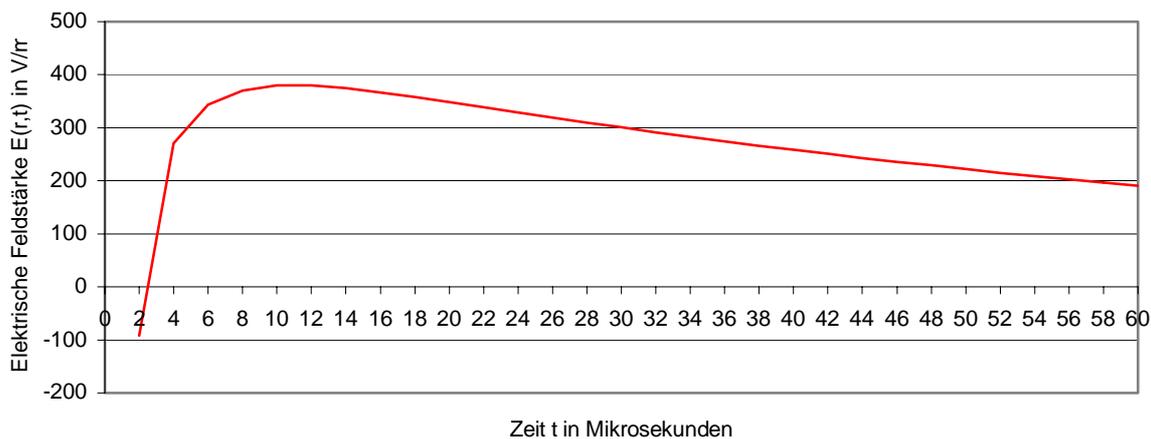


Abb. 4.8: Zugehöriger Stromdichteverlauf ($r=0,003\text{m}$)4. $r=0,004\text{m}$:

l	1	2	3	4
Polstelle S_i	-279807	-937967	-1971997	-3382301
$u(r, S_i)$	-466,99	-241,09	-3368,91	14,98
$v(r, S_i)$	-779,87	-402,62	-5626,08	25,02
l	5	6	7	8
Polstelle S_i	-5168868	-7332113	-15200	-1190000
$u(r, S_i)$	16,48	-4,37	474,76	-1988,63
$v(r, S_i)$	27,52	-7,30	792,85	-3321,01

Tab. 4.6: Berechnungsergebnisse für $r=0,004\text{m}$ Abb. 4.9: Zugehöriger Feldstärkeverlauf für $r=0,004\text{m}$
(Betrag von $E(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.61))

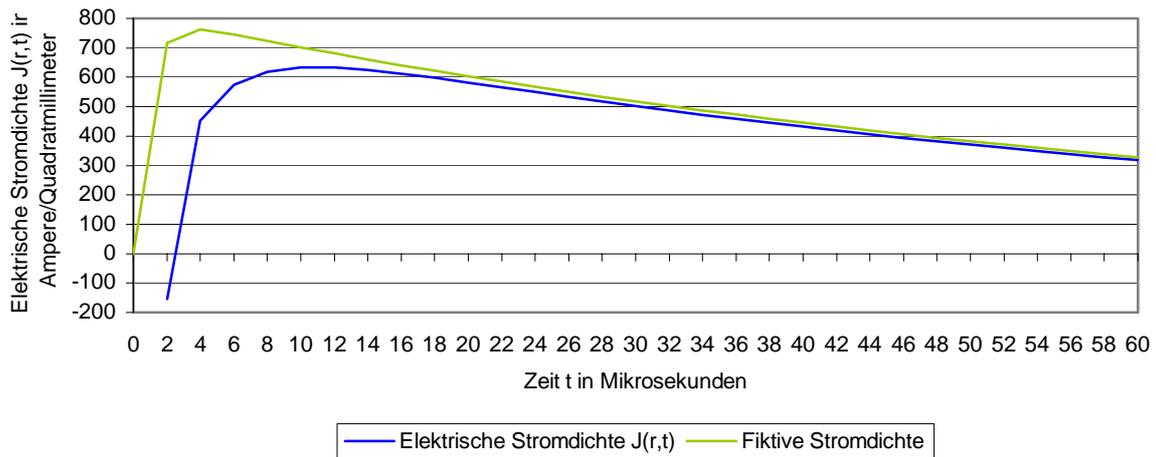


Abb. 4.10: Zugehöriger Stromdichteverlauf für $r=0,004m$ (Betrag von $J(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.65))

5. $r=0,00499m$ (die Bedingung $r < R=0,005m$ muß immer erfüllt werden, siehe [149,S.129]):

l	1	2	3	4
Polstelle S_l	-279807	-937967	-1971997	-3382301
$u(r, S_l)$	-668,17	-2319,52	-33506,02	1252,48
$v(r, S_l)$	-1115,84	-3873,60	-55955,05	2091,64
l	5	6	7	8
Polstelle S_l	-5168868	-7332113	-15200	-1190000
$u(r, S_l)$	1876,35	-4795,59	439,35	-1780,68
$v(r, S_l)$	3133,50	-8008,64	733,71	-2973,74

Tab. 4.7: Berechnungsergebnisse für $r=0,00499m$

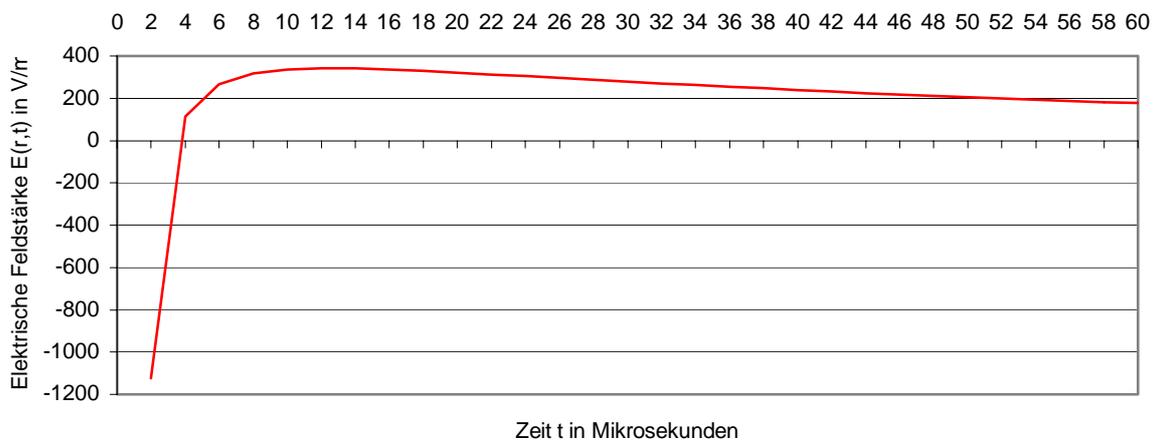


Abb. 4.11: Zugehöriger Feldstärkeverlauf für $r=0,00499m$ (Betrag von $E(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.62))

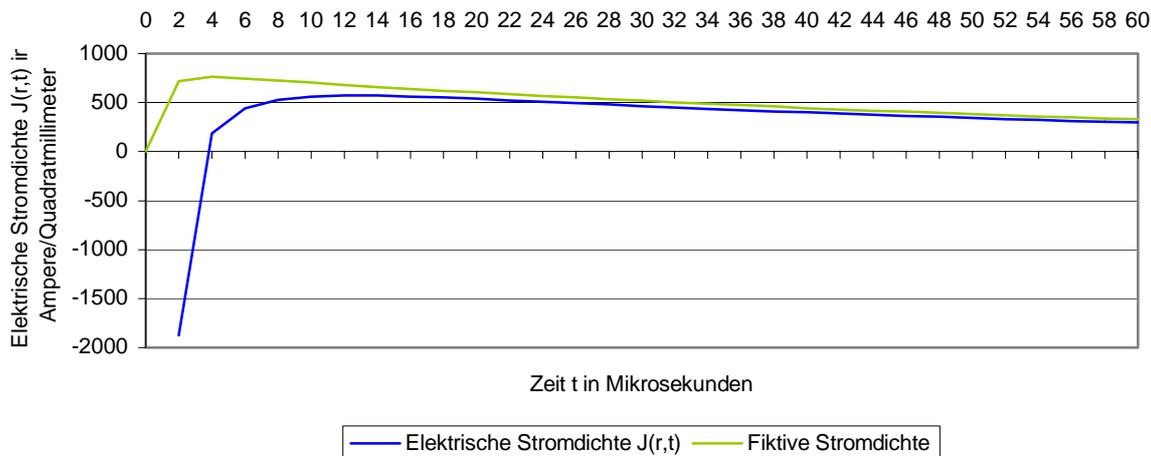


Abb. 4.12: Zugehöriger Stromdichteverlauf für $r=0,00499\text{m}$ (Betrag von $J(r,t)$ für $t=0$ gemäß Gleichung (4.66))

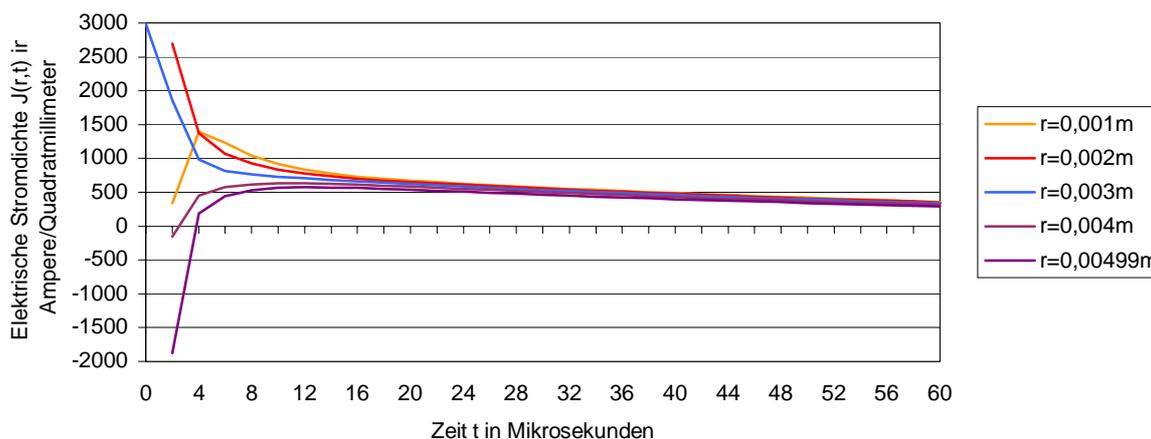


Abb. 4.13: Elektrische Stromdichte $J(r,t)$ in Abhängigkeit vom Leiterradius

Betrachtet man auch noch das asymptotische Verhalten der Stromdichtefunktionen (siehe Abbildungen 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 und 4.12), so haben alle diese Kurven gemeinsam (siehe Gleichung (4.52)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(r,t) = 0 \tag{4.67}$$

Außerdem ergibt sich für große t ($t > 50\mu\text{s}$):

1. $r=0,001\text{m}$:

t in μs	60	80	100	120	140	160
$J(r,t)$	360,53	266,02	196,28	144,83	106,86	78,85

t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	58,18	42,93	9,39	2,05	0,45	0,098

Tab. 4.8: Verhalten der Stromdichteverteilung $J(r,t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte ($r=0,001\text{m}$)2. $r=0,002\text{m}$:

t in μs	60	80	100	120	140	160
J(r,t)	351,92	259,67	191,60	141,37	104,31	76,97
t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	56,79	41,91	9,17	2,00	0,44	0,096

Tab. 4.9: Verhalten der Stromdichteverteilung $J(r,t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte ($r=0,002\text{m}$)3. $r=0,003\text{m}$:

t in μs	60	80	100	120	140	160
J(r,t)	337,79	249,24	183,91	135,70	100,12	73,88
t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	54,51	40,22	8,80	1,92	0,42	0,092

Tab. 4.10: Verhalten der Stromdichteverteilung $J(r,t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte ($r=0,003\text{m}$)4. $r=0,004\text{m}$:

t in μs	60	80	100	120	140	160
J(r,t)	318,50	235,01	173,40	127,94	94,41	69,66
t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	51,40	37,93	8,29	1,81	0,40	0,087

Tab. 4.11: Verhalten der Stromdichteverteilung $J(r,t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte ($r=0,004\text{m}$)5. $r=0,00499\text{m}$:

t in μs	60	80	100	120	140	160
J(r,t)	294,74	217,48	160,47	118,40	87,37	64,46
t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	47,57	35,10	7,68	1,68	0,37	0,080

Tab. 4.12: Verhalten der Stromdichteverteilung $J(r,t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte ($r=0,00499\text{m}$)

Ein Vergleich aller bisherigen Ergebnisse mit einer fiktiven, homogenen Stromdichteverteilung (über den gesamten Leiterquerschnitt) führt zu den folgenden Erkenntnissen:

Der Zeitfunktion des Blitzstoßstromes $[2/50]\mu\text{s}$ nach ÖVE-E49/1988 (siehe Abbildung 4.14) kann eine zeitabhängige Funktion für eine homogene Stromdichteverteilung zugeordnet werden.

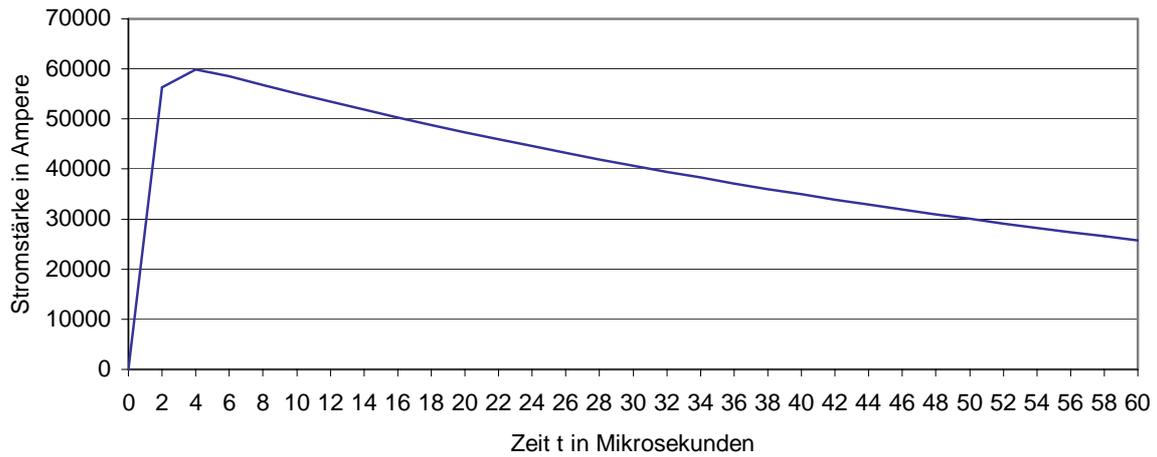


Abb. 4.14: Zeitlicher Verlauf des Stoßstromes $i_{[2/50]\mu s}$ gemäß der Definition laut ÖVE-E49/1988

Für diese gedachte Stromdichte gilt:

$$\tilde{J}(t) = \frac{i(t)}{A} = \frac{i(t)}{78,54\text{mm}^2} \tag{4.68}$$

ALeiterquerschnitt (für einen Leiterradius von R=5mm)

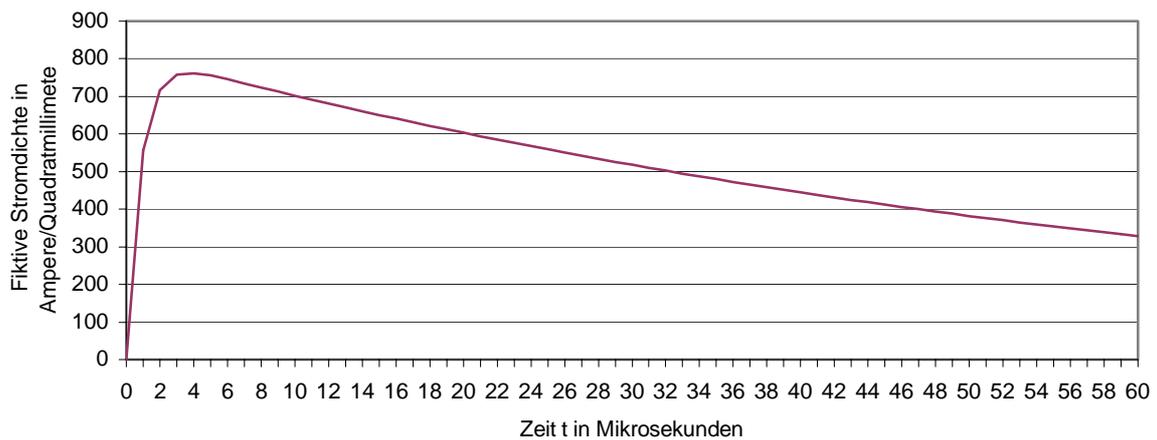


Abb. 4.15: Zeitlicher Verlauf der fiktiven Stromdichte (Leiterradius R=5mm)

Untersucht man die Stromdichte gemäß der Gleichung (4.68) auch für große Zeitwerte, so erhält man die nachfolgende Tabelle.

t in μs	60	80	100	120	140	160
J(r,t)	328,37	242,29	178,77	131,91	97,33	71,82
t in μs	180	200	300	400	500	600
J(r,t)	52,99	39,10	8,55	1,87	0,41	0,0895

Tab. 4.13: Verhalten der gedachten Stromdichteverteilung $\tilde{J}(r, t)$ (in A/mm^2) für große Zeitwerte (Leiterradius $R=5\text{mm}$)

Aus den Abbildungen für die Stromdichten (siehe Abbildungen 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 und 4.12) erkennt man, daß besonders im Augenblick des Einschaltens bzw. des Blitzeinschlages ($t=0$) der Skineffekt einen sehr großen Einfluß auf die Stromdichteverteilung im Leiter hat. Die größte Stromdichte tritt in diesem Fall nahe der Leiteroberfläche ($r=0,00499\text{m}$) auf (siehe Gleichung (4.63) bis Gleichung (4.66)). Bis zu einem Zeitpunkt von etwa $2\mu\text{s}$ bis $6\mu\text{s}$ bleibt der Effekt der Stromverdrängung weiterhin noch relativ stark ausgeprägt. Erst für größere und vor allem für sehr große t , also mit dem Abklingen der Stromstärke bzw. der Stromdichte im Leiter, (siehe Tabelle 4.8 bis Tabelle 4.13) stellt sich eine gleichmäßige räumliche Verteilung (entsprechend der fiktiven Stromdichteverteilung gemäß der Gleichung (4.68) und der Abbildung 4.15) der Stromdichte über den gesamten Leiterquerschnitt ein.

4.2.2 BERECHNUNG DER LEITERIMPEDANZ

4.2.2.1 Leiterimpedanz im Bildbereich

Die Impedanz des zylindrischen Leiters für Stoßvorgänge kann nun mit Hilfe des Spannungsabfalles ΔU längs der Mantellinie ($r=R$, siehe Abbildung 4.2) des Leiters ermittelt werden. Es gilt also:

$$\Delta U(s) = E(r, s) \Big|_{r=R} \cdot l = E(R, s) \cdot l \quad (4.69)$$

lLeiterlänge
RLeiterradius
sBildvariable ($s \in \mathbf{C}$)

Und:

$$Z(s) = \frac{\Delta U(s)}{I(s)} = \frac{E(R, s) \cdot l}{I(s)} \quad (4.70)$$

Z(s)Leiterimpedanz (Stoßimpedanz) im Bildbereich
lLeiterlänge
I(s)elektrische Stromstärke im Bildbereich

Setzt man jetzt die Gleichung (4.44) in die Gleichung (4.70) ein, so resultiert daraus für den Bildbereich (der Faktor k wird durch die Gleichung (4.39) definiert):

$$Z = Z(s) = \frac{k}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} \cdot l = \frac{\sqrt{-\mu \cdot \sigma \cdot s}}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-\mu \sigma s} \cdot R)}{J_1(\sqrt{-\mu \sigma s} \cdot R)} \cdot l \quad (4.71)$$

Für die Bessel-Funktionen gilt nach Gleichung (4.12):

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(z/2)^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (4.72)$$

$$J_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(z/2)^{2k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (k+1)!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \quad (4.73)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.72) und (4.73) kann für die Impedanz $Z(s)$ auch eine Näherungslösung angegeben werden. Die Näherung besteht darin, daß die beiden unendlichen Reihen für die Bessel-Funktionen $J_0(z)$ und $J_1(z)$ (siehe Gleichung (4.72) und Gleichung (4.73)) jeweils nach dem fünften Glied abgebrochen werden.

Demzufolge lautet nach Gleichungen (4.71) bis (4.73) die Näherungslösung für den Bildbereich ($k=k(s)$, siehe Gleichung (4.71) und Gleichung (4.39)):

$$Z(s) \approx \frac{k \cdot l}{2\pi \cdot R \cdot \sigma} \cdot \frac{1 - \left(\frac{kR}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^4 - \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^6 + \frac{1}{576} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^8}{\frac{kR}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^5 - \frac{1}{144} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^7 + \frac{1}{2880} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^9} \quad (4.74)$$

Nach einer kurzen Umformung ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z(s) &\approx \frac{l}{R^2 \cdot \pi \cdot \sigma} \cdot \frac{1 - \left(\frac{kR}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^4 - \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^6 + \frac{1}{576} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^4 - \frac{1}{144} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^6 + \frac{1}{2880} \cdot \left(\frac{kR}{2}\right)^8} = \\ &= \frac{l}{R^2 \cdot \pi \cdot \sigma} \cdot \frac{1 - \frac{(kR)^2}{4} + \frac{(kR)^4}{64} - \frac{(kR)^6}{2304} + \frac{(kR)^8}{147456}}{1 - \frac{(kR)^2}{8} + \frac{(kR)^4}{192} - \frac{(kR)^6}{9216} + \frac{(kR)^8}{737280}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Führt man nun den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{l}{R^2 \cdot \pi \cdot \sigma} = \frac{l}{\sigma \cdot A} \quad (4.76)$$

l Leiterlänge

R Leiterradius

A Querschnittsfläche des Leiters

σ elektrische Leitfähigkeit

ein, so kann die Gleichung (4.75) in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$Z(s) \approx R_0 \cdot \frac{1 - \frac{(kR)^2}{4} + \frac{(kR)^4}{64} - \frac{(kR)^6}{2304} + \frac{(kR)^8}{147456}}{1 - \frac{(kR)^2}{8} + \frac{(kR)^4}{192} - \frac{(kR)^6}{9216} + \frac{(kR)^8}{737280}} \quad (4.77)$$

Die Formel (4.77) stellt nun die Näherungslösung für die Bildfunktion der Leiterimpedanz dar (der Faktor k wird durch die Gleichung (4.39) definiert).

4.2.2.2 Leiterimpedanz im Zeitbereich

Analog zum Abschnitt 4.2.2.1 (siehe oben) erhält man für den Zeitbereich:

$$Z(t) = \frac{\Delta U(t)}{i(t)} = \frac{E(r,t)|_{r=R} \cdot l}{i(t)} = \frac{E(R,t) \cdot l}{i(t)} \quad (4.78)$$

l Leiterlänge

R Leiterradius

$Z(t)$ Leiterimpedanz (Stoßimpedanz) im Zeitbereich

Hierbei ist allerdings darauf zu achten, daß die Bedingungen $r < R$ stets eingehalten wird (siehe dazu auch [149,S.129]). Strenggenommen muß die Gleichung (4.78) daher lauten:

$$Z(t) = \frac{E(r,t)|_{r=R-\varepsilon} \cdot l}{i(t)} = \frac{E(R-\varepsilon,t) \cdot l}{i(t)} \quad (4.79)$$

R Leiterradius ($R=0,005\text{m}$)

Wählt man nun

$$\varepsilon = 0,00001 \quad (4.80)$$

so folgt daraus für die Gleichung (4.79):

$$Z(t) = \frac{E(r,t)|_{r=0,00499} \cdot l}{i(t)} \quad (4.81)$$

Die Zeitfunktionen für die elektrische Feldstärke $E(r,t)$ und den Strom $i(t)$ sind durch die Gleichungen (4.51) und (4.53) festgelegt.

Entsprechend der Gleichung (4.51) erhält man mit den Werten $u(r, s_i)$ aus der Tabelle 4.7 für die elektrische Feldstärke in **V/m**:

$$\begin{aligned} E(r,t)|_{r=0,00499} &\approx \sum_{i=1}^8 u(r, s_i) \cdot e^{s_i t} |_{r=0,00499} = \\ &= -668,17 \cdot e^{-279807 \cdot t} - 2319,52 \cdot e^{-937967 \cdot t} - 33506,02 \cdot e^{-1971997 \cdot t} + \\ &+ 1252,48 \cdot e^{-3382301 \cdot t} + 1876,35 \cdot e^{-5168868 \cdot t} - 4795,59 \cdot e^{-7332113 \cdot t} + \\ &+ 439,35 \cdot e^{-15200 \cdot t} - 1780,68 \cdot e^{-1190000 \cdot t} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Ebenso berechnet sich mit den entsprechenden Parametern a , b , C und i_B (siehe Gleichung (4.55) bis Gleichung (4.58)) die Zeitfunktion für die Stromstärke des Normalblitzes $i[2/50]\text{ms}$ in **A** (laut ÖVE-E49/1988, siehe [34,S.9]) gemäß der Gleichung (4.53) zu:

$$i(t) = 1,07 \cdot 60000 \cdot (e^{-15200 \cdot t} - e^{-1190000 \cdot t}) \quad (4.83)$$

Die Zeitfunktion der Leiterimpedanz erhält man durch das Einsetzen der Gleichungen (4.82) und (4.83) in die Formel (4.81). Für einen Leiter mit einer Länge von **$l=1\text{m}$** ergibt sich daraus eine Zeitabhängigkeit, wie sie in der Abbildung 4.16 (siehe unten) dargestellt ist.

Abb. 4.16: Zeitverlauf der Leiterimpedanz ($r=0,00499\text{m}$, $l=1\text{m}$)

Für sehr große t zeigt die Leiterimpedanz das folgende Verhalten:

t in μs	60	80	100	120	140	160
Z(t) in Ω	0,006843	0,006843	0,006843	0,006843	0,006843	0,006843
t in μs	180	200	300	400	500	600
Z(t) in Ω	0,006844	0,006844	0,006847	0,006848	0,006896	0,006814

Tab. 4.14: Verhalten der Leiterimpedanz für große Zeitwerte ($r=0,00499\text{m}$, $l=1\text{m}$)

Die Abweichungen der Impedanzwerte (zwischen $0,000001\Omega$ und $0,000053\Omega$) für $t=180\mu\text{s}$, $200\mu\text{s}$, $300\mu\text{s}$, $400\mu\text{s}$, $500\mu\text{s}$, $600\mu\text{s}$ sind auf Rundungsfehler bei deren Berechnung zurückzuführen.

Wie die Abbildung 4.16 und die Tabelle 4.14 zeigen, stellt sich die Impedanz $Z(t)$ nach einer Einschwingdauer von etwa $30\mu\text{s}$ auf einen stationären Wert ein, der, wie sich weiter unten noch zeigen wird, nicht wesentlich vom Gleichstromwiderstand des Leiters abweicht.

Dem oben genannten Leiter mit den Daten

1. $l=1\text{m}$
2. $R=0,005\text{m}$
3. $\sigma=1,67\text{Sm/mm}^2$

kann außerdem ein Gleichstromwiderstand in der Form

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \quad (4.84)$$

ALeiterquerschnitt

σspezifische elektrische Leitfähigkeit

ρspezifischer elektrischer Widerstand

zugeordnet werden (siehe dazu auch Gleichung (4.76)).

Setzt man nun die oben festgelegten Kenngrößen in die Gleichung (4.84) ein, so ergibt sich daraus ein Gleichstromwiderstand von:

$$R_0 = \frac{l}{\sigma \cdot A} = \frac{l}{\sigma \cdot R^2 \cdot \pi} = 7,624 \cdot 10^{-3} \Omega \quad (4.85)$$

Dieser Widerstand weicht nur geringfügig (um $0,000781\Omega$) vom stationären Wert (Wert für große t , siehe Abbildung 4.16 und Tabelle 4.14) ab, der für die Impedanz $Z(t)$ berechnet wurde.

4.3 Berechnung der Stoßstromausbreitung im Erdreich

4.3.1 BERECHNUNG DER ELEKTRISCHEN FELDSTÄRKE UND DER STROMDICHTE

Bei der Behandlung dieses Problem es kann grundsätzlich genauso vorgegangen werden, wie im Abschnitt 4.2. Man hat sich dazu das Erdreich als einen eben begrenzten Leiter vorzustellen. Das entspricht dem Spezialfall eines zylindrischen Leiters mit einem unendlich großen Radius. In diesem Fall kann nämlich die Krümmung der Leiteroberfläche vernachlässigt werden. Natürlich gilt auch hier, wie schon im Abschnitt 4.2 festgestellt wurde, daß die elektrische Feldstärke \vec{E} im Leiter nur eine z-Komponente hat, und diese außerdem nur vom Abstand r (Radius) von der Achse des zylindrischen Leiters abhängig ist (siehe Gleichung (4.28)). Da nun der Leiterradius einen unendlich großen Wert annimmt (siehe oben), ist es von Vorteil, der folgenden Berechnung ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde zu legen. Die Lage dieses Koordinatensystems ist dabei so gewählt, daß der Koordinatenursprung auf der Leiteroberfläche, d.h. auf der Erdoberfläche liegt, die Richtung der Applikatenachse (z-Achse) mit der Richtung der Leiterachse übereinstimmt (die z-Achse liegt somit parallel zur Erdoberfläche) und die Ordinatenachse (y-Achse) senkrecht zur Leiteroberfläche ins Leiterinnere (also ins Erdreich) zeigt (siehe dazu auch Abbildung 4.17 und Abbildung 32.4 in [20,S.330]). Die y-Richtung entspricht demnach der radialen Richtung des Leiters mit unendlich großem Radius. Aus diesem Grund geht die Gleichung (4.28) über in:

$$\vec{E} = \vec{E}(y) = E_z(y) \cdot \vec{e}_z \quad (4.86)$$

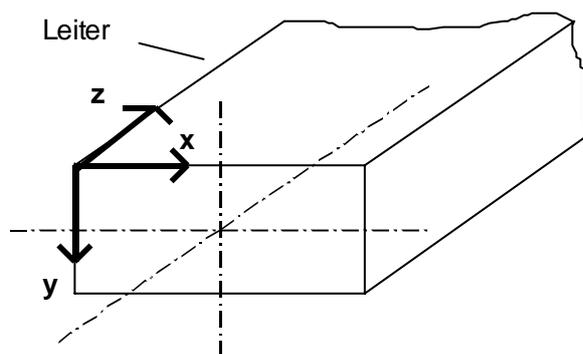


Abb. 4.17: Eben begrenzter Leiter

In der weiteren Berechnung wird, wie schon im Abschnitt 4.2, die z-Komponente $E_z(y)$ der elektrischen Feldstärke mit $E_z(y)=E$ bezeichnet. Folglich gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}(y) = E_z(y) \cdot \vec{e}_z = E \cdot \vec{e}_z \quad (4.87)$$

Den Ausgangspunkt der Berechnung bildet wieder die Gleichung (4.24). Es gilt also:

$$\Delta \vec{E} = \Delta \vec{E}(y, t) = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}(y, t)}{\partial t} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.88)$$

Für kartesische Koordinaten gilt allgemein (siehe dazu auch [49,S.575]):

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x + \Delta E_y \cdot \vec{e}_y + \Delta E_z \cdot \vec{e}_z \quad (4.89)$$

Mit Gleichung (4.87) erhält man:

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_z(y) \cdot \vec{e}_z = \Delta E \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \cdot \vec{e}_z \quad (4.90)$$

Setzt man jetzt die Gleichungen (4.87) und (4.90) in die Gleichung (4.24) ein, so resultiert daraus:

$$\frac{\partial^2 E(y,t)}{\partial y^2} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial E(y,t)}{\partial t} \quad (4.91)$$

Zu diesem Ergebnis (Gleichung (4.91)) kommt man auch dadurch, daß man in die Gleichung (4.34) $r = \infty$ einsetzt und r bzw. ∂r durch y und ∂y ersetzt.

Um die Lösung der Differentialgleichung (4.91) im Bildbereich zu erhalten, wird diese Gleichung zunächst selbst in den Bildbereich transformiert.

Durch Anwendung des Differentiationssatzes (siehe dazu auch [23,S.318], [49,S.634] und Formel (4) in [54,S.250]) auf die Gleichung (4.91) ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 E(y,s)}{\partial y^2} = \mu \cdot \sigma \cdot [s \cdot E(y,s) - E(y,0)] \quad (4.92)$$

Dabei ist:

$$E(y,0) = \lim_{t \rightarrow 0} E(y,t) = 0 \quad (4.93)$$

Somit lautet die Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke im Bildbereich (siehe Gleichung (4.92) und Gleichung (4.93)):

$$\frac{\partial^2 E(y,s)}{\partial y^2} - \mu \cdot \sigma \cdot s \cdot E(y,s) = 0 \quad (4.94)$$

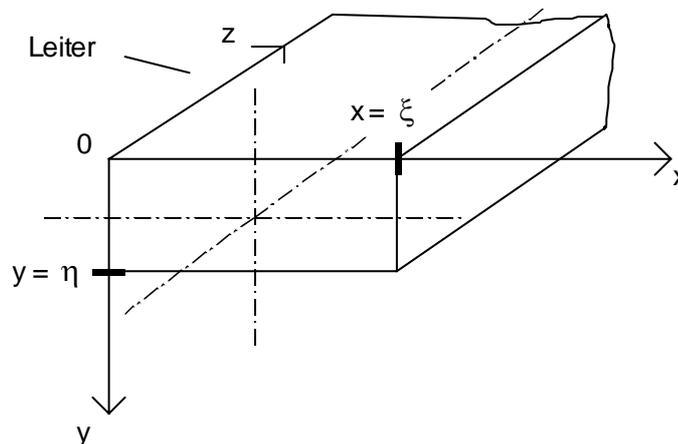


Abb. 4.18: Abmessungen eines eben begrenzten Leiters

Die vollständige Lösung für die elektrische Feldstärke im eben begrenzten Leiter ergibt sich dann zu:

$$E(y,s) = \frac{l(s)}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} = \frac{l(s)}{\xi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\mu \cdot s}{\sigma}}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} \quad (4.95)$$

Die Stromdichte J kann nun aus den Gleichungen (4.6) und (4.95) berechnet werden. Es gilt:

$$J(y, s) = \sigma \cdot E(y, s) = \frac{l(s)}{\xi} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} \quad (4.96)$$

Wie oben bereits angemerkt wurde, kann das Erdreich als ein eben begrenzter Leiter mit unendlich großem Querschnitt betrachtet werden. Die Gleichung (4.95) für die elektrische Feldstärke und die Gleichung (4.96) für die Stromdichte sind nun für eine Schicht direkt unter der Erdoberfläche gültig, die durch die Abszisse $x=\xi$ und die Ordinate $y=\eta$ begrenzt (siehe Abbildung 4.18) wird.

Die Berechnung der Zeitfunktionen für die elektrische Feldstärke und die elektrische Stromdichte im Erdreich (siehe dazu Abbildungen 4.17 und 4.18) erfolgt durch die Rücktransformation der Ergebnisse aus dem Bildbereich in den Originalbereich (Zeitbereich). Gemäß der Gleichung (4.46) gilt (siehe auch Gleichung (4.95)):

$$E(y, t) = L^{-1}\{E(y, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{l(s)}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y}\right\} \quad (4.97)$$

Die inverse Laplace-Transformierte (4.97) kann wieder mit Hilfe der komplexen Umkehrformel ermittelt werden (siehe dazu Gleichung (4.49) und [56, S.145-149]). Es ergibt sich somit für die Originalfunktion (Zeitfunktion) der elektrischen Feldstärke:

$$\begin{aligned} E(y, t) &= \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(y, s) \cdot e^{st} \cdot ds = \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{l(s)}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} \cdot e^{st} \cdot ds \end{aligned} \quad (4.98)$$

Da das Umkehrintegral (4.98) mit den Methoden der reellen Integralrechnung nicht gelöst werden kann, ist es notwendig, den Residuensatz (siehe Gleichung (4.50)) anzuwenden.

Daher kann für die elektrische Feldstärke geschrieben werden (siehe auch Gleichung (4.74)):

$$\begin{aligned} E(y, t) &= \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{l(s)}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} \cdot e^{st} \cdot ds = \\ &= \sum_{l=1}^n \text{Res}[E(y, s) \cdot e^{st}, s_l] = \sum_{l=1}^n \text{Res}\left[\frac{l(s)}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} \cdot e^{st}, s_l\right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

Wird der Stoßstrom $i(t)$ wieder durch die Doppelsexponentialfunktion (4.53), also durch

$$i(t) = C \cdot i_B \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \quad (4.53)$$

angenähert, so ergibt sich für die für die elektrische Feldstärke im Bildbereich (siehe dazu auch Gleichung (4.54)):

$$E(y,s) = \frac{C \cdot i_B \cdot \frac{b-a}{(s+a) \cdot (s+b)}}{\xi \cdot \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y} = \quad (4.100)$$

$$= \frac{C \cdot i_B \cdot (b-a)}{\xi \cdot \sigma \cdot (s+a) \cdot (s+b)} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot \eta}} \cdot e^{-\sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \cdot y}$$

Um den Residuensatz (siehe Gleichung (4.99)) anwenden zu können, ist es notwendig, die Polstellen der Bildfunktion $E(y,s)$ zu berechnen.

Es werden dabei die folgenden Materialkenngrößen vorausgesetzt:

- (1) Material: Erde (homogenes Erdreich).
- (2) Absolute Permeabilität: $\mu = \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
($\mu_r = 1$, siehe hierzu [10, S.403,419] sowie [11, S.149]).
- (3) Spezifischer Erdwiderstand ρ_E bzw. elektrische Leitfähigkeit $\sigma_E = 1/\rho_E$:
(siehe dazu Abschnitt 5.1.2, Tabelle 5.1)
 - (3.1) Kleiner spezifischer Erdwiderstand: $\rho_E = 56 \Omega\text{m}$ ($\sigma_E = 0,0179 \text{ S/m}$).
 - (3.2) Großer spezifischer Erdwiderstand: $\rho_E = 264 \Omega\text{m}$ ($\sigma_E = 0,0038 \text{ S/m}$).
- (4) Querschnitt: $100\text{m} \cdot 10\text{m} = 1000\text{m}^2$

Die Zahlenwerte der Polstellen sind auch von der Lage (horizontal oder vertikal) der Schicht direkt unter der Erdoberfläche abhängig, die durch die Abszisse $x = \xi$ und die Ordinate $y = \eta$ begrenzt (siehe Abbildungen 4.18, 4.19 und 4.20) wird.

1. Vertikale Schicht im Erdreich: $\xi = 10\text{m}$, $\eta = 100\text{m}$

Index l	1	2	3	4	5	6
Pol s_l	0	-418,88	-837,75	-1256,63	-1675,50	-2094,38

Tab. 4.15: Polstellen für die vertikale Schicht im Erdreich (kleiner spezifischer Erdwiderstand)

Index l	1	2	3	4	5	6
Pol s_l	0	-909,12	-1818,24	-2727,36	-3636,47	-4545,60

Tab. 4.16: Polstellen für die vertikale Schicht im Erdreich (großer spezifischer Erdwiderstand)

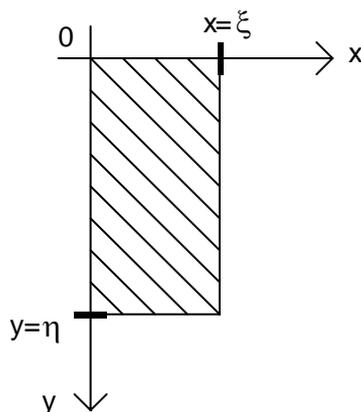


Abb. 4.19: Abmessungen der vertikalen Schicht im Erdreich

2. Horizontale Schicht im Erdreich: $\xi=100\text{m}$, $\eta=10\text{m}$

Index l	1	2	3	4	5	6
Pol s_l	0	-4188,76	-8377,52	-12566,29	-16755,05	-20943,81

Tab. 4.17: Polstellen für die horizontale Schicht im Erdreich (kleiner spezifischer Erdwiderstand)

Index l	1	2	3	4	5	6
Pol s_l	0	-9091,18	-18182,37	-27273,55	-36364,73	-45455,92

Tab. 4.18: Polstellen für die horizontale Schicht im Erdreich (großer spezifischer Erdwiderstand)

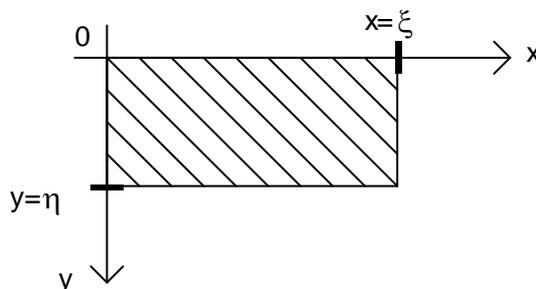


Abb. 4.20: Abmessungen der horizontalen Schicht im Erdreich

Gemäß der Gleichung (4.99) berechnet sich die Lösung für den zeitlichen Verlauf der elektrischen Feldstärke im eben begrenzten Leiter (Erdreich) also zu:

$$E(y,t) = \sum_{l=1}^n \text{Res}\{E(y,s) \cdot e^{st}, s_l\} \quad (4.101)$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes (siehe Gleichung (4.6) und auch Gleichung (2.11)) erhält man aus der Gleichung (4.101) für die elektrische Stromdichte im Leiter:

$$J(y,t) = \sigma \cdot E(y,t) \quad (4.102)$$

An dieser Stelle können in die Ergebnisse (4.101) und (4.102) die Polstellen s_l eingesetzt werden. Da theoretisch aber unendlich viele Pole existieren (siehe Gleichungen (4.342) und (4.343)), werden zur Darstellung der Endergebnisse nur die Polstellen aus den Gleichungen (4.336) bis (4.338) sowie die aus den Tabellen 4.18 bis 4.21 herangezogen.

Das Ergebnis für die elektrische Feldstärke gemäß der Gleichung (4.101) kann auch in der Form

$$\begin{aligned} E(y, t) &= \sum_{l=1}^n u(y, s_l) \cdot e^{s_l t} = \\ &= u(y, s_1) \cdot e^{s_1 t} + u(y, s_2) \cdot e^{s_2 t} + u(y, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots \end{aligned} \quad (4.103)$$

n.....Anzahl der Polstellen s_l (für das vollständige Ergebnis gilt: $n = \infty$) dargestellt werden.

In Analogie dazu kann man für die elektrische Stromdichte (siehe Gleichung (4.102)) schreiben:

$$\begin{aligned} J(y, t) &= \sigma \cdot E(y, t) = \sigma \cdot \sum_{l=1}^n u(y, s_l) \cdot e^{s_l t} = \\ &= \sigma \cdot u(y, s_1) \cdot e^{s_1 t} + \sigma \cdot u(y, s_2) \cdot e^{s_2 t} + \sigma \cdot u(y, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots = \\ &= v(y, s_1) \cdot e^{s_1 t} + v(y, s_2) \cdot e^{s_2 t} + v(y, s_3) \cdot e^{s_3 t} + \dots \end{aligned} \quad (4.104)$$

Für den Normalblitz $i[2/50]\mu\text{s}$ nach ÖVE-E49/1988 (siehe [34,S.9]) erhält man durch das Variieren der Parameter (4.105) bis (4.108) in der Gleichung (4.53) die Werte:

$$a = 1,52 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \quad (4.105)$$

$$b = 1,19 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (4.106)$$

$$C = 1,07 \quad (4.107)$$

$$i_B = 60 \text{ kA} \quad (4.108)$$

Somit ergeben sich die im folgenden berechneten Endergebnisse (für die Polstellen siehe Tabelle 4.16 bis Tabelle 4.18).

Wie schon aus der Gleichung (4.104) ersichtlich wird, besteht zwischen den Zeitfunktionen für die elektrische Feldstärke und denen für die elektrische Stromdichte kein qualitativer Unterschied. Die Abweichung zwischen den beiden Funktionen wird durch den Faktor σ (elektrische Leitfähigkeit, siehe auch Gleichung (4.6) und Gleichung (4.104)) bestimmt, und ist ausschließlich quantitativer Natur.

Um nun die Zeitabhängigkeit der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte graphisch darstellen zu können, müssen die entsprechenden Polstellen aus den Tabellen 4.19 bis 4.21 in die Zeitfunktionen (4.103) und (4.104) (siehe auch Gleichung (4.101) und Gleichung (4.102)) eingesetzt werden.

Wie man den oben genannten Tabellen entnehmen kann, gilt für alle Polstellen:

$$s_l \leq 0 \quad (4.109)$$

Da außerdem die absolute Permeabilität μ und die elektrische Leitfähigkeit σ keine negativen Werte annehmen können, gilt für den Term

$$T(s) := \sqrt{\mu \cdot \sigma \cdot s} \quad (4.110)$$

stets:

$$T(s) \in \mathbf{C} \quad (4.111)$$

Diese Tatsache bewirkt, daß sowohl die zeitliche als auch die räumliche (ortsabhängige) Verteilung der elektrischen Feldstärke (siehe Gleichung (4.103)) und der elektrischen Stromdichte (siehe Gleichung (4.104)) komplexwertige Funktionen (Funktionen mit komplexem Funktionswert) sind, und daher nicht mehr als physikalische Größen im ursprünglichen Sinn dargestellt werden können.

Um dennoch eine anschauliche Lösung zu erhalten, gibt es auch die Möglichkeit, mit sinusförmigen Größen zu rechnen. Dazu müssen der Zeitfunktion für den Stoßstrom (siehe Gleichung (4.53)) die entsprechenden harmonischen (rein sinusförmigen) Schwingungen (auch Harmonische genannt) zugeordnet werden. Da es sich beim zeitlichen Verlauf des Stromes

$$i(t) = C \cdot i_B \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \quad (4.53)$$

um eine nichtsinusförmige aperiodische Funktion handelt, ergibt deren Zerlegung in ihre harmonischen Komponenten ein kontinuierliches Frequenzspektrum. Dieses Spektrum enthält also Schwingungen aller Frequenzen, das heißt unendlich viele Schwingungen.

Bei der Zerlegung nichtsinusförmiger nichtperiodischer Funktionen in ihre Harmonischen kommt die sogenannte Fourier-Transformation, zur Anwendung (siehe [71,S.30-31], [49,S.607-633], [56,S.182-212], [97,S.32-37], [116,S.80-94], [55,S.35-47] [117,S.35-48] und auch [134,S.19-23]). Dabei wird einer vorgegebenen Zeitfunktion $f(t)$, auch Original- oder Oberfunktion genannt, eine Bildfunktion $F(\omega)$, diese wird auch als Fourier-Transformierte, Spektralfunktion, Spektraldichte, Frequenzfunktion oder Unterfunktion bezeichnet, zugeordnet.

Analog zur Laplace-Transformation schreibt man auch hier:

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} \cdot d\tau \quad (4.112)$$

Die Transformationsvorschrift (4.112) wird auch als komplexe Darstellung der Fourier-Transformation bezeichnet.

Die im allgemeinen komplexwertige Bildfunktion $F(\omega)$ (siehe Gleichung (4.112)) kann auch in der Art

$$\underline{F(\omega)} = \underline{|F(\omega)|} \cdot e^{j \arg\{F(\omega)\}} \quad (4.113)$$

dargestellt werden (komplexe Größen werden in weiterer Folge unterstrichen).

Dabei bezeichnet man

$$|F(\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re}\{F(\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{F(\omega)\}]^2} \quad (4.114)$$

als Amplitudenspektrum oder auch als Amplitudendichte, und

$$\arg\{F(\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{F(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}} \quad (4.115)$$

als Phasenspektrum.

Mit (siehe auch Gleichung (4.53))

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ C \cdot i_B \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.116)$$

und

$$\underline{I}(\omega) = F\{i(t)\} = |\underline{I}(\omega)| \cdot e^{j \arg\{\underline{I}(\omega)\}} \quad (4.117)$$

erhält gemäß der Definitionen (4.114) für das Amplitudenspektrum des elektrischen Stromes:

$$|\underline{I}(\omega)| = \left| C \cdot i_B \cdot \left(\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right) \right| = C \cdot i_B \cdot \left| \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right| \quad (4.118)$$

Dabei ist

$$\operatorname{Re}\{\underline{I}(\omega)\} = C \cdot i_B \cdot \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{b}{b^2 + \omega^2} \right) \quad (4.119)$$

und

$$\operatorname{Im}\{\underline{I}(\omega)\} = -C \cdot i_B \cdot \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \right) \quad (4.120)$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\underline{I}(\omega)| &= \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{I}(\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{I}(\omega)\}]^2} = \\ &= C \cdot i_B \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{b}{b^2 + \omega^2} \right)^2 + \left(-\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.121)$$

Weiters berechnet sich das Phasenspektrum der elektrischen Stromstärke entsprechend der Formel (4.115) (siehe auch Gleichung (4.119) und Gleichung (4.120)) zu:

$$\arg\{\underline{I}(\omega)\} = \varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{I}(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{I}(\omega)\}} = \arctan \frac{-\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{b^2 + \omega^2}}{\frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{b}{b^2 + \omega^2}} \quad (4.122)$$

Für den Normalblitz $i_{[2/50]μs}$ nach ÖVE-E49/1988 (siehe [34,S.9], Gleichung (4.53) sowie Gleichung (4.105) bis Gleichung (4.108)) gilt nun der in der Abbildung 4.14 dargestellte Zeitverlauf.

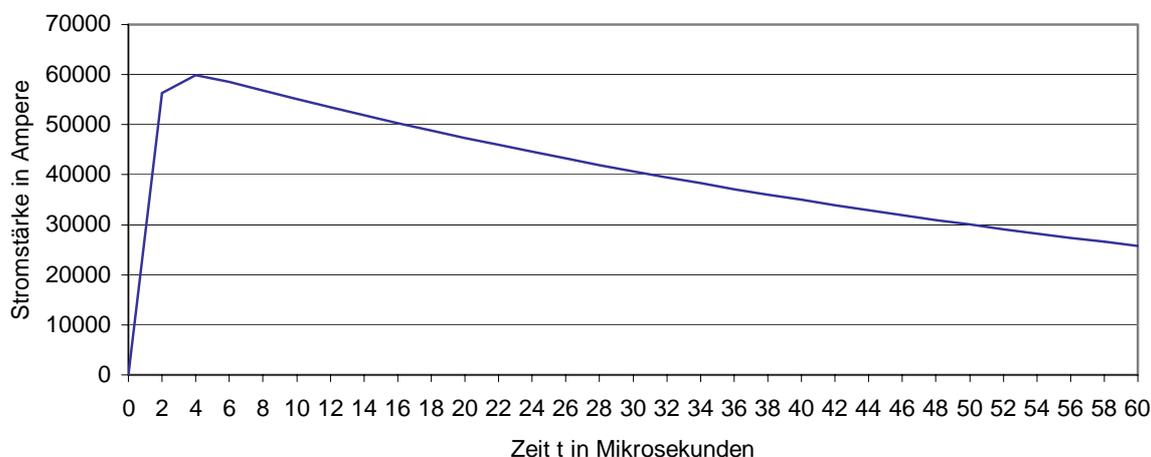


Abb. 4.14: Zeitlicher Verlauf des Stoßstromes $i_{[2/50]μs}$ gemäß der Definition laut ÖVE-E49/1988

Da durch die Fourier-Transformation die Untersuchung des Zeitverhaltens der elektrischen Stromstärke in eine Analyse ihrer einzelnen harmonischen Komponenten übergeführt wurde, ist es jetzt notwendig, den verschiedenen Werten der Zeit t entsprechende Frequenzen zuzuordnen. Zu diesem Zweck kann die Formel für die Ermittlung der äquivalenten Frequenz (siehe Gleichung (2.87) und Gleichung (2.88)) verwendet werden.

Daher gilt für die Frequenzwerte ω :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{4 \cdot t} = \frac{\pi}{2 \cdot t} \tag{2.88}$$

- f.....äquivalente Frquenz
- ω äquivalente Kreisfrequenz
- t.....Zeitpunkt t

Die Resultate aus der Anwendung der Gleichung (2.88) auf einzelne Werte aus dem Zeitintervall $t=[1μs,50μs]$ des Stoßstromes $i_{[2/50]μs}$ (siehe Abbildung 4.14) zeigt die Tabelle 4.19:

t in μs	1	2	3	4	5	10
f in Hz	250000	125000	83333	62500	50000	25000
ω in 1/s	1570796	785398	523597	392699	314159	157080
t in μs	15	20	25	30	40	50
f in Hz	16667	12500	10000	8333	6250	5000
ω in 1/s	104722	78540	62832	52358	39270	31416

Tab. 4.19: Frequenzen zu den Zeitwerten des Stromes $i(t)$

Somit können die frequenzabhängigen Kenngrößen (Realteil, Imaginärteil, Amplitudenspektrum, Phasenspektrum - siehe Gleichungen (4.118) bis (4.122)) des in den Bildbereich transformierten Stoßstromes berechnet werden. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in den nachfolgenden Tabellen

4.23 (für allgemeine Frequenzen) und 4.24 (für die speziellen Frequenzen aus der Tabelle 4.19) sowie in den zugehörigen Diagrammen (siehe Abbildung 4.21 bis Abbildung 4.28) dargestellt.

ω in 1/s	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
Re	4,1697	4,1651	4,1515	4,1289	4,0978	4,0584	4,0113	3,9579
Im	0	-0,1388	-0,2766	-0,4127	-0,5462	-0,6763	-0,8022	-0,9234
Betrag	4,1697	4,1674	4,1607	4,1495	4,1340	4,1144	4,0908	4,0633
φ in °	0	-1,91	-3,81	-5,71	-7,59	-9,46	-11,31	-13,14
ω in 1/s	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500
Re	3,8961	3,8293	3,7573	3,6807	3,6003	3,5167	3,4306	3,3427
Im	-1,0393	-1,1494	-1,2534	-1,3511	-1,4422	-1,5266	-1,6044	-1,6756
Betrag	4,0324	3,9981	3,9609	3,9209	3,8784	3,8338	3,7873	3,7392
φ in °	-14,94	-16,71	-18,45	-20,16	-21,83	-23,47	-25,06	-26,62
ω in 1/s	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500
Re	3,2535	3,1635	3,0733	2,9833	2,8938	2,8053	2,7180	2,6321
Im	-1,7404	-1,7988	-1,8512	-1,8978	-1,9388	-1,9746	-2,0055	-2,0317
Betrag	3,6897	3,6392	3,5878	3,5358	3,4833	3,4306	3,3778	3,3251
φ in °	-28,14	-29,62	-31,06	-32,46	-33,82	-35,14	-36,42	-37,66
ω in 1/s	12000	12500	13000	13500	14000	14500	15000	15500
Re	2,5480	2,4657	2,3854	2,3072	2,2311	2,1573	2,0858	2,0166
Im	-2,0536	-2,0715	-2,0857	-2,0964	-2,1040	-2,1088	-2,1109	-2,1107
Betrag	3,2725	3,2204	3,1686	3,1174	3,0668	3,0168	2,9676	2,9192
φ in °	-38,87	-40,03	-41,17	-42,26	-43,32	-44,35	-45,34	-46,31

Tab. 4.20: Frequenzabhängigkeit der Stromstärke $I(\omega)$

ω in 1/s	26182	31416	39270	52358	62832	78540	104722
Re	1,0107	0,74726	0,49644	0,27445	0,17971	0,09877	0,03361
Im	-1,8327	-1,6544	-1,4200	-1,1284	-0,96244	-0,78436	-0,59569
Betrag	2,0930	1,8154	1,5043	1,1613	0,97907	0,79055	0,59663
φ in °	-61,12	-65,69	-70,73	-76,33	-79,42	-82,82	-86,77
ω in 1/s	157080	314159	392699	523597	785398	1570796	----
Re	-0,01384	-0,04057	-0,04233	-0,04164	-0,03600	-0,01928	----
Im	-0,39791	-0,19056	-0,14718	-0,10262	-0,05691	-0,01490	----
Betrag	0,39815	0,19483	0,15315	0,11074	0,06734	0,02436	----
φ in °	-91,99	-102,01	-106,04	-112,08	-122,31	-142,29	----

Tab. 4.21: Stromstärke $I(\omega)$ als Funktion der Frequenzen aus der Tabelle 4.19

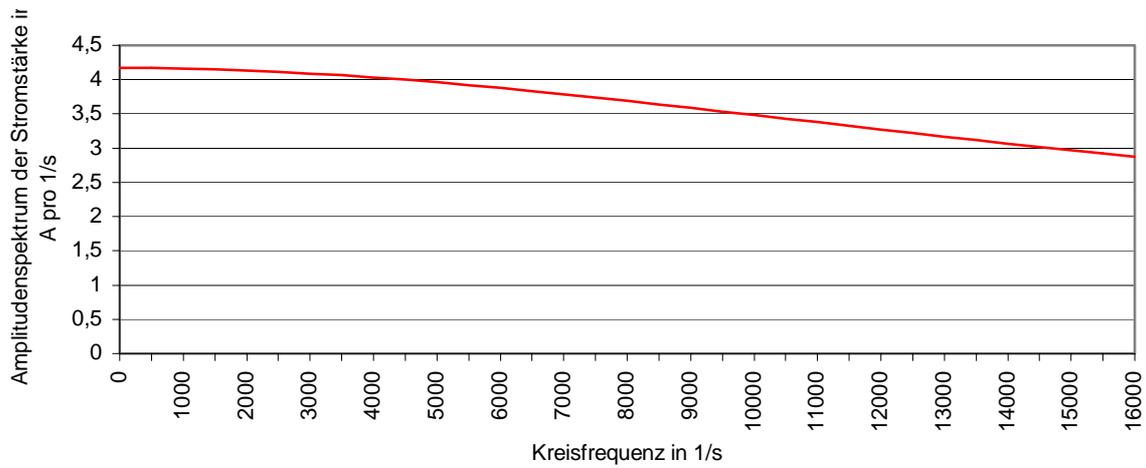


Abb. 4.21: Amplitudenspektrum der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$

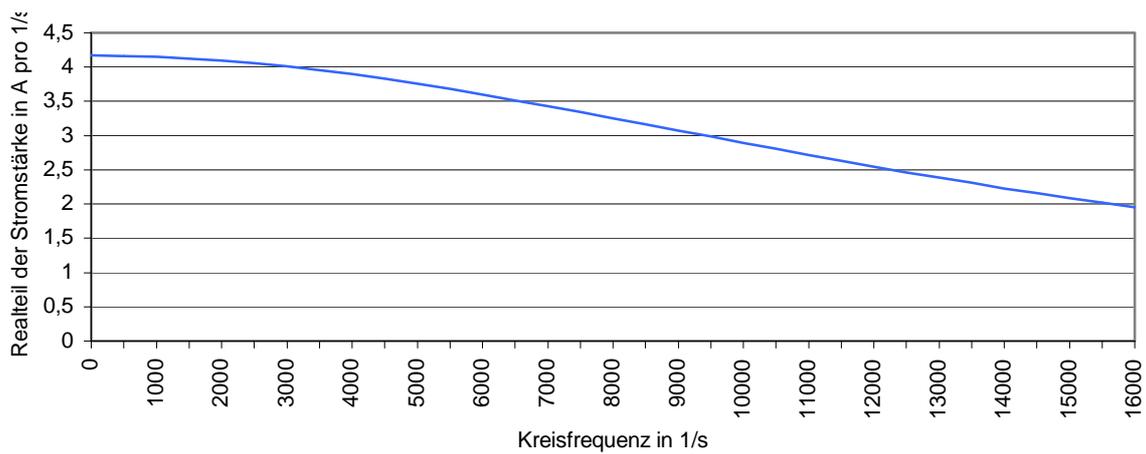


Abb. 4.22: Realteil der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$

Anmerkung: Realteil an der Stelle $\omega=0$ ($Re=-4,1697$) wird der Übersicht halber nicht eingetragen

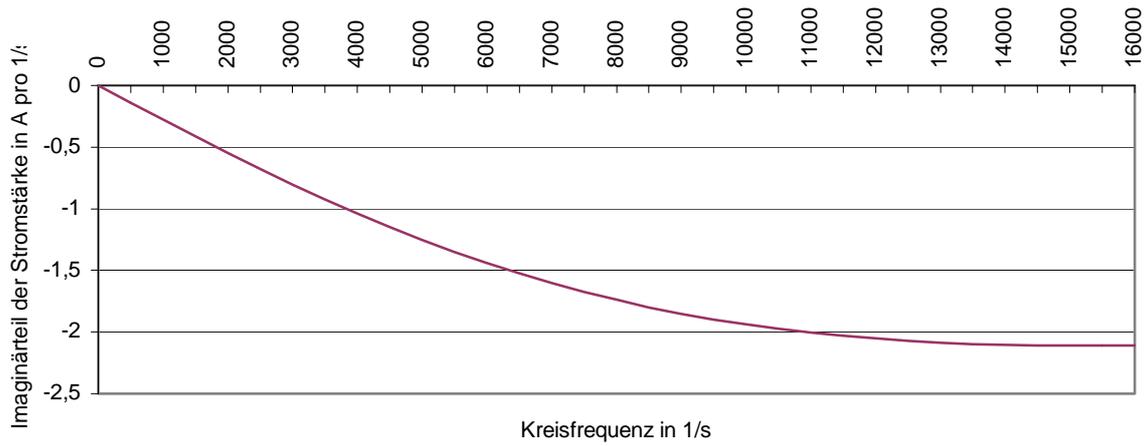


Abb. 4.23: Imaginärteil der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$

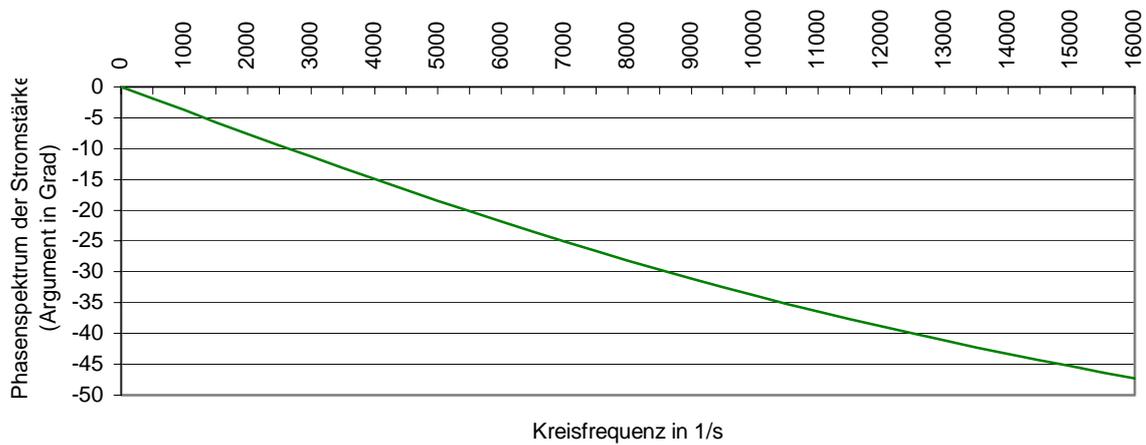


Abb. 4.24: Phasenspektrum der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$

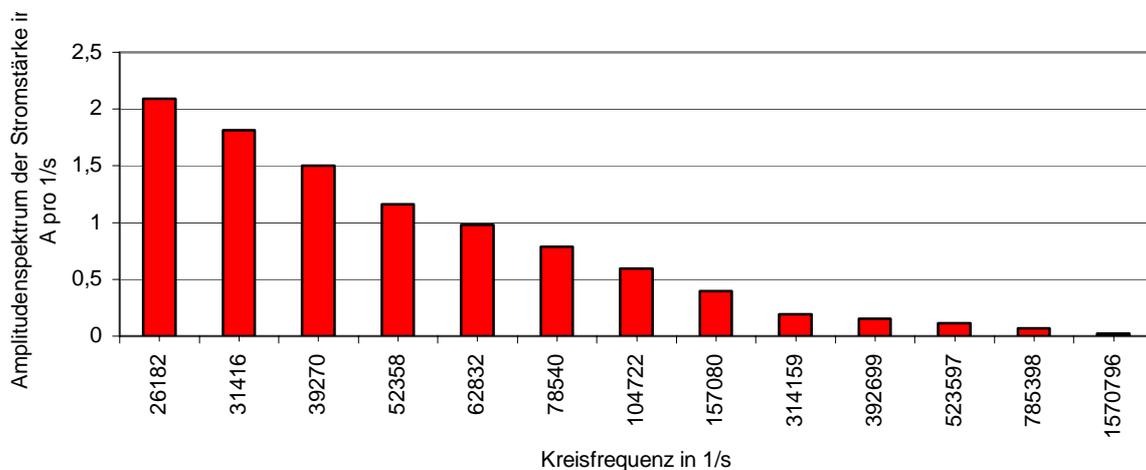


Abb. 4.25: Amplitudenspektrum der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$ für die Frequenzen aus der Tabelle Tabelle 4.19

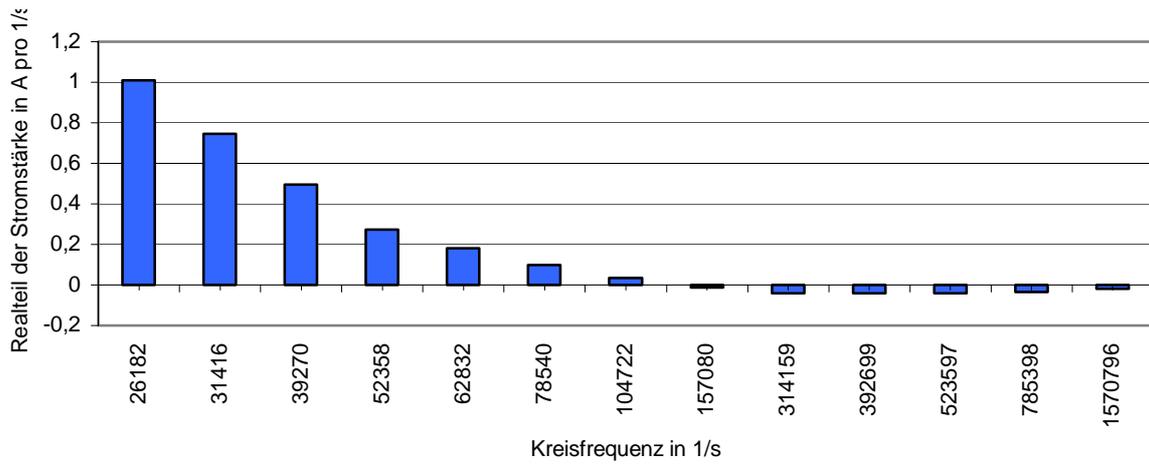


Abb. 4.26: Realteil der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$ für die Frequenzen aus der Tabelle Tabelle 4.19

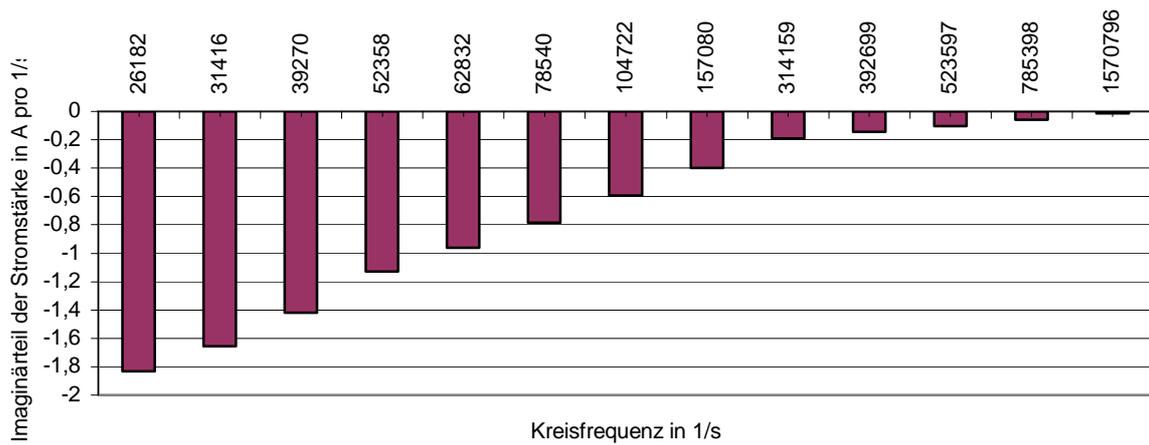


Abb. 4.27: Imaginärteil der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$ für die Frequenzen aus der Tabelle Tabelle 4.19

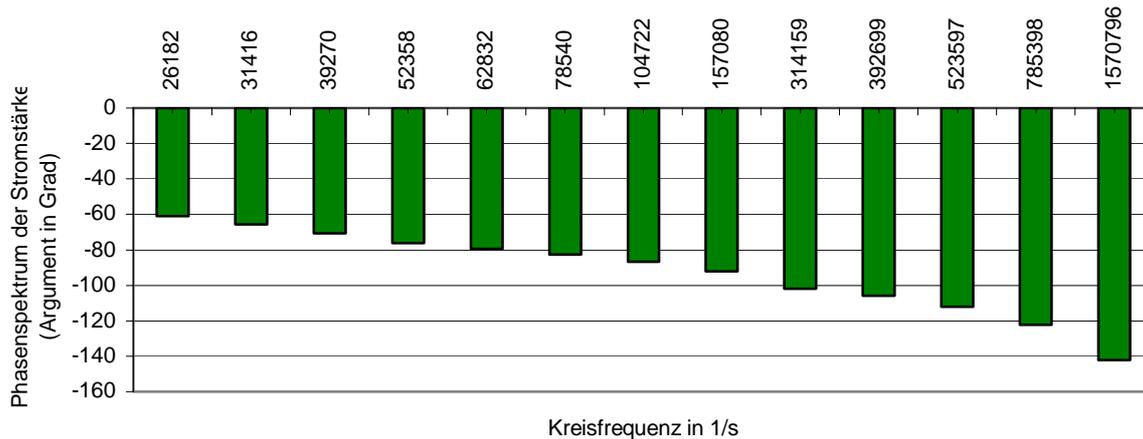


Abb. 4.28: Phasenspektrum der elektrischen Stromstärke $I(\omega)$ für die Frequenzen aus der Tabelle Tabelle 4.19

Anschließend an die Untersuchung der elektrischen Stromstärke kann nun die elektrische Feldstärke im eben begrenzten Leiter (siehe Abbildung 4.17), genauer gesagt deren Orts- und Frequenzabhängigkeit analysiert werden.

Für die elektrische Feldstärke im Leiter gilt ganz allgemein nach wie vor die Differentialgleichung (4.24), also:

$$\Delta \vec{E} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.24)$$

Man legt nun der weiteren Berechnung neben einem kartesischen Koordinatensystem auch wieder die Annahme zugrunde, daß die elektrische Feldstärke im Leiter ausschließlich eine z-Komponente besitzt sowie deren Ortsabhängigkeit nur von der Ordinate (y-Koordinate) der räumlichen Ausdehnung des elektrischen Leiters bestimmt wird (siehe dazu Anfang des Abschnittes 4.3).

Man gelangt sodann mit den Gleichungen (4.87) bis (4.90) wieder zu:

$$\frac{\partial^2 E(y,t)}{\partial y^2} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial E(y,t)}{\partial t} \quad (4.91)$$

Setzt man jetzt analog zur elektrischen Stromdichte eine sinusförmige Zeitabhängigkeit (harmonische Schwingungen) für die elektrische Feldstärke voraus (siehe speziell dazu [26,S.283-284]), so ergibt sich mit den oben getroffenen Vereinbarungen (nur z-Komponente und nur y-Abhängigkeit) schließlich:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_z(y, t) \cdot \vec{e}_z = \hat{E}_z(y) \cdot \sin[\omega t + \varphi_z(y)] \cdot \vec{e}_z \quad (4.123)$$

Mit Hilfe der komplexen Schreibweise (symbolische Methode, komplexe Wechselstromrechnung, siehe [20,S.169-174], [21,S.402-403], [23,S.121-122], [27,S.457-458], [85,S.18-21] und [104,S.65-72]) erhält man dann aus der Gleichung (4.91) für die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke die Differentialgleichung (alle komplexen Größen werden in weiterer Folge unterstrichen)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{E}_z(y) = \mu \cdot \sigma \cdot j\omega \cdot \hat{E}_z(y) \quad (4.124)$$

y Ortskoordinate

ω Kreisfrequenz

$\hat{E}_z(y)$ komplexer Scheitelwert (komplexe Amplitude) der elektrischen Feldstärke (siehe [23,S.122], [118,S.470-471] sowie [55,S.43])

Die Lösung für den komplexen Scheitelwert der elektrischen Feldstärke lautet:

$$\begin{aligned} \hat{E}_z(y) &= \hat{E}_z(y, \omega) = I(\omega) \cdot \frac{\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot y}}{1 - e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \eta}} = \\ &= C \cdot i_B \cdot \frac{b - a}{(a + j\omega) \cdot (b + j\omega)} \cdot \frac{\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot y}}{1 - e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \eta}} \end{aligned} \quad (4.125)$$

Zu diesem Resultat gelangt man auch dadurch, daß man sowohl in die Gleichung (4.54) (Laplace-Transformierte der elektrischen Stromstärke) als auch in die Gleichung (4.95) (Lösung für die elektrische Feldstärke in der s-Ebene) den Spezialfall

$$s = j\omega \quad (4.126)$$

einsetzt. Auf diese Weise wird die Laplace-Transformation, die ja zur Ermittlung der Ergebnisse (4.54) und (4.95) herangezogen wurde, auf die imaginäre Achse der komplexen s-Ebene beschränkt. Und genau diese Einschränkung des Wertebereiches der komplexen Bildvariablen s stellt den Übergang von der Laplace-Transformation zur Fourier-Transformation dar (siehe dazu auch [119,S.604] und [65,S.184-185]).

Infolgedessen gilt also:

$$I(\omega) = I(s)_{s=j\omega} \quad (4.127)$$

$$\hat{E}_z(y, \omega) = E(y, s)_{s=j\omega} \quad (4.128)$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes (siehe Gleichung (4.6) bzw. Gleichung (4.7)) kann man aus der Gleichung (4.125) die komplexe Amplitude (Bildfunktion) der elektrischen Stromdichte berechnen. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z(y) &= \hat{J}_z(y, \omega) = \sigma \cdot \hat{E}_z(y, \omega) = I(\omega) \cdot \frac{\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}{\xi} \cdot \frac{e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot y}}{1 - e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \eta}} = \\ &= C \cdot i_B \cdot \frac{b - a}{(a + j\omega) \cdot (b + j\omega)} \cdot \frac{\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}{\xi} \cdot \frac{e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot y}}{1 - e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \eta}} \end{aligned} \quad (4.129)$$

Analog zur Formel (4.128) gilt auch für die elektrische Stromdichte (siehe dazu auch Gleichung (4.96)):

$$\hat{J}_z(y, \omega) = J(y, s)_{s=j\omega} \quad (4.130)$$

Angelangt an dieser Stelle, können nun die Zeitfunktionen für die elektrische Stromdichte und die elektrische Feldstärke im eben begrenzten Leiter berechnet werden. Es wird dafür der jeweilige komplexe Zeitwert, also

$$\underline{E}_z(y, \omega, t) = \underline{\hat{E}}_z(y, \omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (4.131)$$

und

$$\underline{J}_z(y, \omega, t) = \underline{\hat{J}}_z(y, \omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (4.132)$$

in jedem Zeitpunkt t auf die (feste) imaginäre Achse der komplexen Zahlenebene projiziert. Daraus folgt:

$$E_z(y, \omega, t) = \operatorname{Im}\{\underline{E}_z(y, \omega, t)\} = \operatorname{Im}\{\underline{\hat{E}}_z(y, \omega) \cdot e^{j\omega t}\} \quad (4.133-1)$$

sowie:

$$J_z(y, \omega, t) = \operatorname{Im}\{\underline{J}_z(y, \omega, t)\} = \operatorname{Im}\{\underline{\hat{J}}_z(y, \omega) \cdot e^{j\omega t}\} \quad (4.133-2)$$

Mit den Definitionen

$$\rho := \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot y \quad (4.134-1)$$

und:

$$v := \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \eta \quad (4.134-2)$$

ergibt sich dann (siehe auch Gleichung (4.125) und (4.129)):

$$\begin{aligned}
E_z(y, \omega, t) &= \operatorname{Im}\{E_z(y, \omega, t)\} = \\
&= \frac{C \cdot i_B}{\sigma \cdot \xi} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(-\frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{b}{b^2 + \omega^2}\right) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{\cos \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} + \frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \sin \omega t + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\cos \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} - \frac{\sin \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} \right] \cdot \cos \omega t \right\} + \\
&+ \frac{C \cdot i_B}{\sigma \cdot \xi} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{b^2 + \omega^2}\right) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \sin(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} - \frac{\cos \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \sin \omega t + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\cos \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} + \frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \cos \omega t \right\} \quad (4.135)
\end{aligned}$$

Die elektrische Stromdichte im Leiter berechnet sich dem Ohmschen Gesetz (siehe Gleichung (4.6) bzw. Gleichung (4.7)) entsprechend zu:

$$\begin{aligned}
J_z(y, \omega, t) &= \operatorname{Im}\{J_z(y, \omega, t)\} = \\
&= \frac{C \cdot i_B}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(-\frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{b}{b^2 + \omega^2}\right) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{\cos \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} + \frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \sin \omega t + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\cos \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} - \frac{\sin \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} \right] \cdot \cos \omega t \right\} + \\
&+ \frac{C \cdot i_B}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{b^2 + \omega^2}\right) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \sin(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} - \frac{\cos \rho + e^{-\nu} \cdot \sin(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \sin \omega t + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\cos \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho + \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} + \frac{\sin \rho - e^{-\nu} \cdot \cos(\rho - \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \sin \nu} \right] \cdot \cos \omega t \right\} \quad (4.136)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ergebnisse (4.135) und (4.136) können die elektrische Feldstärke und die elektrische Stromdichte als Funktion der Ordinate y (siehe Abbildung 4.19 und Abbildung 4.20), der Kreisfrequenz ω und der Zeit t dargestellt werden.

Es wurden zu diesem Zweck die folgenden Fälle ausgewählt (siehe Tabelle 4.22):

Fall-Nummer	Abbildung	Ordinate y in m	Kreisfrequenz ω -in 1/s	Zeit t in μ s	Lage des Leiters
1	4.30	0,0001	10000	variabel	Stehend
2	4.31	0,0001	100000	variabel	Stehend
3	4.32	0,0001	1000000	variabel	Stehend
4	4.33	variabel	10000	314	Stehend
5	4.34	variabel	100000	31,4	Stehend
6	4.35	variabel	1000000	3,14	Stehend
7	4.36	0,00001	10000	variabel	Liegend
8	4.37	0,00001	100000	variabel	Liegend
9	4.38	0,00001	1000000	variabel	Liegend
10	4.39	variabel	10000	314	Liegend
11	4.40	variabel	100000	31,4	Liegend
12	4.41	variabel	1000000	3,14	Liegend
13	4.42	0	10000	variabel	Stehend
14	4.43	0	100000	variabel	Stehend
15	4.44	0	1000000	variabel	Stehend
16	4.45	0	10000	variabel	Liegend
17	4.46	0	100000	variabel	Liegend
18	4.47	0	1000000	variabel	Liegend

Tab. 4.22: Ausgewählte Fälle für die graphische Darstellung der Feldstärke- und Stromdichtefunktion

Weiters sind die Materialkennwerte für den elektrischen Leiter festgelegt durch:

- (1) Material: Erde (homogenes Erdreich)
- (2) Absolute Permeabilität: $\mu = \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ H/m ($\mu_r = 1$, siehe hierzu [10, S.403,419] sowie [11, S.149])
- (3) Spezifischer Erdwiderstand ρ_E bzw. elektrische Leitfähigkeit $\sigma_E = 1/\rho_E$:
 $\rho_E = 56 \Omega\text{m}$ (siehe Abschnitt 5.1.2, Tabelle 5.1) bzw. $\sigma_E = 0,0179 \text{ S/m}$
- (4) Querschnitt: $100\text{m} \cdot 10\text{m} = 1000\text{m}^2$

Daraus ergeben sich die nachfolgenden Diagramme (siehe Tabelle 4.22):

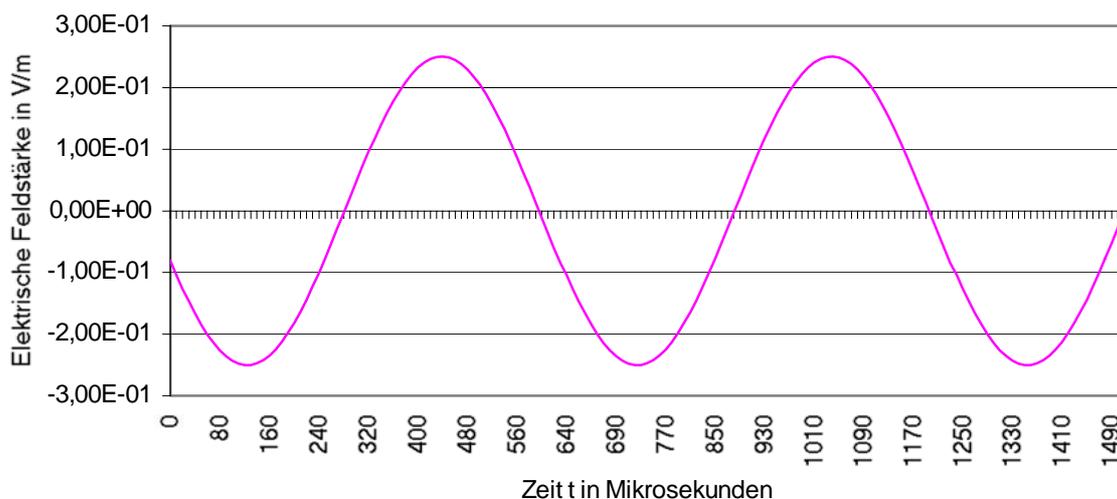


Abb. 4.29: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 1, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

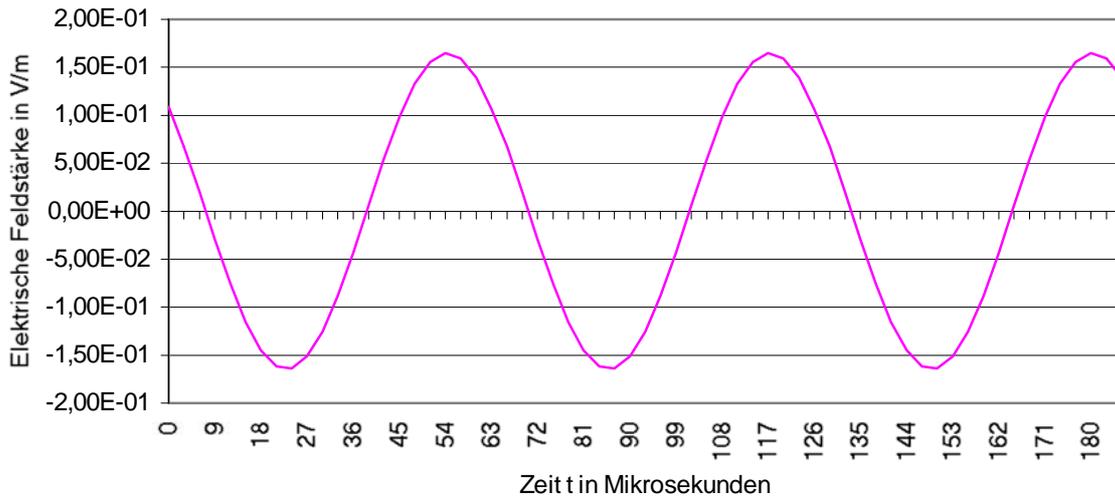


Abb. 4.30: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke
(Fall 2, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

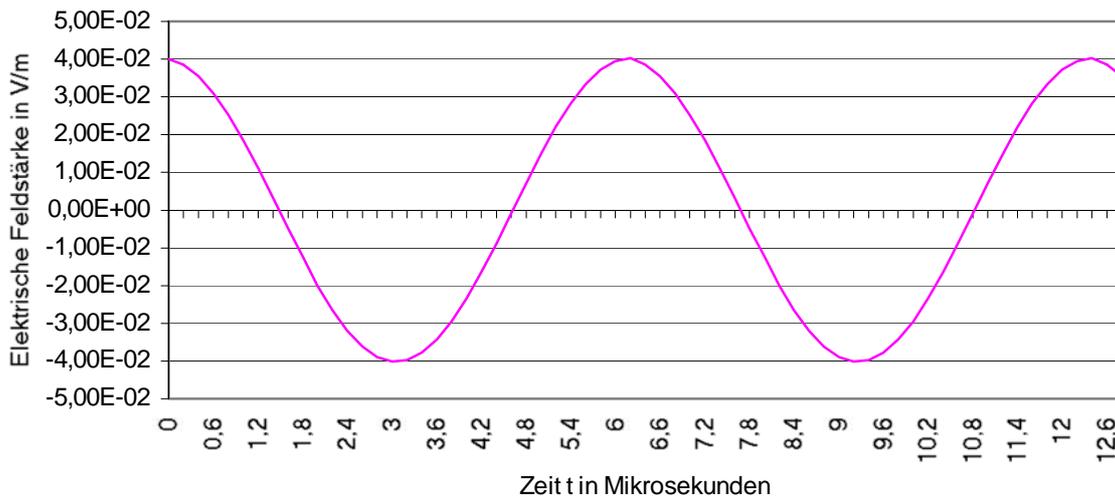


Abb. 4.31: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke
(Fall 3, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

Vergleicht man an dieser Stelle die Abbildungen 4.29 bis 4.31, so läßt sich erkennen, daß mit steigender Kreisfrequenz ω bei konstanter Ordinate y (siehe Abbildung 4.19) die Amplitude der zugehörigen ungedämpften harmonischen Schwingung (Sinusschwingung) immer kleiner wird. Diese Tatsache ist auf die folgenden, im Ergebnis für die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke (siehe Gleichung (4.135)) enthaltenen Terme zurückzuführen. Sie lauten:

$$\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(-\frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{b}{b^2 + \omega^2} \right) := \Phi(\omega) \quad (4.137)$$

und:

$$\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot e^{-\rho} \cdot \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \right) := \Psi(\omega) \quad (4.138)$$

Das asymptotische Verhalten der Funktionen (4.137) und (4.138) bezüglich der Kreisfrequenz ω , ist festgelegt durch:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 0 \quad (4.139)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Psi(\omega) = 0 \quad (4.140)$$

Demzufolge erhält man für die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke (siehe Gleichung (4.135)) die horizontale Asymptote:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E_z(y, \omega, t) = 0 \quad (4.141)$$

Für die Ortsabhängigkeit der elektrischen Feldstärke in der vertikalen Erdschicht (siehe Abbildung 4.19) sind die Diagramme 4.32 bis 4.34 (siehe unten) gültig. Aus diesen Abbildungen wird ersichtlich, daß sich das Betragsmaximum der elektrischen Feldstärke mit steigender Kreisfrequenz in Richtung Leiteroberfläche verschiebt, und schließlich für sehr hohe Frequenzen unmittelbar an der Oberfläche des elektrischen Leiters (siehe dazu speziell Abbildung 4.31 und Abbildung 4.32) auftritt. Mit wachsender Ordinate y , das heißt mit zunehmender Tiefe unterhalb der Erdoberfläche (die y -Koordinate zeigt ins Leiterinnere, siehe Abbildung 4.19) wird der Betrag der elektrischen Feldstärke kleiner. Für diesen Effekt der Stromverdrängung (Skin-Effekt) ist im mathematischen Sinne der Term

$$e^{-\rho} = e^{-\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot y} := \Theta(y, \omega) \quad (4.142)$$

verantwortlich.

Für den räumlich unendlich weit ausgedehnten elektrischen Leiter (z.B. näherungsweise im Erdreich) resultiert aus diesem Sachverhalt:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Theta(y, \omega) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot y} = 0 \quad (4.143)$$

Und daher:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} E_z(y, \omega, t) = 0 \quad (4.144)$$

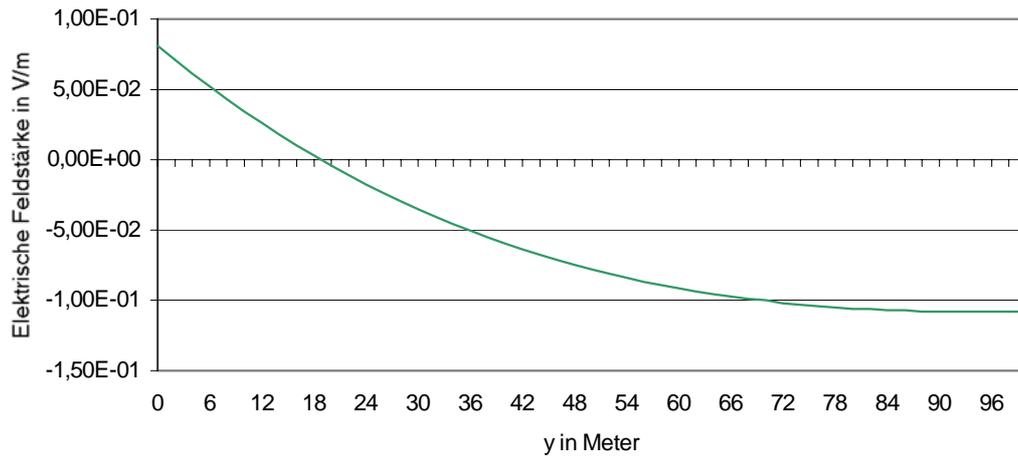


Abb. 4.32: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 4, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

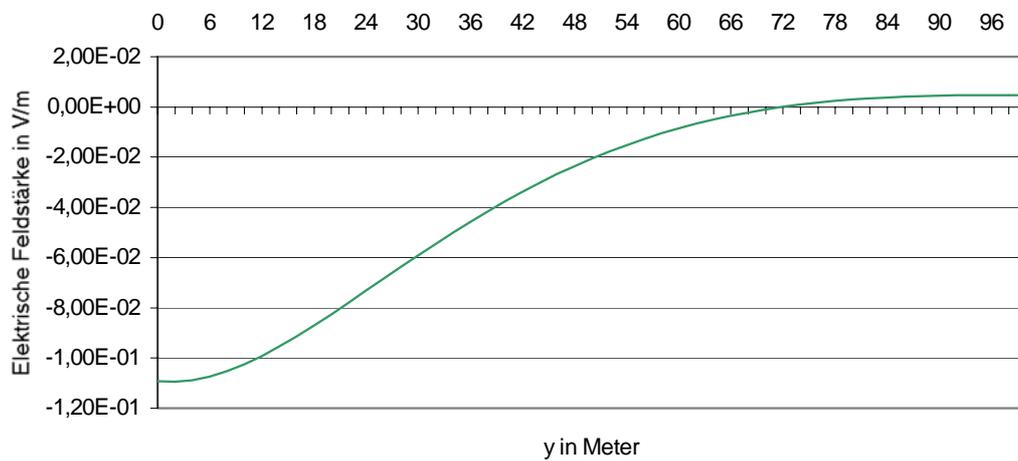


Abb. 4.33: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 5, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

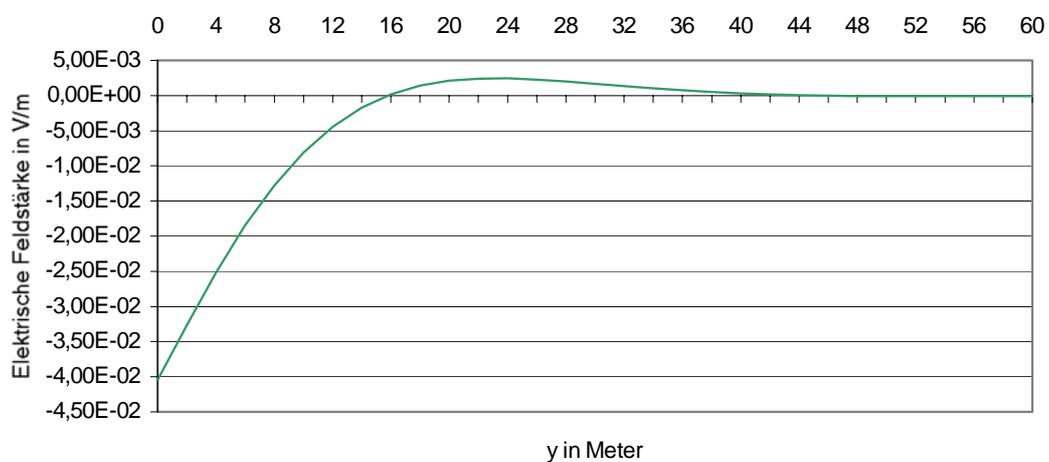


Abb. 4.34: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 6, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

Wendet man die bisher angestellten mathematischen Überlegungen für die vertikale Erdschicht (siehe oben, Gleichung (4.137) bis Gleichung (4.144)) auch auf eine horizontale Erdschicht an (siehe Abbildung 4.20 sowie Abbildung 4.35 bis 4.40 und Abbildung 4.44 bis 4.46), so erhält man absolut die gleichen Ergebnisse.

Die zugehörigen Diagramme sind:

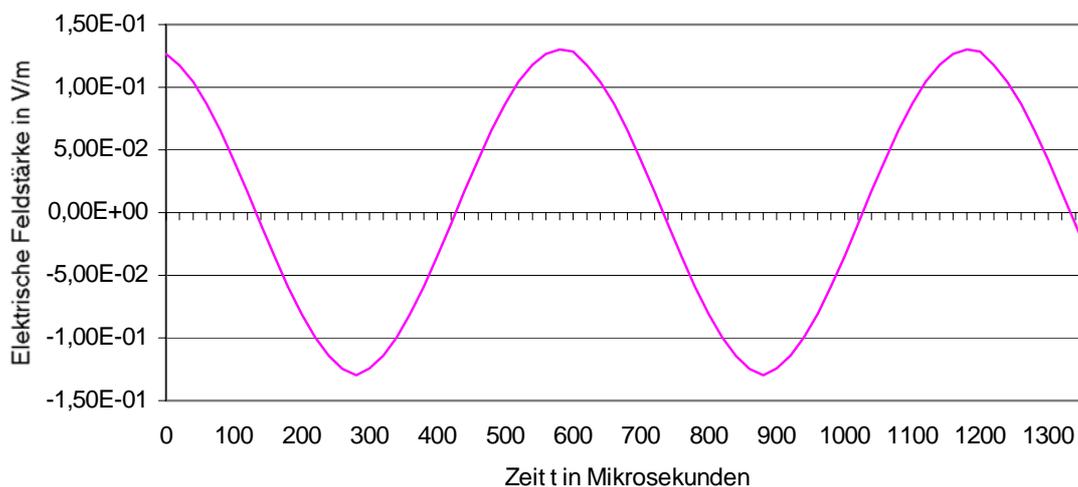


Abb. 4.35: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 7, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

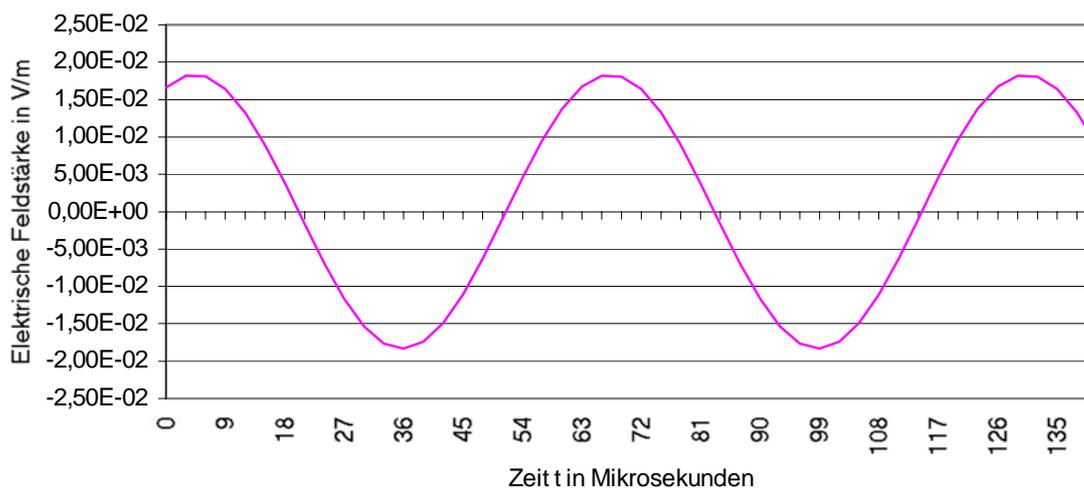


Abb. 4.36: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 8, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

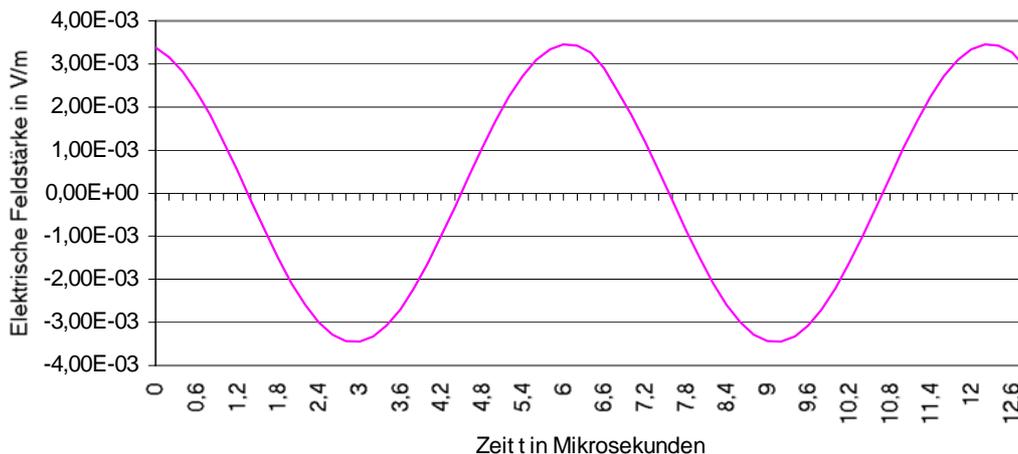


Abb. 4.37: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 9, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

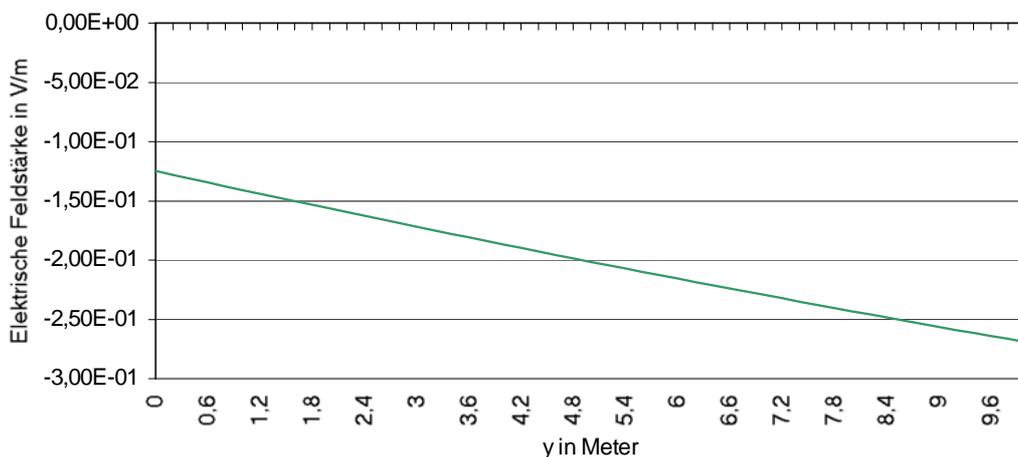


Abb. 4.38: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 10, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

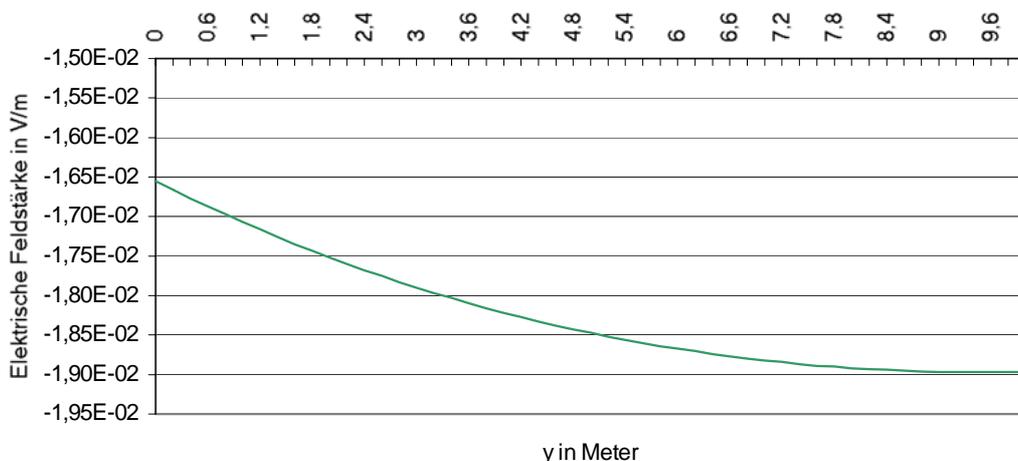


Abb. 4.39: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 11, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

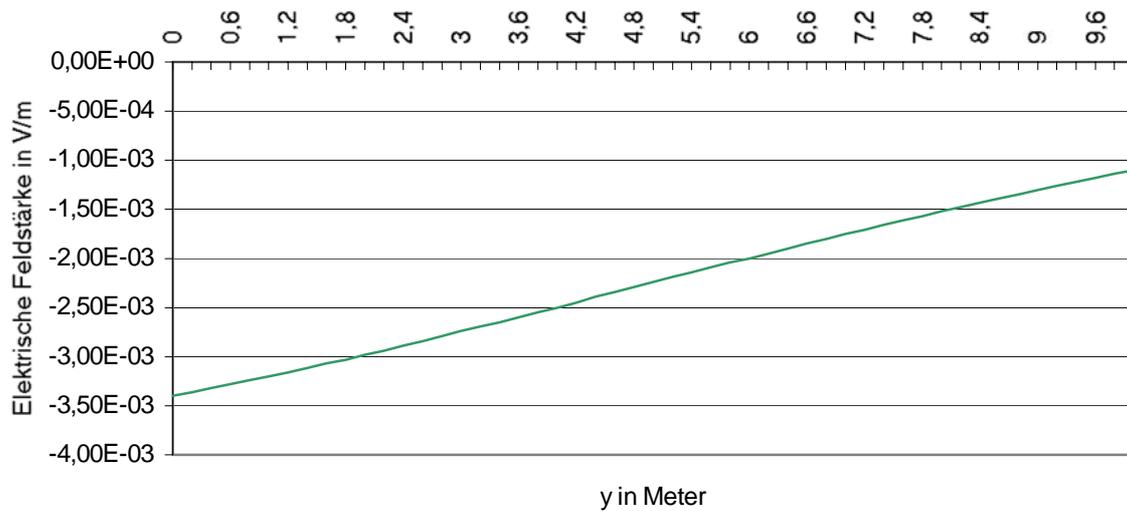


Abb. 4.40: Räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 12, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

Für das Verhalten der elektrischen Feldstärke unmittelbar auf der Erdoberfläche ($y=0\text{m}$) sind nun die nachfolgenden, mit Hilfe der Gleichung (4.135) (Ergebnis für die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke) ermittelten, Diagramme (siehe Abbildung 4.41 bis Abbildung 4.46) gültig.

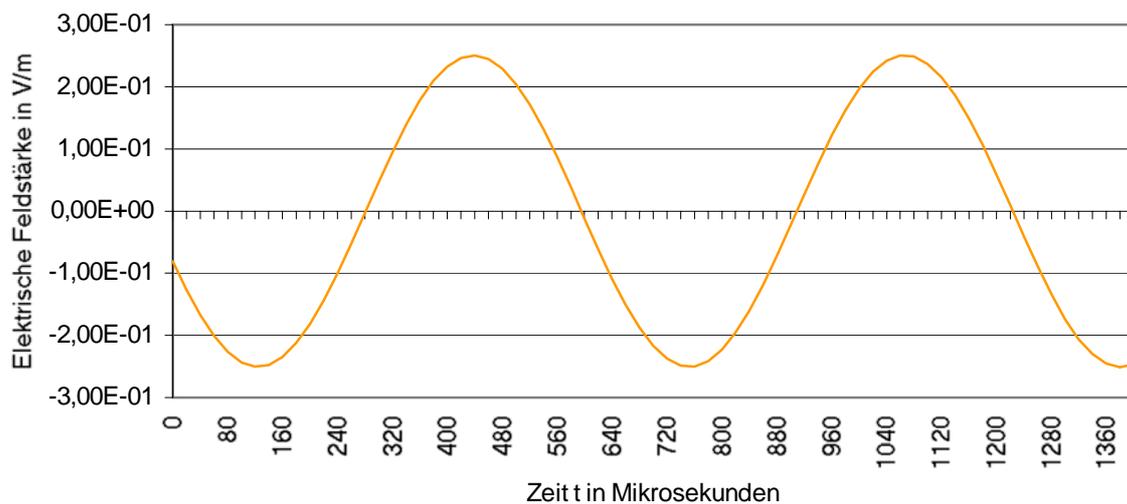


Abb. 4.41: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 13, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

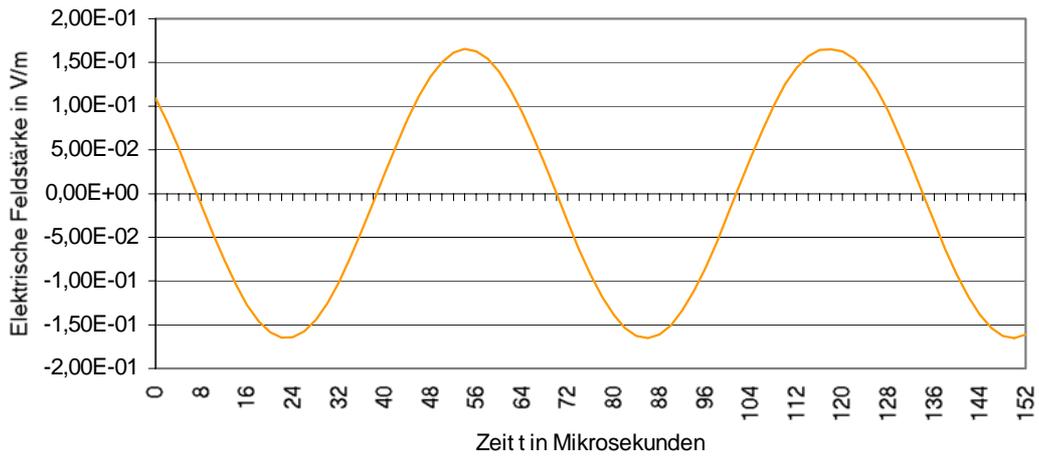


Abb. 4.42: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 14, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

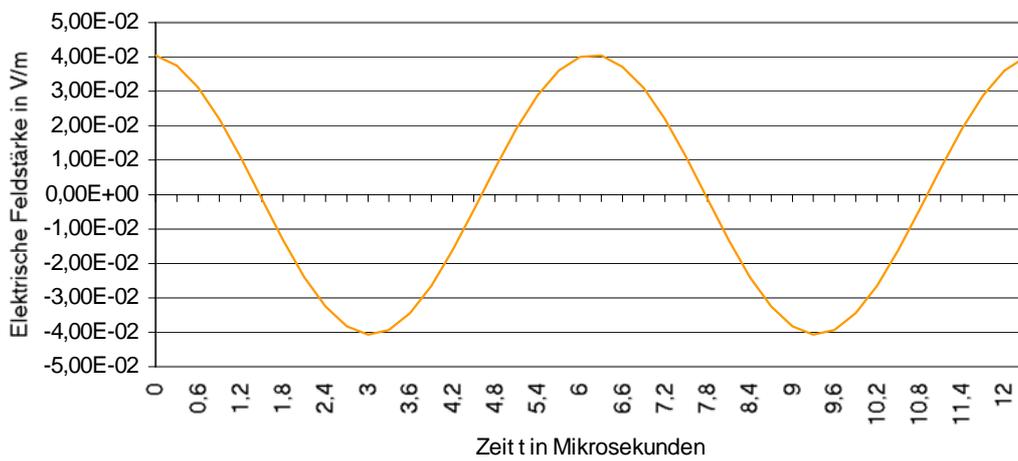


Abb. 4.43: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 15, vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19)

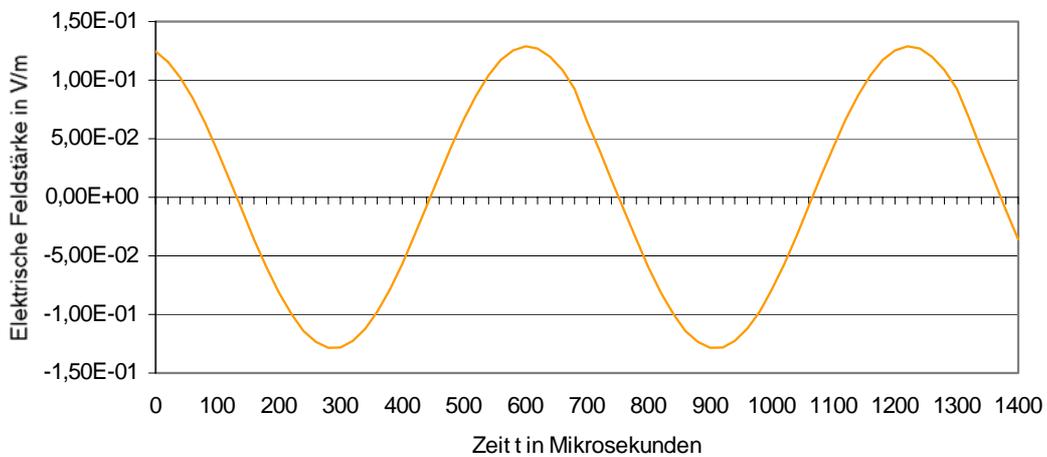


Abb. 4.44: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke (Fall 16, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

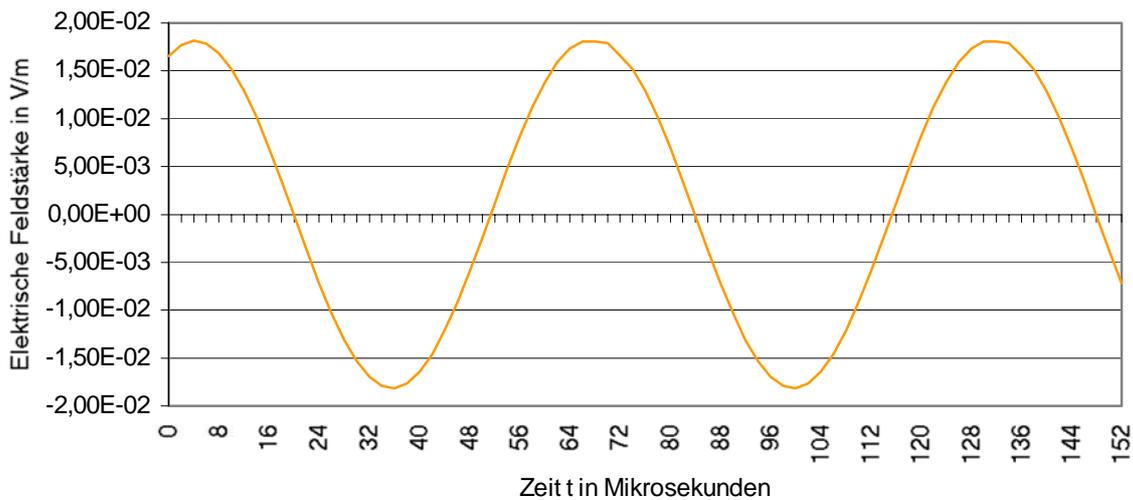


Abb. 4.45: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke
(Fall 17, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

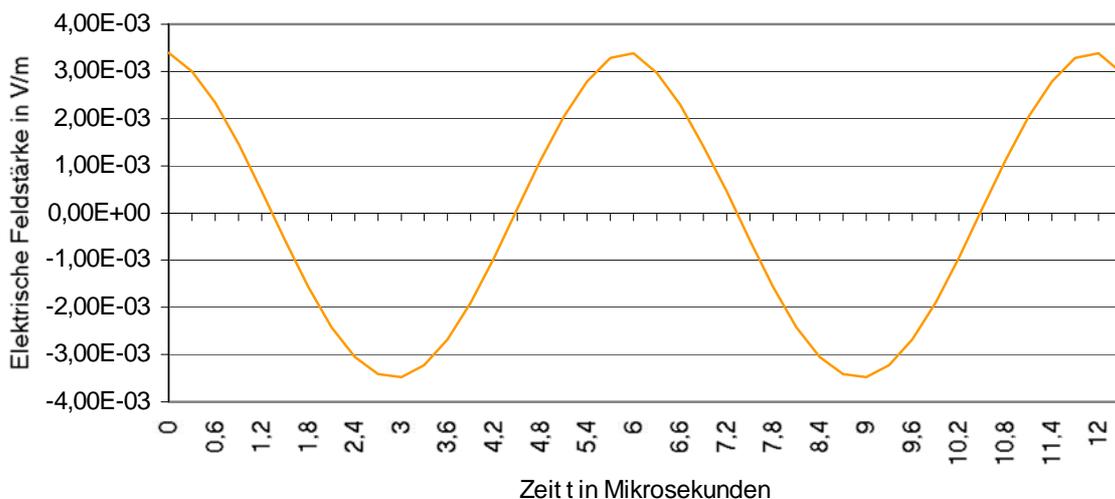


Abb. 4.46: Zeitverlauf der elektrischen Feldstärke
(Fall 18, horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20)

Anschließend an die Untersuchung der elektrischen Feldstärke im Leiter kann nun eine Analyse der zugehörigen elektrischen Stromdichte durchgeführt werden. Aufgrund der Tatsache, daß die Feldstärke und die Stromdichte durch das Ohmsche Gesetz (siehe Gleichung (4.6) und Gleichung (4.7)) miteinander verknüpft sind, ist der Unterschied zwischen diesen beiden Größen ein rein quantitativer. Dieser Sachverhalt kommt auch schon in den Ergebnissen (4.135) (Zeitfunktion für die elektrische Feldstärke) und (4.136) (Zeitfunktion für die elektrische Stromdichte) zum Ausdruck. Es wird dabei vorausgesetzt:

$$\sigma = \text{const.} \quad (4.145)$$

Die elektrische Leitfähigkeit σ ist sowohl von der Ortskoordinate y als auch von der Kreisfrequenz ω und der Zeit t unabhängig. Dementsprechend erhält man alle Zeitfunktionen, Ortsfunktionen und Gleichungen für die Stromdichte durch die Multiplikation:

$$J_z(y, \omega, t) = \sigma \cdot E_z(y, \omega, t) \quad (4.146)$$

Gemäß der Gleichung (4.146) können dann etwa aus den Amplituden der Feldstärkefunktionen (siehe Abbildung 4.29 bis Abbildung 4.46) die Amplituden der entsprechenden Stromdichtefunktionen ermittelt werden. Das Ergebnis dieser Berechnung zeigt die folgende Tabelle:

Fall-Nummer	Abbildung	Periodendauer in μs	Amplitude der elektr. Feldstärke in V/m	Amplitude der elektr. Stromdichte in kA/mm^2
1	4.30	600	0,2503	0,0045
2	4.31	63	0,1647	0,0029
3	4.32	6,2	0,04018	0,00072
7	4.36	600	0,1301	0,0023
8	4.37	63	0,01821	0,00033
9	4.38	6,2	0,003452	6,18E-05
13	4.42	620	0,2507	0,0045
14	4.43	64	0,1653	0,0030
15	4.44	6,3	0,04037	0,00072
16	4.45	620	0,1289	0,0023
17	4.46	64	0,01807	0,00032
18	4.47	6,3	0,00338	6,05E-05

Tab. 4.23: Zuordnung der Stromdichte-Amplituden zu den Feldstärke-Amplituden

Eine explizite Darstellung der restlichen Resultate für die elektrische Stromdichte (Diagramme, asymptotisches Verhalten, ...) ist nicht notwendig, da sie sich lediglich durch den Faktor σ (elektrische Leitfähigkeit) von den Ergebnissen für die elektrische Feldstärke unterscheiden (siehe Gleichung (4.146)).

Die Zusammenfassung der oben angestellten Betrachtungen lautet:

1. Grundsätzlich wird sowohl die Amplitude der elektrischen Feldstärke als auch die der elektrischen Stromdichte mit steigender Kreisfrequenz ω kleiner (siehe dazu Abbildung 4.29 bis 4.31, Abbildung 4.35 bis 4.37, Abbildung 4.41 bis 4.46 und Gleichung (4.137) bis Gleichung (4.141)).
2. Es erfolgt ganz generell (für jede beliebige Kreisfrequenz ω) eine Verdrängung des elektrischen Strömungsfeldes an die Leiteroberfläche (siehe dazu Abbildung 4.32 bis 4.34, Abbildung 4.38 bis 4.40 sowie Gleichung (4.142) und Gleichung (4.143) nebst Kommentar). Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom sogenannten Skin-Effekt (Stromverdrängung).
3. Die stromführende Schicht an der Leiteroberfläche wird mit steigender Kreisfrequenz ω immer dünner (siehe dazu besonders Abbildung 4.32 bis 4.34 und Abbildung 4.38 bis 4.40).

Da nun die harmonischen Schwingungen mit den größten Frequenzen in der Stirn des Stoßstromes (hier: Normalblitz $i[2/50]\mu\text{s}$ nach ÖVE-E49/1988, siehe [34,S.9] und Abbildung 4.14) auftreten (siehe Tabelle 4.19), ist der Effekt der Stromverdrängung, und damit auch das Ansteigen der Leiterimpedanz (siehe dazu Abschnitt 4.3.2.2), im elektrischen Leiter in diesem Zeitbereich (z.B. vom Zeitpunkt des Blitzeinschlages bis zum Erreichen des Blitzstrom-Scheitelwertes) sehr stark ausgeprägt. Mit dem Abklingen des Stoßstromes (also im Rückenbereich des Stoßstromes) nimmt die Wirkung des Skin-Effektes wieder ab.

4.3.2 BERECHNUNG DER IMPEDANZ DES ERDREICHES

4.3.2.1 Impedanz des Erdreiches im Bildbereich der Laplace-Transformation

Die Impedanz eines eben begrenzten Leiters (des Erdreiches) für Stoßvorgänge wird wieder, wie auch schon im Abschnitt 4.2.2, über den Spannungsabfall ΔU längs der Mantelfläche des Leiters berechnet. Aus Gleichung (4.96) kann man ersehen, daß die Stromdichte im Leiter mit wachsendem y exponentiell abnimmt. Es ist also die Stromdichte bei $y=0$ maximal und bei $y=\eta$ (siehe Abbildung 4.20) minimal. Aufgrund der exponentiellen Abnahme kann man näherungsweise davon ausgehen, daß der gesamte Strom an jener Begrenzungsfläche des Leiters fließt, für die $y=0$ gilt (Erdoberfläche).

Folglich gilt:

$$\Delta U(s) = E(y, s)_{y=0} \cdot l = E(0, s) \cdot l \quad (4.147)$$

lLeiterlänge (Länge der Erdschicht)

Die entsprechende Impedanz (Stoßimpedanz) kann wie folgt ermittelt werden:

$$Z(s) = \frac{\Delta U(s)}{I(s)} = \frac{E(0, s) \cdot l}{I(s)} \quad (4.148)$$

Setzt man nun die Gleichung (4.95) in die Gleichung (4.148) ein, so resultiert daraus für den Bildbereich:

$$Z = Z(s) = \frac{l}{\xi} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot s}}{1 - e^{-\sqrt{\mu \cdot s} \cdot \eta}} \quad (4.149)$$

4.3.2.2 Impedanz des Erdreiches im Bildbereich der Fourier-Transformation

Analog zum Bildbereich der Laplace-Transformation (siehe oben) kann auch hier die Impedanz für einen eben begrenzten Leiter berechnet werden (wie üblich, werden in diesem Abschnitt wieder alle komplexen Größen unterstrichen).

Für den Spannungsabfall $\underline{\Delta U}$ längs der Mantelfläche des Leiters ergibt sich somit:

$$\underline{\Delta U}(\omega) = \underline{\hat{E}}_z(y, \omega)_{y=0} \cdot l = \underline{\hat{E}}_z(0, \omega) \cdot l \quad (4.150)$$

lLeiterlänge (Länge der Erdschicht)

Die Impedanz (Stoßimpedanz) berechnet sich dann zu:

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{\Delta U}(\omega)}{\underline{I}(\omega)} = \frac{\underline{\hat{E}}_z(0, \omega) \cdot l}{\underline{I}(\omega)} \quad (4.151)$$

Es soll an dieser Stelle auch noch angemerkt werden, daß die Impedanz $Z(\omega)$ auch durch das Einsetzen des speziellen Falles gemäß der Gleichung (4.126), also durch das Einsetzen von

$$s = j\omega \quad (4.126)$$

in die Gleichung (4.149) ermittelt werden kann (siehe dazu auch Gleichung (4.127), Gleichung (4.128) und Gleichung (4.130)).

Es gilt demnach:

$$\underline{Z}(\omega) = Z(s)_{s=j\omega} \quad (4.152)$$

Die Gleichung (4.152) stellt wieder den Übergang von der Laplace-Transformation zur Fourier-Transformation dar (siehe hierzu auch [119,S.604] und [65,S.184-185]).

Der Formel (4.151) entsprechend, kann nun der komplexe Scheitelwert (auch komplexe Amplitude oder Bildfunktion genannt) der elektrischen Feldstärke (siehe Gleichung (4.125)) in die Gleichung (4.151) eingesetzt werden.

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \underline{Z}(\omega) &= \frac{\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{I}{1 - e^{-\sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \eta}} = \\ &= \frac{(1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}}}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{I}{1 - e^{-(1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \eta}} = \\ &= \frac{(1+j) \cdot \beta}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{I}{1 - e^{-(1+j) \cdot \beta \cdot \eta}} \end{aligned} \quad (4.153)$$

Mit Hilfe den Definitionen (4.134-1) und (4.134-2) kann man für die Impedanz des Erdreiches auch schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{Z}(\omega) &= \frac{(1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}}}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{I}{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu - j \cdot \sin \nu)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{I}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu - \sin \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} + \\ &+ j \cdot \left[\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{I}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu + \sin \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} \right] \end{aligned} \quad (4.154)$$

Daraus ergibt sich für den Real- und den Imaginärteil der Impedanz $Z(\omega)$:

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{I}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu - \sin \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} \quad (4.155)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{l}{\sigma \cdot \xi} \cdot \frac{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu + \sin \nu)}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu} \quad (4.156)$$

Aus den Ergebnissen (4.155) und (4.156) resultiert für den Betrag und das Argument der Impedanz $Z(\omega)$:

$$\begin{aligned} |\underline{Z}(\omega)| = Z(\omega) &= \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\sigma} \cdot \frac{l}{\xi} \cdot \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu}}{1 + e^{-2\nu} - 2 \cdot e^{-\nu} \cdot \cos \nu}} \end{aligned} \quad (4.157)$$

$$\arg\{\underline{Z}(\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}} = \arctan \frac{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu + \sin \nu)}{1 - e^{-\nu} \cdot (\cos \nu - \sin \nu)} \quad (4.158)$$

Die harmonischen Schwingungen mit den größten Frequenzen (siehe Tabelle 4.19) treten in der Stirn des Stoßstromes (siehe Abbildung 4.14), also z.B. im Zeitintervall zwischen dem Blitzeinschlag und dem Erreichen des Blitzstrom-Scheitelwertes auf. Es soll nun das Verhalten der Impedanzfunktion (siehe Gleichung (4.154) bis Gleichung (4.158)) in diesem Frequenzbereich etwas genauer analysiert werden.

Durch die Exponentialfunktionen in den Gleichungen (4.155) bis (4.158) gelten für hohe Frequenzen $f = \omega/2\pi$ die folgenden Näherungswerte (im Falle großer elektrischer Leitfähigkeiten und/oder großer absoluter Permeabilitäten sind diese Näherungen auch für kleinere Frequenzen gültig):

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\} \approx \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{l}{\sigma \cdot \xi} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \sigma}} \cdot \frac{l}{\xi} = k_1 \cdot \sqrt{\omega} \quad (4.159)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\} \approx \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}} \cdot \frac{l}{\sigma \cdot \xi} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \sigma}} \cdot \frac{l}{\xi} = k_1 \cdot \sqrt{\omega} \quad (4.160)$$

Mit:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\mu}{2 \cdot \sigma}} \cdot \frac{l}{\xi} = \text{const.} \quad (4.161)$$

Es gilt demzufolge (siehe Gleichung (4.159) und Gleichung (4.160)):

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\} = \operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\} \quad (4.162)$$

Weiters erhält man aus den Gleichungen (4.159) bis (4.162):

$$\begin{aligned} |\underline{Z}(\omega)| = Z(\omega) &= \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\sigma} \cdot \frac{l}{\xi}} = k_2 \cdot \sqrt{\omega} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\} \end{aligned} \quad (4.163)$$

Mit

$$k_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{l}{\xi}} = \sqrt{2} \cdot k_1 = \text{const.} \quad (4.164)$$

Und:

$$\arg\{\underline{Z}(\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \text{const.} \quad (4.165)$$

Die Ergebnisse (4.155) bis (4.158) werden nun anhand der nachfolgenden Diagramme veranschaulicht. Vertikale (siehe Abbildung 4.19) und horizontale (siehe Abbildung 4.20) Erdschichten werden dabei getrennt voneinander untersucht. Allen Beispielen wird überdies eine Leiterlänge von $l=20\text{m}$ zugrundegelegt.

Zudem werden die berechneten Kurven überwiegend als bezogene, d.h. als normierte Kennlinien dargestellt. Als Bezugsgrößen hierfür kommen die Beträge der Kreisfrequenzen aus der Tabelle 4.24 zur Anwendung.

b	0	1	2	3	m
ω_b in 1/s	1	100	10000	1000000	100^m

Tab. 4.24: Bezugskreisfrequenzen für die Normierung der Kennlinien

Es ist somit möglich, jeder einzelnen der folgenden normierten Kennlinien eine Schar von n Kurven mit den absoluten Größen gemäß den Gleichungen (4.166) bis (4.168) (alle bezogenen Größen sind durch Kleinschreibung gekennzeichnet) zuzuordnen. Die Beträge der bezogenen Größen können den entsprechenden Diagrammen (siehe unten) entnommen werden.

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\} = k_1 \cdot \sqrt{\omega} = k_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_b}} \cdot \sqrt{\omega_b} = k_1 \cdot \sqrt{\omega_{\text{norm}}} \cdot \sqrt{\omega_b} = \operatorname{re}\{\underline{Z}(\omega)\} \cdot \sqrt{\omega_b} \quad (4.166)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\} = k_1 \cdot \sqrt{\omega} = k_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_b}} \cdot \sqrt{\omega_b} = k_1 \cdot \sqrt{\omega_{\text{norm}}} \cdot \sqrt{\omega_b} = \operatorname{im}\{\underline{Z}(\omega)\} \cdot \sqrt{\omega_b} \quad (4.167)$$

$$|Z(\omega)| = Z(\omega) = k_2 \cdot \sqrt{\omega} = k_2 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_b}} \cdot \sqrt{\omega_b} = k_2 \cdot \sqrt{\omega_{norm}} \cdot \sqrt{\omega_b} = Z(\omega) \cdot \sqrt{\omega_b} \quad (4.168)$$

ω_b Bezugskreisfrequenz (siehe Tabelle 4.24)

ω_{norm} normierte (bezogene) Kreisfrequenz (siehe auch Abbildungen unten)

1. Für vertikale Erdschichten gilt (siehe Abbildung 4.47 bis Abbildung 4.54):

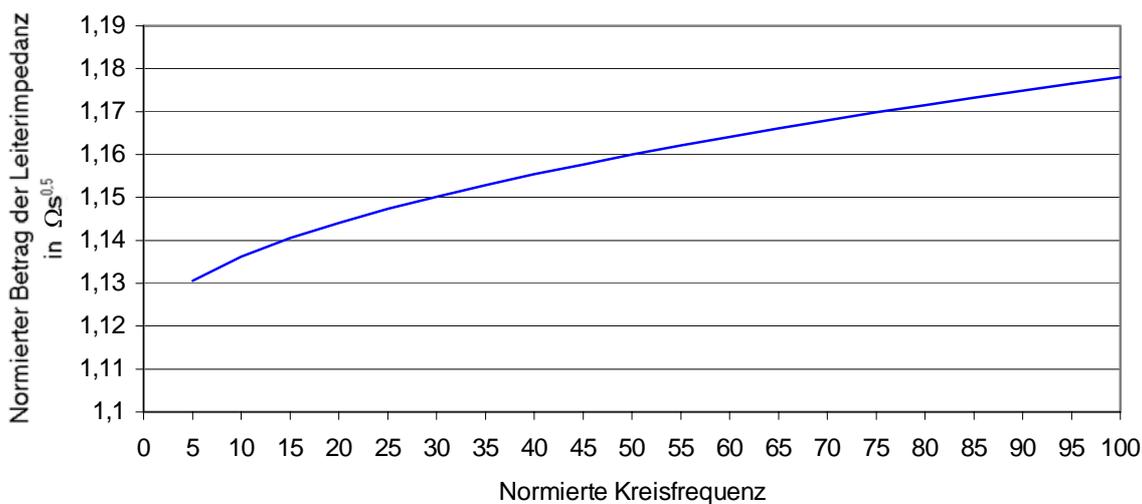


Abb. 4.47: Betrag der Leiterimpedanz (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, l=20m)

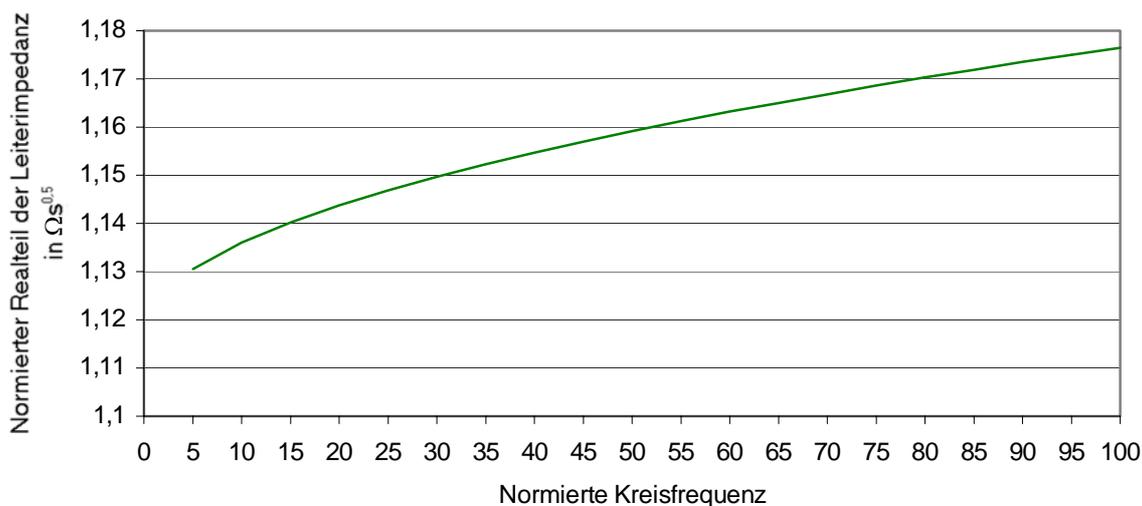


Abb. 4.48: Realteil der Leiterimpedanz (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, l=20m)

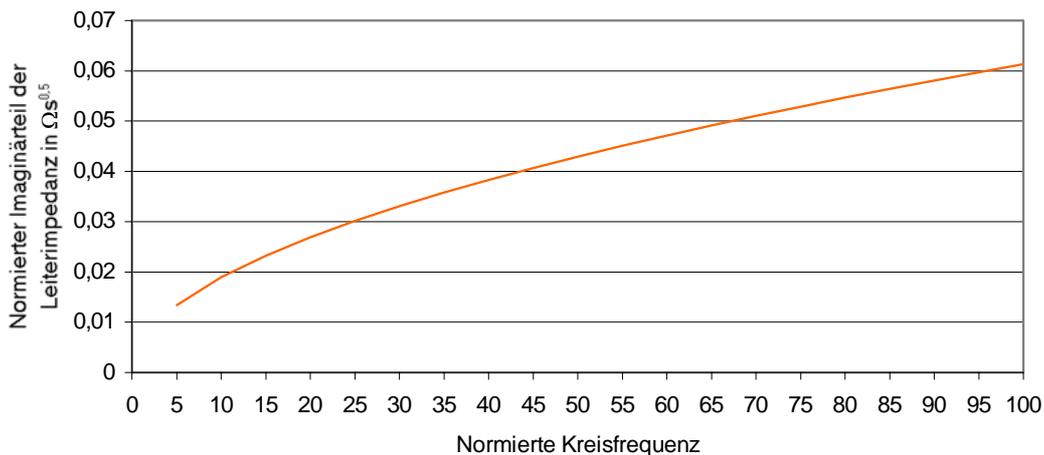


Abb. 4.49: Imaginärteil der Leiterimpedanz (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

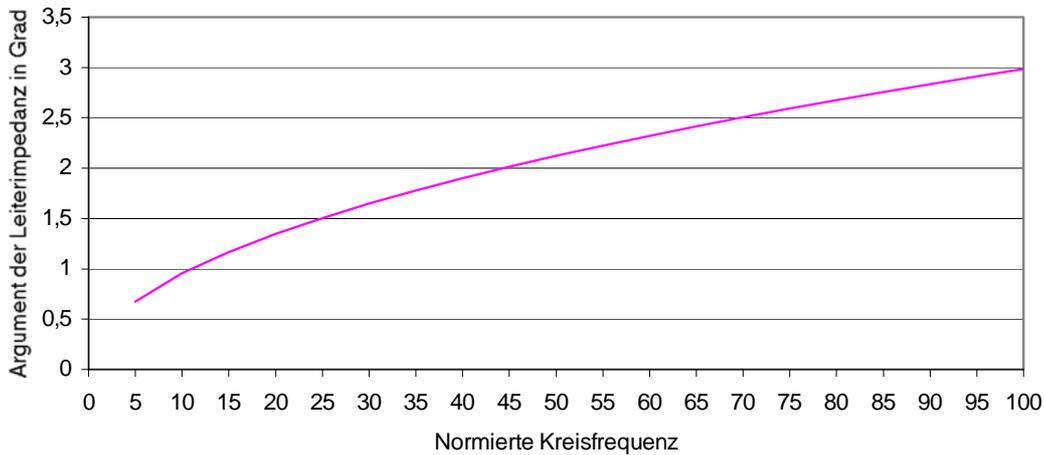


Abb. 4.50: Argument der Leiterimpedanz (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

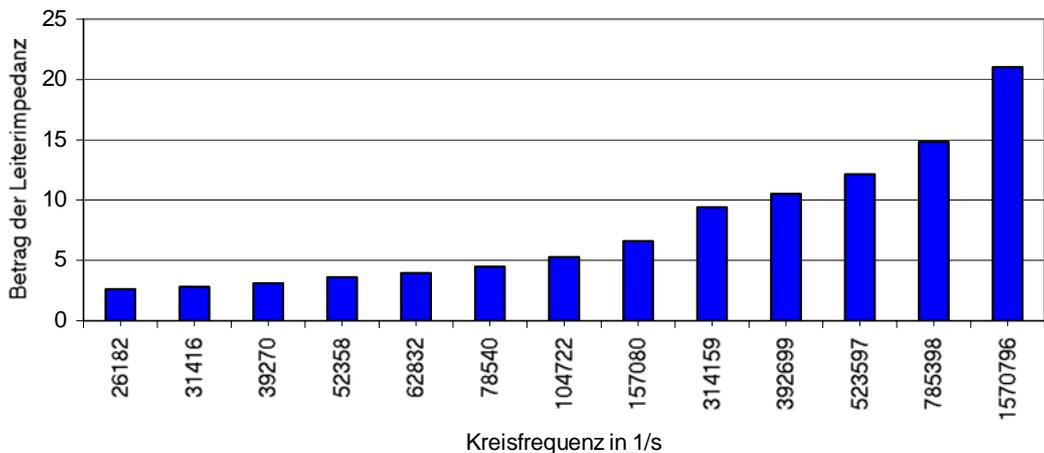


Abb. 4.51: Betrag der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

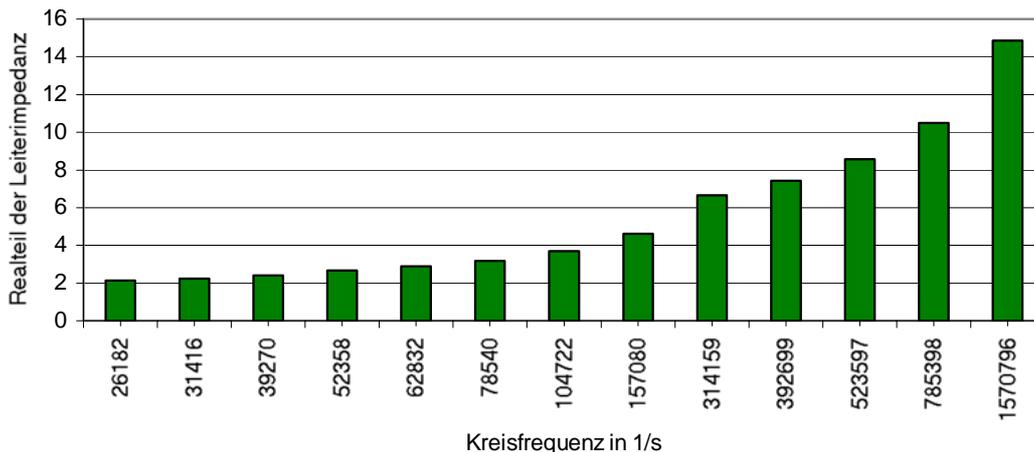


Abb. 4.52: Realteil der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

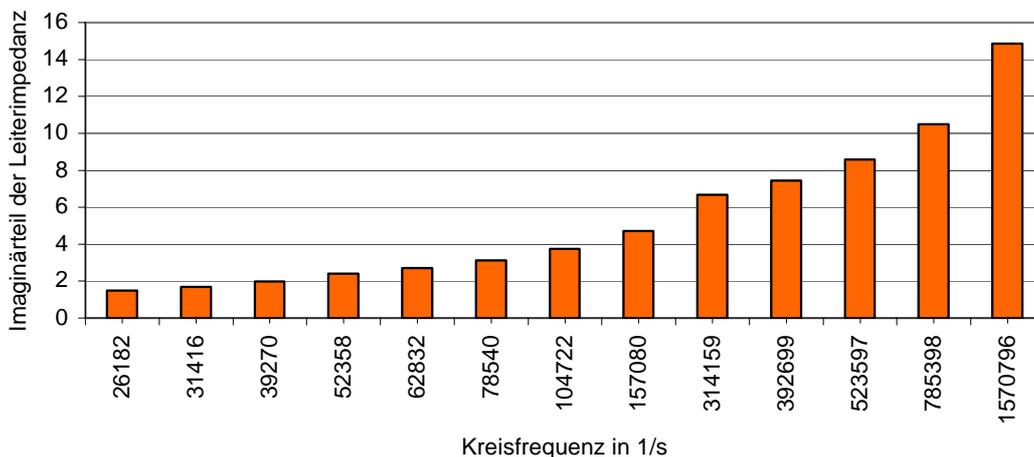


Abb. 4.53: Imaginärteil der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

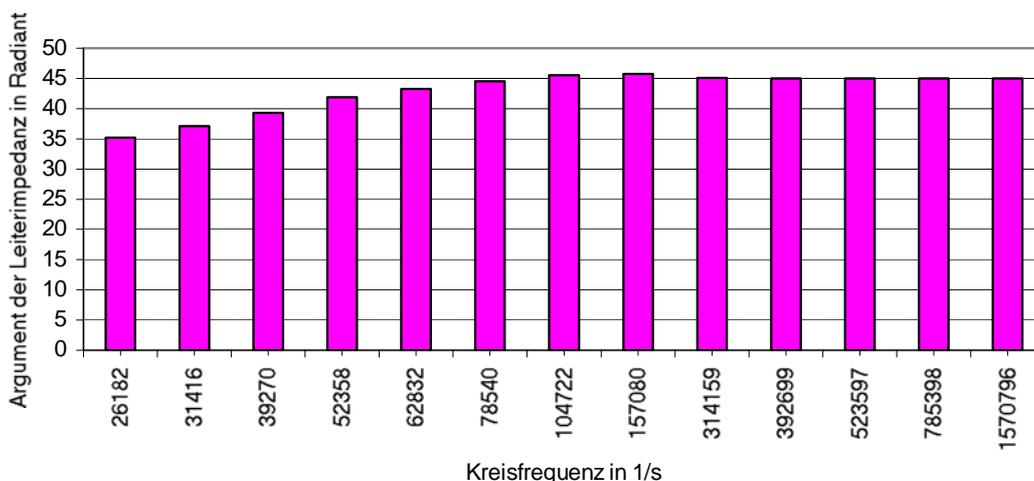


Abb. 4.54: Argument der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (vertikale Erdschicht gemäß Abbildung 4.19, $l=20m$)

2. Für horizontale Erdschichten gilt (siehe Abbildung 4.55 bis Abbildung 4.62):



Abb. 4.55: Betrag der Leiterimpedanz (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

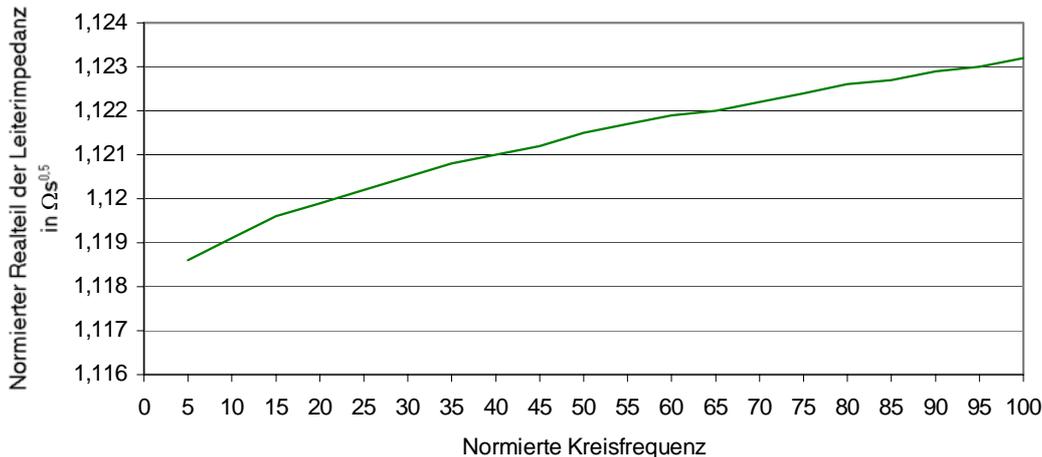


Abb. 4.56: Realteil der Leiterimpedanz (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

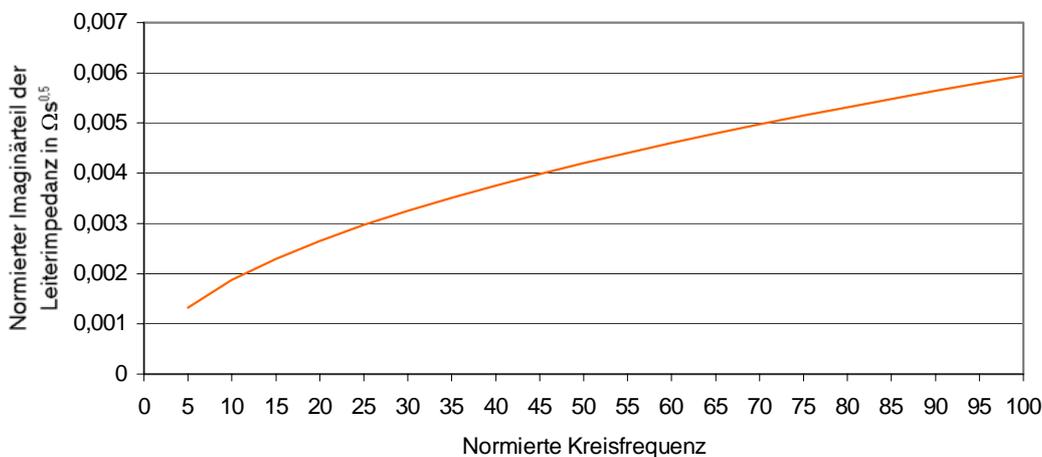


Abb. 4.57: Imaginärteil der Leiterimpedanz (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

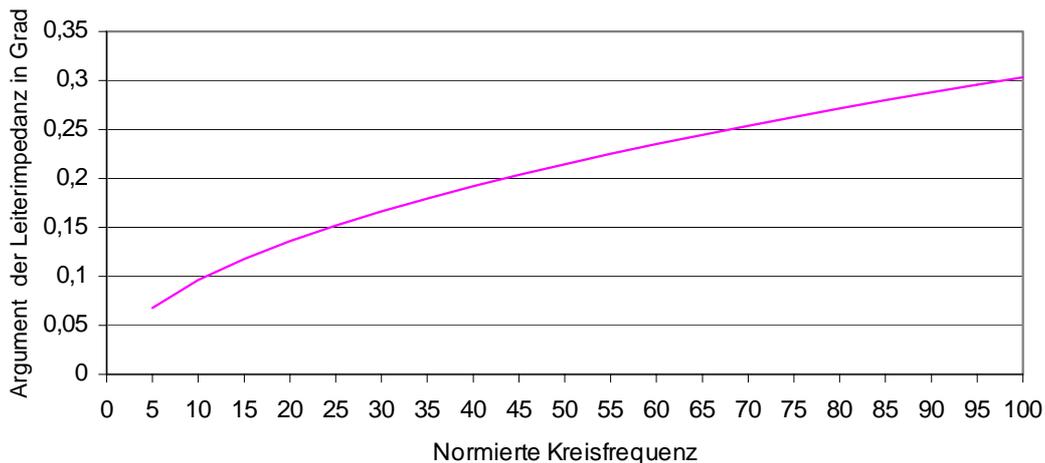


Abb. 4.58: Argument der Leiterimpedanz (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

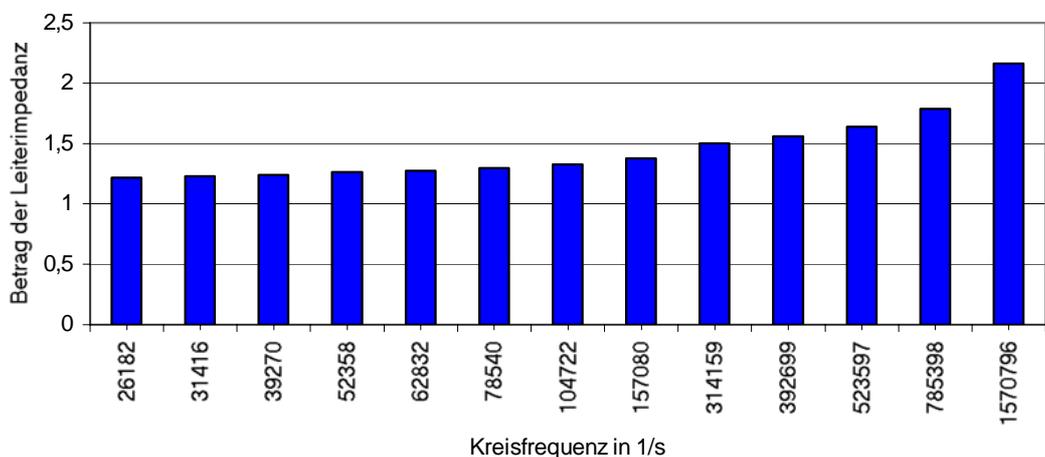


Abb. 4.59: Betrag der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

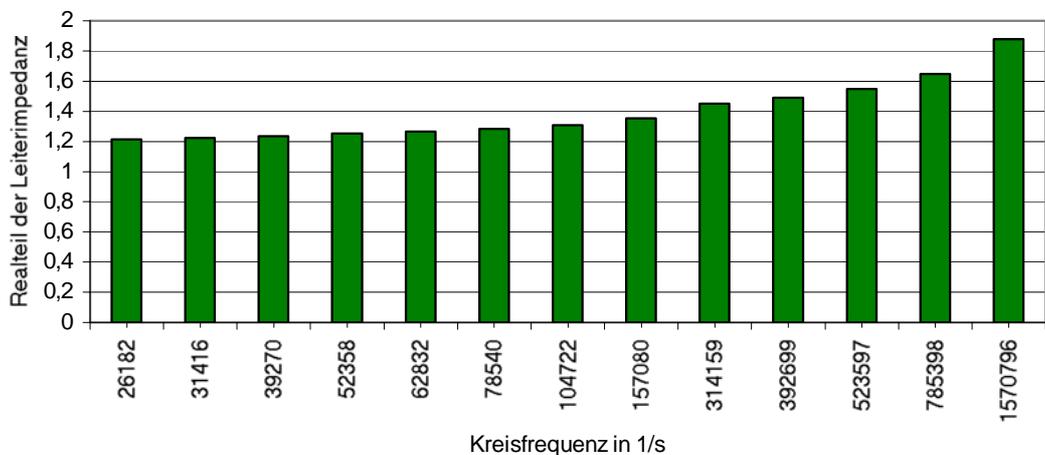


Abb. 4.60: Realteil der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20m$)

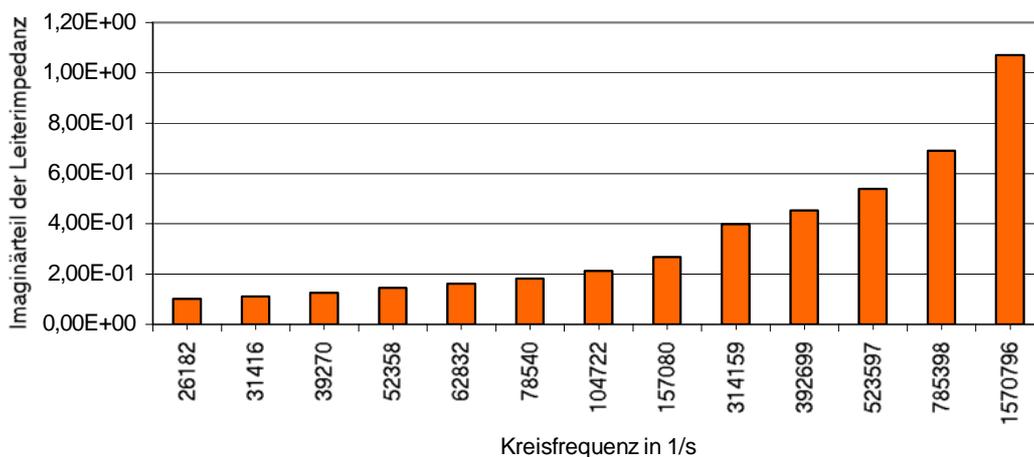


Abb. 4.61: Imaginärteil der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20\text{m}$)

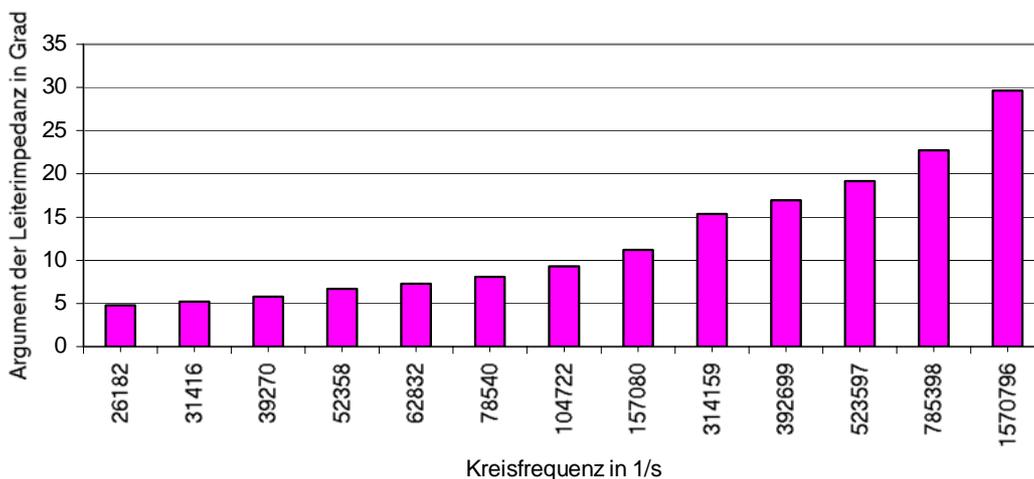


Abb. 4.62: Argument der Leiterimpedanz für die Frequenzen aus der Tabelle 4.19 (horizontale Erdschicht gemäß Abbildung 4.20, $l=20\text{m}$)

Wie aus den Abbildungen 4.47 bis 4.54 (Diagramme für vertikale Erdschichten) und 4.55 bis 4.62 (Diagramme für horizontale Erdschichten) ersichtlich wird, sind die Impedanzwerte (Betrag, Realteil und Imaginärteil der Impedanz) der vertikalen Erdschicht (siehe Abbildung 4.19) wesentlich größer als jene der horizontalen Erdschicht (siehe Abbildung 4.20).

Die Erklärung dafür ist die folgende:

Den Gleichungen (4.136) und (4.142) kann entnommen werden, daß die elektrische Stromdichte im Leiter mit wachsendem y exponentiell abnimmt. Infolgedessen ist also die Stromdichte bei $y=0$ maximal und bei $y=\eta$ minimal, sodaß nahezu der gesamte Strom an jener Begrenzungsfläche des Leiters fließt, für die $y=0$ gilt (Erdoberfläche, siehe Abbildung 4.20). Bei der vertikalen Erdschicht (siehe Abbildung 4.19) ist diese Fläche um ein Vielfaches kleiner als die entsprechende Fläche der horizontalen Erdschicht (siehe Abbildung 4.20). Durch die kleinere Oberfläche zur Ausbreitung des elektrischen Strömungsfeldes ist nun die Impedanz der vertikalen Schicht die größere.

Eine einfache mathematische Darstellung dieses Sachverhaltes kann aus den Gleichungen (4.159) bis (4.163) ermittelt werden. Man erhält:

$$\frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{stehend}}}{\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \quad (4.169)$$

$$\frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{stehend}}}{\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \quad (4.170)$$

$$\frac{|\underline{Z}(\omega)|_{\text{stehend}}}{|\underline{Z}(\omega)|_{\text{liegend}}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \quad (4.171)$$

Aus den Abbildungen 4.19 und 4.20 wird ersichtlich:

$$\xi_{\text{stehend}} < \xi_{\text{liegend}} \quad (4.172)$$

Somit ergibt sich aus den Formeln (4.169) bis (4.171):

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{stehend}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}} > \operatorname{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}} \quad (4.173)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{stehend}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}} > \operatorname{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}_{\text{liegend}} \quad (4.174)$$

$$|\underline{Z}(\omega)|_{\text{stehend}} = \frac{\xi_{\text{liegend}}}{\xi_{\text{stehend}}} \cdot |\underline{Z}(\omega)|_{\text{liegend}} > |\underline{Z}(\omega)|_{\text{liegend}} \quad (4.175)$$

Entsprechend der Gleichung (4.175) ist es also nicht vorteilhaft, Erder in tiefe Schichten mit einer großen elektrischen Leitfähigkeit (kleiner spezifischer Erdwiderstand) einzubringen. Um kleine Ausbreitungswiderstände bzw. Stoßerdungswiderstände zu erhalten, ist es vielmehr zielführend, die Erder in gut leitfähige oberflächennahe Erdschichten einzubetten. Wie bereits festgestellt wurde (siehe oben sowie Abschnitt 4.3.1) ist der Grund dafür die Verdrängung des elektrischen Strömungsfeldes an die Erdoberfläche (siehe auch [3, S.198-200] und [128, S.361-362]).

4.4 BERECHNUNG DER STOSSTROMAUSBREITUNG IN LEITERN MIT RECHTECKIGEM QUERSCHNITT

4.4.1 Allgemeines

Im Gegensatz zu elektrischen Leitern mit kreisförmigem Querschnitt ist die analytische Berechnung des Skineffektes (Hauteffekt, Stromverdrängung) in Leitern mit einer anderen Querschnittsform (z.B. elliptisch, rechteckig, ...) mathematisch sehr aufwendig. Im allgemeinen führt die Berechnung der elektrischen Stromdichte innerhalb eines elektrischen Leiters auf eine partielle Differentialgleichung (siehe z.B. Gleichung (4.34) im Abschnitt 4.2). Eine eindeutige Lösung dieser Gleichung kann nur dann gefunden werden, wenn die Randbedingungen bekannt sind. Im Fall eines Leiters mit rechteckigem Querschnitt ist die Stromdichte auf dem Rand jedoch nicht konstant (siehe [120,S.241]). Aufgrund dieser Tatsache können keine exakten Angaben über die Randbedingungen gemacht werden (willkürliche Annahmen führen nur zu einer Näherungslösung). Nun besteht aber die Möglichkeit, einer Randwertaufgabe dieser Natur aus dem Weg zu gehen, indem man eine dem Stromverdrängungsproblem (auch Wirbelstromproblem genannt, siehe dazu Abschnitt 3.2.1) entsprechende Integralgleichung formuliert (siehe Abschnitt 4.4.2.1). Das Wissen über die Randwerte ist somit nicht mehr erforderlich (siehe [120,S.241]).

4.4.2 Die Stromverdrängungsintegralgleichung und deren iterative Lösung

Das hier beschriebene Verfahren beruht auf dem folgenden physikalischen Modell, das mit den Worten von W. Rogowski wie folgt beschrieben werden kann (siehe [120,S.242-243] und vergleiche mit Abschnitt 4.1.1):

„Wir haben uns einer Darstellung angeschlossen, die die übliche gleichförmige Stromverteilung als Ausgangspunkt nimmt, das zugehörige magnetische Feld bestimmt, aus diesem den Wirbelstrom berechnet und schließlich die resultierende Strömung aus Wirbelströmung und Ausgangsströmung zusammensetzt. Hiermit hat sie aber im allgemeinen ihr Ziel noch nicht erreicht. Starke Wirbelströme werden das magnetische Feld beeinflussen (Rückwirkung). Der eingeschlagene Weg verlangt somit, daß man für die oben gefundenen Wirbelströme - man nennt sie Wirbelströme erster Ordnung - das zugehörige magnetische Feld aufsucht und aus diesem wiederum die induzierten Wirbelströme, die Wirbelströme zweiter Ordnung, ableitet. Liegt der Fall bösartig, so müssen wir in derselben Weise fortfahren und noch die Wirbelströme dritter, vierter und höherer Ordnung berücksichtigen. Erst die Summe von Ausgangsströmung und den Wirbelströmungen sämtlicher Ordnungen ergibt die tatsächlich sich einstellende, physikalisch allein vorhandene und gesuchte elektrische Strömung j bei Wechselstrom. Zur Bestimmung des magnetischen Feldes müßten wir bei Wechselstrom analog das Ausgangsfeld (Gleichstromfeld) und die Felder der Wirbelströme verschiedener Ordnung zusammenfassen.“

Nun soll die mathematische Formulierung des oben genannten Sachverhaltes dargestellt werden.

Das Prinzip der iterativen Lösungsmethode wird zunächst am Beispiel des kreiszylindrischen Leiters (siehe Abbildung 4.63) und am Beispiel der unbegrenzten ebenen Platte (siehe Abbildungen 4.64 und 4.66) erklärt. In weiterer Folge wird dieses Verfahren auf den konkreten Fall des elektrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt angewendet.

Die Ausgangsgleichungen für die Iteration im Leiter mit kreisförmigem Querschnitt lauten also (siehe [149,S.218-219]):

$$H(r) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r J(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho \quad (4.176)$$

Hmagnetische Erregung (magnetische Feldstärke)
 Jelektrische Stromdichte
 ρ Integrationsvariable (siehe Abbildung 4.63)
 rLeiterradius (siehe Abbildung 4.63)
 cLichtgeschwindigkeit

und:

$$\mathbf{J}(\rho) = \mathbf{J}(0) + \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \mathbf{H}(r) \cdot dr \quad (4.177)$$

rIntegrationsvariable (siehe Abbildung 4.63)

ρRadius innerhalb des Leiters (siehe Abbildung 4.63)

ω Kreisfrequenz

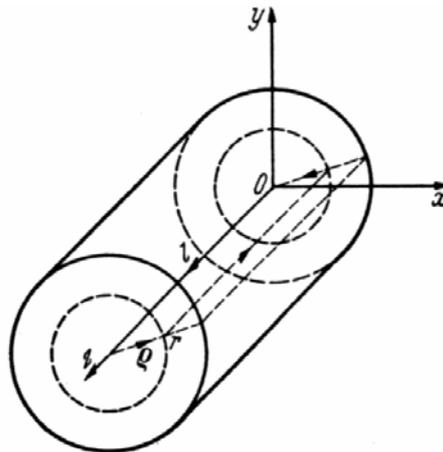


Abb. 4.63: Elektrischer Leiter mit kreisförmigem Querschnitt
(nach [120,S.243])

Werden die einzelnen Schritte der Iteration mit ν bezeichnet, so gilt:

$$\mathbf{H}_\nu(r) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r \mathbf{J}_\nu(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho \quad (4.178)$$

und:

$$\mathbf{J}_{\nu+1}(\rho) = \mathbf{J}(0) + \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \mathbf{H}_\nu(r) \cdot dr \quad (4.179)$$

mit:

$$\nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4.180)$$

Die elektrische Stromdichte

$$\mathbf{J}(0) \equiv \mathbf{J}|_{\nu=0} = \mathbf{J}_0 \quad (4.181)$$

ist eine Konstante, deren Betrag zunächst nicht wichtig ist. Ausschlaggebend für den Fehler in den Ergebnissen (4.178) und (4.179) ist der Wert ν (Anzahl der Iterationsschritte). Mit steigendem ν wird der Fehler kleiner (siehe [120,S.243-244]).

Die magnetische Erregung nach Gleichung (4.178) und die elektrische Stromdichte nach Gleichung (4.179) stellen jeweils die resultierende Größe aus all jenen „Ordnungen“ dar, die bis zum Iterationsschritt ν vorhanden sind (siehe physikalisches Modell von Rogowski am Anfang des Abschnittes 4.4.2.1 bzw. [120,S.242-243]).

Die einzelnen Ordnungen \mathcal{J}_v der Wirbelstromdichten und die zugehörigen Magnetfelder \mathbf{H}_v können demzufolge durch die Bildung der Differenzen in der folgenden Form ermittelt werden:

$$\mathbf{H}_v(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_v(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_{v-1}(\mathbf{r}) \quad (4.182)$$

und:

$$\mathcal{J}_v(\rho) = \mathcal{J}_v(\rho) - \mathcal{J}_{v-1}(\rho) \quad (4.183)$$

mit:

$$v = 1, 2, 3, \dots \quad (4.184)$$

Es gilt hierbei:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 = \text{const.} \quad (4.185)$$

und:

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_0 = \text{const.} \quad (4.186)$$

Setzt man nun die Gleichungen (4.182) bis (4.186) in die Gleichungen (4.178) und (4.179) ein, so erhält man für die einzelnen „Ordnungen“:

$$\mathbf{H}_v(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r \mathcal{J}_v(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho \quad (4.187)$$

und:

$$\mathcal{J}_{v+1}(\rho) = \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \mathbf{H}_v(\mathbf{r}) \cdot dr \quad (4.188)$$

mit:

$$v = 0, 1, 2, \dots \quad (4.189)$$

Die tatsächliche iterative Berechnung (Startwert ist Gleichung (4.186), siehe auch Gleichung (4.181)) der einzelnen Anteile gestaltet sich jetzt sehr einfach (siehe auch [120, S.244]):

Schritt v=0:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r \mathcal{J}_0 \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{r}{2} \cdot \mathcal{J}_0 \quad (4.190)$$

und:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\rho) &= \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \mathbf{H}_0 \cdot dr = \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{r}{2} \cdot \mathcal{J}_0 \cdot dr = \\ &= \frac{4\pi \cdot j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c^2} \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot \mathcal{J}_0 \end{aligned} \quad (4.191)$$

Wie sich später noch zeigen wird, ist es sinnvoll den Faktor

$$\alpha^2 := \frac{4\pi \cdot j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c^2} \quad (4.192)$$

in die Rechnung einzuführen.

Die Gleichung (4.191) kann dann wie folgt formuliert werden (siehe dazu [120,S.244]):

$$\mathcal{J}_1(\rho) = \alpha^2 \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot J_0 = \alpha^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\rho^2}{(1!)^2} \cdot J_0 \quad (4.193)$$

Schritt v=1:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(r) &= \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r \mathcal{J}_1(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho = \\ &= \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{\rho=0}^r \alpha^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\rho^2}{(1!)^2} \cdot J_0 \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{4\pi}{c} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{r^3}{(1!)^2 \cdot 4} \cdot J_0 \end{aligned} \quad (4.194)$$

und:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(\rho) &= \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \mathcal{H}_1(r) \cdot dr = \\ &= \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{r=0}^{\rho} \frac{4\pi}{c} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{r^3}{(1!)^2 \cdot 4} \cdot J_0 \cdot dr = \alpha^4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\rho^4}{(2!)^2} \cdot J_0 \end{aligned} \quad (4.195)$$

Man kann nun in dieser Weise fortfahren (siehe [120,S.244]) und erhält schließlich für die resultierende Stromdichte (Addition aller „Ordnungen“) im Leiter:

$$\mathcal{J}(\rho) = J_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \rho^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{\alpha^4 \cdot \rho^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\alpha^6 \cdot \rho^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \right) \quad (4.196)$$

Die Größe J_0 kann über die Stromstärke im Leiter berechnet werden (siehe dazu Abschnitt 4.2.1).

Durch die Anwendung des Ohmschen Gesetzes (siehe Gleichung (4.6) oder Gleichung (2.68)) auf die Gleichung (4.196) ergibt sich für die elektrische Feldstärke im Leiter:

$$\begin{aligned} E(\rho) &= \frac{\mathcal{J}(\rho)}{\sigma} = \frac{J_0}{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \rho^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{\alpha^4 \cdot \rho^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\alpha^6 \cdot \rho^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \right) = \\ &= E_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \rho^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{\alpha^4 \cdot \rho^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\alpha^6 \cdot \rho^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.197)$$

σelektrische Leitfähigkeit

Die Ergebnisse (4.196) und (4.197) wurden auch im Abschnitt 4.2.1 mit Hilfe der Besselschen Differentialgleichung ermittelt (siehe Gleichung (4.35) bis Gleichung (4.45)). Diese Tatsache lässt den

Schluß zu, daß das iterative Lösungsverfahren auch bei anderen Leiterquerschnitten zum richtigen Ergebnis führt.

Nimmt man, wie oben bereits erwähnt wurde, etwa das Beispiel der unendlich ausgedehnten Platte (siehe Abbildungen 4.64 und 4.66), so ergeben sich die nachfolgenden Zusammenhänge (die ausführliche Berechnung ist in [149,S.222-227] zu finden).

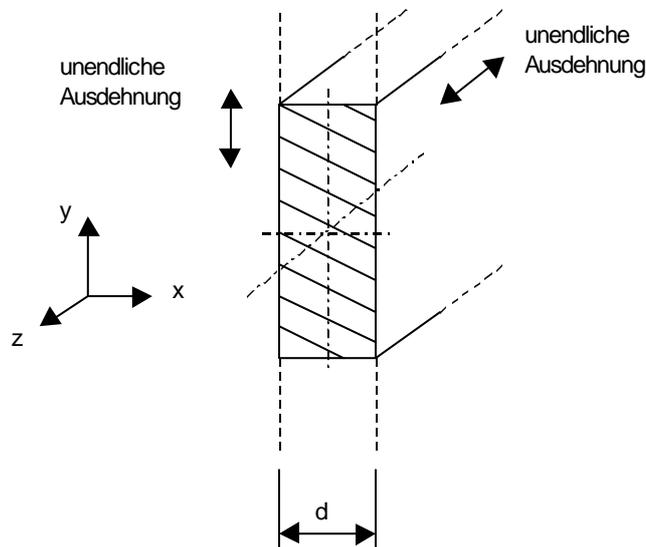


Abb. 4.64: Unbegrenzte ebene Platte

Geht man von einer konstanten absoluten Permeabilität und einer konstanten elektrischen Leitfähigkeit aus, dann läßt sich für die elektrische Stromdichte und die magnetische Erregung (magnetische Feldstärke) der folgende Zusammenhang berechnen (setzt man forthin harmonische Zeitfunktionen voraus, so kann die komplexe Wechselstromrechnung angewendet werden, siehe dazu [20,S.169-172], [21,S.402-403], [23,S.121-122], [27,S.457-458], [85,S.18-21], [104,S.65-72] und [133,S.205-206]):

$$\underline{J}(\xi) = \underline{J}(0) + \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{x=0}^{\xi} \underline{H}(x) \cdot dx \quad (4.198)$$

J.....elektrische Stromdichte
H.....magnetische Erregung (magnetische Feldstärke)
 σelektrische Leitfähigkeit
 μabsolute Permeabilität
 ωKreisfrequenz
c.....Lichtgeschwindigkeit
x.....Ortskoordinate

Da es sich im vorliegenden Fall um einen reinen Leitungsstrom (bewegte elektrische Ladungen) handelt, gilt für die elektrische Stromdichte im Leiter (siehe dazu Gleichung (4.198)):

$$\underline{J}(\xi) = \underline{J}_l(\xi) \quad (4.199)$$

sowie

$$\underline{J}(0) = \underline{J}_l(0) \quad (4.200)$$

Analog zu den Gleichungen (4.178) und (4.179) können nun die Formeln für das iterative Verfahren angegeben werden. Wie schon beim Leiter mit kreisförmigem Querschnitt (siehe oben) wird ab hier auf die Unterstreichung der zeitabhängigen Größen (elektrische Stromdichte, magnetische Erregung, ...) verzichtet. Diese Maßnahme hat keinen Einfluß auf das Prinzip der Iteration, sie dient lediglich einer übersichtlichen Darstellung. De facto sind alle Formeln natürlich nur für die komplexe Schreibweise gültig.

Die Bestimmung der resultierenden Stromdichte in der unbegrenzten ebenen Platte (siehe Abbildung 4.64), d.h. die Berechnung und die anschließende Addition aller ihrer „Ordnungen“ gemäß dem physikalischen Modell von Rogowski (siehe Anfang Abschnitt 4.4.2.1 und [120,S.242-243]) erfolgt ganz genau so, wie schon im Fall des elektrischen Leiters mit kreisförmigem Querschnitt (siehe Gleichung (4.182) bis Gleichung (4.197)). Es werden daher nur mehr die wichtigsten Rechenschritte expliziert.

Die einzelnen Ordnungen \mathbf{J}_ν der Wirbelstromdichten und die zugehörigen Magnetfelder \mathbf{H}_ν berechnen sich im Sinne der Gleichungen (4.182) und (4.183) zu (siehe auch [120,S.244]):

$$\mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \int_{\xi=0}^x \mathbf{J}_\nu(\xi) \cdot d\xi \quad (4.201)$$

$$\mathbf{J}_{\nu+1}(\xi) = \frac{j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c} \cdot \int_{x=0}^{\xi} \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) \cdot dx \quad (4.202)$$

mit:

$$\nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4.203)$$

Führt man nun die einzelnen Iterationsschritte ($\nu=0,1,2, \dots$) aus und bildet die Summe der einzelnen Ergebnisse, so resultiert daraus für die gesamte Stromdichte im Leiter (siehe auch [120,S.245]):

$$\mathbf{J}(\xi) = \mathbf{J}_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \xi^2}{2!} + \frac{\alpha^4 \cdot \xi^4}{4!} + \frac{\alpha^6 \cdot \xi^6}{6!} + \dots \right) = \mathbf{J}_0 \cdot \cosh(\alpha \cdot \xi) \quad (4.204)$$

Dabei ist:

$$\alpha^2 := \frac{4\pi \cdot j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c^2} \quad (4.205)$$

Die Konstante \mathbf{J}_0 kann über die Gesamtstromstärke in der Platte bestimmt werden (siehe hierzu auch Abschnitt 4.2.1).

Die elektrische Feldstärke im Leiterinneren erhält man mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes (siehe Gleichung (4.6) oder Gleichung (2.68)) aus der Gleichung (4.204) in der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi) &= \frac{\mathbf{J}(\xi)}{\sigma} = \frac{\mathbf{J}_0}{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \xi^2}{2!} + \frac{\alpha^4 \cdot \xi^4}{4!} + \frac{\alpha^6 \cdot \xi^6}{6!} + \dots \right) = \\ &= \frac{\mathbf{J}_0}{\sigma} \cdot \cosh(\alpha \cdot \xi) = \mathbf{E}_0 \cdot \cosh(\alpha \cdot \xi) \end{aligned} \quad (4.206)$$

σelektrische Leitfähigkeit

Die Lösungen (4.204) und (4.206) (siehe dazu auch [23,S.86] und [118,S.592-595]) ergeben sich ebenfalls aus der entsprechenden Differentialgleichung (Gleichung (4.24) bzw. Gleichung (4.91)).

Im Falle komplizierter geometrischer Strukturen der elektrischen Leiter wird die Berechnung der einzelnen Ordnungen der elektrischen Stromdichte und der magnetischen Erregung mittels der beschriebenen Methode sehr aufwendig (eine Lösungsmöglichkeit ist die Reihenentwicklung der Integranden in den Maxwell'schen Gleichungen) oder kann erst gar nicht durchgeführt werden.

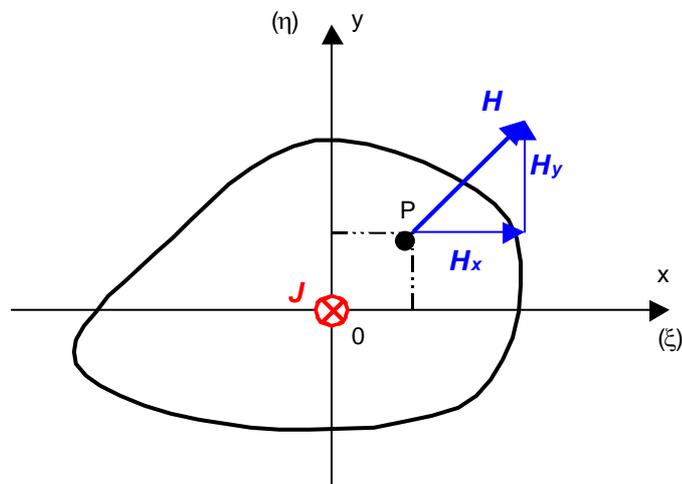


Abb. 4.65: Elektrischer Leiter mit beliebiger Querschnittsform (Projektion auf die x-y-Ebene)

Betrachtet man z.B. einen Leiter mit einer willkürlich gewählten Querschnittsform (siehe Abbildung 4.65), dann lautet das allgemeingültige Ergebnis für die elektrische Stromdichte unter der Voraussetzung eines zu den Koordinatenachsen symmetrischen Querschnittes:

Nullte Ordnung ($\nu=0$):

$$J_0 = J|_{\nu=0} = J_0 = \text{const.} \quad (4.207)$$

Die Konstante J_0 (siehe auch Gleichung (4.186)) kann über die Gesamtstromstärke im Leiter bestimmt werden (siehe z.B. Abschnitt 4.2.1).

Erste Ordnung ($\nu=1$):

$$J_1 = A \cdot J_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} + a_{02}^{(1)} \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\theta + a_{04}^{(1)} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4\theta + a_{06}^{(1)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 6\theta + \dots \\ + a_{20}^{(1)} \cdot \rho^2 \end{array} \right\} \quad (4.208)$$

Zweite Ordnung ($\nu=2$):

$$J_2 = A^2 \cdot J_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} + a_{02}^{(2)} \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\theta + a_{04}^{(2)} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4\theta + a_{06}^{(2)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 6\theta + \dots \\ + a_{22}^{(2)} \cdot \rho^4 \cdot \cos 2\theta + a_{24}^{(2)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 4\theta + \dots \\ + a_{40}^{(2)} \cdot \rho^4 \end{array} \right\} \quad (4.209)$$

Dritte Ordnung ($\nu=3$):

$$J_3 = A^3 \cdot J_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} + a_{02}^{(3)} \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\theta \quad + a_{04}^{(3)} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4\theta \quad + a_{06}^{(3)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 6\theta + \dots \\ \quad \quad \quad + a_{22}^{(3)} \cdot \rho^4 \cdot \cos 2\theta \quad + a_{24}^{(3)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 4\theta + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + a_{42}^{(3)} \cdot \rho^6 \cdot \cos 2\theta + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + a_{60}^{(3)} \cdot \rho^6 \end{array} \right\} \quad (4.210)$$

usw.

Es ist dabei:

$$A = \frac{8j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c^2} \quad (4.211)$$

Das Resultat der iterativen Lösungsmethode für einen Leiter mit rechteckigem Querschnitt (siehe Abbildung 4.66) lautet wie folgt (da die ausführliche, sehr aufwendige und umfangreiche Berechnung bereits in schriftlicher Form verfügbar ist, wird hier diesbezüglich auf die Literatur verwiesen, siehe also [120,S.257-262]):

Die geometrische Form des Leiters (siehe Abbildung 4.66) kann beschrieben werden durch (siehe [120,S.258]):

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} \quad (4.212)$$

für

$$0 \leq \theta \leq \delta \quad (4.213)$$

und:

$$\rho = \frac{b}{\sin \theta} \quad (4.214)$$

für

$$\delta \leq \theta \leq \pi/2 \quad (4.215)$$

sowie:

$$a = d \cdot \cos \delta \quad (4.216)$$

$$b = d \cdot \sin \delta \quad (4.217)$$

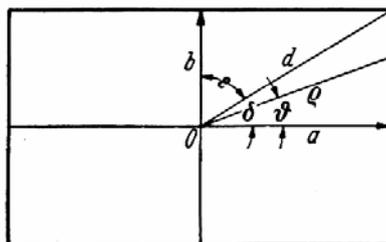


Abb. 4.66: Elektrischer Leiter mit rechteckigem Querschnitt
(nach [120,S.258])

Mit dem Faktor (dieser ergibt sich aus den Materialkennwerten für Kupfer, siehe [120,S.261])

$$A = \frac{8j\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{c^2} = 4,57 \cdot 10^{-3} \cdot j\omega \tag{4.218}$$

(siehe Gleichung (4.211)) erhält man für die ersten fünf „Ordnungen“ der elektrischen Stromdichte das Ergebnis gemäß der Abbildung 4.67 (siehe auch [120,S.261]).

Fünf Ordnungen der Stromdichte bei quadratischem Leiterquerschnitt (halbe Diagonale $d = 1$).
 $(A = \frac{8\sigma i \omega}{c^2}; \text{ für Kupfer } A = 4,57 \cdot 10^{-3} i \omega.)$

$j_1^* = A \cdot j_0$		$+0,041667e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,002976e^{\phi} \cos 8\phi$		$+0,000758e^{12\phi} \cos 12\phi$		$-0,000298e^{16\phi} \cos 16\phi \dots$
		$+0,392699e^{\phi}$						
$j_2^* = A^2 \cdot j_0$		$+0,007782e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,001069e^{\phi} \cos 8\phi$		$+0,000271e^{12\phi} \cos 12\phi$		$-0,000106e^{16\phi} \cos 16\phi \dots$
			$+0,003272e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,000136e^{12\phi} \cos 8\phi$		$+0,000023e^{16\phi} \cos 12\phi$	\dots
$j_3^* = A^3 \cdot j_0$		$+0,000088e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,000012e^{\phi} \cos 8\phi$		$+0,000012e^{12\phi} \cos 12\phi$		$-0,000008e^{16\phi} \cos 16\phi \dots$
			$+0,000611e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,000047e^{12\phi} \cos 8\phi$		$+0,000008e^{16\phi} \cos 12\phi$	\dots
$j_4^* = A^4 \cdot j_0$				$+0,000107e^{\phi} \cos 4\phi$		$-0,000003e^{12\phi} \cos 8\phi$		$+0,000000e^{16\phi} \cos 12\phi \dots$
				$+0,001682e^{\phi}$				
$j_5^* = A^5 \cdot j_0$						$+0,000000e^{12\phi} \cos 12\phi$		$-0,000000e^{16\phi} \cos 16\phi \dots$
						$+0,000000e^{16\phi} \cos 12\phi$		\dots

Abb. 4.67: Tabelle für Ergebnis der elektrischen Stromdichte (nach [120,S.261])

Für die gesamte Stromdichte gilt demzufolge:

$$J = \sum_{v=0}^n J_v = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \dots \tag{4.219}$$

- J_v einzelne „Ordnung“ der elektrischen Stromdichte
- J gesamte elektrische Stromdichte
- v Iterationsschritt ($v=0, 1, 2, \dots$)

Dieses Resultat für die elektrische Stromdichte (siehe Abbildung 4.67) hat noch die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es auch die Lösung für den kreisförmigen Querschnitt beinhaltet (der betreffende Kreis muß dabei vollkommen im rechteckförmigem Querschnitt enthalten sein). Gemeint sind damit die reinen Potenzen von ρ (die sogenannten Sonderglieder, siehe [120,S.256] sowie [124,S.613]) in den einzelnen „Ordnungen“ der Stromdichte.

Im vorliegenden Fall würde also das Ergebnis für den kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius $r=b$ (siehe Abbildung 4.66) lauten:

$$J = J_0 + A \cdot J_0 \cdot (0,392699\rho^2 + 0,038553\rho^4 + 0,001682\rho^6 + 0,000041\rho^8 + 0,000001\rho^{10} + \dots)$$

(4.220)

Durch einen Vergleich mit der ermittelten Stromdichte entsprechend der Gleichung (4.196) respektive der Gleichung (4.45) kann man sich von der Richtigkeit des Berechnungsergebnisses (4.220) überzeugen.

Alle anderen Terme im Ergebnis gemäß der Abbildung 4.67 (rechteckiger Leiterquerschnitt) sind die Folge der Abweichung von der kreisförmigen Querschnittsfläche, sie können sozusagen als Korrekturglieder betrachtet werden, die natürlich auch bei allen anderen allgemeinen Querschnittsformen auftreten (siehe [120,S.268] und [124,S.614]).

4.4.3 Berechnung der Leiterimpedanz

In [124,S.611-617] wird zur Berechnung des komplexen Wechselstromwiderstandes eines elektrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt (siehe Abbildung 4.68) ein Verfahren vorgestellt, bei dem auch die im Abschnitt 4.4.2 angegebene Methode zur iterativen Lösung der Stromverdrängungsintegralgleichung (siehe dazu auch [120,S.241-268]) zur Anwendung kommt.

Man rechnet, wie gewohnt, mit einer sinusförmigen Zeitabhängigkeit, also mit der komplexen Schreibweise (symbolische Methode, komplexe Wechselstromrechnung, siehe [20,S.169-174], [21,S.402-403], [23,S.121-122], [27,S.457-458], [85,S.18-21] und [104,S.65-72]).

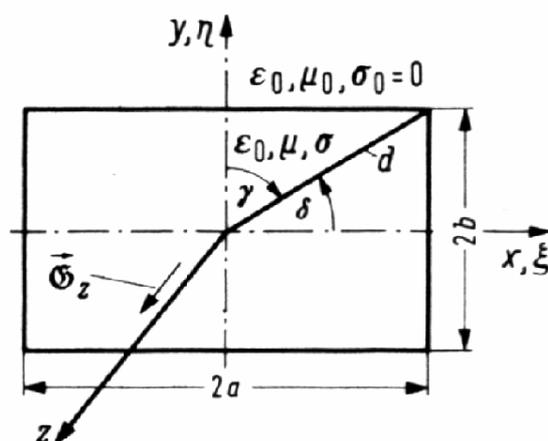


Abb. 4.68: Leiter mit rechteckigem Querschnitt
(Stromdichte \vec{S}_z , nach [124,S.612])

Nun besteht die Möglichkeit, den komplexen Wechselstromwiderstand \underline{Z} über die Leistungsbilanz im betrachteten Feldvolumen (also im Leitervolumen) zu bestimmen.

Nach dem Satz von Poynting (siehe [118,S.387], [23,S.18], [20,S.489], [24,S.136], [27,S.480-483], [142,S.68-70], [90,S.305-306] und [21,S.56-58,64-65]) gilt für die pro Zeiteinheit (senkrecht zur z-

Achse in den Leiter hinein) durch die Leiteroberfläche strömende Energie, also für den Leistungsfluß (siehe auch [124,S.612]):

$$\oiint_A \underline{\bar{S}}(\vec{r}) \circ d\vec{A} = \oiint_A \frac{1}{2} \cdot [\underline{\bar{E}}(\vec{r}) \times \underline{\bar{H}}^*(\vec{r})] \circ d\vec{A} = \frac{1}{2} \cdot \hat{I}^2 \cdot \underline{Z} \quad (4.221)$$

$\underline{\bar{H}}^*(\vec{r})$ konjugiert komplexer Vektor der magnetischen Erregung

\vec{r} Ortsvektor

ALeiteroberfläche

Dabei ist

$$\underline{\bar{S}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\bar{E}}(\vec{r}) \times \underline{\bar{H}}^*(\vec{r}) \quad (4.222)$$

der sogenannte komplexe Poyntingsche Vektor (siehe [124,S.611-612] und [21,S.64-65]).

Mit der Abkürzung

$$x_w = \frac{\sqrt{4ab}}{\tau} = \sqrt{2ab \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma} \quad (4.223)$$

sowie mit der Eindringtiefe (sie wird auch als Eindringmaß bezeichnet, siehe unter anderem [20,S.331], [23,S.85] sowie [118,S.592])

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu \cdot \sigma}} \quad (4.224)$$

μabsolute Permeabilität

σelektrische Leitfähigkeit

f.....Frequenz

ω Kreisfrequenz

und mit dem Gleichstromwiderstand (siehe auch Gleichung (4.76) und Gleichung (4.84))

$$R_0 = \frac{l}{4ab \cdot \sigma} = \frac{l}{\sigma \cdot A} \quad (4.225)$$

AQuerschnittsfläche (siehe Abbildung 4.68)

l.....Leiterlänge

ergibt sich für den komplexen Wechselstromwiderstand \underline{Z} , d.h. für die Impedanz des elektrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt (siehe Abbildung 4.68 und [124,S.612]):

$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{Z}}{R_0} = & -j \cdot \frac{x_w^2}{4} \cdot \frac{1}{\left(\alpha_0 + \beta_0 \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \left(\alpha_0^* \cdot \frac{a}{b} + \beta_0^*\right)} \cdot \\
 & \cdot \left\{ 2 \cdot |\alpha_0|^2 \cdot \frac{\cot \left[\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{b}{a}} \right]}{\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{b}{a}}} + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \cdot \frac{\cot \left[\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{b}{a} - \left(n \cdot \pi \cdot \frac{b}{a}\right)^2} \right]}{\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{b}{a} - \left(n \cdot \pi \cdot \frac{b}{a}\right)^2}} + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot \frac{2 \cdot (\alpha_n \cdot \beta_m^* + \beta_m \cdot \alpha_n^*)}{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} - \frac{a}{b} \cdot m^2 \cdot \pi^2 - \frac{b}{a} \cdot n^2 \cdot \pi^2} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m|^2 \cdot \frac{\cot \left[\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} - \left(m \cdot \pi \cdot \frac{a}{b}\right)^2} \right]}{\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} - \left(m \cdot \pi \cdot \frac{a}{b}\right)^2}} + \\
 & \left. + 2 \cdot |\beta_0|^2 \cdot \frac{\cot \left[\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{a}{b}} \right]}{\sqrt{-j \cdot \frac{x_w^2}{2} \cdot \frac{a}{b}}} \right\} \quad (4.226)
 \end{aligned}$$

Zuletzt müssen noch die komplexen Koeffizienten α_n und β_m bestimmt werden. Aufgrund der äußerst komplizierten Formeln für die Berechnung (siehe [124]) ist die Ermittlung der Koeffizienten α_n und β_m „per Hand“ mit einem enormen Aufwand verbunden. Die Bearbeitung des Problems mittels eines elektronischen Rechners ist somit unumgänglich.

Die genannte Strategie wurde in [124] erfolgreich eingesetzt. Das Resultat liegt in Form der nachfolgenden Abbildungen vor (siehe Abbildung 4.69 bis Abbildung 4.78 sowie auch [124,S.614-616]).

An dieser Stelle soll auch noch festgehalten werden, daß in [124] das soeben beschriebene Iterationsverfahren zur Bestimmung der Leiterimpedanz (iterative Berechnung der magnetischen Erregung und anschließende Ermittlung der Fourier-Koeffizienten) zusätzlich noch in einer vereinfachten Form angewendet wurde. Diese sogenannte „Näherung“ (siehe [124,S.615]) besteht darin, daß die magnetische Erregung nur für $\omega=0$ (für Gleichstrom oder anders ausgedrückt lediglich für eine einzige „Ordnung“ der elektrischen Stromdichte - siehe Abschnitt 4.4.2) berechnet und dann zur Ermittlung der Fourier-Koeffizienten herangezogen wird. Der Rechenaufwand kann dadurch stark reduziert werden.

Die Frequenzabhängigkeit der Leiterimpedanz (siehe Gleichung (4.226)) bleibt trotzdem erhalten, da diese nicht ausschließlich über die Fourier-Koeffizienten α_n und β_m (indirekte Abhängigkeit) definiert ist, sondern auch direkt durch die Funktion x_w (siehe [124,S.612,615], für x_w siehe Gleichung (4.223)).

Die auf diese Weise erhaltenen Kurve für die Leiterimpedanz sind ebenfalls in den folgenden Abbildungen (siehe Abbildung 4.69 bis Abbildung 4.78 sowie auch [124,S.614-616]) dargestellt (siehe unter „Näherungskurven“).

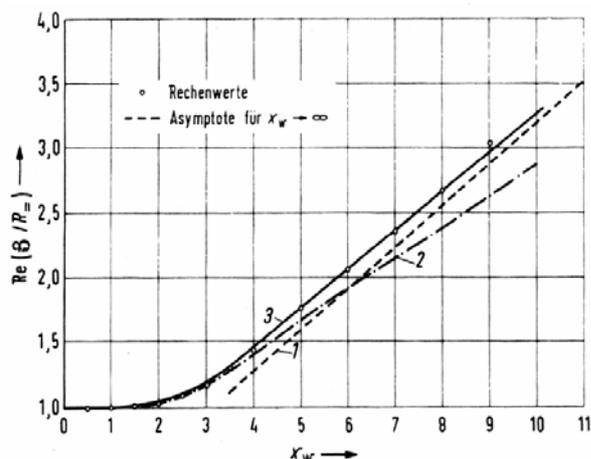


Abb. 4.69: Realteil der Leiterimpedanz
(nach [124,S.614])

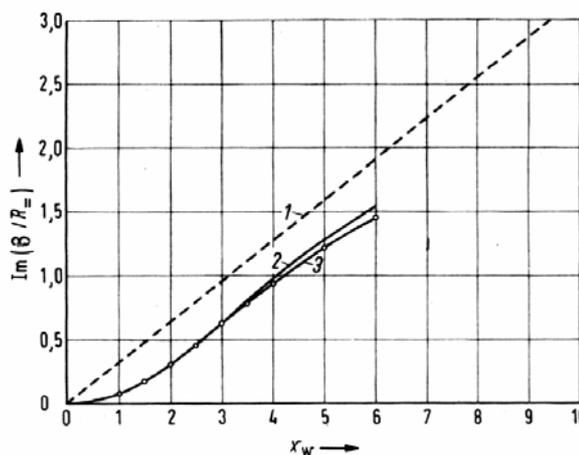


Abb. 4.70: Imaginärteil der Leiterimpedanz
(nach [124,S.614])

Erläuterung der Abbildung 4.69:

Dargestellt wird die Funktion $\text{Re}\{\underline{Z}/R_0\} = f(x_w)$ (siehe auch Gleichung (4.226)) für einen quadratischen Leiter mit $a/b = 1$ (siehe Abbildung 4.68).

$$\text{Kurve 1: } \text{Re}\{\underline{Z}/R_0\}_{x_w \rightarrow \infty} = x_w / \pi$$

Kurve 2: Näherungskurve (Anmerkung dazu siehe oben).

Kurve 3: Meßkurve nach [155].

Die Abbildung 4.69 macht deutlich, daß die Abweichung der Näherungskurve (Kurve 2) von der gemessenen Kurve mit ansteigender Frequenz (mit wachsendem x_w - bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)) immer größer wird. Die approximative Berechnung ist demzufolge lediglich für niedrige Frequenzen gültig (siehe [124,S.615]). Die Meßkurve (Kurve 3) nähert sich mit zunehmender Frequenz erwartungsgemäß der Asymptote (Kurve 1).

Erläuterung der Abbildung 4.70:

Dargestellt wird die Funktion $\text{Im}\{\underline{Z}/R_0\} = f(x_w)$ (siehe auch Gleichung (4.226)) für einen quadratischen Leiter mit $a/b = 1$ (siehe Abbildung 4.68).

$$\text{Kurve 1: } \text{Im}\{\underline{Z}/R_0\}_{x_w \rightarrow \infty} = x_w / \pi .$$

Kurve 2: Mit dem Iterationsverfahren berechnet (siehe Gleichung (4.226) nebst Anmerkungen).

Kurve 3: Näherungskurve (Anmerkung dazu siehe oben).

Dieses Diagramm zeigt, daß die Divergenz zwischen dem iterativen Ergebnis für die Leiterimpedanz und dem entsprechenden approximativen Resultat (die Methode der sogenannten „Näherung“ wird oben beschrieben, siehe hierzu auch [124,S.615]) mit steigender Frequenz größer wird. In Analogie zum Realteil (siehe Abbildung 4.69) ist auch die näherungsweise Ermittlung des Imaginärteiles (also der inneren Induktivität des Leiters) nur für niedrige Frequenzen zulässig (siehe [124,S.615]). Ein Vergleich mit gemessenen Werten ist aufgrund fehlender Daten nicht möglich.

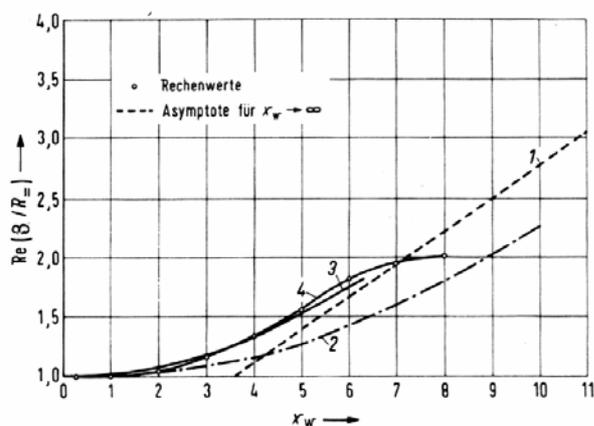


Abb. 4.71: Realteil der Leiterimpedanz
(nach [124,S.614])

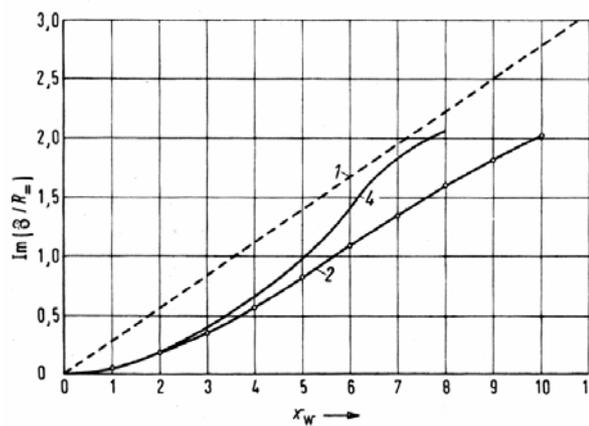


Abb. 4.72: Imaginärteil der Leiterimpedanz
(nach [124,S.615])

Erläuterung der Abbildung 4.71:

Dargestellt wird die Funktion $\operatorname{Re}\{\underline{Z}/R_0\} = f(x_w)$ (siehe auch Gleichung (4.226)) für einen Leiter mit $a/b = 4$ (siehe Abbildung 4.68).

Kurve 1: $\operatorname{Re}\{\underline{Z}/R_0\}_{x_w \rightarrow \infty} = 0,278 \cdot x_w$.

Kurve 2: Näherungskurve (Anmerkung dazu siehe oben).

Kurve 3: Meßkurve nach [155].

Kurve 4: Mit dem Iterationsverfahren berechnet (siehe Gleichung (4.226) nebst Anmerkungen).

Der Abbildung 4.71 macht deutlich, daß eine Änderung des Seitenverhältnisses in Form einer Abweichung vom quadratischen Querschnitt (mit $a/b = 4$ ist eine stärkere Asymmetrie vorhanden, siehe dazu Abbildung 4.68) eine größere Differenz zwischen den iterativ berechneten Werten (Kurve 4) und den approximativ ermittelten Werten (Kurve 2) zur Folge hat. Das Näherungsverfahren kann in diesem Fall nur bei sehr niedrigen Frequenzen angewendet werden. Eine relativ gute Übereinstimmung der iterativen Methode (Kurve 4) mit der Meßkurve (Kurve 3) wird bis zu einem Wert von $x_w = 5$ erzielt (siehe auch [124,S.614-615]). Bei höheren Frequenzen (wachsendes x_w) wird der Fehler größer (die Meßkurve nähert sich hier der Asymptote, d.h. der Kurve 1).

Erläuterung der Abbildung 4.72:

Dargestellt wird die Funktion $\operatorname{Im}\{\underline{Z}/R_0\} = f(x_w)$ (siehe auch Gleichung (4.226)) für einen Leiter mit $a/b = 4$ (siehe Abbildung 4.68).

Kurve 1: $\operatorname{Im}\{\underline{Z}/R_0\}_{x_w \rightarrow \infty} = 0,278 \cdot x_w$.

Kurve 2: Näherungskurve (Anmerkung dazu siehe oben).

Kurve 4: Mit dem Iterationsverfahren berechnet (siehe Gleichung (4.226) nebst Anmerkungen).

Eine Abweichung zwischen der Iterationsmethode und dem Näherungsverfahren (siehe weiter oben respektive [124,S.615]) macht sich hier schon sehr früh bemerkbar. Wenn sie auch bei niedrigen Frequenzen noch verhältnismäßig klein ist, so wird sie doch im Bereich höherer Frequenzen sehr groß.

Die Abbildungen 4.73 bis 4.78 beschreiben den räumlichen Verlauf der Feldlinien innerhalb verschiedener Leiterquerschnitte (siehe auch [124,S.615-616]). Für die dargestellten Feldlinien gilt (bezüglich des magnetischen Vektorpotentials A siehe sowie [92,S.128], [23,S.23-25], [24,S.91], [142,S.215-216], [118,S.280-282], [21,S.672] und [124,S.612]):

$$A_z(x, y, t) = \text{const.} = K_F \quad (4.227)$$

A_z z-Komponente des magnetischen Vektorpotentials
 x, y kartesische Koordinaten
 tZeit

Aufgrund der angenommenen sinusförmigen Zeitabhängigkeit (siehe weiter oben in diesem Abschnitt) resultiert daraus die folgende Formel für die Feldlinien (bezüglich der symbolischen Methode, auch komplexe Wechselstromrechnung genannt, siehe [20,S.169-174], [21,S.402-403], [23,S.121-122], [27,S.457-458], [85,S.18-21] und [104,S.65-72]):

$$A_z(x, y, t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{-j\omega} \cdot \hat{E}_z(x, y) \cdot e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{-j\omega \cdot \sigma} \cdot \hat{J}_z(x, y) \cdot e^{j\omega t} \right\} = K_F \quad (4.228)$$

$\hat{E}_z(x, y)$ komplexer Scheitelwert (komplexe Amplitude) der elektrischen Feldstärke

$\hat{J}_z(x, y)$ komplexer Scheitelwert (komplexe Amplitude) der elektrischen Stromdichte

$A_z(x, y, t)$ Zeitwert des magnetischen Vektorpotentials (wird hier durch die Projektion des komplexen Zeitwertes auf die reelle Achse der komplexen Ebene ermittelt)

ω Kreisfrequenz

σ elektrische Leitfähigkeit

tZeit

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen jeweils (für $a/b = 1$ und für $a/b = 4$) drei unterschiedliche Phasen bzw. Zeitpunkte ($\omega t = 0$, $\omega t = 60^\circ$, $\omega t = 120^\circ$) aus der Entwicklung der Stromverdrängung (Skinneffekt, Haut-Effekt) innerhalb eines Leiters mit rechteckförmigem Querschnitt. Aufgrund der geometrischen Symmetrie der Leiterquerschnitte und der daraus resultierenden Symmetrie der Feldlinienbilder wird dabei jedesmal nur ein Viertel des Gesamtquerschnittes (siehe dazu Abbildung 4.68) dargestellt.

Die Entstehung des Skinneffektes im elektrischen Leiter mit quadratischem Querschnitt ($a/b = 1$, siehe Abbildung 4.68) wird durch die Abbildungen 4.73 bis 4.75 (nebst Kommentar) beschrieben. Für den rechteckigen Querschnitt mit $a/b = 4$ (siehe Abbildung 4.68) sind die Abbildungen 4.76 bis 4.78 gültig.

Eine Abweichung zu den Verhältnissen bei Gleichstrom ($x_w = 0$) macht sich schon bei relativ kleinen Frequenzen ($x_w = 3$) bemerkbar (siehe Abbildung 4.73 und Abbildung 4.76).

Feldlinienbilder in der Gestalt der Abbildung 4.74 sind die Folge der Tatsache, daß zu ganz bestimmten Zeitpunkten zwischen den einzelnen Teilströmen (zwischen den einzelnen „Ordnungen“ der elektrischen Stromdichte, siehe diesbezüglich Abschnitt 4.4.2) innerhalb des Leiters sehr große Phasen-

verschiebungen vorliegen, sodaß sich deren Wirkung teilweise oder auch vollständig aufheben kann (siehe auch [124,S.616]).

Nach einiger Zeit ($\omega t = 120^\circ$) ist der Skineneffekt schon sehr stark ausgeprägt. Man stellt fest (siehe Abbildung 4.75 und Abbildung 4.78), daß das Strömungsfeld (bezüglich der Formel für die Feldlinien siehe Gleichung (4.227) und Gleichung (4.228)) an die Leiteroberfläche und hierbei insbesondere in die Leiterecken verdrängt wird (siehe auch [124,S.616]). Zudem wird aus der Abbildung 4.78 ersichtlich, daß im Falle rechteckiger Querschnitte die Stromverdrängung stets auf der Breitseite des Leiters zuerst auftritt (siehe auch [124,S.616]).

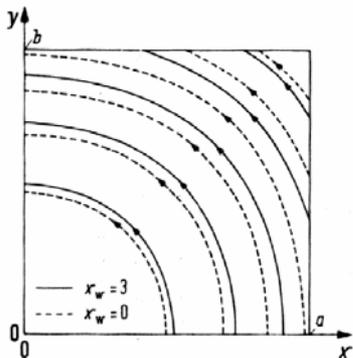


Abb. 4.73
(nach [124,S.616])

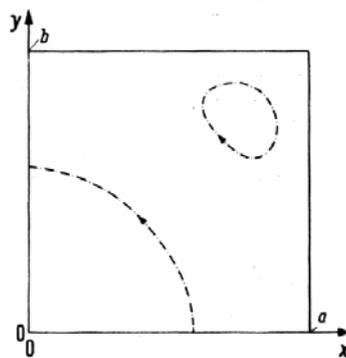


Abb. 4.74
(nach [124,S.616])

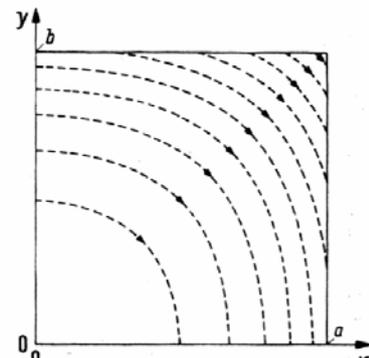


Abb. 4.75
(nach [124,S.616])

Anmerkung zur Abbildung 4.73:

Feldlinien im Leiter mit quadratischem Querschnitt ($a/b = 1$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 0$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 0$ (Feldlinien für Gleichstrom, gestrichelte Linien) und für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

Anmerkung zur Abbildung 4.74:

Feldlinien im Leiter mit quadratischem Querschnitt ($a/b = 1$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 60^\circ$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

Anmerkung zur Abbildung 4.75:

Feldlinien im Leiter mit quadratischem Querschnitt ($a/b = 1$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 120^\circ$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

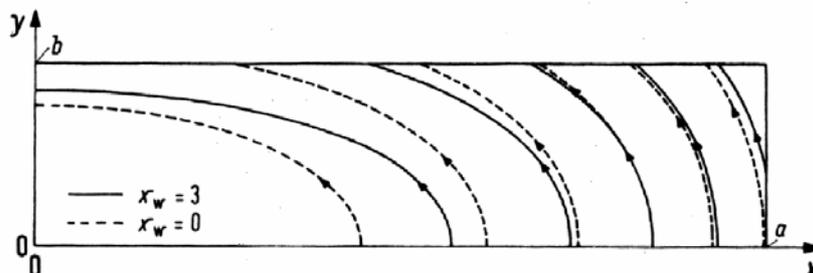


Abb. 4.76
(nach [124,S.616])

Anmerkung zur Abbildung 4.76:

Feldlinien im Leiter mit rechteckigem Querschnitt ($a/b = 4$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 0$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 0$ (Feldlinien für Gleichstrom, gestrichelte Linien) und für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

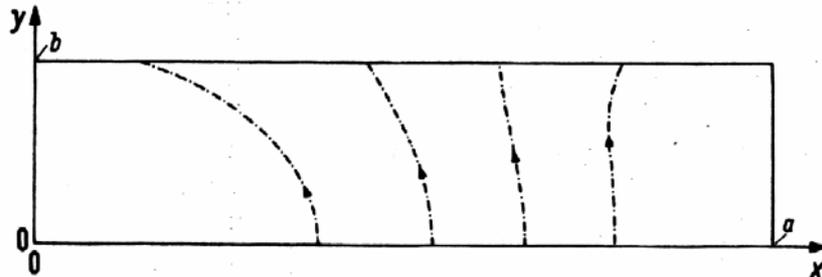


Abb. 4.77
(nach [124,S.616])

Anmerkung zur Abbildung 4.77:

Feldlinien im Leiter mit rechteckigem Querschnitt ($a/b = 4$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 60^\circ$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

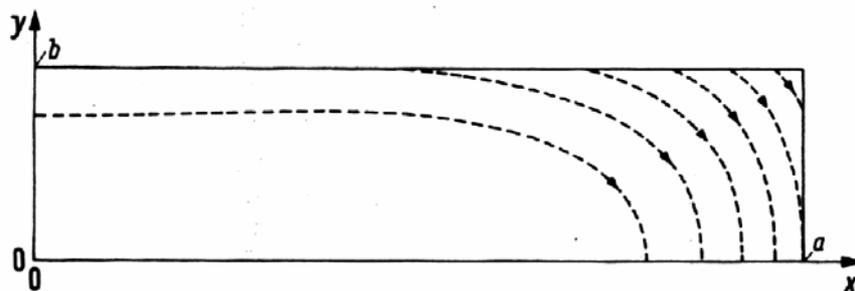


Abb. 4.78
(nach [124,S.616])

Anmerkung zur Abbildung 4.78:

Feldlinien im Leiter mit rechteckigem Querschnitt ($a/b = 4$ - siehe Abbildung 4.68) bei $\omega t = 120^\circ$ (siehe Gleichung (4.228)) für $x_w = 3$ (bezüglich x_w siehe Gleichung (4.223)).

Schließlich besteht auch noch die Möglichkeit, den Verlustwiderstand R (Wirkwiderstand, Resistanz = Realteil der Leiterimpedanz \underline{Z}) des elektrischen Leiters mit rechteckförmigem Querschnitt mit Hilfe der Formel (4.229) für hohe Frequenzen (z.B. $8 \leq x_w \leq 12$ bei $a/b = 1$ bzw. $6 \leq x_w \leq 9$ bei $a/b = 4$, siehe dazu auch Gleichung (4.223) und Abbildung 4.68) näherungsweise zu berechnen (siehe [124,S.611,615] und [154]). Im Ergebnis für sehr hohe Frequenzen (z.B. $x_w > 12$ bei $a/b = 1$ bzw. $x_w > 9$ bei $a/b = 4$) kann der Fehler praktisch vernachlässigt werden.

Es gilt:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{2 \cdot x_w}{\pi^2} \cdot \left\{ \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - k'^2 \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right]^{0,5} \cdot \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) - k^2 \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \right]^{0,5} \cdot \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \right] \right\} \quad (4.229)$$

RVerlustwiderstand

R₀.....Gleichstromwiderstand (siehe auch Gleichung (4.76) und Gleichung (4.84))

x_wsiehe Gleichung (4.223)

Hierin sind:

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (4.230)$$

und:

$$E(k') = E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \quad (4.231)$$

vollständige elliptische (Normal)Integrale 2.Gattung (siehe [49,S.12-13,303], [23,S.294-295], [65,S.124-125], [81,S.511-512] und [53,S.237-244]), sowie:

$$F(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (4.232)$$

und:

$$F(k') = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \quad (4.233)$$

vollständige elliptische (Normal)Integrale 1.Gattung (siehe [49,S.12-13,303], [23,S.294-295], [65,S.124-125], [81,S.511-512] und [53,S.237-244]).

Diese Integrale lassen sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen (man spricht dann von pseudoelliptischen integralen), nicht durch elementare Funktionen darstellen. Es existieren daher nur Tabellen (siehe [49,S.12-13] sowie [23,S.294-295]) und Diagramme (siehe [53,S.237-240]) für die Werte dieser Funktionen.

Weiters gelten die Zusammenhänge (siehe [124,S.611-612] und Abbildung 4.68):

$$k = \frac{a}{b} \quad (4.234)$$

2a, 2b.....Seitenlängen des Rechteckquerschnittes (siehe Abbildung 4.68)

$$k' = \sqrt{1-k^2} \quad (4.235)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k} \cdot \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - k'^2 \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right] \quad (4.236)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{k} \cdot \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) - k^2 \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \right] \quad (4.237)$$

Die Gültigkeit der Formel (4.229) wurde für sehr große Frequenzen (asymptotischer Wert) in [155] experimentell nachgewiesen.

5. MESSUNGEN AN ERDERSYSTEMEN

5.1 Messungen am Versuchsaufbau

5.1.1 AUFGABENSTELLUNG

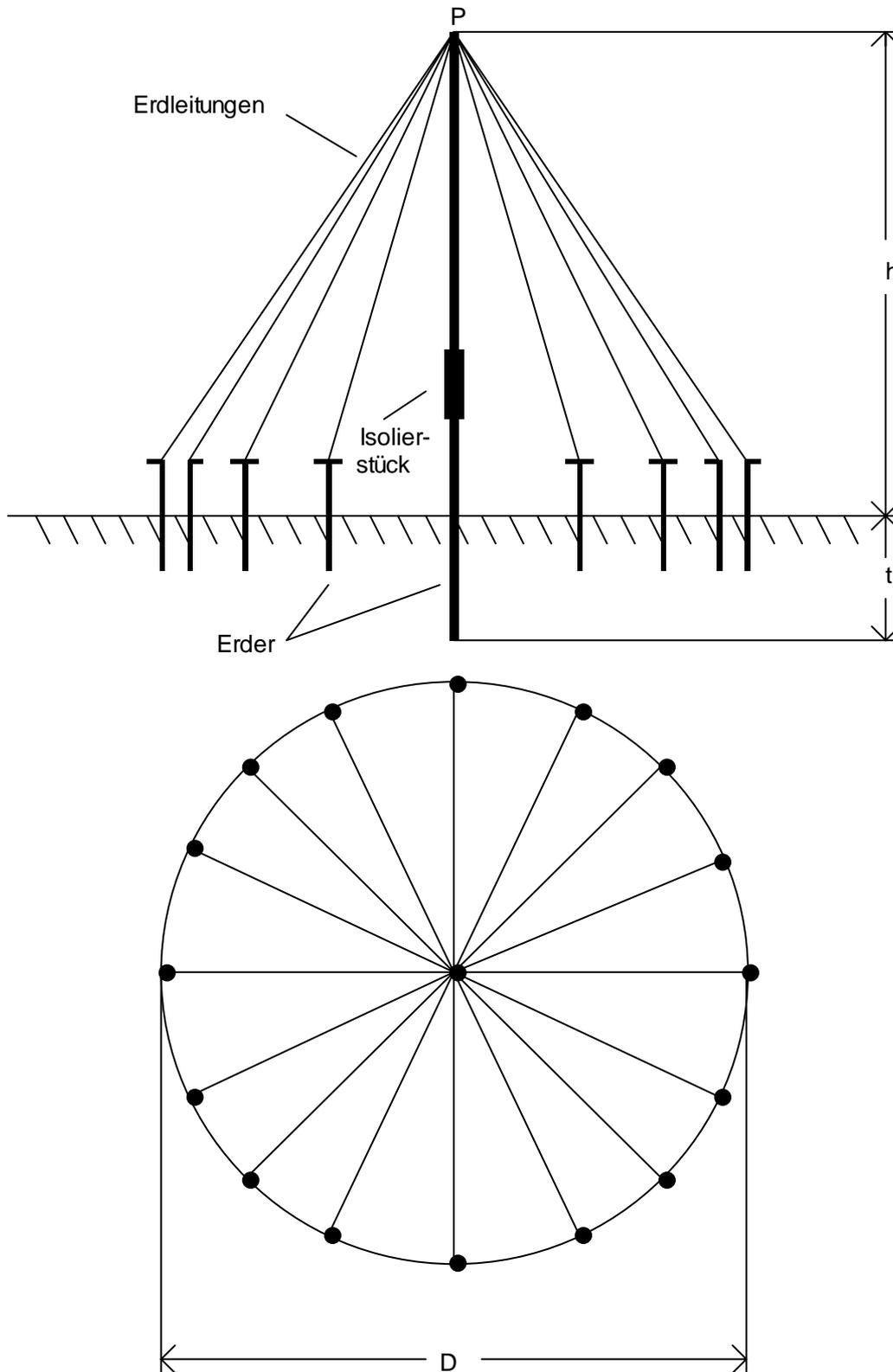


Abb. 5.1-1: Versuchsaufbau

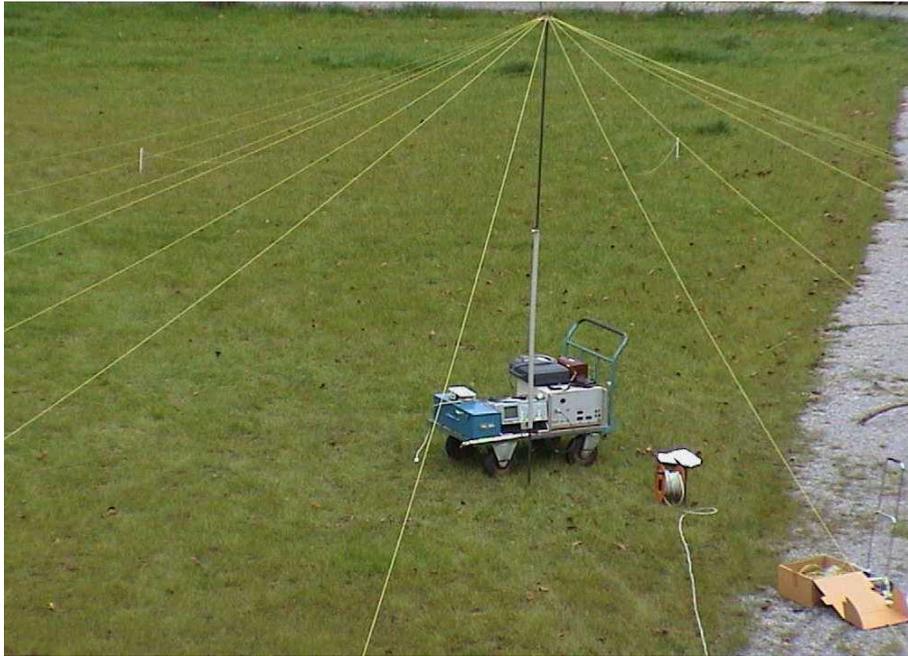


Abb. 5.1-2: Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau (dieser Aufbau dient zunächst als Modell für eine Blitzschutzanlage) nach den Abbildungen 5.1-1 bzw. 5.1-2 (siehe auch Abbildungen 3.17-1, 3.17-2 und 3.24) besteht aus einem zentralen Erder (zentrale Erdelektrode) im Kreismittelpunkt ($t=0,5\text{m}$ - siehe Abbildung 5.1-1) und 16 am Kreisumfang symmetrisch angeordneten Erdspießen ($t=0,25\text{m}$ - siehe Abbildung 5.1-1) die über Erdleitungen im Punkt P (siehe Abbildung 5.1-1) elektrisch leitend miteinander verbunden sind. Alle Erder sind Stahlelektroden (Silberstahl: 115CrV3 nach DIN 17350, Werkstoff-Nr. 1.2210). Die 16 Erdleitungen sind PVC-Aderleitungen (H07V-K / Yf) mit einem Querschnitt von 4mm^2 .

Vom genannten Meßaufbau sollen sowohl der Ausbreitungswiderstand (siehe Abschnitt 5.1.3) als auch der Stoßerdungswiderstand (siehe Abschnitt 5.1.4) gemessen werden.

Da die meßtechnisch bestimmten Erdungswiderstände (Ausbreitungswiderstand und Stoßerdungswiderstand) anschließend mit den berechneten Werten (siehe dazu Abschnitt 6.1 und 6.2 sowie Abschnitt 3.2.3.3 und 3.3.3.3) verglichen werden sollen, ist es auch notwendig, den spezifischen Erdwiderstand ρ_E des die Erdelektroden (Erder) umgebenden Erdreiches zu messen (siehe dazu Abschnitt 2.2.2).

Es wurden die folgenden Meßwerte ermittelt (bezüglich der Berechnung des Medians siehe [106,S.57-58]):

(A) Messung mit der Erdungsmeßbrücke:

- Anordnung der Erdspieße in Längsrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10	20	30
R / Ω	9,00	3,95	2,97	2,55	2,40	1,85	1,40
$\rho_S / \Omega\text{m}$	56,55	49,64	55,98	80,11	150,80	242,48	263,89

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_S : 80,11 Ωm

Tab. 5.1: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand
(siehe Abbildung 5.3)

- Anordnung der Erdspieße in Querrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10
R / Ω	9,80	3,85	2,90	2,58	2,35
$\rho_S / \Omega\text{m}$	61,58	48,38	54,66	81,05	147,65

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_S : 54,66 Ωm

Tab. 5.2: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand
(siehe Abbildung 5.4)

(B) Messung mit dem digitalen Erdungsmeßgerät:

- Anordnung der Erdspieße in Längsrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10	20	30
R / Ω	9,12	4,03	3,09	2,67	2,47	1,92	1,46
$\rho_S / \Omega\text{m}$	57,30	50,64	58,25	83,88	155,19	241,27	275,20

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_S : 83,88 Ωm

Tab. 5.3: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand
(siehe Abbildung 5.5)

- Anordnung der Erdspieße in Querrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10
R / Ω	9,51	3,86	2,95	2,65	2,41
$\rho_S / \Omega\text{m}$	59,75	48,51	55,61	83,25	151,42

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_S : 55,61 Ωm

Tab. 5.4: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand
(siehe Abbildung 5.6)

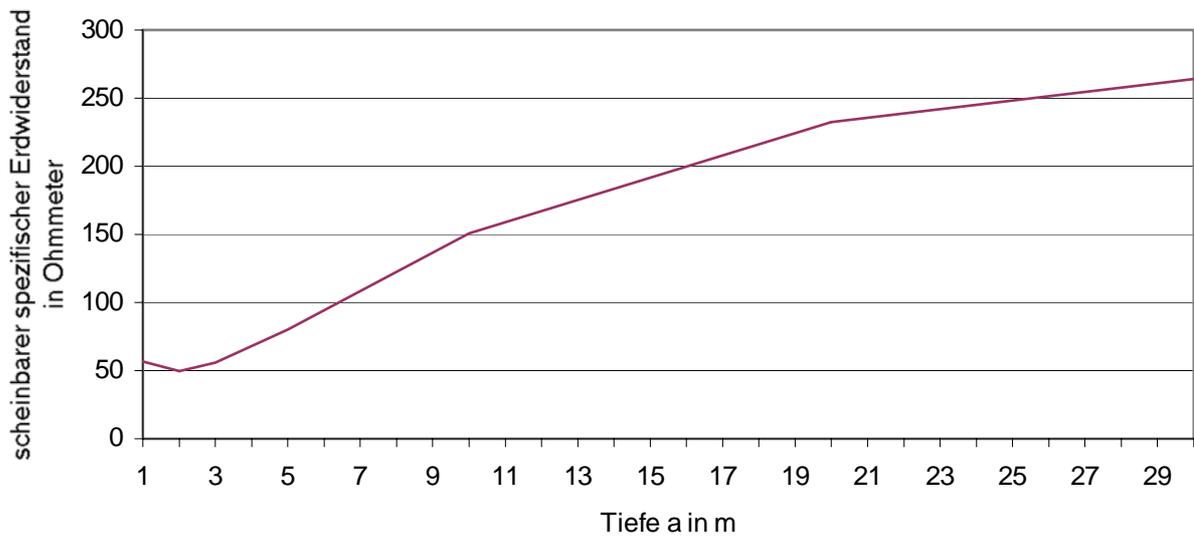


Abb. 5.3: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Längsrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.1 und Gleichung (2.3))

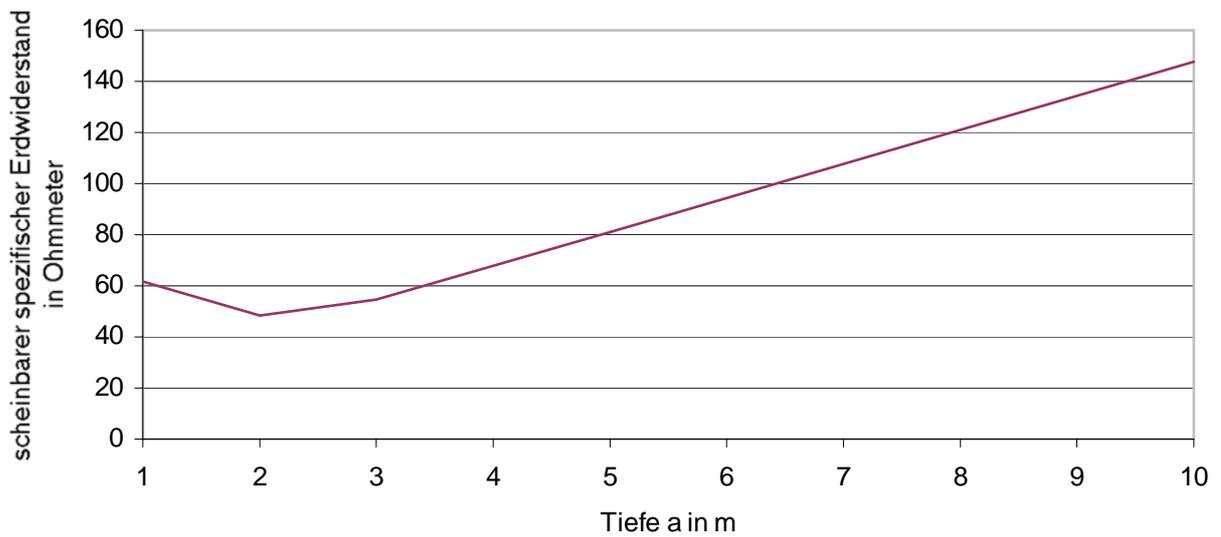


Abb. 5.4: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Querrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.2 und Gleichung (2.3))

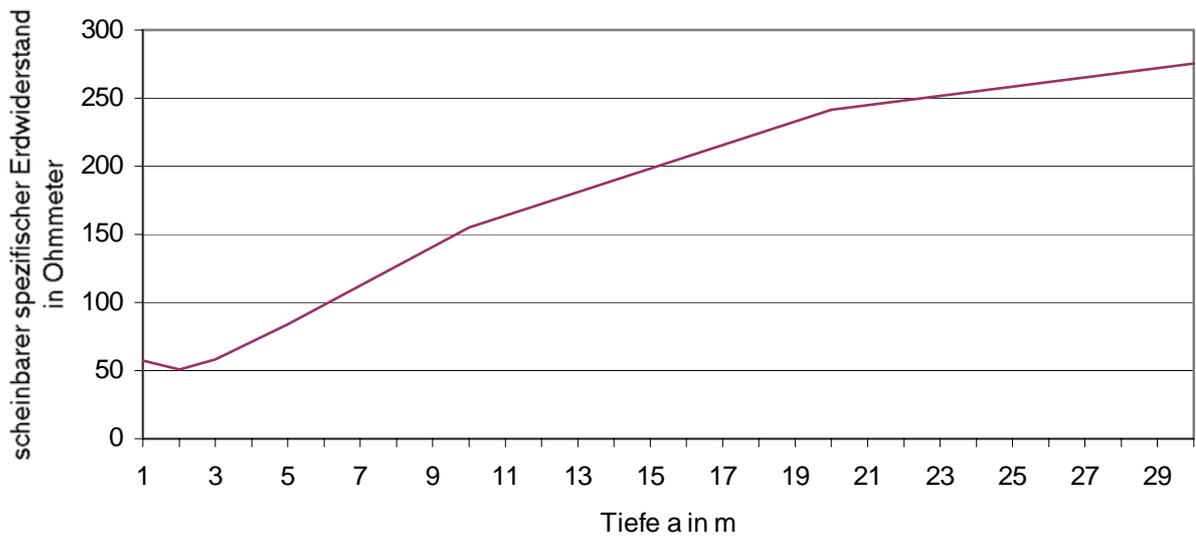


Abb. 5.5: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Längsrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.3 und Gleichung (2.3))

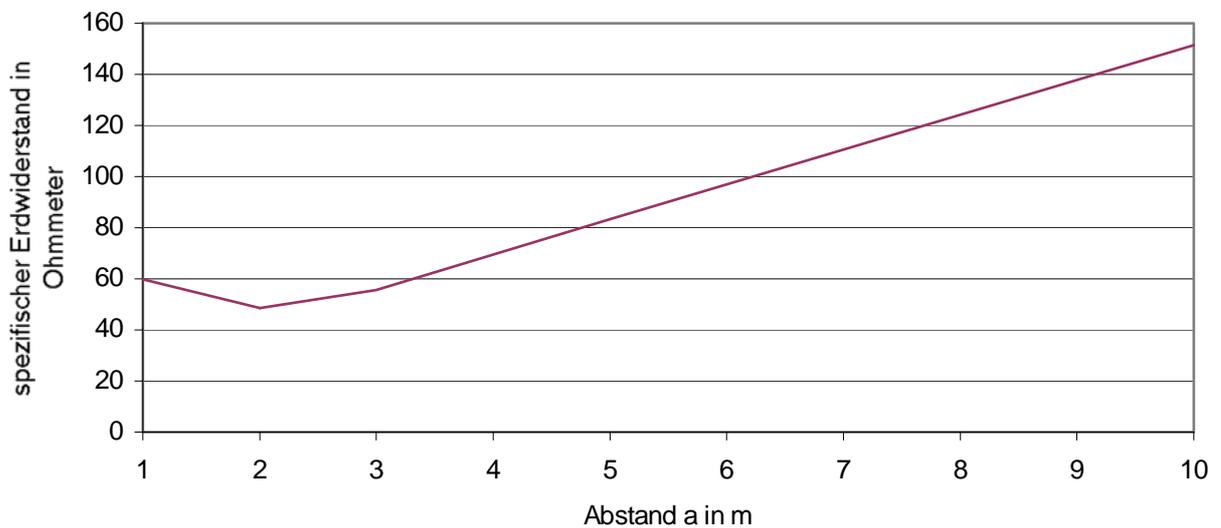


Abb. 5.6: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Querrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.4 und Gleichung (2.3))

5.1.3 MESSUNG DER AUSBREITUNGSWIDERSTÄNDE

Es wurden auch bei diesen Messungen die im Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Meßgeräte verwendet. Da es sich bei der Meßbrücke um eine Erdungsmeßbrücke in Vierklemmenausführung handelt, muß, wie es im Abschnitt 2.3.2.1 beschrieben ist, eine Kurzschlußlasche zwischen die Anschlußklemmen E1 und E2 eingelegt werden (siehe auch Abbildung 2.8 sowie Abbildung 5.7). Am digitalen Erdungsmeßgerät kann mit einem Wahlschalter auf eine dreipolige Messung umgeschaltet werden.

Der Ersatzwiderstand des gesamten Versuchsaufbaues (dieser Widerstandswert dient in weiterer Folge der näherungsweise Berechnung des Stoßerdungswiderstandes -- siehe dazu Abschnitt 6) kann nur in zwei Schritten gemessen werden. Es wird dabei zuerst der Ausbreitungswiderstand R_{AS} der Sondenanordnung (siehe Abbildung 5.7) gemessen und anschließend daran der Ausbreitungswiderstand R_{AZ} der zentralen Elektrode (Elektrode im Kreismittelpunkt; bezüglich der Meßschaltung siehe Abbildung 2.18 bis Abbildung 2.22) ermittelt. Die Summe dieser beiden Widerstände ergibt dann den gesuchten Ersatzwiderstand.

Die geometrischen Abmessungen des Erdersystems (siehe Abbildung 5.1-1) waren bei dieser Messung wie folgt festgelegt:

$h=3,2\text{m}$
 $D=22\text{m}$
 $t=0,5\text{m}$

Aus praktischen Gründen wurden die Abstände zwischen dem Erdersystem und den Meßelektroden wie folgt (so groß wie möglich) gewählt:

Abstand Erdersystem-Sonde: 55m
 Abstand Erdersystem-Hilfserder: 120m

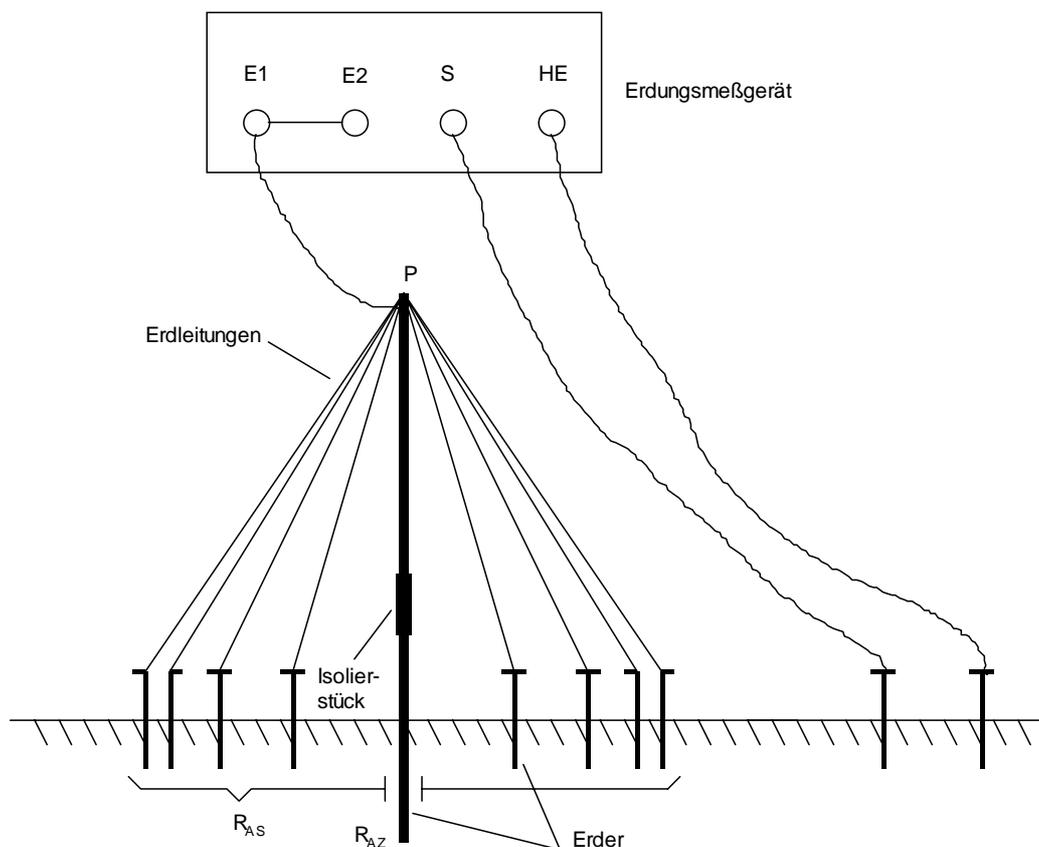


Abb. 5.7: Messung des Ausbreitungswiderstandes der Sondenanordnung

(A) Messung mit der Erdungsmeßbrücke:

Ermittelter Ersatzwiderstand (siehe dazu auch Gleichung (6.4) bis Gleichung (6.6)):

$$R_{AS} = 13\Omega$$

$$R_{AZ} = 77\Omega$$

$$R_A = R_{AS} + R_{AZ} = 13\Omega + 77\Omega = 90\Omega$$

(B) Messung mit dem digitalen Erdungsmeßgerät (mit unterschiedlichen Frequenzen):

Frequenz / Hz	94	105	111	128
R_A / Ω	91,3	91,2	91,1	91,0

Tab. 5.5: Ersatzwiderstand des Erdersystems

5.1.4 MESSUNG DES STOSSERDUNGSWIDERSTANDES

Mit Hilfe der Meßschaltung entsprechend der Abbildung 5.8-1 (siehe unten) kann der Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaues (siehe Abbildung 5.1-1 und Abbildung 5.1-2) exakt bestimmt werden. Gemäß seiner Definition (siehe Gleichung (2.105)) muß hierzu neben dem Spannungsscheitelwert auch der Stromscheitelwert an den Klemmen des Versuchsaufbaues (Klemme A und Klemme B, siehe dazu Abbildung 5.8-1) gemessen werden. Die Messung dieser Scheitelwerte erfolgt mittels eines Zweikanaloszilloskopes (Kanal 1: Spannungsmessung, Kanal 2: Strommessung).

Zur Bestimmung der elektrischen Stromstärke wird ein Nebenwiderstand (Shunt) verwendet. Ist ΔU_s der mit dem Oszilloskop gemessene Spannungsabfall am Shunt, so gilt für die Stromstärke in der Erdungsanlage:

$$I_E = \frac{\Delta U_s}{R_s} = \frac{\Delta U_s}{0,005125\Omega} \quad (5.1)$$

I_E Erdungsstrom (siehe auch Abschnitt 2.1)
 R_sWert des Nebenwiderstandes (laut Typenschild)
 ΔU_s Spannungsabfall am Nebenwiderstand (Shunt)

Zur Messung wurden folgende Geräte verwendet:

Hybridgenerator: MWB-Meßwandler-Bau-AG, Ser.Nr. 10 024

Oszilloskop: GOULD DSO 1602, 20MS/s

Shunt: ÖDK, $R=0,005125\Omega$

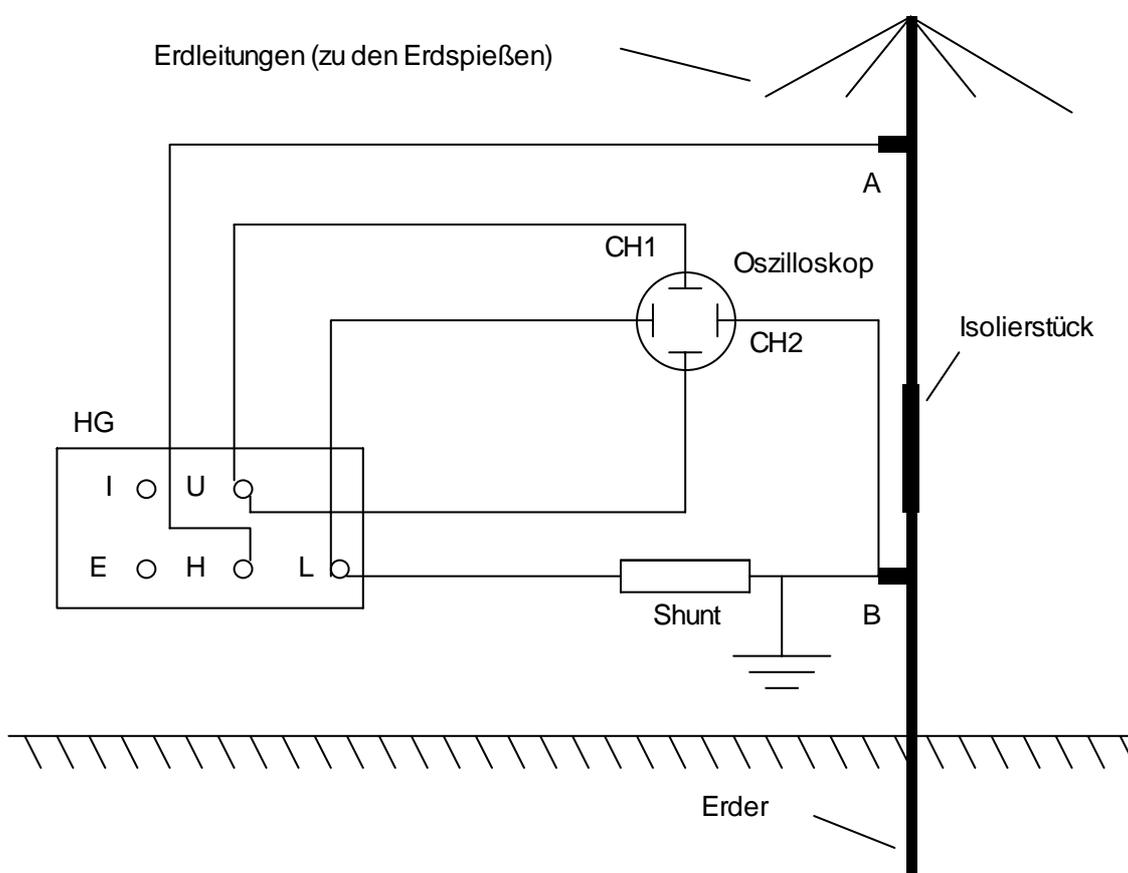
5.1.4.1 Meßschaltung

Zur Simulation des Blitzstoßstromes wurde ein sogenannter Hybridgenerator (HG; Combination Wave Generator; Prinzipschaltbild und Dimensionierung der Generator-Bauelemente siehe [74,S.316] und [75,S.1102]) verwendet. Dieser speziell zur Nachbildung energiereicher Überspannungen entwickelte Prüfgenerator (Blitzstörquelle) hat im wesentlichen die folgenden Eigenschaften:

- (1) Versorgung hochohmiger Prüflinge (das entspricht etwa dem Leerlauf des Generators) mit einer Blitzstoßspannung (Stirnzeit $T_S=1,2\mu s \pm 30\%$ und Rückenhalbwertszeit $T_R=50\mu s \pm 30\%$ nach VDE 0433 bzw. IEC 60-2).
- (2) Versorgung niederohmiger Prüfobjekte (das entspricht ungefähr dem Kurzschluß des Generators) mit einem Blitzstoßstrom (Stirnzeit $T_S=8\mu s \pm 20\%$ und Rückenhalbwertszeit $T_R=20\mu s \pm 20\%$ nach VDE 0433 bzw. IEC 60-2)

Es ist also möglich, im Fall einer Stoßspannungsprüfung (hochohmige Prüflinge) exakte Voraussagen über den Verlauf der Stoßspannung (Scheitelwert, Stirnzeit, Rückenhalbwertszeit) am Prüfling zu machen. Das gleiche gilt natürlich auch für den Stoßstrom bei einer Stoßstromprüfung (niederohmige Prüflinge).

Für den Fall komplexer Elemente, also für eine Belastung des Hybridgenerators zwischen dem Leerlauf- und dem Kurzschlußfall, besteht die Möglichkeit einer solchen Prognose nicht. Hier stellen sich die Stoßstrom- und die Stoßspannungsbelastung individuell auf die jeweilige Impedanz ein. Das bedeutet, daß die an den Prüfobjekten auftretenden Ströme und Spannungen auch erheblich von den Standardwerten ($u[1,2/50]$ und $i[8/20]$) abweichen können (siehe dazu auch [75,S.1102]).



- HGHybridgenerator (Regelbereich: 0-8kV)
- L.....Klemme "LOW"
- HKlemme "HIGH"
- EErdungsklemme
- CH1.....Oszilloskop - Kanal 1 (Spannungsmessung)
- CH2.....Oszilloskop - Kanal 2 (Strommessung)
- USpannungsmeßklemme (koaxial)
- I.....Strommeßklemme (koaxial)

Abb. 5.8-1: Messung des Stoßerdungswiderstandes



Abb. 5.8-2: Messung des Stoßerdungswiderstandes

Außerdem kann man für den Hybridgenerator eine Impedanz definieren, und zwar in der Form:

$$Z_i = \frac{\hat{U}_{LL}}{\hat{I}_{KS}} \quad (5.2)$$

\hat{U}_{LL} Scheitelwert der Leerlaufspannung

\hat{I}_{KS} Scheitelwert des Kurzschlußstromes

Für den verwendeten Hybridgenerator (Typ MWB-Meßwandler-Bau-AG, Ser.Nr. 10 024) gilt:

$$Z_i = 2\Omega \quad (5.3)$$

also:

$$\hat{I}_{KS} = \frac{\hat{U}_{LL}}{Z_i} = \frac{\hat{U}_{LL}}{2\Omega} \quad (5.4)$$

\hat{U}_{LL}

Nach IEEE Std. 587-1980 (Guide for surge voltages in low-voltage ac power circuits) kann man in Niederspannungsanlagen von Blitzbeanspruchungen bis zu 10kV (\hat{U}_{LL}) und 10kA (\hat{I}_{KS}) ausgehen.

Für die geometrischen Daten des Erdersystems (siehe Abbildung 5.1-1) gilt wieder:

$h=3,2\text{m}$

$D=22\text{m}$

$t=0,5\text{m}$

Geerdet waren (siehe Abbildung 5.8-1):

1. der Shunt
2. das Oszilloskop

Diese Erdung hat für die Meßwerterfassung keine Bedeutung. Sie erfüllt nur den Zweck einer Schutzmaßnahme.

Für die Messung der Stoßspannung konnte die am Hybridgenerator (HG) vorgesehene Meßklemme „U“ (siehe Abbildung 5.8-1, 1V gemessen entspricht 1kV in der Realität) verwendet werden. Die Messung des Stoßstromes war nur mit Hilfe eines Shunts (Messung des Spannungsabfalles am Shunt mit Hilfe eines Oszilloskopes, siehe Abbildung 5.8-1) möglich, da die Meßwerte an der Strommeßklemme „I“ (siehe Abbildung 5.8-1) nicht richtig waren (Grund dafür war ein technischer Defekt in der internen Meßschaltung des Hybridgenerators).

5.1.4.2 Messung bei variablem Spannungsscheitelwert

Der Aufbau der Meßschaltung (siehe Abbildung 5.8-1) kann dem Abschnitt 5.1.4.1 entnommen werden.

Das Ziel dieser Messung besteht darin, die Spannungsabhängigkeit des Stoßerdungswiderstandes (Einfluß der Bodenionisation und des Fritteffektes, siehe Abschnitt 2.4) des Versuchsaufbaues (siehe Abbildung 5.1-1 und Abbildung 5.1-2) zu bestimmen. Dazu wurden am Hybridgenerator (Regelbereich: 0-8kV) verschiedene Spannungen mit jeweils unterschiedlicher Polarität eingestellt (die Polarität kann am Hybridgenerator umgeschaltet werden). Die Strom- und Spannungswerte wurden mit dem Oszilloskop gemessen (siehe Abbildung 5.4), und der Stoßerdungswiderstand entsprechend der Gleichung (2.105) in der Form

$$R_{St} = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}_E} \quad (2.105)$$

berechnet.

Es wurden die folgenden Messungen durchgeführt:

Messung (1):

- Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW", 16 Erdspeieße

\hat{U}_E / kV	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{I}_E / A	151,22	292,68	429,27	585,37	741,46	878,05	1053,66	1756,10
R_{St} / Ω	6,61	6,83	6,99	6,83	6,74	6,83	6,64	4,56

Mittelwert des Stoßerdungswiderstandes R_{St} : 6,50Ω

Tab. 5.6: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (16 Erdspeieße)

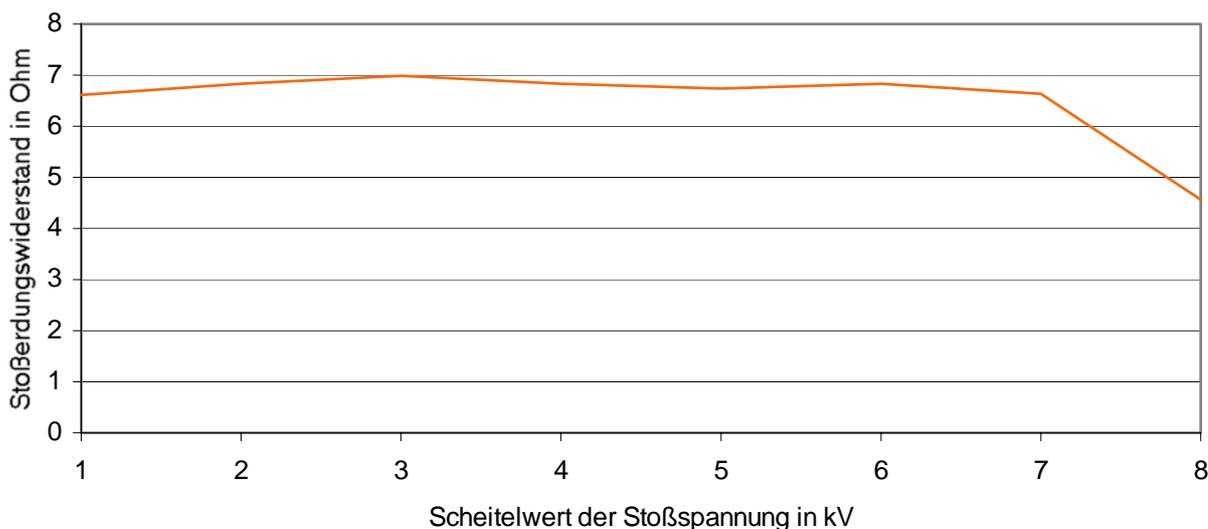


Abb. 5.9: Stoßerdungswiderstand in Abhängigkeit vom Spannungsscheitelwert (positive Stoßspannung)

Messung (2):

- Klemme A ="LOW", Klemme B = "HIGH", 16 Erdspieße

\hat{u}_E / kV	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{i}_E / A	165,85	312,20	468,30	624,40	741,46	897,56	1053,66	1756,10
R_{St} / Ω	6,03	6,41	6,41	6,41	6,74	6,68	6,64	4,56

Mittelwert des Stoßerdungswiderstandes R_{St} : 6,24 Ω

Tab. 5.7: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (16 Erdspieße)

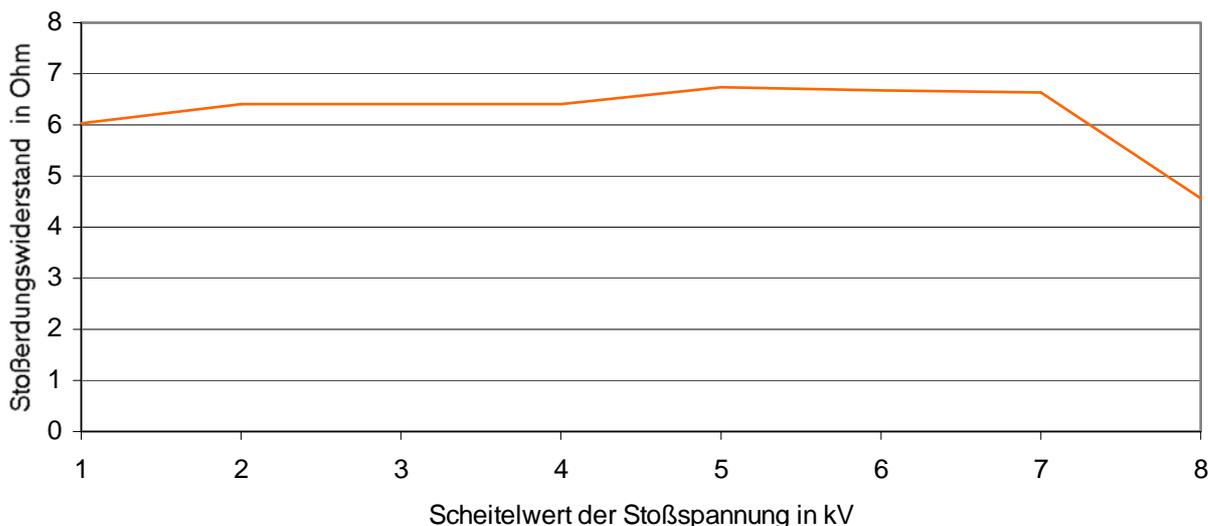


Abb. 5.10: Stoßerdungswiderstand in Abhängigkeit vom Spannungsscheitelwert (negative Stoßspannung)

Die Abbildungen 5.9 und 5.10 (siehe auch Tabelle 5.6 und Tabelle 5.7) zeigen, daß die Bodenionisation und der Fritteffekt (siehe Abschnitt 2.4) mit der daraus resultierenden Verkleinerung des Stoßerdungswiderstandes erst bei relativ großen Spannungsscheitelwerten auftreten. Weiters hat die Messung gezeigt, daß diese Reduzierung des Stoßerdungswiderstandes durch die Austrocknung des Erdreiches bei großen Stromstärken (Trockeneffekt, siehe Abschnitt 2.4) nicht kompensiert wird. Zu welchem Resultat die Überlagerung der genannten Effekte im Falle der in der Praxis (Blitzeinwirkung) wesentlich größeren Strom- und Spannungswerte führt, kann aus den vorliegenden Meßergebnissen nicht abgeleitet werden.

Messung (3):

Für diese Messung wurden alle Erdungsleitungen an den Erdspeissen abgeklemmt und isoliert auf den Boden gelegt. Die galvanische Verbindung der Erdungsleitungen am Punkt P (siehe Abbildung 5.1-1) blieb weiterhin erhalten. Wie man dem Meßergebnis (siehe Tabelle 5.8) entnehmen kann, nimmt der Stoßerdungswiderstand selbst in diesem Fall (entspricht etwa offenen Trennklemmen oder sehr schlecht leitenden Ableitungen einer Blitzschutzanlage) keine extrem großen Werte an.

Die Meßergebnisse zeigt die Tabelle 5.8.

Polarität	positiv	positiv	negativ	negativ
\hat{u}_E / kV	2	4	2	4
\hat{i}_E / A	12,68	37,07	27,32	74,15
R_{St} / Ω	157,73	107,90	73,21	53,94

Polarität positiv: Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW"
 Polarität negativ: Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH"

Tab. 5.8: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (kein Erdspeiß)

5.1.4.3 Messung bei konstantem Spannungsscheitelwert

Messung (4):

Das Resultat dieser Messung soll zeigen, welchen Einfluß die Anzahl von geerdeten Ableitungen einer Blitzschutzanlage auf deren Stoßerdungswiderstand hat.

Es wurden demzufolge noch mehrere Messungen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Erdspeissen durchgeführt. Unter der Berücksichtigung einer symmetrischen Anordnung der Erdspeisse wurden, ausgehend von 16 Erdspeissen, am Punkt P (siehe Abbildung 5.1-1) jeweils 4 Speisse abgeklemmt. Die ermittelten Meßreihen (siehe nachfolgende Tabellen) gelten für einen konstanten Spannungsscheitelwert von 4kV (eingestellter Wert am Hybridgenerator). Die Berechnung des Stoßerdungswiderstandes erfolgt wie üblich (siehe Gleichung (2.105)).

- 4 KV, Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW"

n	16	12	8	4
\hat{i}_E / A	585,37	487,80	370,73	195,12
$R_{St} \text{ in } \Omega$	6,83	8,20	10,79	20,50

n Anzahl der Erdspeisse

Tab. 5.9: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei konstantem Spannungsscheitelwert

Die Tabelle 5.9 und die Abbildung 5.11 machen deutlich, daß der Stoßerdungswiderstand mit einer steigenden Anzahl von geerdeten Ableitungen kleiner wird.

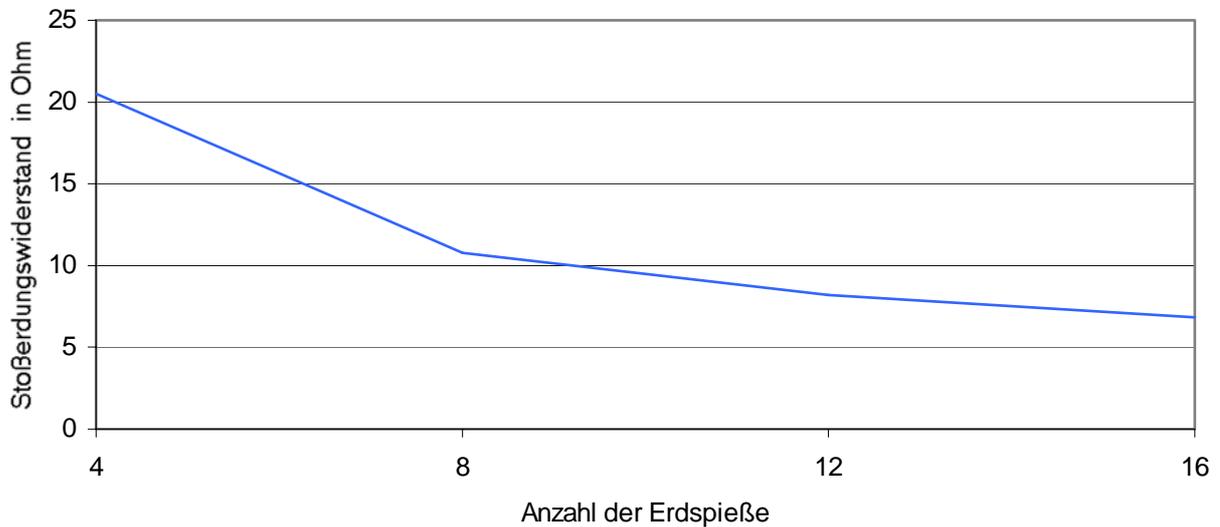


Abb. 5.11: Stoßerdungswiderstand in Abhängigkeit von der Anzahl der Erdspieße

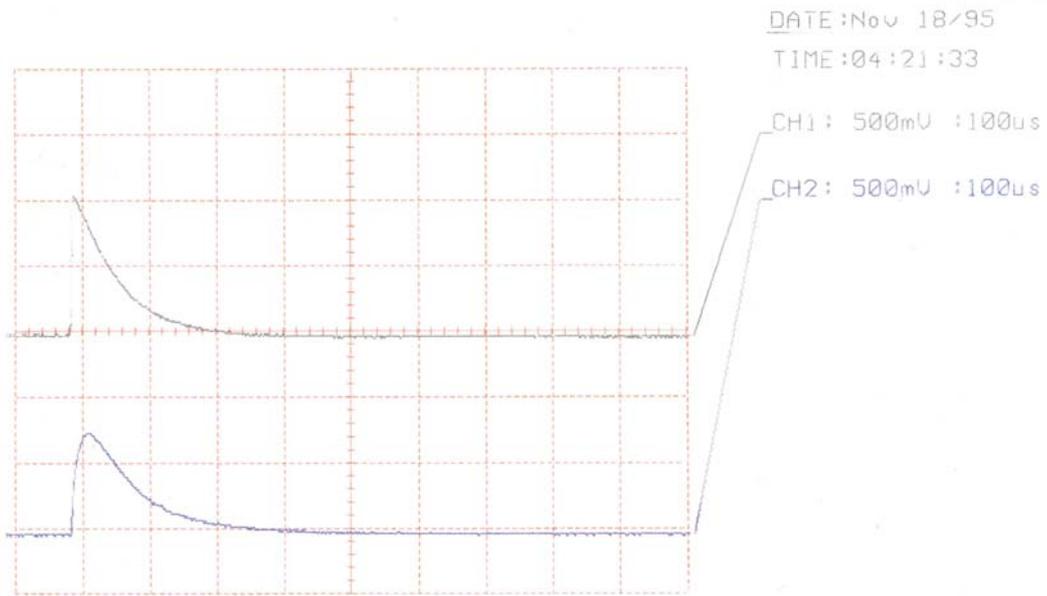
5.1.4.4 Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes

Entsprechend der Definition (2.106) ist der Stoßerdungswiderstand eine Funktion der Zeit.

Es gilt also:

$$r_{st}(t) = \frac{u_E(t)}{i_E(t)} \quad (2.106)$$

Anhand einiger Beispiele soll hier der zeitliche Verlauf des Stoßerdungswiderstandes (siehe unten, Abbildung 5.12 bis Abbildung 5.17) gezeigt werden. Diese Zeitabhängigkeit wurde aus den aufgenommenen Oszillogrammen (siehe unten, Oszillogramm 5.1 bis Oszillogramm 5.6) entsprechend der Definition (2.106) ermittelt. Eine vernünftige Auswertung der Oszillogramme ist dabei nur im Zeitbereich von etwa $10\mu\text{s}$ bis $200\mu\text{s}$ (Oszillogramme 5.1, 5.2, 5.4 und 5.5) bzw. von ungefähr $10\mu\text{s}$ bis $100\mu\text{s}$ (Oszillogramme 5.3 und 5.6) möglich.



Oszillogramm 5.1: 1kV, Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW", 16 Erdspieße:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

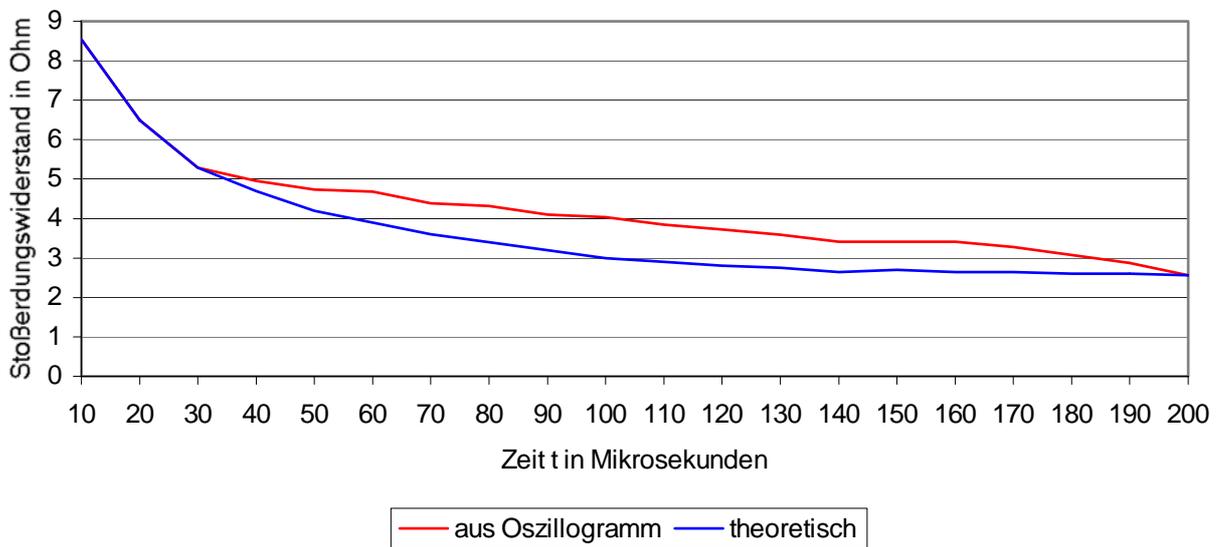
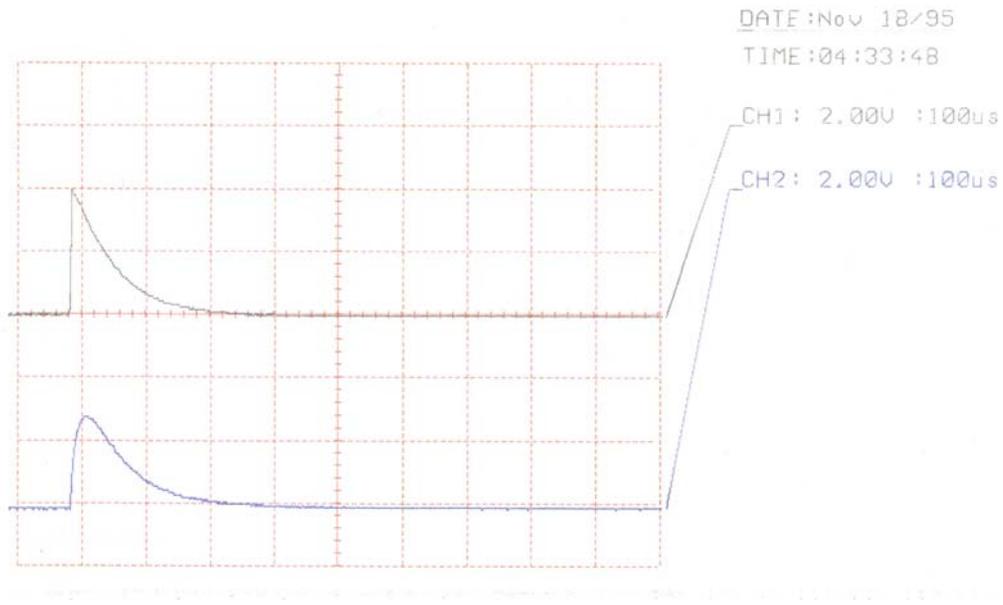


Abb. 5.12: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.1)



Oszillogramm 5.2: 4kV, Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW", 16 Erdspieße:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

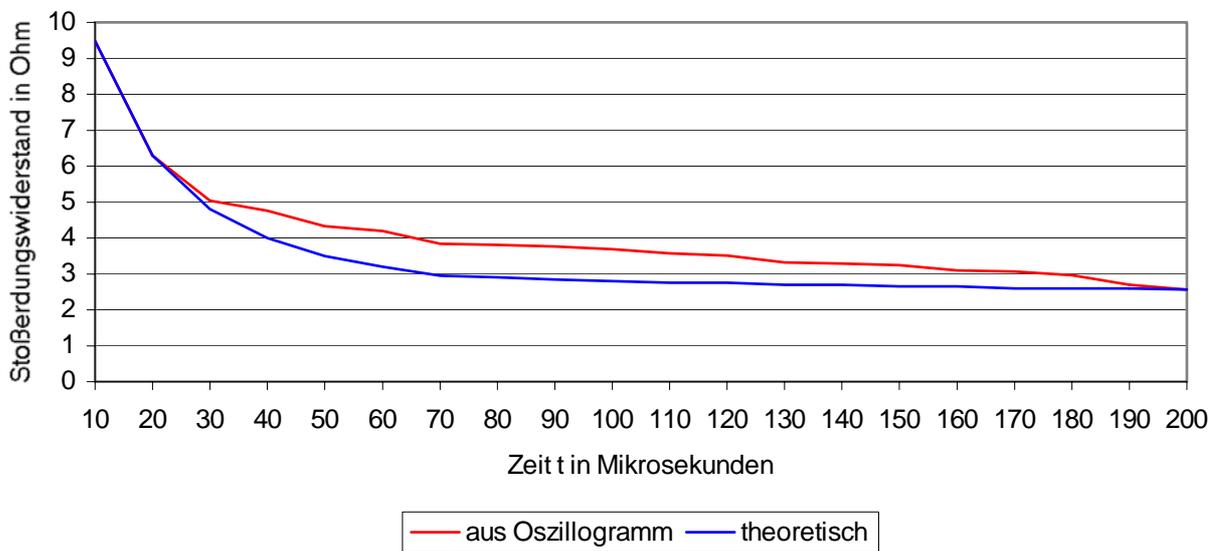
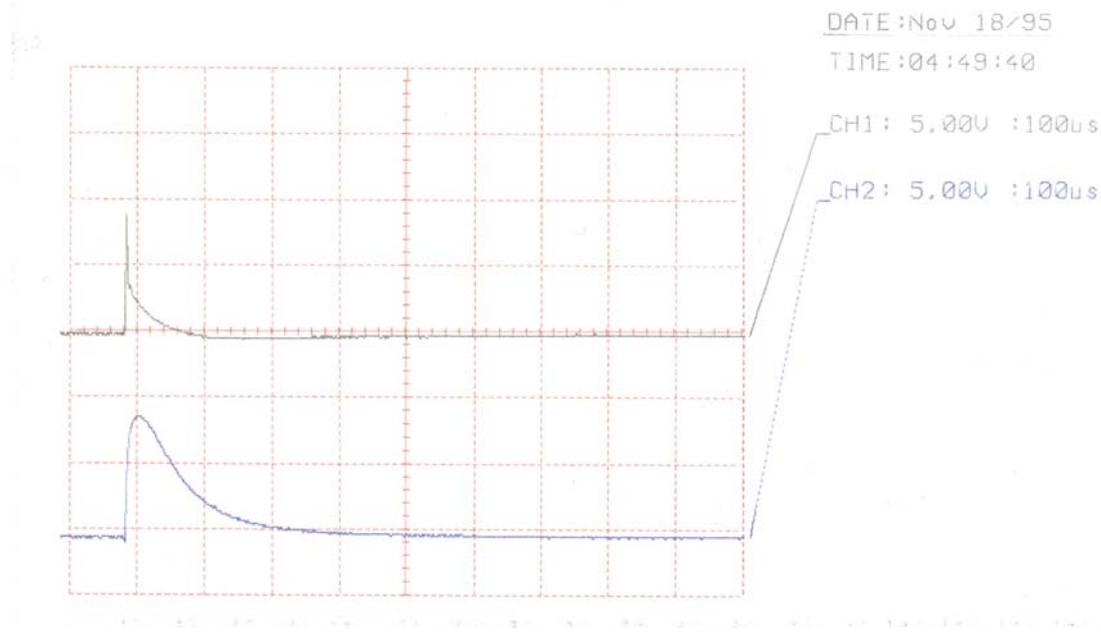


Abb. 5.13: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.2)



Oszillogramm 5.3: 8kV, Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW", 16 Erdspeie:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

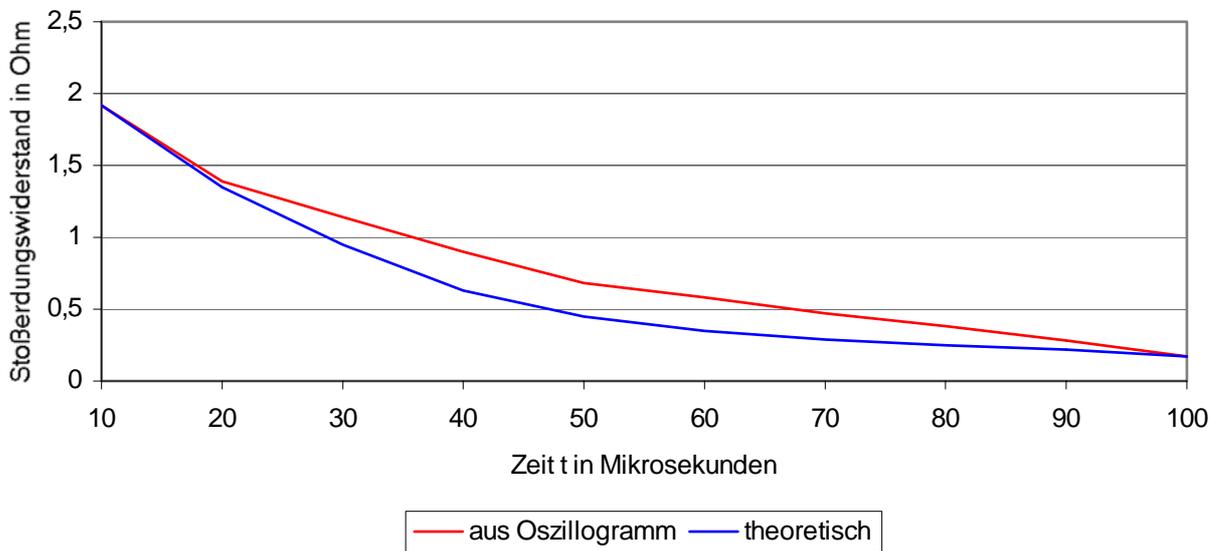
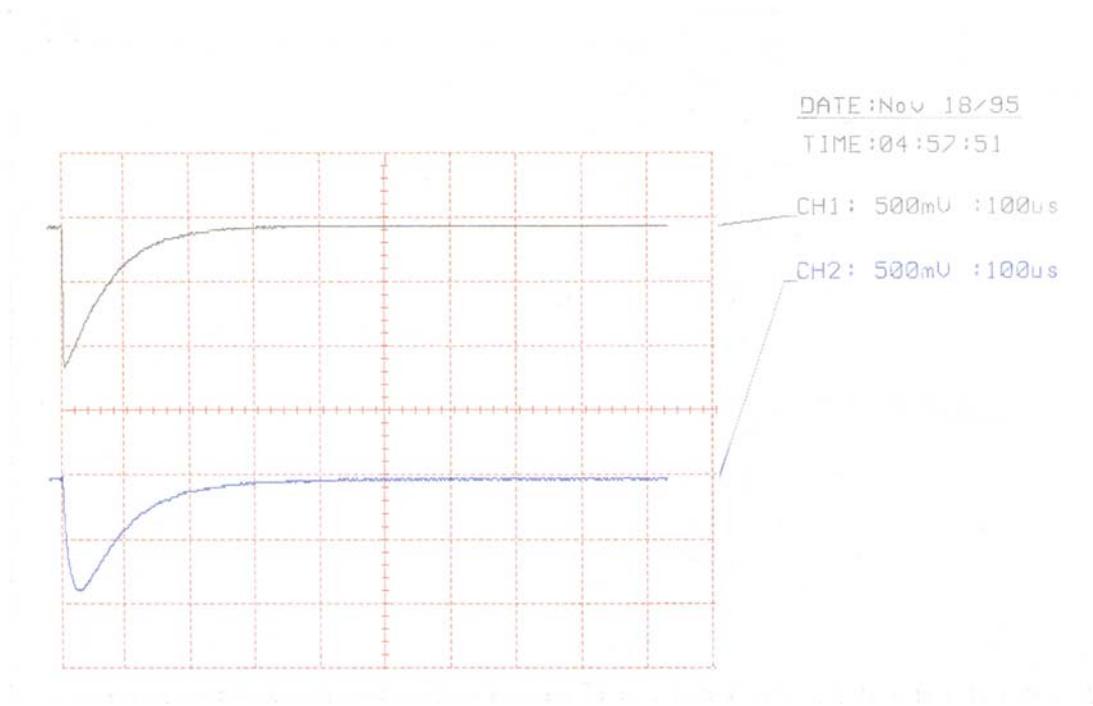


Abb. 5.14: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.3)



Oszillogramm 5.4: 1kV, Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH", 16 Erdspeie:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

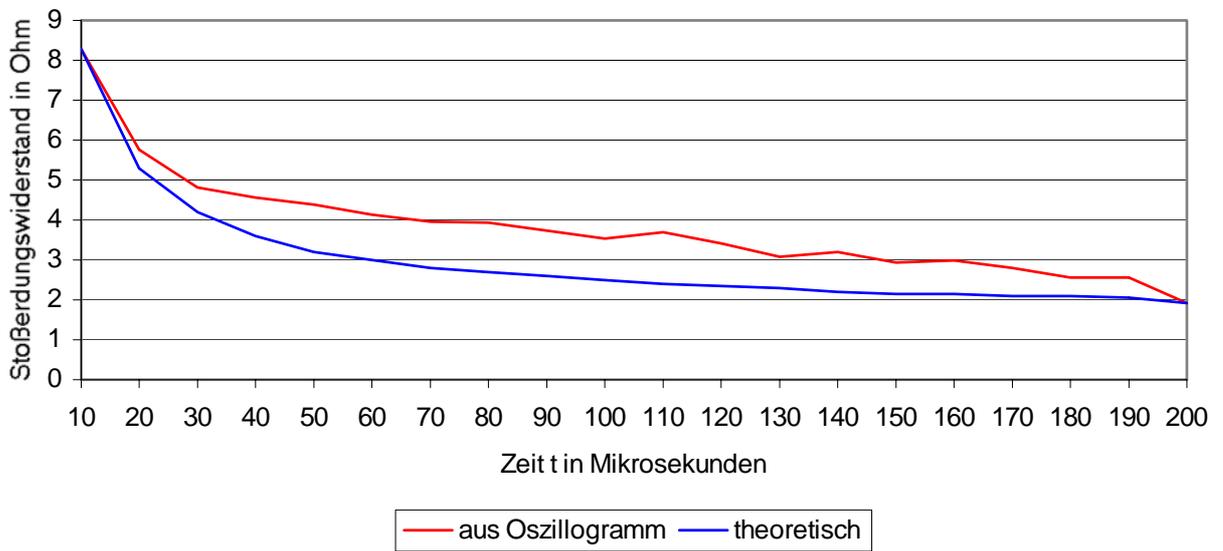
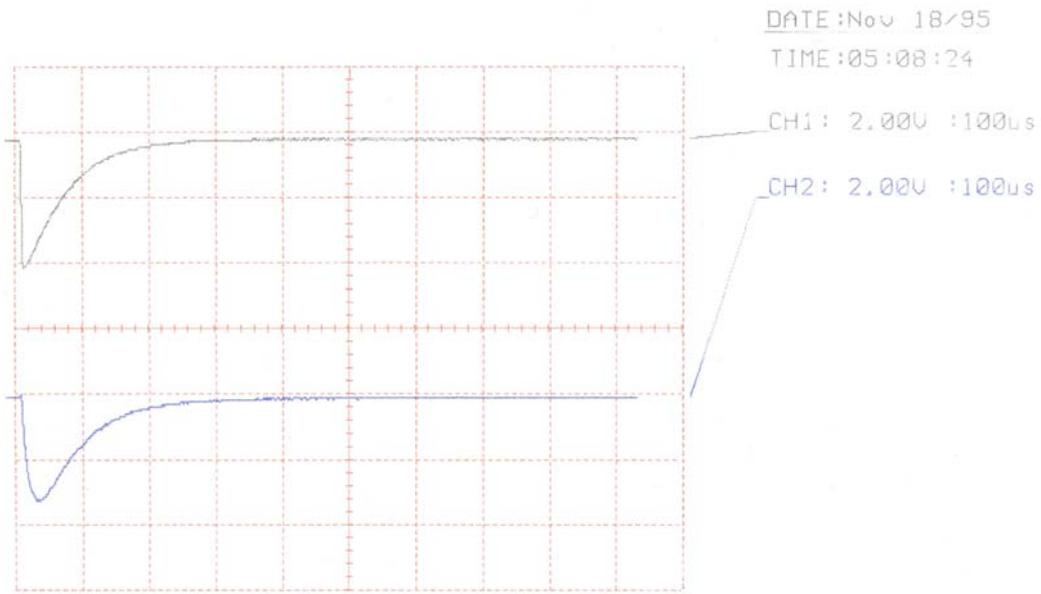


Abb. 5.15: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.4)



Oszillogramm 5.5: 4kV, Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH", 16 Erdspeieße:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

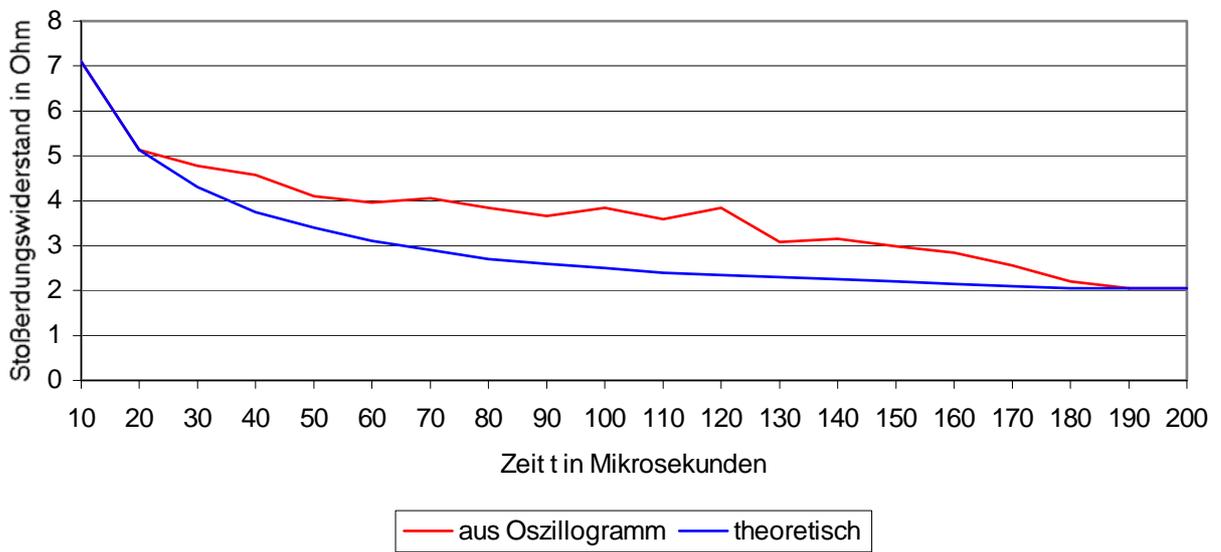
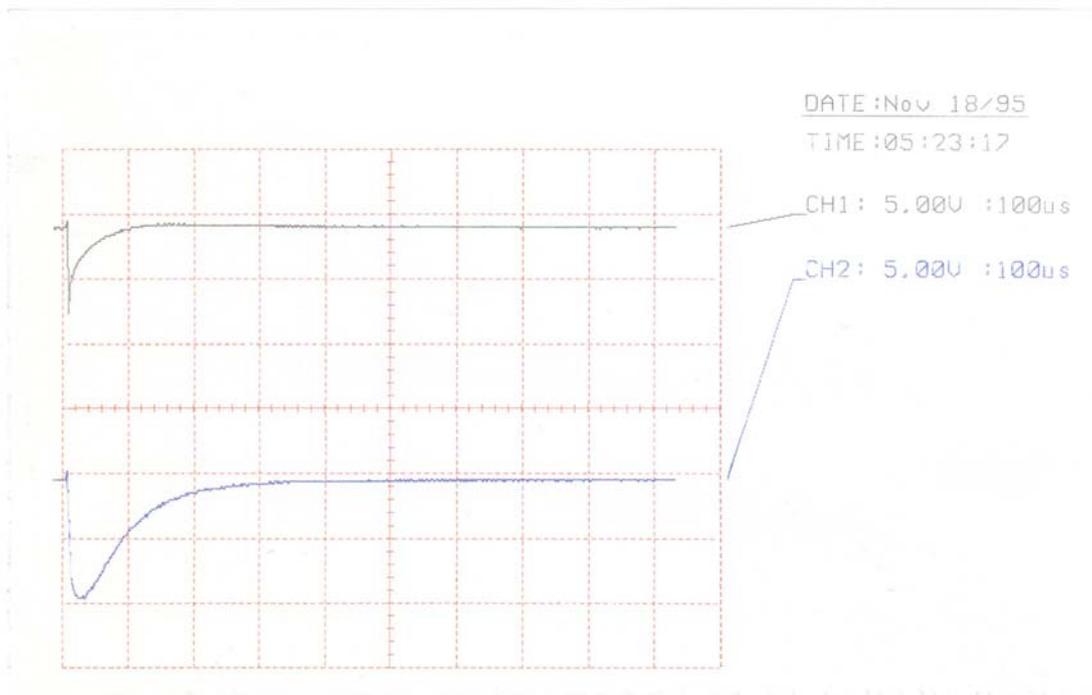


Abb. 5.16: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.5)



Oszillogramm 5.6: 8kV, Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH", 16 Erdspeie:
 (CH1: Spannung, CH2: Strom)

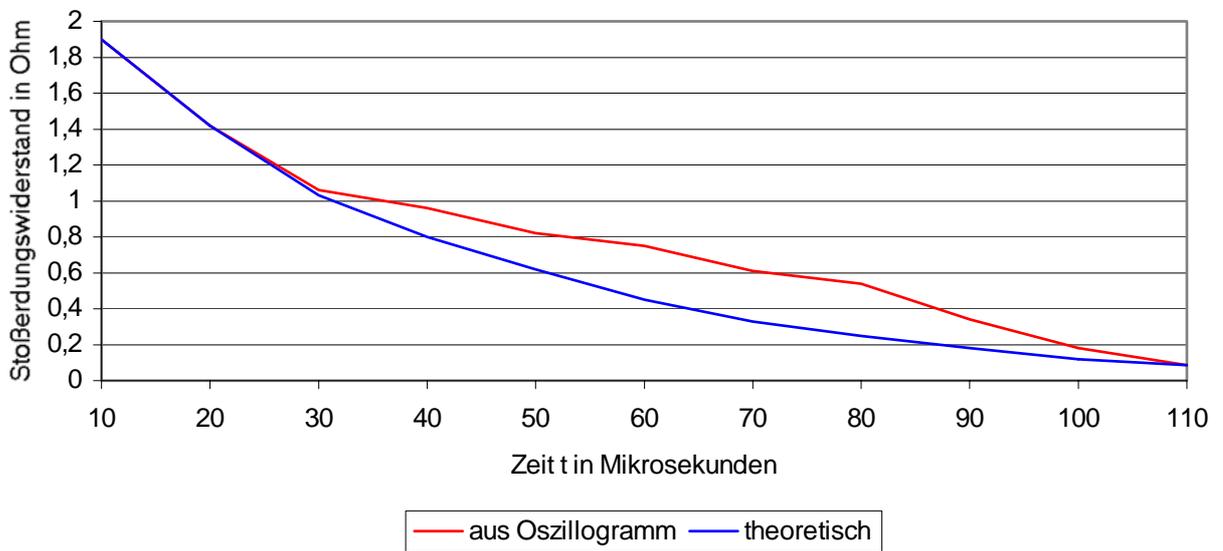


Abb. 5.17: Zeitlicher Verlauf des Stoßerdungswiderstandes
 (siehe Oszillogramm 5.6)

5.2 Messungen am Fundamenterder

5.2.1 AUFGABENSTELLUNG

Wie im Abschnitt 5.1 am Versuchsaufbau sollen auch am Fundamenterder sowohl der Ausbreitungswiderstand (siehe Abschnitt 5.2.3) als auch der Stoßerdungswiderstand (siehe Abschnitt 5.2.4) meßtechnisch bestimmt werden.

Die folgende Abbildung zeigt die Gebäudeabmessungen:

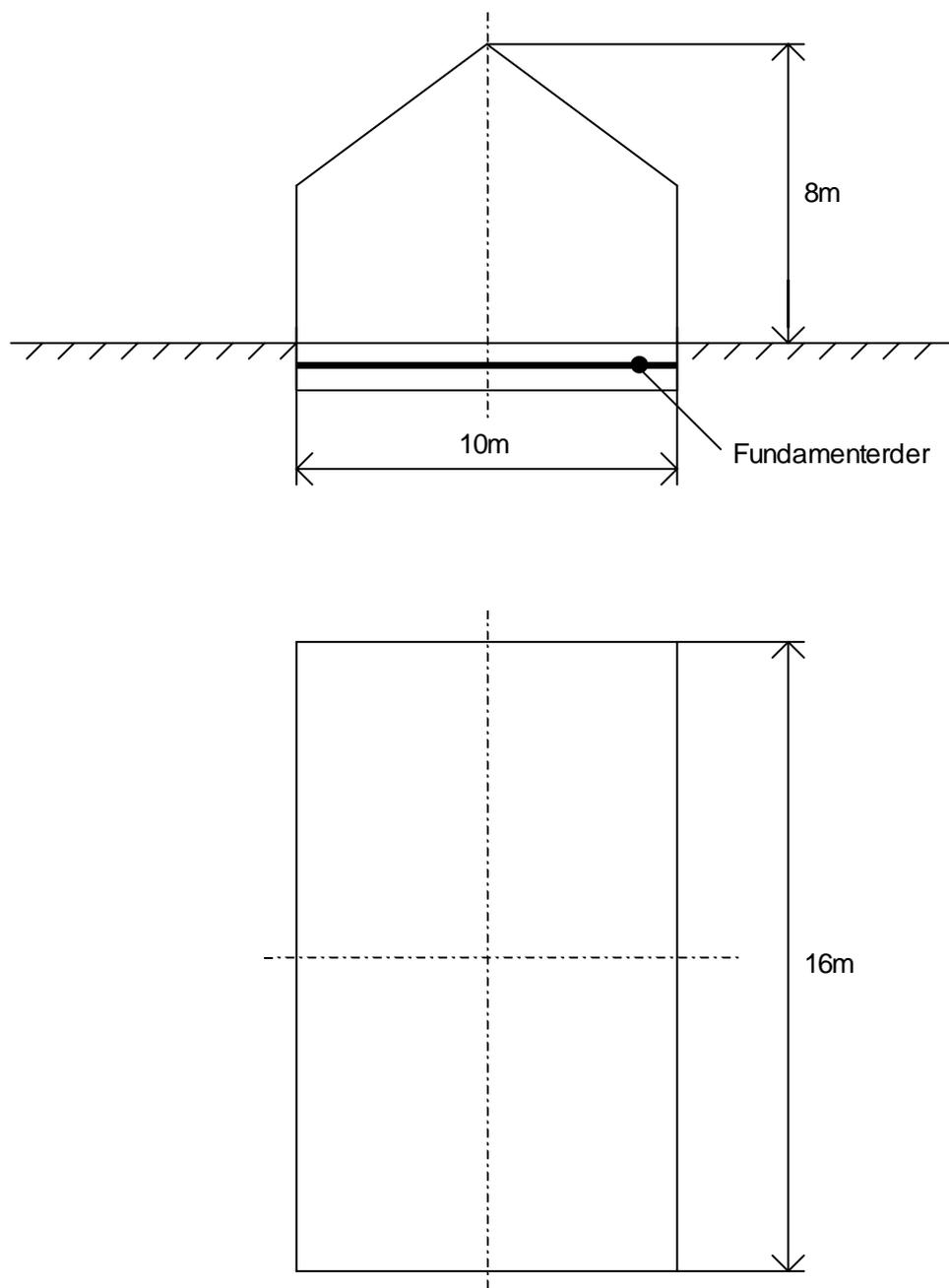


Abb. 5.18: Gebäudeabmessungen

Die Meßanordnung hat die folgende Gestalt (vergleiche auch mit Abbildung 5.1-1):

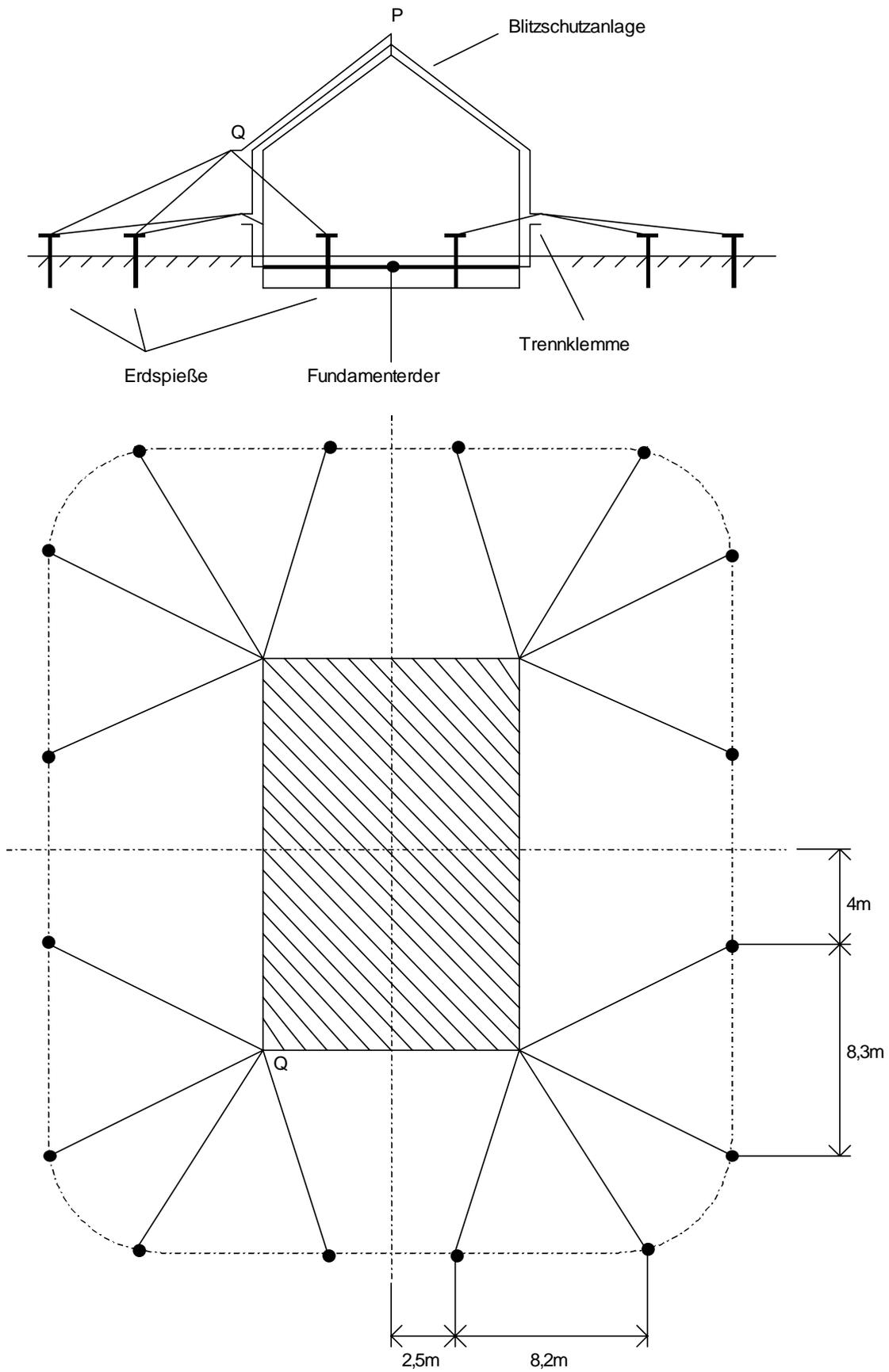


Abb. 5.19: Meßanordnung

Da am Punkt Q (siehe Abbildung 5.19) keine Ableitung mit einer Trennklemme vorhanden war, wurden die Erdungsleitungen direkt an der Dachkante von einer geöffneten Parallelklemme abgespannt

Die rechnerische Überprüfung der gemessenen Erdungswiderstände (Ausbreitungswiderstand, Stoßerdungswiderstand) macht es auch in diesem Fall notwendig, den spezifischen Erdwiderstand ρ_E des den Fundamenterde umgebenden Erdreiches zu ermitteln (siehe dazu Abschnitt 2.2.2).

5.2.2 MESSUNG DES SPEZIFISCHEN ERDWIDERSTANDES

Diese Messung wurde analog zur Messung des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes des Versuchsaufbaues (siehe Abschnitt 5.1.2) durchgeführt. Es wurde also wieder die Viersondenmeßmethode mit der Elektrodenanordnung nach Wenner (siehe Abbildung 5.2) und die gleiche Meßbrücke bzw. das gleiche digitale Erdungsmeßgerät verwendet.

Für die Berechnung des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_s gilt nach wie vor die Formel (2.3).

$$\rho_s = 2\pi \cdot a \cdot R \tag{2.3}$$

aAbstand zwischen den Erdspeissen (bzw. Tiefe, siehe Abschnitt 2.2.2.1.2)

Rmit der Meßbrücke gemessener Widerstand

ρ_s scheinbarer spezifischer Erdwiderstand

Es wurden die folgenden Meßwerte ermittelt (bezüglich der Berechnung des Medians siehe [106,S.57-58]):

(A) Messung mit der Erdungsmeßbrücke:

- Anordnung der Erdspeisse in Querrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10	20	30	50
R / Ω	12,00	6,00	3,97	2,05	0,85	0,30	---	0,10
ρ_s / Ωm	75,40	75,40	74,83	64,40	53,41	37,70	---	31,42

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_s :64,40 Ωm

Tab. 5.10: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand

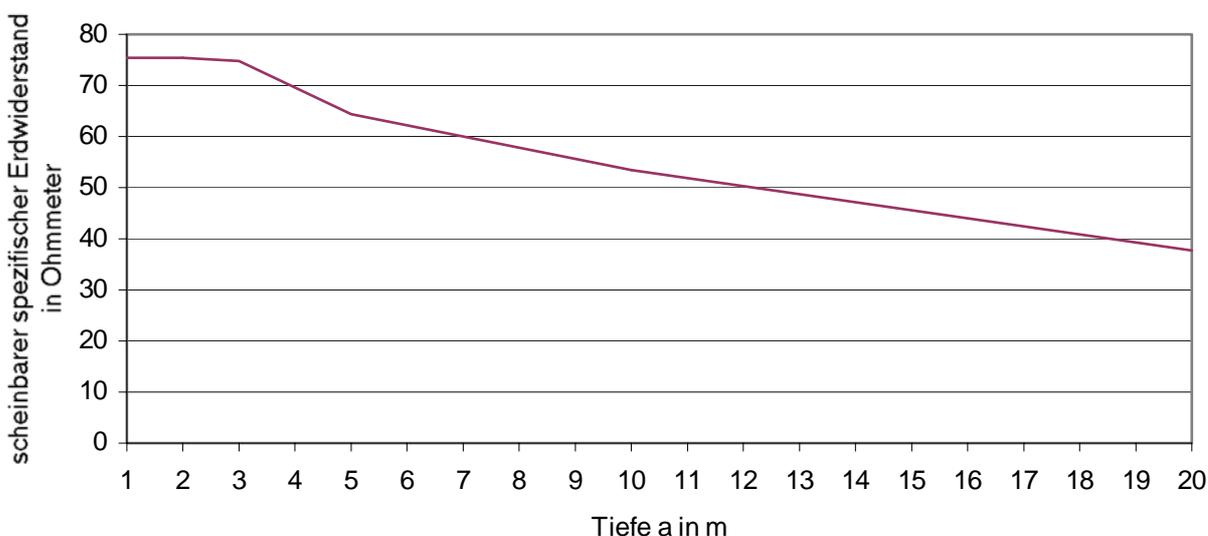


Abb. 5.20: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Querrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.10 und Gleichung (2.3))

(B) Messung mit dem digitalen Erdungsmeßgerät:

- Anordnung der Erdspeiße in Querrichtung (siehe Abbildung 5.2):

a in m	1	2	3	5	10	20	30	50
R / Ω	12,12	5,91	3,98	2,13	0,84	0,38	---	0,10
ρ_S / Ωm	76,15	74,27	75,02	66,92	52,78	47,75	---	31,42

Median (Zentralwert) des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes ρ_S : 66,92 Ωm

Tab. 5.11: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand

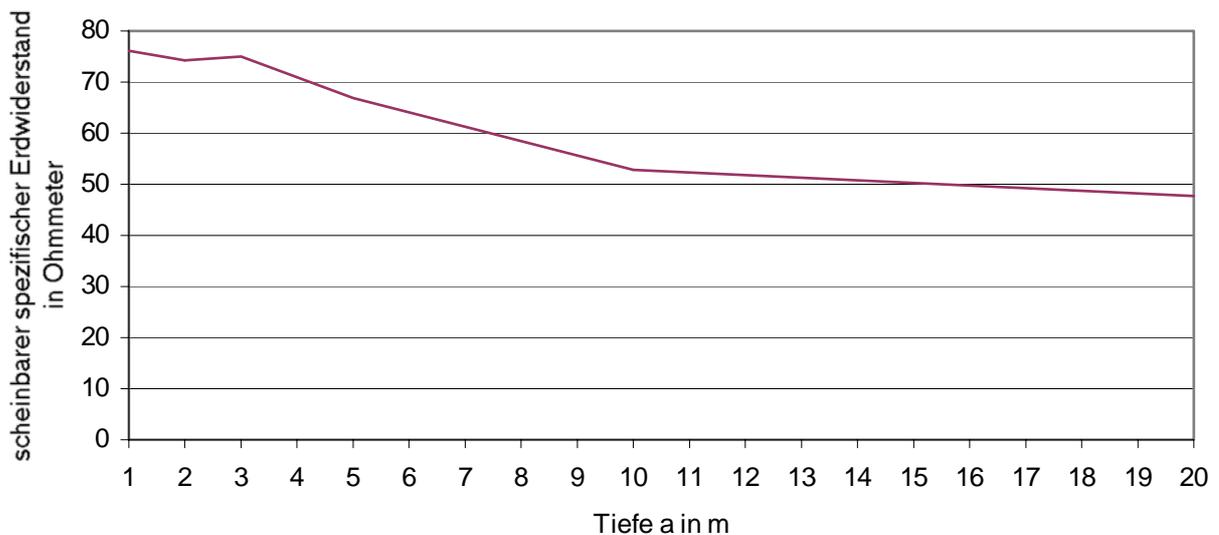


Abb. 5.21: Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand (Querrichtung) in Abhängigkeit von der Tiefe (=Sondenabstand) a (siehe Tabelle 5.11 und Gleichung (2.3))

5.2.3 MESSUNG DER AUSBREITUNGSWIDERSTÄNDE

Bei dieser Messung kamen wiederum die im Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Meßgeräte zum Einsatz. Es ist auch hier wieder darauf zu achten, daß eine Kurzschlußlasche zwischen die Anschlußklemmen E1 und E2 des analogen Meßgerätes eingelegt wird bzw. der Wahlschalter am digitalen Erdungsmeßgerät auf "3pole" steht.

Als Abstände zwischen dem Erdersystem und den Meßelektroden wurden gewählt:

Abstand Erdersystem-Sonde (S): 55m (siehe Abbildung 5.22)

Abstand Erdersystem-Hilfserder (HE): 120m (siehe Abbildung 5.22)

Es wurden die folgenden Messungen durchgeführt:

Der Ersatzwiderstand des gesamten Erdersystems (dieser Widerstandswert dient in weiterer Folge der näherungsweisen Berechnung des Stoßerdungswiderstandes -- siehe dazu Abschnitt 6) kann auch hier wieder nur in zwei Schritten gemessen werden (vergleiche mit Abschnitt 5.1.3). Die Ausbreitungswiderstände des Fundamenterders und der Sondenanordnung (Erdspeiße) werden getrennt voneinander bestimmt. Der Ersatzwiderstand des Gesamtsystems ergibt sich aus der Summe dieser beiden Widerstände.

(A) Messung mit der Erdungsmeßbrücke:

Ermittelte Widerstandswerte:

Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders (siehe Abbildung 5.22): $R_{AF}=1,85\Omega$

Ersatzwiderstand der Gesamtanordnung (siehe Abbildung 5.19): $R_A=14,24\Omega$

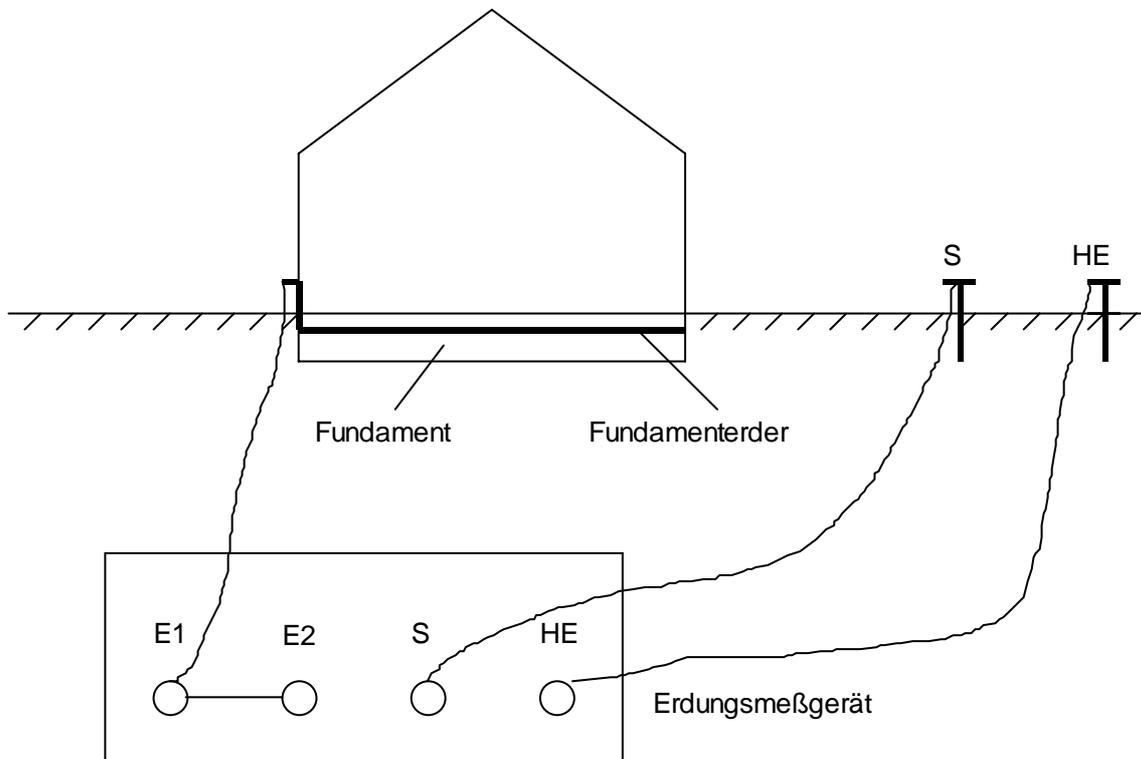


Abb. 5.22: Messung des Ausbreitungswiderstandes des Fundamenterders

(B) Messung mit dem digitalen Erdungsmeßgerät:

Der Ausbreitungswiderstand wurde in diesem Fall mit der automatischen Meßfrequenzwahl (AFC, das Meßgerät wählt die optimale Meßfrequenz aus) gemessen.

Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders (siehe Abbildung 5.22): $R_{AF}=1,95\Omega$

Ersatzwiderstand der Gesamtanordnung (siehe Abbildung 5.19): $R_A=14,26\Omega$

5.2.4 MESSUNG DES STOSSERDUNGSWIDERSTANDES

Zur Messung wurden folgende Geräte verwendet:

Hybridgenerator: MWB-Meßwandler-Bau-AG, Ser.Nr. 10 024

Oszilloskop: GOULD DSO 1602, 20MS/s

Shunt: ÖDK, $R=0,005125\Omega$

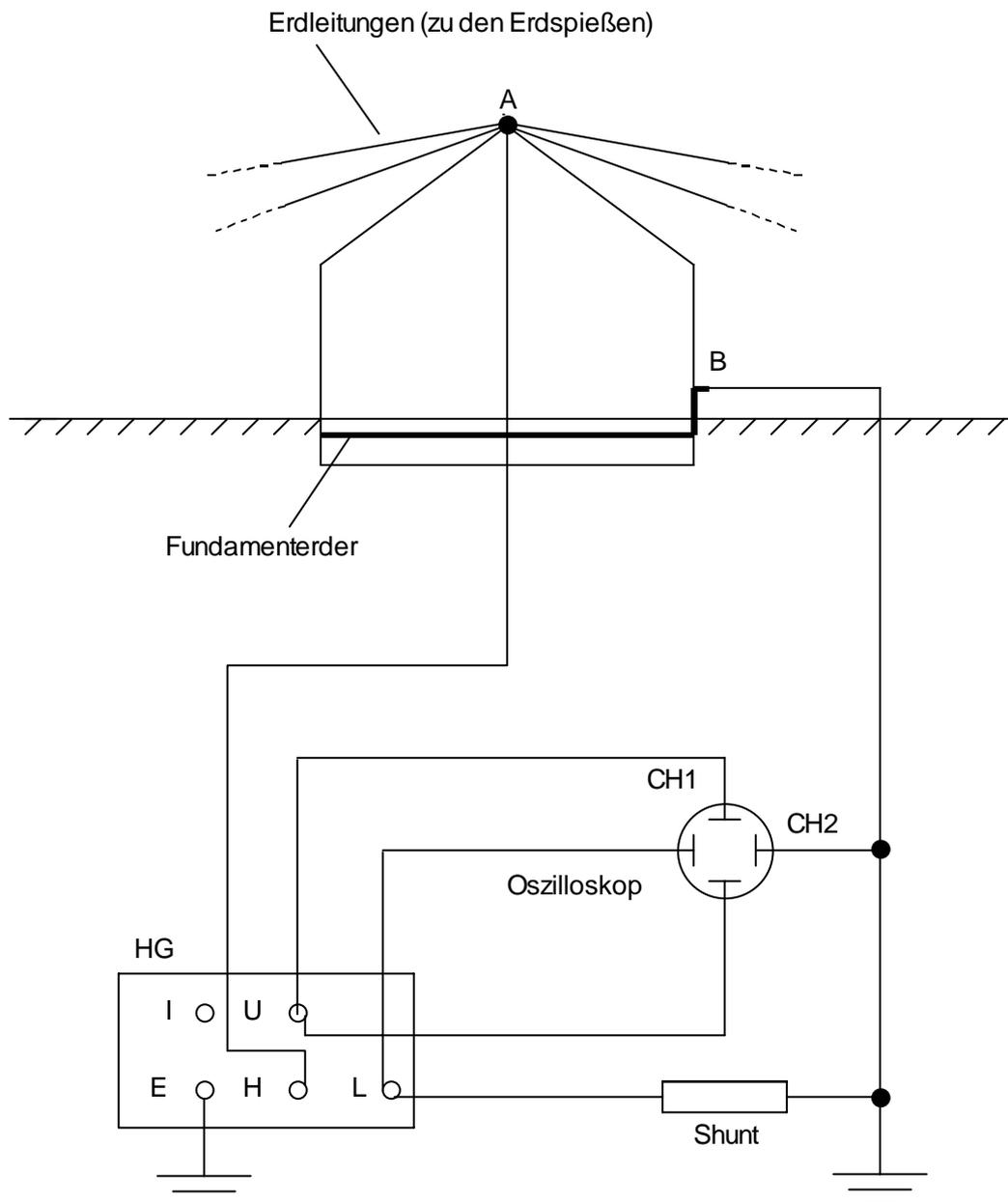
5.2.4.1 Meßschaltung

Geerdet waren (siehe Abbildung 5.23):

1. der Shunt
2. das Oszilloskop

Diese Erdung ist eine reine Schutzmaßnahme und hat demzufolge für die Meßwerterfassung keine Bedeutung.

Im übrigen wurde die Meßschaltung hier genauso ausgeführt wie schon am Versuchsaufbau (siehe Abschnitt 5.1.4.1). Die Meßmethode (Messung des Spannungs- und Stromscheitelwertes, siehe Abschnitt 5.1.4) war ebenfalls die gleiche.



- HGHybridgenerator (Regelbereich: 0-8kV)
- L.....Klemme "LOW"
- HKlemme "HIGH"
- EErdungsklemme
- CH1.....Oszilloskop - Kanal 1 (Spannungsmessung)
- CH2.....Oszilloskop - Kanal 2 (Strommessung)
- USpannungsmeßklemme (koaxial)
- I.....Strommeßklemme (koaxial)

Abb. 5.23: Messung des Stoßerdungswiderstandes

5.2.4.2 Messung bei variablem Spannungsscheitelwert

Der Aufbau der Meßschaltung kann dem Abschnitt 5.2.4.1 entnommen werden.

Am Hybridgenerator (Regelbereich: 0-8kV) wurden verschiedene Spannungen mit jeweils unterschiedlicher Polarität eingestellt. Die Strom- und Spannungswerte wurden mit dem Oszilloskop gemessen, und daraus der Stoßerdungswiderstand gemäß der Gleichung (2.105) in der Art

$$R_{St} = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}_E} \quad (2.105)$$

berechnet.

Mit dieser Messung kann die Spannungsabhängigkeit des Stoßerdungswiderstandes (Einfluß der Bodenionisation und des Fritteffektes, siehe auch Abschnitt 5.1.4.2) ermittelt werden (siehe Abbildung 5.24 und Abbildung 5.25).

Messung (1):

- Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW", 16 Erdspeiße

\hat{U}_E / kV	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{I}_E / A	40,98	78,05	117,07	195,12	234,15	292,68	370,73	---
R_{St} / Ω	24,40	25,62	25,62	20,50	21,35	20,50	18,88	---

Mittelwert des Stoßerdungswiderstandes R_{St} : 22,41 Ω

Tab. 5.12: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (16 Erdspeiße)

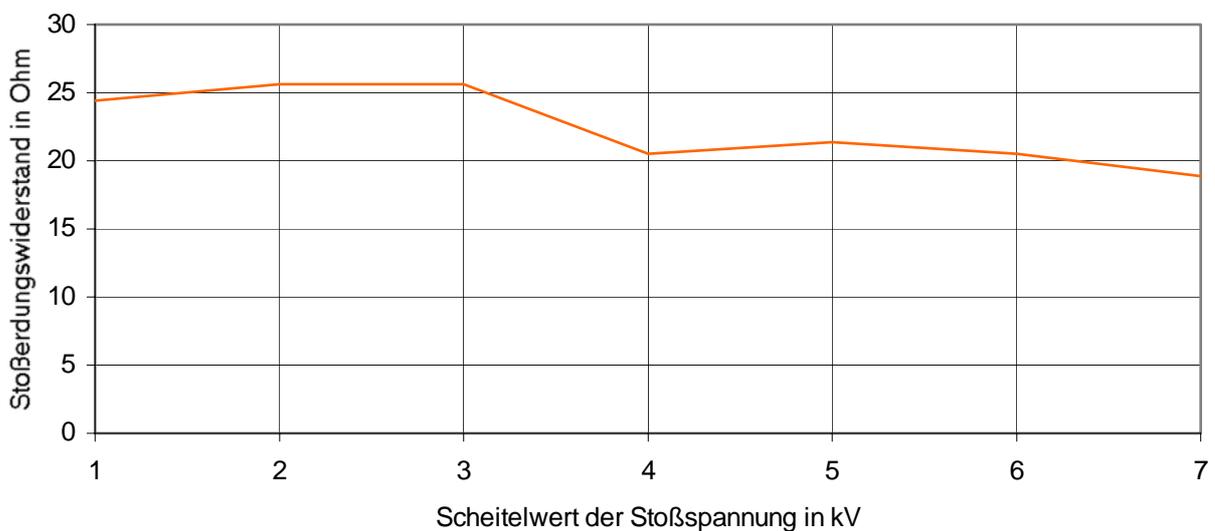


Abb. 5.24: Stoßerdungswiderstand in Abhängigkeit vom Spannungsscheitelwert (positive Stoßspannung)

Messung (2):

- Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH", 16 Erdspieße

\hat{u}_E / kV	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{i}_E / A	44,88	89,76	156,10	214,63	273,17	331,71	---	---
R_{St} / Ω	22,28	22,28	19,22	18,64	18,30	18,09	---	---

Mittelwert des Stoßerdungswiderstandes R_{St} : 19,80 Ω

Tab. 5.13: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (16 Erdspieße)

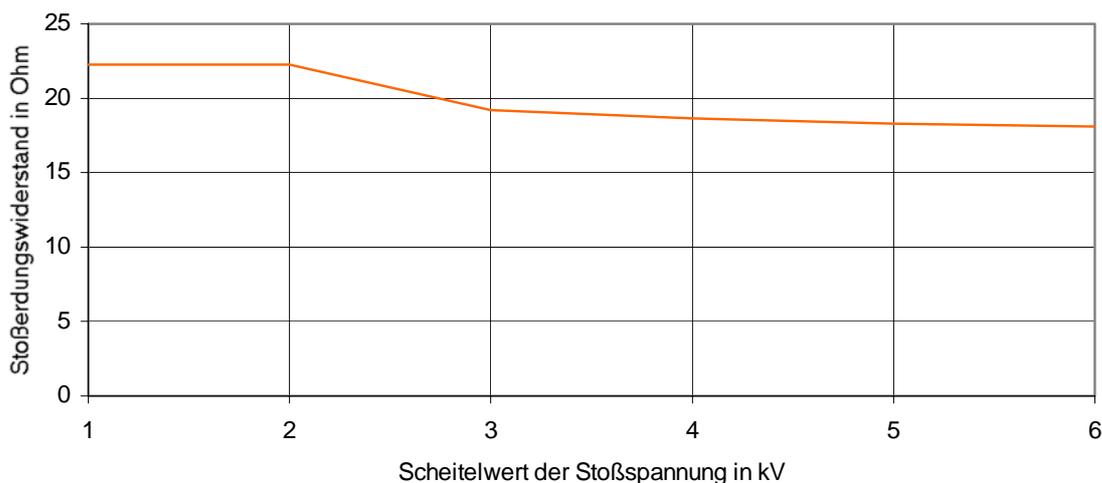


Abb. 5.25: Stoßerdungswiderstand in Abhängigkeit vom Spannungsscheitelwert (negative Stoßspannung)

Im Unterschied zu den jeweiligen Messungen am Versuchsaufbau (siehe Abschnitt 5.1.4.2) zeigt das hier vorliegende Meßergebnis, daß die Verkleinerung des Stoßerdungswiderstandes (Auftreten der Bodenionisation und des Fritteffektes) des Fundamenterders schon bei wesentlich kleineren Spannungsscheitelwerten (4kV bei positiver Stoßspannung bzw. 3kV bei negativer Stoßspannung, siehe Abbildung 5.24 und Abbildung 5.25) auftritt. Diese Tatsache ist mit hoher Wahrscheinlichkeit auf eine andere Zusammensetzung des Erdreiches zurückzuführen.

Messung (3):

Analog zur entsprechenden Messung im Abschnitt 5.1.4.2 wurden wieder alle Erdungsleitungen an den Erdspießen abgeklemmt und isoliert auf den Boden gelegt (Messung bei offenen Trennklemmen, siehe Abbildung 5.19), wobei die galvanische Verbindung der Erdungsleitungen am Punkt P (siehe Abbildung 5.19) wiederum erhalten blieb. Die Meßergebnisse zeigt die Tabelle 5.14.

Polarität	positiv	positiv	negativ	negativ
\hat{u}_E / kV	2	4	2	4
\hat{i}_E / A	42,93	85,85	78,05	169,76
R_{St} / Ω	46,59	45,59	25,62	23,56

Tab. 5.14: Messung des Stoßerdungswiderstandes bei variablem Spannungsscheitelwert (kein Erdspieß)

Für die Polaritäten gilt dabei (siehe auch Abbildung 5.23):

Polarität positiv: Klemme A = "HIGH", Klemme B = "LOW"

Polarität negativ: Klemme A = "LOW", Klemme B = "HIGH"

6. VERGLEICH ZWISCHEN BERECHNETEN UND GEMESSENEN ERDUNGSWIDERSTÄNDEN

6.1 Allgemeines

Die Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Werten der Erdungswiderstände (Ausbreitungswiderstand, Stoßerdungswiderstand) beruhen auf der Tatsache, daß sowohl die Berechnung als auch die Messung mit Fehlern behaftet sind.

(A) Die Fehlerquellen bei der Berechnung sind:

(1) FEM-Berechnung (siehe auch Abschnitt 3):

- Diskretisierungsfehler durch eine endliche Anzahl von finiten Elementen und die Wahl der Ansatzfunktion.
- Fehler bei der Lösung des Gleichungssystems (Systemgleichung) mit Hilfe von numerischen Verfahren.
- Fehler bei der Wahl des Materialmodelles (nicht exakte Nachbildung inhomogener, nichtlinearer oder anisotroper Medien).
- Rundungsfehler infolge der begrenzten arithmetischen Genauigkeit des verwendeten Rechners.

(2) Näherungsverfahren (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3.2 und 2.4.3.1.1):

Zum Faktum, daß die Näherungsverfahren schon von vornherein keine genauen Ergebnisse liefern, kommt noch, daß auch bei diesen Berechnungen die Materialmodelle so gut wie nie der Realität entsprechen, schon allein aufgrund der Tatsache, daß die meisten Materialkennwerte (z.B. der spezifische Erdwiderstand) meßtechnisch ermittelt werden müssen.

(B) Die Fehlerquellen bei der Messung sind:

- Fehler beim Ablesen und Auswerten der Meßwerte.
- Fehler durch Umwelteinflüsse (Temperatur, elektrische und magnetische Felder, ...).
- Fehler durch die Rückwirkung des Meßverfahrens auf die zu messende Größe.
- Fehler, die in Abhängigkeit von der Art der verwendeten Meßmethode (z.B. NF- oder HF-Messung bei Stoßerdungswiderständen) auftreten.
- Fehler, die infolge der Kontaktwiderstände der Anschlußklemmen, der Ausbreitungswiderstände der Meßsonden und Hilfserder und dergleichen mehr auftreten.

Dabei können die systematischen (deterministischen) Fehler (siehe [15,S.65-67], [87,S.92-93] und [89,S.5-7]), also die erfaßbaren Mängel der Meßgeräte und die direkt erfaßbaren Umwelteinflüsse (z.B. die Temperatur), durch Korrekturen eliminiert werden. Es kommen hierbei unter anderem die folgenden Methoden zum Einsatz:

1. Ermittlung von Korrekturkurven für die Meßgeräte durch einen Vergleich mit genaueren Meßinstrumenten (siehe auch [15,S.111], [16,S.3-4,194-195], [30,S.406-407] und [87,S.31]).
2. Korrektur von Temperaturfehlern. Üblicherweise ist der Einfluß der Umgebungstemperatur auf die Meßgeräte vernachlässigbar klein (z.B. hat Kupfer, das für die Meßspulen verwendet wird, einen Temperaturkoeffizienten von $4 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$, das entspricht einer Widerstandsänderung der Spule von 0,4% pro Kelvin, die aber durch Parallel- oder Vorwiderstände aus Manganin weitgehend kompensiert werden kann, siehe dazu auch [15,S.136,232], [89,S.53-54] und [16,S.27]). Sollte dennoch eine Korrektur von Temperatureinflüssen notwendig sein, dann kann dafür der auf den Meßgeräten (das gilt sowohl für analoge als auch für digitale Meßinstrumente) angegebene Temperaturkoeffizient (angegeben wird dieser Faktor gewöhnlich als Vielfaches der Fehlergrenzen pro

Kelvin) verwendet werden. Es ist jedoch möglich, diesen Aufwand durch das Einhalten der vorgegebenen Temperaturbereiche (Arbeitstemperatur und Nenntemperatur) und der vorgegebenen Klimaklasse (siehe dazu DIN40040 in [72,S.821]) zu vermeiden.

3. Der restliche Anteil an systematischen Fehlern (dazu zählen auch die nicht unmittelbar erfaßbaren Temperaturfehler) kann durch eine geschätzte Erweiterung des Vertrauensbereiches (man spricht in diesem Zusammenhang von der sogenannten Meßunsicherheit, siehe [15,S.97-101], [72,S.327], [16,S.5] und auch weiter unten) berücksichtigt werden. Für diese Abschätzung existiert keine Vorschrift, sie unterliegt dem Ermessen des Technikers und setzt daher eine gewisse Erfahrung voraus.

Die zufälligen (statistischen) Meßfehler, das heißt die Fehler die nicht unmittelbar erfaßbar sind (z.B. Ablesefehler, Beeinflussung durch nicht determinierbare Umweltfaktoren, ...), können mit Hilfe der sogenannten statistischen Fehlerrechnung berücksichtigt werden (siehe dazu [15,S.65-67,91-101], [16,S.4-6], [30,S.26-34], [87,S.93-121], [89,S.5,7-16] und [88,S.17-26]). Das bedeutet also, daß durch die Anwendung der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (siehe [106], [107], [108] und [109]) auf die ermittelten Meßwerte (es müssen bei jedem Meßvorgang mehrere Werte der gesuchten Größe bestimmt werden) die folgenden Daten für deren Angabe berechnet werden:

1. Der arithmetische Mittelwert (linearer Mittelwert) als ein Schätzwert für den wahren Wert.
2. Die Anzahl der Messungen.
3. Ein Unsicherheitsmaß (also der zu erwartende Fehler eines einzelnen Meßwertes in Bezug auf den arithmetischen Mittelwert, wie etwa die empirische Standardabweichung oder ein Schätzwert für die Varianz).
4. Die Vertrauensgrenzen oder der Vertrauensbereich (Bereich in dem der wahre Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit liegt). Nach DIN1319 (siehe [72,S.324-329]) wird vorgeschlagen, die Angabe des Vertrauensbereiches auf eine statistische Sicherheit von 95% zu beziehen (siehe dazu auch Tabelle 2.8 in [87,S.103], Tabelle 2.9 in [87,S.106], Tafel 5.1 in [15,S.96], Tafel 5.2 in [15,S.98], Tafel 1.1 in [16,S.4] und [88,S.24]).

6.2 Ausbreitungswiderstände

In den folgenden beiden Abschnitten werden nun die tatsächlich auftretenden Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Werten der Ausbreitungswiderstände ermittelt. In diesen Vergleich werden neben den Meßergebnissen (siehe Abschnitt 5.1.3) und den Ergebnissen aus der FEM-Berechnung (siehe Abschnitt 3.2.3.2) auch die Resultate aus einer näherungsweisen Berechnung (Berechnung mit Faustformeln, siehe dazu Abschnitt 2.3.3.2) mit einbezogen.

6.2.1 AUSBREITUNGSWIDERSTÄNDE DES VERSUCHSAUFBAUES

Der näherungsweisen Berechnung des Ausbreitungswiderstandes (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3.2) des gesamten Versuchsaufbaues (siehe Abbildung 5.3) wird das folgende, stark vereinfachte Modell (siehe Abbildung 6.1) zugrunde gelegt (siehe dazu auch Abbildung 5.1 und Abbildung 5.3):

Setzt man der Einfachheit halber voraus, daß alle Erdspeiße den gleichen Ausbreitungswiderstand haben, so muß gelten:

$$R_{A1} = R_{A2} = \dots = R_{A15} = R_{A16} \quad (6.1)$$

Diese Voraussetzung hat natürlich nur einen rein theoretischen Charakter. Betrachtet man jedoch die Ergebnisse der Näherungsberechnung des Ausbreitungswiderstandes (siehe Tabelle 6.1), so zeigt sich, daß diese Annahme durchaus ihre Berechtigung hat und überdies mit den folgenden Argumenten untermauert werden kann:

1. Alle Erdspeiße (Erdelektroden) bestehen aus dem selben Material (Silberstahl).
2. Die Erdspeiße haben alle die gleichen geometrischen Abmessungen (Durchmesser, Länge).
3. Es darf davon ausgegangen werden, daß innerhalb des räumlichen Bereiches des Versuchsaufbaues bezüglich der Beschaffenheit des Erdreiches (spezifischer Erdwiderstand, Struktur) für alle Erdelektroden identische Bedingungen vorliegen.
4. Die Einschlagtiefen sämtlicher Erdspeiße sind, abgesehen von kleinen Abweichungen, gleich groß.

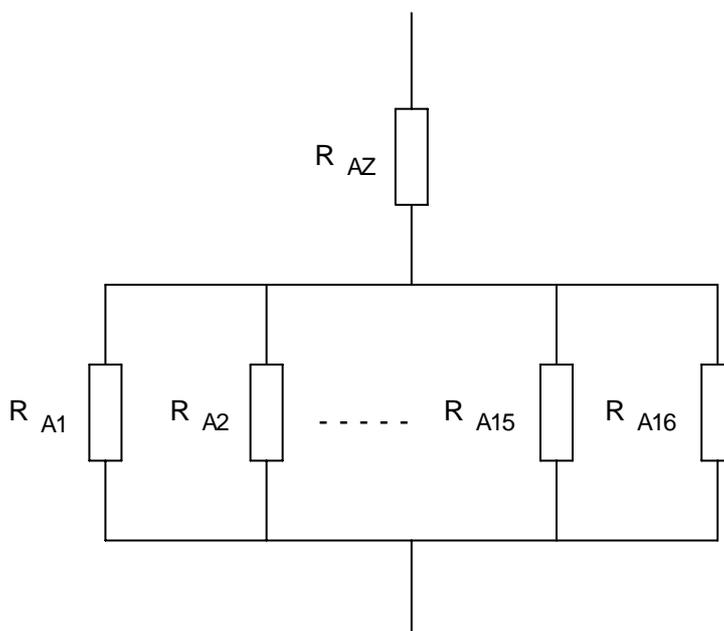


Abb. 6.1: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Versuchsaufbaues

Für den gesamten Ausbreitungswiderstand der Sondenanordnung (siehe hierzu auch Abschnitt 5.1.3) ergibt sich also (Voraussetzung: keine gegenseitige Beeinflussung, großer Abstand zwischen den Sonden):

$$R_{AS} = \frac{R_{A1}}{16} = \frac{R_{A2}}{16} = \dots = \frac{R_{A15}}{16} = \frac{R_{A16}}{16} \quad (6.2)$$

Da es sich bei den Erdspeissen um Staberder (Tiefenerder, Vertikalerder) handelt, gilt gemäß der Gleichung (2.78) für die Ausbreitungswiderstände der einzelnen Erder (alle Erdspeisse haben die gleichen geometrischen Abmessungen, siehe auch oben):

$$R_{A1} = R_{A2} = \dots = R_{A15} = R_{A16} = \frac{\rho_E}{2\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \quad (6.3)$$

d.....Durchmesser des Erdspeisses
l.....Länge des Erdspeisses (im Erdreich)
 ρ_Espezifischer Erdwiderstand

Für den Ausbreitungswiderstand der Sondenanordnung gilt demzufolge:

$$R_{AS} = \frac{\rho_E}{32\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \quad (6.4)$$

Für den Ausbreitungswiderstand der zentralen Elektrode (Elektrode im Kreismittelpunkt) gilt nach Gleichung (2.78):

$$R_{AZ} = \frac{\rho_E}{2\pi L} \cdot \ln \frac{4L}{D} \quad (6.5)$$

D.....Durchmesser der Zentralelektrode
L.....Länge des Zentralelektrode (im Erdreich)
 ρ_Espezifischer Erdwiderstand

Für den Ausbreitungswiderstand des Gesamtsystems ergibt sich nun aus den Gleichungen (6.4) und (6.5):

$$R_A = R_{AZ} + R_{AS} = \frac{\rho_E}{2\pi L} \cdot \ln \frac{4L}{D} + \frac{\rho_E}{32\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \quad (6.6)$$

Der näherungsweise Berechnung des Ausbreitungswiderstandes werden dabei die Mediane (Zentralwerte, siehe dazu [106,S.57-58]) der gemessenen spezifischen Erdwiderstände (siehe Abschnitt 5.1.2, Tabelle 5.1 bis Tabelle 5.4) zugrundegelegt.

Mit

$l=0,25\text{m}$, $d=10\text{mm}$ (Erdspeisse) und
 $L=0,50\text{m}$, $D=18\text{mm}$ (Zentralelektrode)

sowie

- (1) $\rho_{E1}=80,11\Omega\text{m}$ (analog / Nord-Süd, siehe Tabelle 5.1)
- (2) $\rho_{E2}=54,66\Omega\text{m}$ (analog / Ost-West, siehe Tabelle 5.2)
- (3) $\rho_{E3}=83,88\Omega\text{m}$ (digital / Nord-Süd, siehe Tabelle 5.3)
- (4) $\rho_{E4}=55,61\Omega\text{m}$ (digital / Ost-West, siehe Tabelle 5.4)

ergibt sich für die zugehörigen Ausbreitungswiderstände (siehe Abbildung 6.1) gemäß der Formel (6.6):

- (1) $R_{A1}=134,80\Omega$
- (2) $R_{A2}=91,98\Omega$
- (3) $R_{A3}=141,14\Omega$
- (4) $R_{A4}=93,57\Omega$

Aus einem Vergleich dieser Berechnungsergebnisse mit den ermittelten Meßwerten (siehe Abschnitt 5.1.3 bzw. Tabelle 6.1) läßt sich schließen, daß sich für das vorgegebene Erdersystem das elektrische Strömungsfeld im Erdreich überwiegend in der Richtung Ost-West in den Schichten des kleineren spezifischen Erdwiderstandes ausbildet.

Als Vergleichswert für die unten angeführte Tabelle 6.1 (die digitalen Meßwerte für den Ausbreitungswiderstand wurden der Tabelle 5.5 aus dem Abschnitt 5.1.3 entnommen) wird der Ausbreitungswiderstand $R_{A4}=93,57\Omega$ (digital / Ost-West, siehe oben) verwendet.

Die folgende Tabelle zeigt nun die Differenzen (absolute Fehler) zwischen den Meßwerten und den Berechnungsergebnissen, sowie die daraus resultierenden relativen Fehler (Fehler in %, d.h. absolute Fehler bezogen auf die zugehörigen Meßwerte).

AUSBREITUNGSWIDERSTAND IN Ω				
Frequenz / Hz	94	105	111	128
Meßwert	91,30	91,20	91,10	91,00
FEM-Ber.	90,61	90,61	90,61	90,61
Differenz	0,69	0,59	0,49	0,39
Fehler in %	0,76	0,65	0,54	0,43
Näherungsber.	93,57	93,57	93,57	93,57
Differenz	2,27	2,37	2,47	2,57
Fehler in %	2,49	2,60	2,71	2,82

Tab. 6.1: Ausbreitungswiderstände des Versuchsaufbaues

Aus der Tabelle 6.1 wird ersichtlich, daß die Resultate der Näherungsberechnung nur sehr geringfügig von den meßtechnisch ermittelten Ausbreitungswiderständen abweichen. Es ist daher durchaus legitim, im Falle stationärer elektrischer Strömungsfelder (Gleichstrom, nur rein Ohmsche Widerstände), wie sie für die Berechnung von Ausbreitungswiderständen im allgemeinen zur Anwendung kommen (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3, speziell Gleichung (2.63) bis Gleichung (2.73)), mit einem Ersatzschaltbild gemäß der Abbildung 6.1 zu arbeiten.

Weiters zeigt die Tabelle 6.1, daß sich auch die Methode der finiten Elemente (FEM, siehe dazu Abschnitt 3 und besonders Abschnitt 3.2.3.3.2) sehr gut für die Berechnung von Ausbreitungswiderständen beliebiger Erdungsanlagen eignet. Überdies bietet dieses numerische Verfahren die Möglichkeit, mit zeitlich veränderlichen Strömen, also auch mit sinusförmigen Wechselströmen (z.B. technische Wechselströme mit 50Hz), zu rechnen.

6.2.2 AUSBREITUNGSWIDERSTÄNDE DES FUNDAMENTERDERS

Für die näherungsweise Ermittlung des Ausbreitungswiderstandes eines Fundamenterders gibt es im wesentlichen die beiden folgenden Methoden (siehe [4,S.59], [9,S.73], [11,S.159-160] und [19,S.53-54]):

- (1) Man berechnet die vom Fundamenterder eingeschlossene Fläche A_F (Fundamentfläche) und ermittelt daraus den Durchmesser eines flächengleichen Kreises. Mit diesem Ersatzdurchmesser kann dann der Ausbreitungswiderstand eines Ersatzerders (Ring- oder Plattenerder, siehe Abschnitt 2.3.3.2) berechnet werden. Für den Ersatzdurchmesser D gilt dabei:

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot A_F}{\pi}} \quad (6.7)$$

- (2) Man berechnet das vom Fundament eingeschlossene Volumen V_F und bestimmt daraus den Durchmesser einer inhaltsgleichen Halbkugel. Mit dem so erhaltenen Ersatzdurchmesser kann auch hier wieder der Ausbreitungswiderstand eines Ersatzerders (Halbkugelerder, siehe dazu Abschnitt 2.3.3.2) berechnet werden. Für den Ersatzdurchmesser D gilt in diesem Fall:

$$D = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot V_F}{\pi}} \quad (6.8)$$

Die Ergebnisse der Näherungsberechnung beziehen sich auf das Modell (1), wobei als Ersatzerder ein Plattenerder gewählt wurde (bezüglich dieser Wahl siehe Abschnitt 3.2.3.2). Für den Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders gilt nun entsprechend den Gleichungen (2.84) und (6.7):

$$R_{AF} \approx \frac{\rho_E}{\sqrt{\frac{16 \cdot A_F}{\pi}}} \quad (6.9)$$

Für den Ausbreitungswiderstand des gesamten Erdersystems (siehe Abbildung 5.19, sinngemäß ist auch hier das Ersatzschaltbild aus der Abbildung 6.1 gültig) erhält man aus den Gleichungen (6.4) und (6.9) analog zur Gleichung (6.6):

$$R_A = R_{AF} + R_{AS} = \frac{\rho_E}{\sqrt{\frac{16 \cdot A_F}{\pi}}} + \frac{\rho_E}{32\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \quad (6.10)$$

R_{AF} Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders (siehe Abbildung 5.19)

R_{AS} Ausbreitungswiderstand der Sondenanordnung (siehe Abbildung 5.19)

Die Grundlage für die näherungsweise Berechnung der Ausbreitungswiderstände bilden die Mediane (Zentralwerte, siehe dazu [106,S.57-58]) der gemessenen spezifischen Erdwiderstände (siehe Abschnitt 5.2.2, Tabelle 5.11 und Tabelle 5.12).

Mit

$l=0,25\text{m}$, $d=10\text{mm}$ (Erdspieße) und

$A_F=10\text{m} \cdot 16\text{m}$ (Fundament, siehe Abbildung 5.18)

sowie

(1) $\rho_{E1}=64,40\Omega\text{m}$ (analog / Ost-West, siehe Tabelle 5.11)

(2) $\rho_{E2}=54,66\Omega\text{m}$ (digital / Ost-West, siehe Tabelle 5.12)

ergibt sich für die zugehörigen Ausbreitungswiderstände gemäß den Formeln (6.9) und (6.10):

(1) $R_{AF1}=2,26\Omega$

$R_{A1}=14,06\Omega$

(2) $R_{AF2}=1,91\Omega$

$R_{A2}=11,93\Omega$

Als Vergleichswerte für die unten angeführte Tabelle 6.2 (die digitalen Meßwerte für den Ausbreitungswiderstand wurden dem Abschnitt 5.2.3 entnommen) werden die Ausbreitungswiderstände $R_{AF2}=1,91\Omega$ und $R_{A2}=11,93\Omega$ (siehe oben) verwendet.

Die Unterschiede zwischen den Meßergebnissen und den Resultaten aus den Berechnungen werden in der nachfolgenden Tabelle sowohl als absolute Fehler (Differenzen) als auch als relative Fehler (Fehler in %, absolute Fehler bezogen auf die zugehörigen Meßwerte) dargestellt.

AUSBREITUNGSWIDERSTAND IN Ω		
Erdertyp	Fundamenterder: R_{AF}	Gesamtes Erdersystem: R_A
Meßwert	1,95	14,26
Näherungsberechnung	1,91	11,93
Differenz	0,04	2,33
Fehler in %	2,05	16,34

Tab. 6.2: Ausbreitungswiderstände des Fundamenterders

Der Vergleich der Näherungswerte mit den Meßwerten (siehe Tabelle 6.2) führt zu folgendem Ergebnis:

1. Ausbreitungswiderstand R_{AF} des Fundamenterders:

Der näherungsweise berechnete Wert (siehe Gleichung (6.9)) stimmt sehr gut mit dem Meßwert überein. Die Anwendung der Formel (6.9) zur Ermittlung des Ausbreitungswiderstandes ist demzufolge durchaus sinnvoll.

2. Ausbreitungswiderstand R_A des gesamten Erdersystems:

Die Abweichung des berechneten Wertes (siehe Gleichung (6.10)) vom Meßwert ist unter anderem auf Rechenungenauigkeiten und/oder Meßfehler zurückzuführen. Davon abgesehen liefert das Näherungsverfahren auch hier wieder zufriedenstellende Resultate (siehe dazu auch Abschnitt 6.2.1).

6.3 Stoßerdungswiderstände

Bei den Stoßerdungswiderständen gelten für die Differenz zwischen den berechneten und gemessenen Werten ebenfalls die im Abschnitt 6.1 angestellten Überlegungen.

Üblicherweise unterscheidet sich der Stoßerdungswiderstand R_{St} vom Ausbreitungswiderstand R_A . Es ist jedoch zulässig, für Ringerder, Maschenerder, Fundamenterder, Vertikalerder (bis ca. 10m Länge) und Horizontalerder (bis zu einer Länge von etwa 30m), den Stoßerdungswiderstand dem Ausbreitungswiderstand gleichzusetzen (siehe hierzu auch [1,S.498], [7,S.171] und [34,S.20]).

Es gilt also:

$$R_{St} = R_A \quad (6.11)$$

Aus der Gleichung (2.92) folgt daraus für den Korrekturfaktor α (siehe dazu Abschnitt 2.4.3.1.1, Gleichung (2.92) bis Gleichung (2.98)):

$$\alpha = 1 \quad (6.12)$$

Somit können zur näherungsweisen Berechnung der Stoßerdungswiderstände alle Faustformeln aus dem Abschnitt 2.3.3.2 verwendet werden.

Wie sich nun die Berechnungs- und Meßfehler auf den Unterschied zwischen den tatsächlich (rechnerisch und meßtechnisch) ermittelten Werten der Stoßerdungswiderstände auswirken, zeigen die nachfolgenden Tabellen und Diagramme.

6.3.1 STOSSERDUNGSWIDERSTAND DES VERSUCHSAUFBAUES

Aus den Abbildungen 5.1 und 5.4 läßt sich für den Versuchsaufbau das folgende Ersatzschaltbild konstruieren (vergleiche auch mit Abbildung 6.1):

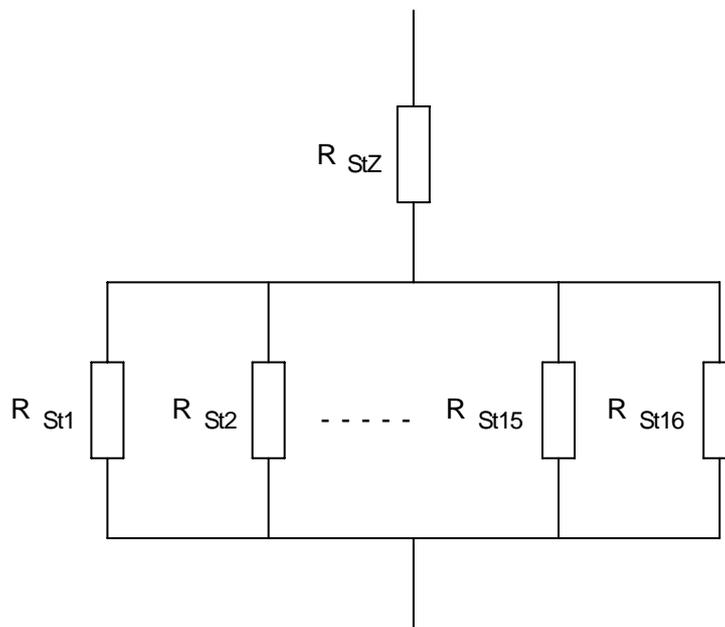


Abb. 6.2: Vereinfachtes Ersatzschaltbild

Geht man davon aus, daß die Stoßerdungswiderstände der Erdspeiße alle gleich groß sind (siehe dazu auch Gleichung (6.1) nebst Anmerkung), daß also

$$R_{St1} = R_{St2} = \dots = R_{St15} = R_{St16} \tag{6.13}$$

gilt, so erhält man aus der Abbildung 6.2 für den Stoßerdungswiderstand:

$$R_{St} = R_{Siz} + \frac{R_{St1}}{16} = \dots = R_{Siz} + \frac{R_{St16}}{16} \tag{6.14}$$

Wendet man an dieser Stelle die Formel (6.11) an, so resultiert daraus (siehe dazu auch Gleichung (6.2) und Gleichung (6.6)):

$$R_{St} = R_A = R_{AZ} + \frac{R_{A1}}{16} = \dots = R_{AZ} + \frac{R_{A16}}{16} = R_{AZ} + R_{AS} \tag{6.15}$$

Gemäß der Gleichung (6.6) gilt also:

$$\begin{aligned} R_{St} = R_A = R_{AZ} + R_{AS} &= \frac{\rho_E}{2\pi L} \cdot \ln \frac{4L}{D} + \frac{\rho_E}{32\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} = \\ &= 83,38 \Omega + 10,19 \Omega = 93,57 \Omega \end{aligned} \tag{6.16}$$

- DDurchmesser des zentralen Erders
- LLänge des zentralen Erders (im Erdreich)
- dDurchmesser der Erdspeiße
- lLänge der Erdspeiße (im Erdreich)
- ρ_E spezifischer Erdwiderstand

Die Näherungswerte der Stoßerdungswiderstände sind also mit den Näherungswerten der Ausbreitungswiderstände identisch (siehe oben und [1,S.498], [7,S.171] und [34,S.20]).

An dieser Stelle sollen nun die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsmethoden (FEM, Näherungsverfahren) mit den Resultaten der Messungen verglichen werden.

Die Meßwerte für die nachfolgende Tabelle wurden der Tabelle 5.6 (siehe Abschnitt 5.1.4.2), die FEM-Werte der Tabelle 3.8 (siehe Abschnitt 3.2.3.4.2) entnommen. Die relativen Fehler (Fehler in %) beziehen sich jeweils auf die angegebenen Meßwerte des Stoßerdungswiderstandes.

STOSSERDUNGSWIDERSTÄNDE IN Ω				
\hat{U}_E in kV	1	2	3	4
Meßwert	6,61	6,83	6,99	6,83
FEM-Ber.	6,58	6,58	6,58	6,58
Differenz	0,03	0,25	0,41	0,25
Fehler in %	0,45	3,66	5,87	3,66
Näherungsber.	93,57	93,57	93,57	93,57
Differenz	-86,96	-86,74	-86,58	-86,74
\hat{U}_E in kV	5	6	7	8
Meßwert	6,74	6,83	6,64	4,56
FEM-Ber.	6,58	6,58	6,58	6,58
Differenz	0,16	0,25	0,06	-2,02
Fehler in %	2,37	3,66	0,90	-44,30
Näherungsber.	93,57	93,57	93,57	93,57
Differenz	-86,83	-86,74	-86,93	-89,01

Tab. 6.3: Stoßerdungswiderstände des Versuchsaufbaues in Abhängigkeit vom Scheitelwert der Stoßspannung (positive Stoßspannung)

Wie die Tabelle 6.3 zeigt, eignet sich die Methode der finiten Elemente (FEM) in einem verhältnismäßig großen Bereich (in bezug auf den Spannungsscheitelwert) sehr gut zur Berechnung von Stoßerdungswiderständen ausgedehnter Erdersysteme. Größere Fehler treten erst bei Spannungsscheitelwerten auf, die mit Erscheinungen wie der Bodenionisation oder dem Fritteffekt (siehe Abschnitt 2.4) einhergehen. Die Reduzierung des Stoßerdungswiderstandes durch die genannten Effekte wurde im Rahmen der FEM-Berechnung (es wird hier nur der Skineffekt in Rechnung gestellt) außer acht gelassen. Berechnungsmodelle, die auch diese Phänomene berücksichtigen, sind in [8] zu finden.

Im Gegensatz dazu stellt das Resultat des Näherungsverfahrens (siehe Gleichung (6.15) und Gleichung (6.6)) aufgrund der großen Abweichung vom gemessenen Wert (siehe Abbildung 6.4 und Abbildung 6.7) für den vorliegenden Fall einen vollkommen unbrauchbaren Wert dar. Die Ursache für den nicht unerheblichen Fehler liegt offensichtlich darin begründet, daß mit Hilfe des Korrekturfaktors α (siehe dazu Abschnitt 2.4.3.1.1, Gleichung (2.92) bis Gleichung (2.98)) die realen Verhältnisse (Skineffekt, Bodenionisation, Fritteffekt, ... - siehe auch oben) nicht erfaßt werden können. Es ist also hier nicht vorteilhaft, die Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes entsprechend den Empfehlungen in [1,S.498], [7,S.171] und [34,S.20] im Sinne der Gleichungen (6.11) und (6.12) durchzuführen.

Die nun folgenden Diagramme (siehe Abbildung 6.3 bis Abbildung 6.5) sollen die Ergebnisse aus der Tabelle 6.3 veranschaulichen.

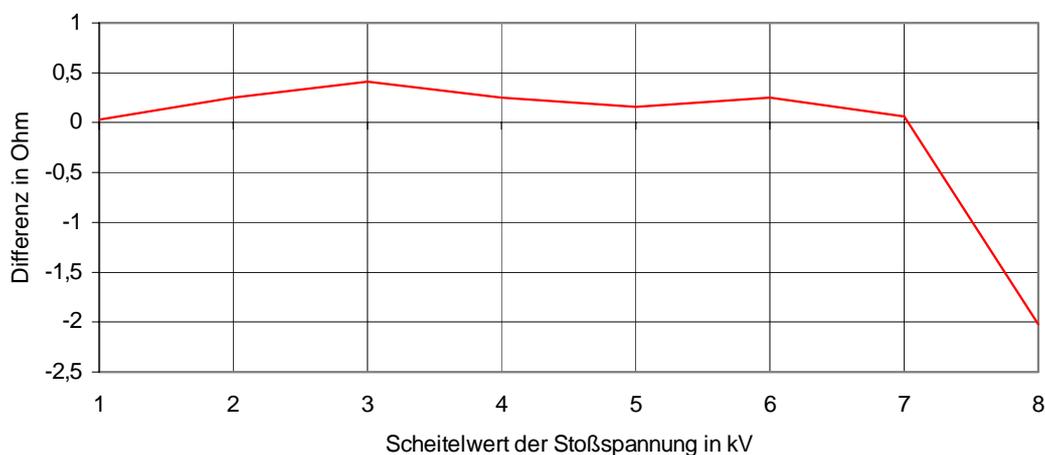


Abb. 6.3: Abweichung der FEM-Werte von den Meßwerten (positive Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.9-1)

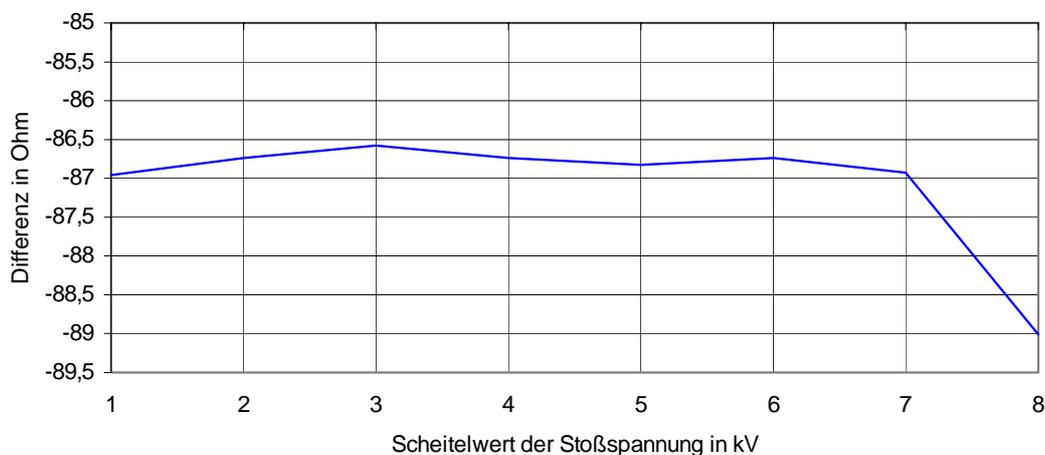


Abb. 6.4: Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (positive Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.9-2)

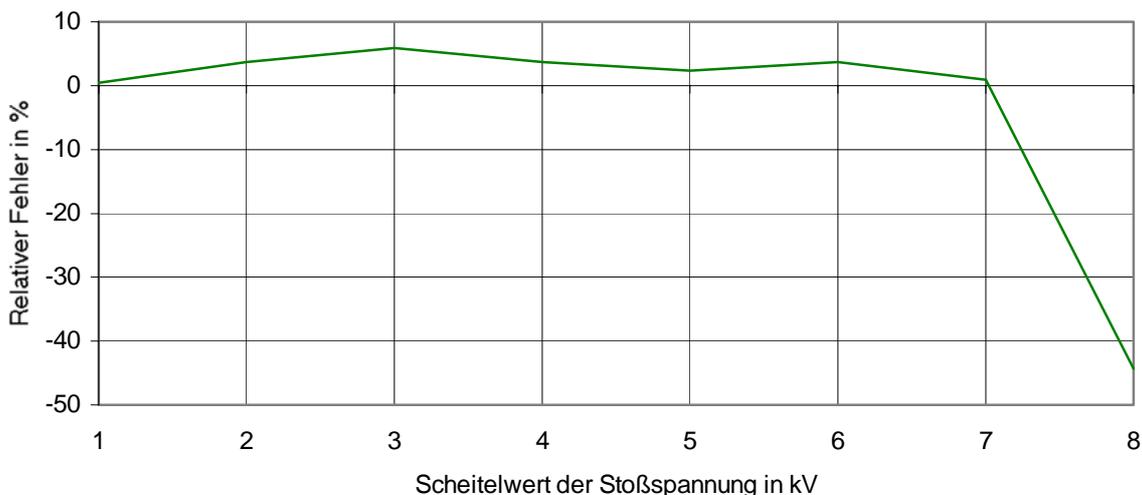


Abb. 6.5: Abweichung der FEM-Werte von den Meßwerten (positive Stoßspannung)

Die bisher für die positiven Stoßspannungen angestellten Betrachtungen (siehe oben) sind natürlich auch für die negativen Stoßspannungen gültig. In Analogie dazu ergeben sich die jetzt folgenden Tabellen und Diagramme.

Die Meßwerte für die Tabelle 6.4 wurden der Tabelle 5.7 (siehe Abschnitt 5.1.4.2), die FEM-Werte der Tabelle 3.8 (siehe Abschnitt 3.2.3.4.2) entnommen. Die relativen Fehler (Fehler in %) beziehen sich jeweils auf die angegebenen Meßwerte des Stoßerdungswiderstandes.

STOSSERDUNGSWIDERSTÄNDE IN Ω				
\hat{U}_E in kV	1	2	3	4
Meßwert	6,03	6,41	6,41	6,41
FEM-Ber.	6,58	6,58	6,58	6,58
Differenz	-0,55	-0,17	-0,17	-0,17
Fehler in %	-9,12	-2,65	-2,65	-2,65
Näherungsber.	93,57	93,57	93,57	93,57
Differenz	-87,54	-87,16	-87,16	-87,16
\hat{U}_E in kV	5	6	7	8
Meßwert	6,74	6,68	6,64	4,56
FEM-Ber.	6,58	6,58	6,58	6,58
Differenz	0,16	0,10	0,06	-2,02
Fehler in %	2,37	1,50	0,90	-44,30
Näherungsber.	93,57	93,57	93,57	93,57
Differenz	-86,83	-86,89	-86,93	-89,01

Tab. 6.4: Stoßerdungswiderstände des Versuchsaufbaues in Abhängigkeit vom Scheitelwert der Stoßspannung (negative Stoßspannung)

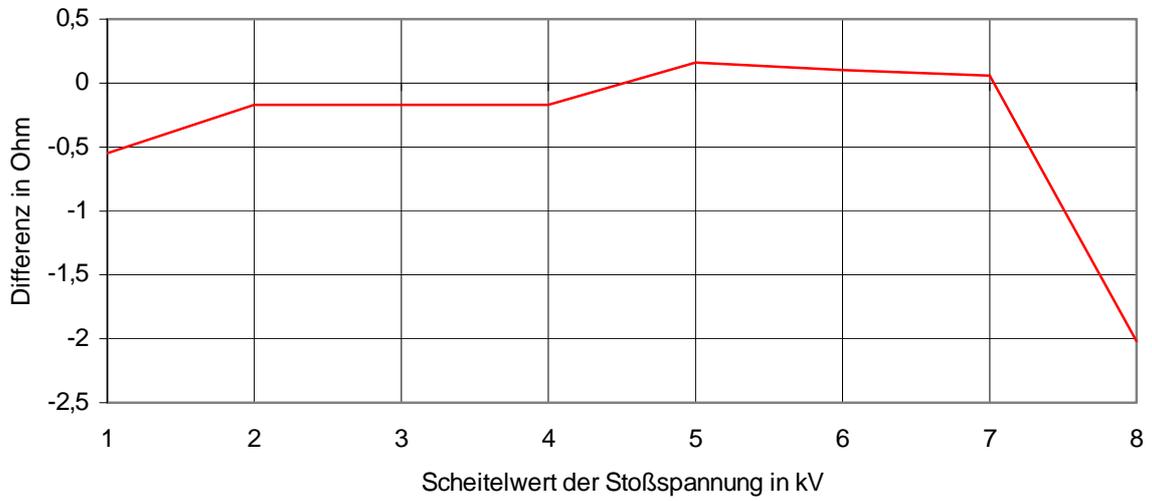


Abb. 6.6: Abweichung der FEM-Werte von den Meßwerten (negative Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.9-1)

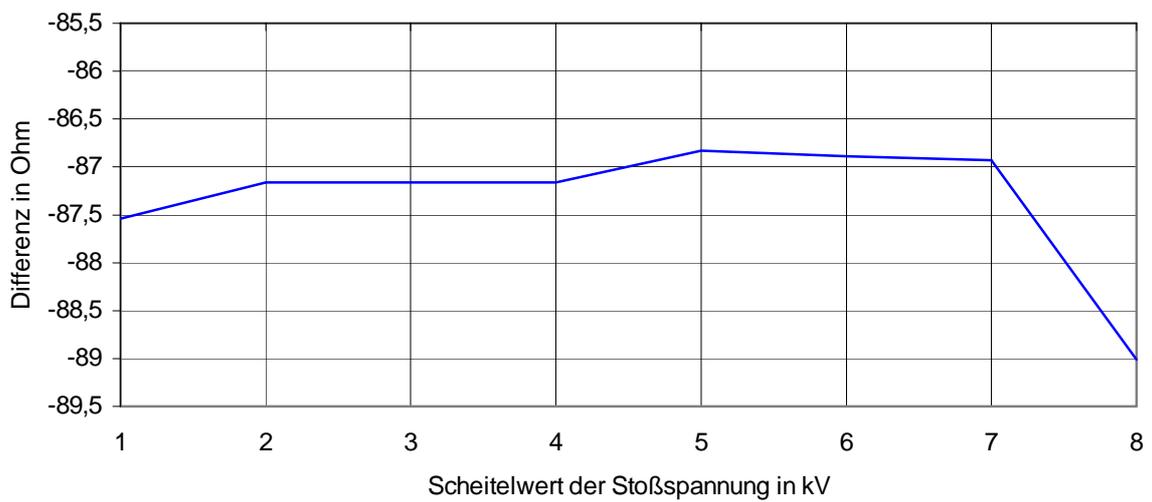


Abb. 6.7: Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (negative Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.9-2)

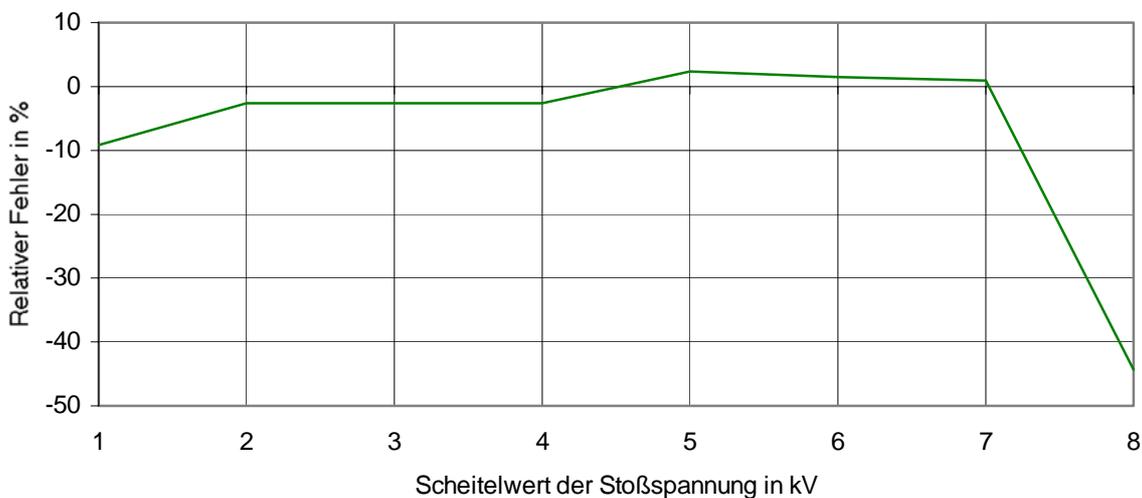


Abb. 6.8: Abweichung der FEM-Werte von den Meßwerten (negative Stoßspannung)

Abschließend erfolgt nun in Form der folgenden Diagramme (siehe Abbildung 6.9-1 und Abbildung 6.9-2) ein Vergleich zwischen den einzelnen Abweichungen (siehe Abbildung 6.3 bis Abbildung 6.8).

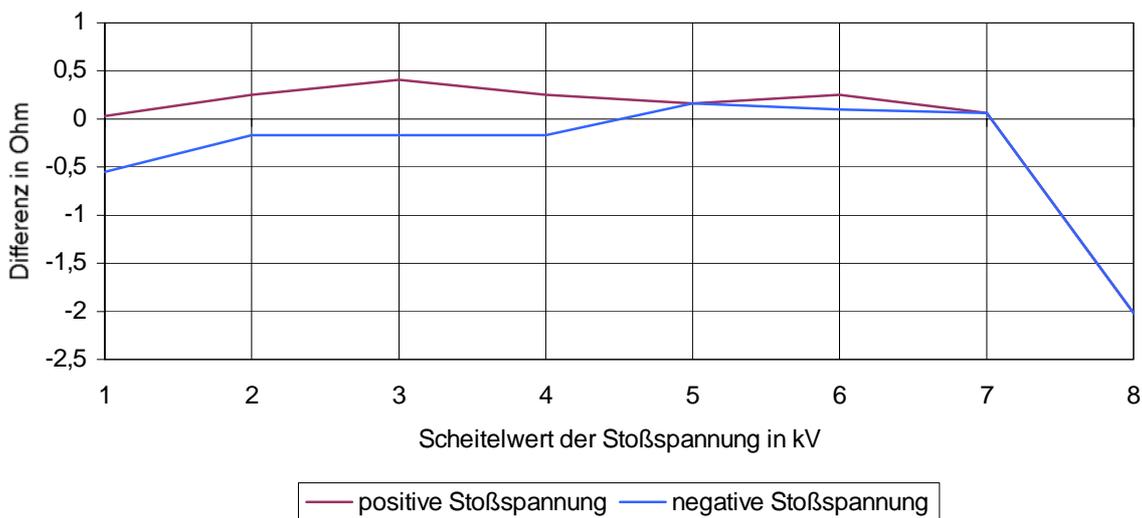


Abb. 6.9-1: Abweichung der FEM-Werte von den Meßwerten (siehe auch Abbildung 6.3 und Abbildung 6.6)

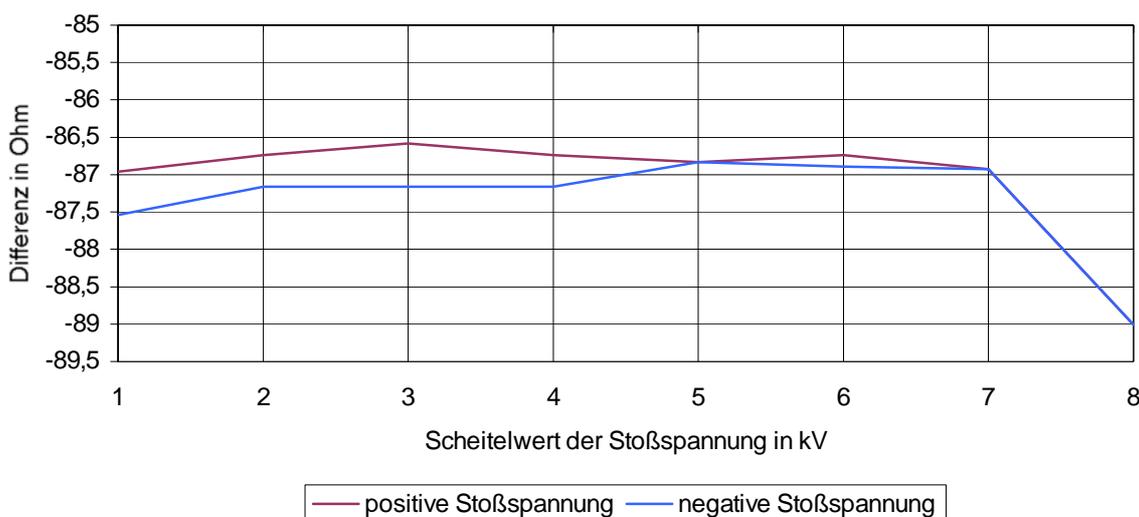


Abb. 6.9-2: Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (siehe auch Abbildung 6.4 und Abbildung 6.7)

6.3.2 STOSSERDUNGSWIDERSTÄNDE DES FUNDAMENTERDERS

Zur Messung des Stoßerdungswiderstandes des Fundamenterders (siehe Abbildung 5.23) wurde die gleiche Meßschaltung verwendet, wie sie bereits im Falle des Versuchsaufbaues zur Anwendung kam (siehe Abbildung 5.8). Aus diesem Grund sind prinzipiell sowohl die Gleichungen (6.13) bis (6.15) und die Gleichung (6.4) als auch das Ersatzschaltbild (6.2) aus dem Abschnitt 6.3.1 auch für die näherungsweise Berechnung des Stoßerdungswiderstandes der gesamten Meßanordnung (siehe Abbildung 5.19) gültig. Damit nun die besagten Gleichungen und das Ersatzschaltbild (6.2) direkt auf die Meßanordnung angewendet werden können, muß darin lediglich der Stoßerdungswiderstand R_{StZ} bzw. der Ausbreitungswiderstand R_{AZ} des zentralen Erders durch den Stoßerdungswiderstand R_{StF} bzw. den Ausbreitungswiderstand R_{AF} des Fundamenterders ersetzt werden. Dabei gilt nach den Gleichungen (6.9) und (6.11):

$$R_{StF} = R_{AF} \approx \frac{\rho_E}{\sqrt{\frac{16 \cdot A_F}{\pi}}} \tag{6.17}$$

A_F Fundamentfläche
 ρ_E spezifischer Erdwiderstand

Mit der Gleichung (6.4) ergibt sich demzufolge für den Stoßerdungswiderstand der gesamten Meßanordnung (vergleiche mit Formel (6.10) und (6.16)):

$$R_{St} = R_A = R_{AF} + R_{AS} \approx \frac{\rho_E}{\sqrt{\frac{16 \cdot A_F}{\pi}}} + \frac{\rho_E}{32\pi l} \cdot \ln \frac{4l}{d} \tag{6.18}$$

d Durchmesser der Erdspeiße
 l Länge der Erdspeiße (im Erdreich)
 ρ_E spezifischer Erdwiderstand

In der nachfolgenden Tabelle 6.5 sind nun die Ergebnisse aus der Näherungsberechnung (gemäß [1,S.498], [7,S.171] und [34,S.20]). und der Messung (siehe Abschnitt 5.2.4) des Stoßerdungswider-

standes des Fundamenterders (für positive Stoßspannungen) zusammengefaßt. Die relativen Fehler (Fehler in %) beziehen sich jeweils auf die angegebenen Meßwerte des Stoßerdungswiderstandes.

STOSSERDUNGSWIDERSTÄNDE IN Ω				
\hat{U}_E in kV	1	2	3	4
Meßwert	24,40	25,62	25,62	20,50
Näherungsber.	11,93	11,93	11,93	11,93
Differenz	12,47	13,69	13,69	8,57
Fehler in %	51,11	53,43	53,43	41,80
\hat{U}_E in kV	5	6	7	8
Meßwert	21,35	20,50	18,88	-----
Näherungsber.	11,93	11,93	11,93	11,93
Differenz	9,42	8,57	6,95	-----
Fehler in %	44,12	41,80	36,81	-----

Tab. 6.5: Stoßerdungswiderstände des Fundamenterders in Abhängigkeit vom Scheitelwert der Stoßspannung (positive Stoßspannung)

Wie schon bei den Näherungswerten für den Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaues (siehe oben, Abschnitt 6.3.1) gilt auch hier: Die approximativen Werte (siehe Tabelle 6.5) haben keine allzu große Relevanz in bezug auf die Beurteilung des Stoßerdungswiderstandes des Fundamenterders. Die nicht unwesentlichen Abweichungen dieser näherungsweise berechneten Beträge von den realen Verhältnissen (Meßwerte) können auf die große räumliche Ausdehnung der Erdungsanlage (siehe Abbildung 5.18) zurückgeführt werden (große Erderlängen führen zu großen Erderinduktivitäten und demzufolge zur Vergrößerung des Stoßerdungswiderstandes gegenüber dem Ausbreitungswiderstand, siehe dazu [7,S.171], [19,S.34] und speziell [93,S.103,140]).

Aus der Tabelle 6.5 ergeben sich nun die Abbildungen 6.10 und 6.11:

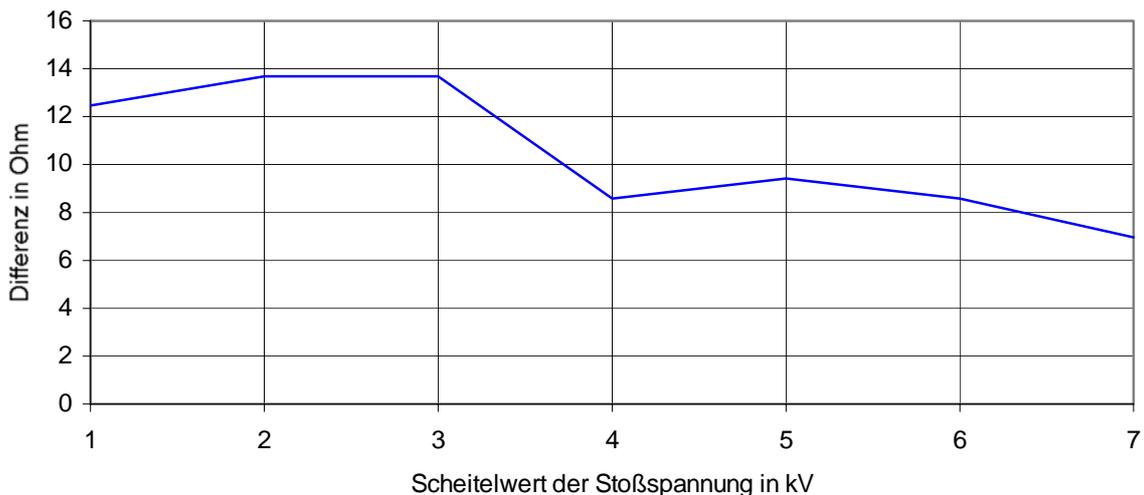


Abb. 6.10: Absolute Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (positive Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.14)

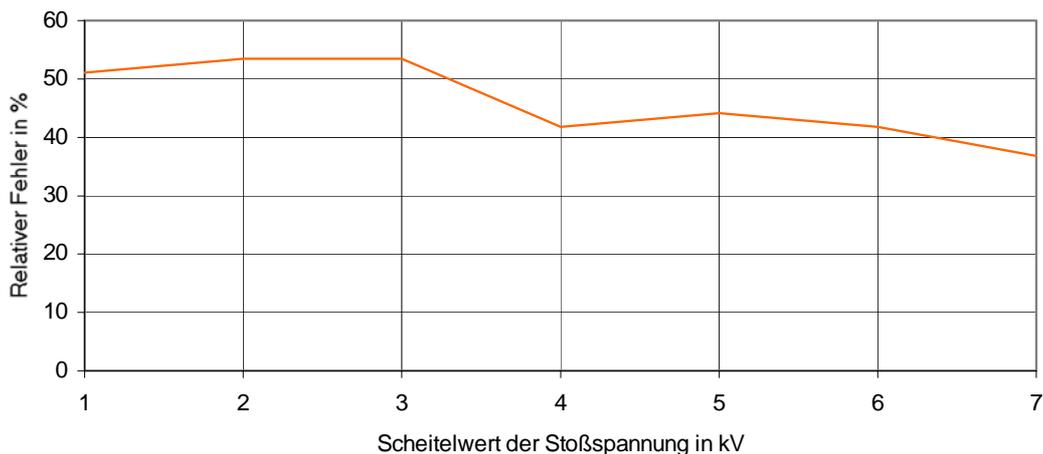


Abb. 6.11: Relative Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (positive Stoßspannung)

Die oben angestellten Überlegungen für die positiven Stoßspannungen können direkt auf den Fall der negativen Stoßspannungen übertragen werden. Die zugehörigen Tabellen und Diagramme sind im nachfolgenden dargestellt.

STOSSERDUNGSWIDERSTÄNDE IN Ω				
\hat{u}_E in kV	1	2	3	4
Meßwert	22,28	22,28	19,22	18,64
Näherungsber.	11,93	11,93	11,93	11,93
Differenz	10,35	10,35	7,29	6,71
Fehler in %	46,45	46,45	37,93	36,00
\hat{u}_E in kV	5	6	7	8
Meßwert	18,30	18,09	----	----
Näherungsber.	11,93	11,93	11,93	11,93
Differenz	6,37	6,16	----	----
Fehler in %	34,81	34,05	----	----

Tab. 6.6: Stoßerdungswiderstände des Fundamenterders in Abhängigkeit vom Scheitelwert der Stoßspannung (negative Stoßspannung)

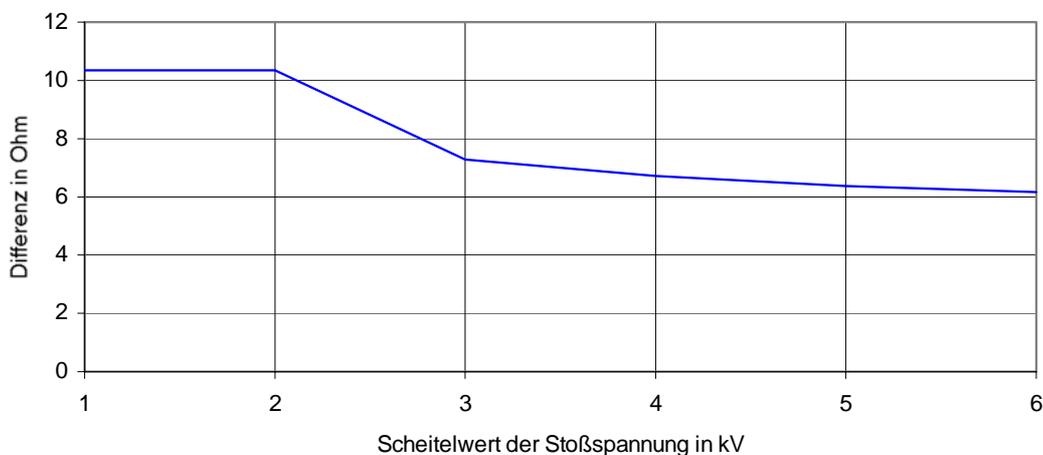


Abb. 6.12: Absolute Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (negative Stoßspannung, siehe auch Abbildung 6.14)

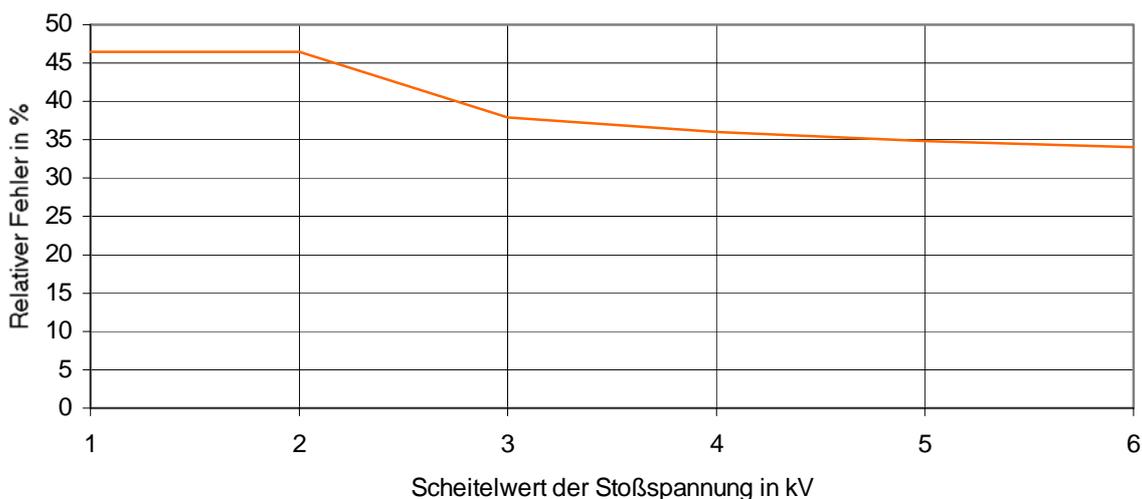


Abb. 6.13: Relative Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (negative Stoßspannung)

Zum Schluß sollen auch in diesem Abschnitt die einzelnen Abweichungen (siehe Abbildung (6.9) und Abbildung (6.11)) miteinander verglichen werden (siehe Abbildung 6.14).

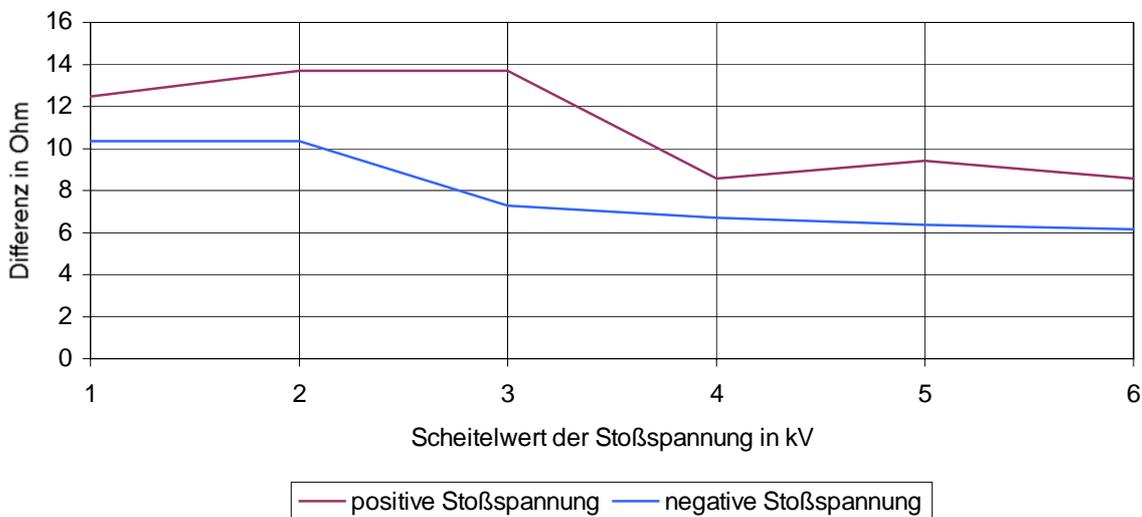


Abb. 6.14: Absolute Abweichung der Näherungswerte von den Meßwerten (siehe auch Abbildung 6.10 und Abbildung 6.12)

7. ZUSAMMENFASSUNG

Nach einer Erläuterung der grundlegenden Begriffe von Erdungsanlagen sowie der Verfahren zur Berechnung und zur Messung von Ausbreitungswiderständen respektive Stoßerdungswiderständen (siehe dazu Abschnitt 2) wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch die folgenden Gebiete bearbeitet:

ABSCHNITT 3:

Dieses Kapitel enthält eine Einführung in die **Methode der Finiten Elemente (FEM)**. Weiters wird die Anwendung dieses numerischen Verfahrens auf die Ermittlung von Erdungswiderständen (Ausbreitungswiderständen, Stoßerdungswiderständen) beschrieben. Es wurde hierbei von vorgegebenen Erdersystemen (Versuchsaufbau, Fundamenterder) die Stromdichteverteilung im Erdreich sowohl für eine sinusförmige Erregung (Sinusspannung) als auch für eine transiente Erregung (Stoßspannung) berechnet und daraus der jeweils zugehörige Ausbreitungswiderstand bzw. Stoßerdungswiderstand bestimmt.

Der Vorteil der FEM liegt darin, daß der Skineffekt (Stromverdrängung) in den elektrischen Leitern (Erden) und im Erdreich berücksichtigt werden kann.

Für den **Versuchsaufbau** gilt:

Eine Gegenüberstellung von gemessenen und rechnerisch ermittelten Stromscheitelwerten zeigt, daß die Finite Elemente Methode im Bereich von $\pm 1\text{kV}$ bis $\pm 7\text{kV}$ sehr gute Ergebnisse liefert. Der Betrag des relativen Fehlers (in bezug auf den Meßwert) liegt hier bei 0,52% bis 8,35%. Ab einem Spannungsscheitelwert von $\pm 8\text{kV}$ erhöht sich der Fehler auf 30,76%. Der Grund für diesen starken Anstieg ist der, daß in diesem Spannungsbereich Phänomene wie die Bodenionisation und der Fritteffekt auftreten (siehe dazu Abschnitt 2.4).

Für den **Fundamenterder** gilt:

Der Fundamenterder wurde, wie es auch bei der näherungsweise Berechnung des Ausbreitungswiderstandes und des Stoßerdungswiderstandes üblich ist (siehe [4,S.59], [9,S.73], [11,S.159-160] und [19,S.53-54]), durch einen Plattenerder mit kreisförmigem Querschnitt angenähert. Dieser berechnet sich aus der Fundamentfläche gemäß der Formel (6.7) im Abschnitt 6 (siehe auch Abbildung 5.18 und Abbildung 5.19).

Zur Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes wurde die bereits vorhandene Diskretisierung des Versuchsaufbaues verwendet. Die entsprechenden Parameter (für die geometrische Struktur und die geometrischen Abmessungen des Erdersystems, für die Beschaffenheit des Elektrodenmaterials und des Erdreiches, für die Randbedingungen sowie für die Feinunterteilung - siehe hierzu Abschnitt 3.2.3.2.2) wurden an die tatsächlichen Verhältnisse (siehe Abschnitt 5.2) angepaßt.

Es war jedoch nicht möglich, eine für die FEM-Berechnung brauchbare Modifizierung der Diskretisierung des Versuchsaufbaus (genau genommen: Netzverfeinerung) zu ermitteln. Demzufolge konnte keine FEM-Berechnung durchgeführt werden.

ABSCHNITT 4:

Durchgeführt wurde die Berechnung des **Skineffektes (Stromverdrängung)** in

- elektrischen Leitern mit kreisförmigem Querschnitt,
- eben begrenzten elektrischen Leitern und insbesondere im Erdreich (speziellfall eines eben begrenzten Leiters),
- elektrischen Leitern mit rechteckförmigen Querschnitt.

Im Falle des **kreisförmigen Querschnittes** wurde die Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke im Bildbereich der Laplace-Transformation gelöst. Es handelt sich hierbei um eine Bessel-

Differentialgleichung der Ordnung $n=0$. Die Lösung für die Feldstärke E setzt sich somit aus Bessel-Funktionen zusammen. Die elektrische Stromdichte J ist durch das Ohmsche Gesetz mit der elektrischen Feldstärke verknüpft. Der zeitliche Verlauf der Stromdichte respektive der Feldstärke ergibt sich durch die Rücktransformation der Ergebnisse aus dem Bildbereich in den Zeitbereich. Diese inverse Laplace-Transformation erfolgt mit Hilfe der komplexen Umkehrformel. Im vorliegenden Fall war die Lösung dieses Integrales nur unter Anwendung des Residuensatzes möglich. Die Resultate (es sind transiente Funktionen, genaugenommen Summen einzelner Exponentialfunktionen) zeigen, daß der Skineffekt besonders im Augenblick des Einschaltens bzw. des Blitzeinschlages ($t=0$) einen sehr großen Einfluß auf die Stromdichteverteilung im Leiter hat. Die größte Stromdichte tritt hierbei nahe der Leiteroberfläche auf. In einem Bereich von etwa $2\mu\text{s}$ bis $6\mu\text{s}$ bleibt der Effekt der Stromverdrängung weiterhin noch relativ stark ausgeprägt. Erst für größere und vor allem für sehr große t , also mit dem Abklingen der Stromstärke bzw. der Stromdichte im Leiter, stellt sich eine gleichmäßige räumliche Verteilung der Stromdichte über den gesamten Leiterquerschnitt ein.

Die Impedanz des zylindrischen Leiters für Stoßvorgänge kann dann durch die Berechnung des Spannungsabfalles längs der Mantellinie des Leiters ermittelt werden. Im Bildbereich erhält man wieder einen Quotienten von Bessel-Funktionen der Ordnungen $n=0$ (Zähler) und $n=1$ (Nenner). Für den Zeitbereich ergibt sich eine transiente Funktion, wobei man feststellen kann, daß sich die Impedanz $Z(t)$ nach einer Einschwingdauer von etwa $30\mu\text{s}$ auf einen stationären Wert einstellt, der nicht wesentlich vom Gleichstromwiderstand des Leiters abweicht (die Differenz beträgt $0,000781\Omega$).

Der **eben begrenzte Leiter (Erdreich)** stellt einen Sonderfall des oben beschriebenen Leiters mit kreisförmigem Querschnitt dar. Es muß dazu lediglich der Grenzwert für einen unendlich großen Leiterradius bestimmt werden. In diesem Fall kann die Krümmung der Leiteroberfläche vernachlässigt werden. Die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung erfolgt analog zur oben beschriebenen Vorgangsweise (Transformation in den Bildbereich der Laplace-Transformation – Ermittlung des Ergebnisses im Bildbereich – Rücktransformation in den Zeitbereich). Daraus ergibt sich, daß sowohl die zeitliche als auch die räumliche Verteilung der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte komplexwertige Funktionen sind, und daher nicht mehr als physikalische Größen im ursprünglichen Sinn dargestellt werden können. Um trotzdem eine anschauliche Lösung zu erhalten, gibt es auch die Möglichkeit, mit sinusförmigen Größen (Harmonischen) zu rechnen. Zur Anwendung kommt hierbei die Fourier-Transformation, mit deren Hilfe die nichtsinusförmige aperiodische Zeitfunktion der elektrischen Stromstärke (Stoßstrom) in ihre Harmonischen zerlegt werden kann.

Setzt man weiters sowohl für die elektrische Feldstärke als auch für die elektrische Stromdichte eine sinusförmige Zeitabhängigkeit voraus, so kann die Differentialgleichung für die Feldstärke mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung (symbolische Methode, komplexe Schreibweise) gelöst werden (die einzelnen harmonischen Funktionen der Stromstärke sind in diesem Ergebnis enthalten). Als Resultat erhält man aus dieser Berechnung die Bildfunktionen (komplexe Amplituden, komplexe Scheitelwerte) der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte bzw. die zugehörigen komplexen Zeitwerte. Demzufolge ergeben sich die entsprechenden Zeitfunktionen mittels Projektion der komplexen Zeitwerte auf eine feste Achse (z.B. imaginäre Achse der komplexen Zahlenebene).

Eine Auswertung der Ergebnisse zeigt, daß grundsätzlich sowohl die Amplitude der elektrischen Feldstärke als auch die der elektrischen Stromdichte mit ansteigender Frequenz kleiner wird und ganz generell für jede beliebige Frequenz eine Verdrängung des elektrischen Strömungsfeldes an die Leiteroberfläche erfolgt (Skineffekt, Stromverdrängung). Zudem wird mit wachsender Frequenz die stromführende Schicht an der Leiteroberfläche immer dünner.

Aufgrund der Tatsache, daß die harmonischen Schwingungen mit den größten Frequenzen in der Stirn des Stoßstromes (hier: Normalblitz $i[2/50]\mu\text{s}$ nach ÖVE-E49/1988) auftreten, ist der Effekt der Stromverdrängung im elektrischen Leiter in diesem Zeitbereich (z.B. vom Zeitpunkt des Blitzeinschlages bis zum Erreichen des Blitzstrom-Scheitelwertes) sehr stark ausgeprägt. Mit dem Abklingen des Stoßstromes (also im Rückenbereich des Stoßstromes) nimmt die Wirkung des Skineffektes wieder ab.

Die Leiterimpedanz wurde sowohl für vertikale als auch für horizontale Erdschichten untersucht. Die Resultate zeigen, daß die Impedanzwerte (Betrag, Realteil und Imaginärteil der Impedanz) der vertikalen Erdschicht wesentlich größer sind als jene der horizontalen Erdschicht. Diese Tatsache kann so erklärt werden, daß nahezu der gesamte Strom an der Erdoberfläche fließt. Im Falle der vertikalen

Schicht ist diese Fläche um ein Vielfaches kleiner als die entsprechende Fläche der horizontalen Erdschicht. Durch die kleinere Oberfläche zur Ausbreitung des elektrischen Strömungsfeldes ist nun die Impedanz der vertikalen Schicht die größere. Demzufolge ist es also nicht vorteilhaft, Erder in tiefe Schichten mit einer großen elektrischen Leitfähigkeit (kleiner spezifischer Erdwiderstand) einzubringen. Um kleine Ausbreitungswiderstände bzw. Stoßerdungswiderstände zu erhalten, ist es vielmehr zielführend, die Erder in gut leitfähige oberflächennahe Erdschichten einzubetten.

Die analytische Berechnung des Skineffektes in **Leitern mit einem rechteckförmigen Querschnitt** ist mathematisch sehr aufwendig und führt in der Regel auf eine partielle Differentialgleichung. Eine eindeutige Lösung kann hier nur dann gefunden werden, wenn die Randbedingungen bekannt sind. Im Fall eines Leiters mit rechteckigem Querschnitt ist die Stromdichte auf dem Rand jedoch nicht konstant, daher können keine exakten Angaben über die Randbedingungen gemacht werden. Es besteht aber die Möglichkeit, einer derartigen Randwertaufgabe aus dem Weg zu gehen, indem man eine dem Stromverdrängungsproblem entsprechende Integralgleichung formuliert, wodurch das Wissen um die Randwerte nicht mehr notwendig ist.

Die gesuchte Integralgleichung wird aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet. Nach erfolgter Reihenentwicklung der Integranden der Maxwell'schen Gleichungen konnte eine iterative Lösung gefunden werden.

Für den räumlichen Verlauf der Feldlinien innerhalb des Leiterquerschnittes ergibt sich sodann folgendes Ergebnis: Eine Abweichung zu den Verhältnissen bei Gleichstrom macht sich schon bei relativ kleinen Frequenzen bemerkbar. Weiters kann festgestellt werden, daß das elektrische Strömungsfeld an die Leiteroberfläche und hierbei insbesondere in die Leiterecken verdrängt wird. Zudem wird ersichtlich, daß der Skineffekt immer auf der Breitseite des Leiters zuerst auftritt.

Zur Berechnung des komplexen Wechselstromwiderstandes des elektrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt wurde ein Verfahren verwendet, bei dem ebenfalls die oben beschriebene Methode zur iterativen Lösung der Stromverdrängungsintegralgleichung zur Anwendung kam. Wie gewohnt, wurde mit einer sinusförmigen Zeitabhängigkeit, also mit der komplexen Schreibweise (komplexe Wechselstromrechnung) gerechnet. Der komplexe Wechselstromwiderstand kann dann über die Leistungsbilanz im Leitervolumen, also mittels der pro Zeiteinheit durch die Leiteroberfläche strömenden Energie (nach dem Satz von Poynting) bestimmt werden.

Die graphische Auswertung der Ergebnisse zeigt, daß sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil der Leiterimpedanz mit ansteigender Frequenz größer wird. Ein Vergleich mit den tatsächlich gemessenen Werten konnte nur für die Realteile der Impedanz durchgeführt werden. Er zeigt, daß sich der Betrag des Berechnungsfehlers mit wachsender Frequenz vergrößert.

ABSCHNITT 5:

Es wurden die folgenden Messungen am **Versuchsaufbau** und am **Fundamenterder** durchgeführt:

- Messung des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes (mit einer Erdungsmeßbrücke und einem digitalen Erdungsmeßgerät nach der Methode von Wenner),
- Messung des Ausbreitungswiderstandes (mit einer Erdungsmeßbrücke und bei unterschiedlichen Frequenzen mit einem digitalen Erdungsmeßgerät),
- Messungen (mit einem Hybridgenerator und einem Oszilloskop) bei variablem positiven sowie negativen Spannungsscheitelwert zur Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes und zur Beurteilung des Einflusses der Bodenionisation und des Fritteffektes,
- Messungen (mit einem Hybridgenerator und einem Oszilloskop) bei konstanten Spannungsscheitelwerten und einer unterschiedlichen Anzahl von Erdspeießen zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Stoßerdungswiderstand und Anzahl der geerdeten Ableitungen einer Blitzschutzanlage,
- Bestimmung des Zeitverlaufes des Stoßerdungswiderstandes (berechnet aus den Zeitfunktionen für die eingeprägte Stoßspannung und dem gemessenen Erdungsstrom).

Die Meßwerte zeigen die folgenden Tatsachen bzw. können wie folgt interpretiert werden:

Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand des Versuchsaufbaus:

Die mit der Erdungsmeßbrücke ermittelten Meßwerte weichen nur geringfügig von den digital gemessenen Werten ab. Sowohl in Richtung Nord-Süd als auch in Richtung Ost-West sinkt der scheinbare spezifische Erdwiderstand ab einer Tiefe von 1m bis zu einer Tiefe von etwa 2m. Anschließend erfolgt eine kontinuierliche Erhöhung bis zu einer Tiefe von 30m (Nord-Süd) bzw. 10m (Ost-West).

Ersatz-Ausbreitungswiderstand des Versuchsaufbaus:

Dieser Ersatzwiderstand des Versuchsaufbaus (=Erdersystem bestehend aus einem Erder und den Meßsonden) wird im Abschnitt 6 zur näherungsweise Berechnung des Stoßerdungswiderstandes herangezogen. Gemessen wurde mit einer Erdungsmeßbrücke und einem digitalen Erdungsmeßgerät (hier bei einer Frequenz von 94Hz, 105Hz, 111Hz bzw. 128Hz). Der analoge Meßwert (90Ω) unterscheidet sich nur geringfügig von den digitalen Meßwerten (91,3Ω bei 94Hz / 91,2Ω bei 105Hz / 91,1Ω bei 111Hz / 91,0Ω bei 128Hz)

Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaus:

Die zur Berechnung des Stoßerdungswiderstandes benötigten Spannungs- bzw. Stromscheitelwerte an den Klemmen des Versuchsaufbaus wurden mit einem Zweikanaloszilloskop gemessen. Für die Messung der Stoßspannung konnte die am Hybridgenerator (dieser dient der Simulation des Blitzstoßstromes) vorgesehene Meßklemme (1V gemessen entspricht 1kV in der Realität) benutzt werden. Die Messung des Stoßstromes konnte nur mit Hilfe eines Shunts (Messung des Spannungsabfalles am Shunt) durchgeführt werden, weil die Meßwerte an der Strommeßklemme falsch waren (Grund dafür war ein technischer Defekt in der internen Meßschaltung des Hybridgenerators).

Die Messung mit unterschiedlichen Spannungsscheitelwerten ($\pm 1\text{kV}$ bis $\pm 8\text{kV}$) hat ergeben, daß der Betrag des Stoßerdungswiderstandes im Bereich von $\pm 1\text{kV}$ bis $\pm 7\text{kV}$ nahezu konstant bleibt (etwa $6,60\Omega$) und dann bei $\pm 8\text{kV}$ stark abnimmt ($4,56\Omega$). Dieses Verhalten kann auf die Bodenionisation und den Fritteffekt (Verkleinerung des Stoßerdungswiderstandes bei großen Spannungsscheitelwerten) zurückgeführt werden. Eine Kompensation dieser Reuzierung infolge einer Austrocknung des Erdreiches bei großen Stromstärken (Trockeneffekt) konnte nicht beobachtet werden. Wie sich die Überlagerung der genannten Effekte im Falle einer Blitzeinwirkung gestaltet, kann aus den vorliegenden Meßergebnissen nicht abgeleitet werden.

Welchen Einfluß die Anzahl von geerdeten Ableitungen einer Blitzschutzanlage auf deren Stoßerdungswiderstand hat, wurde mit Hilfe einer Messung bei einem konstanten positiven Spannungsscheitelwert von 4kV mit einer unterschiedlichen Anzahl von Erdspeissen eruiert. Das Resultat dieser Messung zeigt, daß der Stoßerdungswiderstand mit einer steigenden Anzahl von geerdeten Ableitungen kleiner wird.

Um schließlich noch die Auswirkung von offenen Trennklemmen bzw. sehr schlecht leitenden Ableitungen einer Blitzschutzanlage auf ihren Stoßerdungswiderstand zu überprüfen, wurden alle Erdungsleitungen an den Erdspeissen abgeklemmt und isoliert auf den Boden gelegt. Dem Meßergebnis kann entnommen werden, daß der Stoßerdungswiderstand auch in diesem Fall keine extrem großen Werte annimmt.

Der zeitliche Verlauf des Stoßerdungswiderstandes wurde aus den aufgenommenen Oszillogrammen in Form einer Quotientenbildung aus den Zeitfunktionen des Spannungsverlaufes und den Zeitfunktionen des Stromverlaufes ermittelt. Die Auswertung der Oszillogramme erfolgte im Zeitbereich von etwa $10\mu\text{s}$ bis $200\mu\text{s}$. Das Ergebnis zeigt, daß der Stoßerdungswiderstand bei $10\mu\text{s}$ am größten ist, und in weiterer Folge stetig abnimmt. Ein exaktes asymptotisches Verhalten konnte nicht bestimmt werden.

Scheinbarer spezifischer Erdwiderstand des Fundamenterders:

Die Abweichung der analogen Meßwerte (Erdungsmeßbrücke) von den digital gemessenen Werten ist sehr klein. Gemessen wurde in Richtung Ost-West. Mit zunehmender Tiefe (1m bis 50m) konnte eine Abnahme des scheinbaren spezifischen Erdwiderstandes festgestellt werden.

Ersatz-Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders:

Der Ersatzwiderstand des Fundamenterders (=Erdsystem bestehend aus dem Fundamenterder und den Meßsonden) wird im Abschnitt 6 zur approximativen Berechnung des Stoßerdungswiderstandes benötigt. Die meßtechnisch ermittelten Werte aus der analogen Messung ($14,24\Omega$) und der digitalen Messung ($14,26\Omega$ bei automatischer Frequenzwahl - AFC) sind fast identisch.

Stoßerdungswiderstand des Fundamenterders:

Um den Einfluß der Spannungshöhe auf den Betrag des Stoßerdungswiderstandes zu bestimmen, wurden mehrere Messungen mit verschiedenen Spannungsscheitelwerten ($\pm 1\text{kV}$ bis $\pm 6\text{kV}$, $+7\text{kV}$) durchgeführt. Die jeweiligen Strom- und Spannungsscheitelwerte wurden mit dem Oszilloskop gemessen, und daraus der Stoßerdungswiderstand berechnet. Im Unterschied zu den entsprechenden Messungen am Versuchsaufbau zeigt das vorliegende Meßergebnis, daß die Verkleinerung des Stoßerdungswiderstandes (durch die Bodenionisation und/oder den Fritteeffekt) im Falle des Fundamenterders schon bei wesentlich kleineren Spannungsscheitelwerten (4kV bei positiver Stoßspannung bzw. 3kV bei negativer Stoßspannung) auftritt. Diese Tatsache kann mit hoher Wahrscheinlichkeit auf eine andere Zusammensetzung des Erdreiches zurückgeführt werden. Eine Übertragung der Meßergebnisse auf den Fall einer Blitzeinwirkung ist auch hier nicht zulässig.

Letztendlich wurden, um wieder die Auswirkung von offenen Trennklemmen bzw. sehr schlecht leitenden Ableitungen einer Blitzschutzanlage auf ihren Stoßerdungswiderstand zu eruieren, alle Erdungsleitungen an den Erdspießen abgeklemmt und isoliert auf den Boden gelegt. Die Resultate der Messung zeigen, daß keine extrem großen Widerstandswerte zu erwarten sind.

ABSCHNITT 6:

In diesem Abschnitt wurden die Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Werten der Erdungswiderstände (Ausbreitungswiderstand, Stoßerdungswiderstand) ermittelt. Die berechneten Differenzen beruhen auf der Tatsache, daß sowohl die Berechnung (FEM, Näherungsverfahren) als auch die Messung (spezifischer Erdwiderstand, Ausbreitungswiderstand, Stoßerdungswiderstand) mit Fehlern behaftet sind. Die Quellen für die Fehler im Falle der Finite Elemente Methode (FEM) sind Diskretisierungsfehler, Fehler bei der Lösung des Gleichungssystems, Fehler bei der Wahl des Materialmodelles und Rundungsfehler infolge der begrenzten arithmetischen Genauigkeit des verwendeten Rechners.

Die Näherungsverfahren führen einerseits von vornherein zu ungenauen Ergebnissen und zudem entsprechen die Materialmodelle (meßtechnische Eruierung der Materialkennwerte, z.B. der spezifische Erdwiderstand) nur sehr selten der Realität.

Die Fehlerquellen bei der Messung sind unter anderem Ables- und Auswertungsfehler, Fehler durch Umwelteinflüsse (z.B. Temperatur), Fehler durch die Rückwirkung des Meßverfahrens auf die zu messende Größe, Fehler infolge der verwendeten Meßmethode und Fehler aufgrund der Kontaktwiderstände der Anschlußklemmen. Dabei besteht die Möglichkeit, diese Meßfehler (deterministische bzw. statistische Fehler) mit Hilfe einer rechnerischen Korrektur zu eliminieren.

Bezüglich der **Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Werten der Ausbreitungswiderstände** gilt:

Ausbreitungswiderstand des Versuchsaufbaues:

Vergleicht man die Berechnungsergebnisse mit den ermittelten Meßwerten, so kann man daraus schließen, daß sich für das vorgegebene Erdsystem das elektrische Strömungsfeld innerhalb des Erdreiches hauptsächlich in der Richtung Ost-West in den Schichten des kleineren spezifischen Erdwiderstandes ausbildet.

Die Resultate der Näherungsberechnung weichen nur sehr geringfügig von den meßtechnisch ermittelten Ausbreitungswiderständen ab. Es ist daher durchaus zulässig, im Falle stationärer elektrischer Strömungsfelder, wie sie für die Berechnung von Ausbreitungswiderständen im allgemeinen zur Anwendung kommen, mit dem angewendeten Verfahren (vereinfachtes Ersatzschaltbild, Faustformeln für die Ausbreitungswiderstände) zu arbeiten.

Weiters wurde festgestellt, daß sich die Methode der finiten Elemente (FEM) ebenfalls sehr gut für die Berechnung von Ausbreitungswiderständen beliebiger Erdungsanlagen eignet. Zudem bietet dieses numerische Verfahren die Möglichkeit, mit zeitlich veränderlichen Strömen, also auch mit sinusförmigen Wechselströmen (z.B. 50Hz), zu rechnen.

Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders:

Die Näherungsberechnung des Ausbreitungswiderstandes des vorgegebenen Fundamenterders wurde mit einer Methode durchgeführt, bei der mit Hilfe der vom Erder eingeschlossenen Fläche (Fundamentfläche) der Ersatzdurchmesser eines flächengleichen Kreises ermittelt wurde. Von diesem Ersatzerder (gewählt wurde ein Plattenerder) kann nun unter Anwendung einer Faustformel der zugehörige Ausbreitungswiderstand, also hiermit der Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders, berechnet werden.

Der Ausbreitungswiderstand der gesamten Meßanordnung wurde wieder mittels eines entsprechenden Ersatzschaltbildes eruiert.

Ein Vergleich der Näherungswerte mit den Meßwerten (ein FEM-Berechnung war, wie weiter oben bereits angemerkt wurde, nicht möglich) zeigt, daß im Falle des Ausbreitungswiderstandes des Fundamenterders eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Meßwert vorliegt. Demzufolge erweist sich die Anwendung der Näherungsformel als durchaus sinnvoll.

Bezüglich des Ausbreitungswiderstandes des gesamten Erdersystems kann gesagt werden, daß die verhältnismäßig große Abweichung des berechneten Wertes vom Meßwert mit einer sehr hoher Wahrscheinlichkeit auf die Tatsache zurückzuführen ist, daß die Ohmschen Widerstände der Ableitungen und Klemmen (Trennklemmen, Parallelklemmen, ...) der nicht berücksichtigt wurden.

Stoßerdungswiderstand des Versuchsaufbaues:

In der Regel unterscheidet sich der Stoßerdungswiderstand vom Ausbreitungswiderstand. Es ist jedoch zulässig, für Ringerder, Maschenerder, Fundamenterder, Vertikalerder (bis ca. 10m Länge) und Horizontalerder (bis zu einer Länge von etwa 30m), den Stoßerdungswiderstand dem Ausbreitungswiderstand gleichzusetzen. Aus diesem Grund können zur näherungsweise Berechnung der Stoßerdungswiderstände neben dem vereinfachten Ersatzschaltbild auch alle Faustformeln für den Ausbreitungswiderstand verwendet werden. Der Näherungswert des Stoßerdungswiderstandes ist hier also mit dem Näherungswert des Ausbreitungswiderstandes identisch.

Eine Gegenüberstellung zwischen Meßwerten und berechneten Werten (Näherung, FEM-Wert) für zum folgenden Resultat:

Die Methode der finiten Elemente (FEM) eignet sich in einem verhältnismäßig großen Bereich (in bezug auf den Spannungsscheitelwert) sehr gut zur Berechnung des Stoßerdungswiderstandes. Größere Fehler treten erst bei Spannungsscheitelwerten auf, die mit Erscheinungen wie der Bodenionisation oder dem Fritteffekt einhergehen. Die Reduzierung des Stoßerdungswiderstandes durch die genannten Effekte wurde im Rahmen der FEM-Berechnung (es wird hier nur der Skineffekt in Rechnung gestellt) außer acht gelassen.

Im Unterschied dazu stellt das Ergebnis des Näherungsverfahrens aufgrund der großen Abweichung vom gemessenen Wert für den vorliegenden Fall einen vollkommen unbrauchbaren Wert dar. Die Ursache für den erheblichen Fehler liegt offensichtlich darin begründet, daß mit Hilfe des Korrekturfaktors α (siehe dazu Abschnitt 2.4.3.1.1, Gleichung (2.92) bis Gleichung (2.98)) die realen Verhältnisse (Skineffekt, Bodenionisation, Fritteffekt, ... - siehe auch oben) nicht erfaßt werden können. Es ist

also hier nicht vorteilhaft, die Ermittlung des Stoßerdungswiderstandes entsprechend den Empfehlungen in [1,S.498], [7,S.171] und [34,S.20] im Sinne der Gleichungen (6.11) und (6.12) durchzuführen.

Stoßerdungswiderstand des Fundamenterders:

Wie oben im Falle des Versuchsaufbaues stimmt auch für den Fundamenterder der Näherungswert des Stoßerdungswiderstandes mit dem Näherungswert des Ausbreitungswiderstandes überein.

Die Tatsache, daß für die Messungen am Fundamenterder das gleiche Meßverfahren wie für den Versuchsaufbau verwendet wurde, gestattet, daß der Näherungsberechnung das analoge vereinfachte Ersatzschaltbild zugrunde gelegt wird (es muß darin lediglich der Stoßerdungswiderstand respektive der Ausbreitungswiderstand des zentralen Vertikalerders durch den Stoßerdungswiderstand bzw. den Ausbreitungswiderstand des Fundamenterders ersetzt werden).

Es hat sich herausgestellt, daß die approximierten Werte keine allzu große Relevanz in bezug auf die Beurteilung des Stoßerdungswiderstandes des Fundamenterders haben. Die großen Abweichungen dieser näherungsweise berechneten Beträge von den Meßwerte können auf die große räumliche Ausdehnung der Erdungsanlage zurückgeführt werden (große Erderlängen führen zu großen Erderinduktivitäten und demzufolge zur Vergrößerung des Stoßerdungswiderstandes gegenüber dem Ausbreitungswiderstand).

8. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Happoldt, H.; Oeding, D.: Elektrische Kraftwerke und Netze. 5., völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1978).
- [2] Ollendorff, F.: Erdströme. 2., neubearbeitete Auflage. Basel, Stuttgart: Birkhäuser. (1969).
- [3] Denzel, P.: Grundlagen der Übertragung elektrischer Energie. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1966).
- [4] Panzer, P.: Praxis des Überspannungs- und Störspannungsschutzes elektronischer Geräte und Anlagen. 1.Auflage. Würzburg: Vogel. (1986).
- [5] Flosdorff, R.; Hilgarth, G.: Elektrische Energieverteilung. 4., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. (1982).
- [6] Asea Brown Boveri (Hrsg.): Schaltanlagen. 8., neubearbeitete Auflage. Düsseldorf: Cornelsen Verlag Schwann-Girardet. (1988).
- [7] Seyr, S.; Rösch, G.: Elektroinstallation, Blitzschutz, Lichttechnik - Eine Fachkunde für Berufs- und Fachschulen, ein Nachschlagewerk für die Praxis. 8.Auflage. Wien: Bohmann. (1993).
- [8] Menter, F.E.: Berechnung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge in ausgedehnten Erdungsanlagen. Aachen: Shaker. (1993).
- [9] Trommer, W.; Hampe, E.A.: Blitzschutzanlagen - Planen, Bauen, Prüfen. Köln: R. Müller. (1994).
- [10] Rüdberg, R.: Elektrische Schaltvorgänge. 5., neubearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1974).
- [11] Hasse, P.; Wiesinger, J.: Handbuch für Blitzschutz und Erdung. 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. München: Pflaum. Berlin, Offenbach: VDE-Verlag. (1989).
- [12] Boy, H.G.; Dunkhase, U.: Elektro-Installationstechnik. 8., überarbeitete Auflage. Würzburg: Vogel. (1992).
- [13] Seip, G.G. (Hrsg.): Elektrische Installationstechnik, Teil 1: Stromversorgung und -verteilung. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, München: Siemens Aktiengesellschaft. (1985).
- [14] Hösl, A.; Ayx, R.: Die neuzeitliche und vorschriftsmäßige Elektroinstallation - Wohnungsbau, Gewerbe, Industrie. 13, stark überarbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1988).
- [15] Richter, W.: Elektrische Meßtechnik - Grundlagen. 3., bearbeitete Auflage. Berlin: Verlag Technik. Berlin, Offenbach: VDE-Verlag. (1994).
- [16] Winterling, K.H.: Elektrische Meßtechnik. 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky: (1982).
- [17] Beuth, K.; Huber, E. (Hrsg.): Fachkenntnisse Elektrotechnik - Energieelektronik, Energietechnik. 3.Auflage. Hamburg: Handwerk und Technik. (1991).
- [18] Seip, G.G. (Hrsg.): Elektrische Installationstechnik, Teil 3: Großbauten und Freianlagen, Sonderanlagen, Errichtungsbestimmungen und Sicherheitsmaßnahmen. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, München: Siemens Aktiengesellschaft. (1985).
- [19] Vereinigung Deutscher Elektrizitätswerke - VDEW (Hrsg.): Erdungen in Starkstromnetzen. Frankfurt: Verlags- und Wirtschaftsgesellschaft der Elektrizitätswerke mbH - VDEW. (1982).
- [20] Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 13., verbesserte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong: Springer. (1990).

- [21] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. 9., durchgesehene Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1989).
- [22] Schwickardi, G.: Elektro-Energietechnik 3: Störungen und Fehler, Schutz für Apparate und Leitungen, Überstrom- und Überspannungsschutz, Blitzschutz, Erdungen, Meß- und Prüftechnik, Informationsübertragung, Netzführung mit Prozeßrechnern. Aarau, Stuttgart: AT Verlag. (1980).
- [23] Philippow, E.: Taschenbuch Elektrotechnik, Band 1: Allgemeine Grundlagen. 3., stark bearbeitete Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1986).
- [24] Schwab, A.J.: Begriffswelt der Feldtheorie: Elektromagnetische Felder, Maxwellsche Gleichungen; grad, rot, div, etc.; finite Elemente, Differenzenverfahren, Ersatzladungsverfahren, Monte Carlo Methode. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona: Springer. (1990).
- [25] Hafner, C.: Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder - Grundlagen, Methoden, Anwendungen. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1987).
- [26] Wunsch, G.; Schulz, H.G.: Elektromagnetische Felder. 1.Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1989).
- [27] Hofmann, H.: Das elektromagnetische Feld - Theorie und grundlegende Anwendungen. 3., überarbeitete Auflage. Wien. New York: Springer. (1986).
- [28] Schröter, W; et al.: Chemie. 17.Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. (1986).
- [29] Ammedick, E.; et al.: Lehrbuch der Chemie für Fachhochschulen. 5., überarbeitete Auflage. Thun, Frankfurt: Harri Deutsch. (1988).
- [30] Profos, P.; Pfeifer, T. (Hrsg.): Handbuch der industriellen Meßtechnik. 5., völlig überarbeitete und erweiterte Auflage. München, Wien: Oldenbourg. (1992).
- [31] Müller, R.: Handbuch Schutzmaßnahmen gegen zu hohe Berührungsspannung in Niederspannungsanlagen. 9., durchgesehene Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1990).
- [32] Christiani, P.: Lehrgang Elektrotechnik, Lehrbrief Nr. 20. Konstanz: Christiani-Verlag.
- [33] Dehn + Söhne (Hrsg.): Blitzplaner - Arbeitsunterlagen für den Fachmann. Nürnberg, Neumarkt/Opf.: Dehn + Söhne. (1993).
- [34] Österreichischer Verband für Elektrotechnik, Fachausschuß BL "Blitzschutz" (Hrsg.): ÖVE-E49/1988 - Blitzschutzanlagen. Wien: Österreichischer Verband für Elektrotechnik. (1988).
- [35] Bätz, H.; et al.: Elektroenergieanlagen. 3., durchgesehene Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1989).
- [36] Beyer, M.; et al.: Hochspannungstechnik - Theoretische und praktische Grundlagen für die Anwendung. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1986).
- [37] Philippow, E. (Hrsg.): Taschenbuch Elektrotechnik, Band 6: Systeme der Elektroenergietechnik - Elektrische Energietechnik, Hochspannungsisoliertechnik, Elektrowärme, Lichttechnik, Elektrochemie. 2., unveränderte Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1988).
- [38] Hilgarth, G.: Leitfaden der Elektrotechnik, Band VI: Hochspannungstechnik. Stuttgart: Teubner. (1981).
- [39] Hasenpusch, O.: Hochspannungstechnik - Einführung und Grundlagen. München: Franzis. (1991).
- [40] Wellauer, M.: Einführung in die Hochspannungstechnik. Basel, Stuttgart: Birkhäuser. (1954).

- [41] Kahle, M.: Elektrische Isoliertechnik. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1989).
- [42] Kämmel, G.; Franek, H.: Einführung in die Methode der finiten Elemente. 2.Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. (1990).
- [43] Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. 2, erweiterte und völlig neubearbeitete Auflage. München, Wien: Hanser. (1984).
- [44] Schwarz, H.R.: Methode der finiten Elemente - Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Praxis. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. (1984).
- [45] Schwarz, H.R.: FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente. 3., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. (1991).
- [46] Goering, H.; Roos, H.G.; Tobiska, L.: Finite-Element-Methode. Thun, Frankfurt: Harri Deutsch. (1989).
- [47] Richter, W.: Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. (1986).
- [48] Törnig, W.; Gipser, M.; Kaspar, B.: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik - Differenzverfahren, Finite Elemente und die Behandlung großer Gleichungssysteme. Stuttgart: Teubner. (1985).
- [49] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 23.Auflage. Moskau: Verlag Nauka. Leipzig: Teubner. (1987).
- [50] Lunze, K.: Einführung in die Elektrotechnik. 13., durchgesehene Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1991).
- [51] Sieber, N.; Sebastian, H.J.: Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte; Band 12: Spezielle Funktionen. 3.Auflage. Leipzig: Teubner. (1988).
- [52] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Band VI: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Nachdruck der 6.Auflage. Thun, Frankfurt: Harri Deutsch. (1992).
- [53] Abramowitz, M; Stegun, I.A. (eds.): Pocketbook of mathematical functions. Abridged edition of "Handbook of mathematical functions". Thun, Frankfurt: Harri Deutsch. (1984).
- [54] Kreyszig, E.: Advanced engineering mathematics. Sixth edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons. (1988).
- [55] Ameling, W.: Laplace-Transformation. 3., durchgesehene Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. (1984).
- [56] Föllinger, O.: Laplace- und Fourier-Transformation. 5.Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1990).
- [57] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. 6.Auflage. München, Wien: Oldenbourg. (1989).
- [58] Bathe, K.J.: Finite-Elemente-Methoden - Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen. Berichtigter Nachdruck. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong: Springer. (1990)
- [59] Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen und ihre Anwendungen 1 - Grundlagen. 6., vollständig neubearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer. (1992).

- [60] Ruprecht, A.: Finite Elemente zur Berechnung dreidimensionaler, turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien. Institut für Hydraulische Strömungsmaschinen. Universität Stuttgart. Mitteilung Nr. 3. (1989).
- [61] Fink, J.: Dynamische und aerostatische Stabilitätsuntersuchung der Ausfachungsstäbe von Hochspannungsmasten. Dissertation. Technische Universität Wien. (1993).
- [62] Urban, F.: Ein Beitrag zur Berechnung des Stoßerdungswiderstandes zusammengesetzter Erder. Dissertation. Technische Universität Graz. (1991).
- [63] Brechtken-Manderscheid, U.: Einführung in die Variationsrechnung. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. (1983).
- [64] Klingbeil, E.: Variationsrechnung. 2., überarbeitete Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag. (1988).
- [65] Myschkis, A.D.: Angewandte Mathematik für Physiker und Ingenieure. 1.Auflage. Thun, Frankfurt / M.: Harri Deutsch. (1981).
- [66] Courant, R.; Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik. 4.Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer. (1993).
- [67] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Reprint der 5., neubearbeiteten Auflage 1965. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer. (1984).
- [68] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. 5., überarbeitete Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag. (1987).
- [69] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil IV/1. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1988).
- [70] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil IV/2. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1989).
- [71] Berg, L.: Operatorenrechnung. Band II: Funktionentheoretische Methoden. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1974).
- [72] Klein, M.: Einführung in die DIN-Normen. 10., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. Berlin, Köln: Beuth. (1989).
- [73] Peschl, E.: Funktionentheorie. 2., durchgesehene und verbesserte Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut. (1983).
- [74] Schwab, A.J.: Elektromagnetische Verträglichkeit. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer. (1991).
- [75] Wiesinger, J.: Hybrid-Generator für die Isolationskoordination. etz. (1983). S.1102-1105.
- [76] Spiegel, M.R.: Laplace-Transformationen - Theorie und Anwendung. London, New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Guatemala [u.a.]: McGraw-Hill (1977).
- [77] Spiegel, M.R.: Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Theorie und Anwendung. London, New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Guatemala [u.a.]: McGraw-Hill (1978).
- [78] Hoy, C.; Koettnitz, H.; Kostenko, M.V.: Wellenvorgänge auf Hochspannungsfreileitungen - Berechnungsgrundlagen mit Anwendungen. 1.Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1988).

- [79] Joos, G.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. 15., völlig neu bearbeitete Auflage. Wiesbaden: Aula-Verlag. (1989).
- [80] Unger, H.G.: Elektromagnetische Wellen auf Leitungen. 3., korrigierte und erweiterte Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1991).
- [81] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil III/2. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1987).
- [82] Budó, A.: Theoretische Mechanik. 12.Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1990).
- [83] Luther, W. et al.: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Analytische und numerische Behandlung. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. (1987).
- [84] Weber, H.: Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik. 6., durchgesehene Auflage. Stuttgart: Teubner. (1990).
- [85] Clausert, H.; Wiesemann, G.: Grundgebiete der Elektrotechnik 2 - Wechselströme, Drehstrom, Leitungen, Anwendung der Fourier-, der Laplace- und der Z-Transformation. 6., verbesserte Auflage. München, Wien: Oldenbourg. (1993).
- [86] Duschek, A.: Vorlesungen über höhere Mathematik, Band II: Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie. 3., verbesserte Auflage. Wien: Springer. (1963).
- [87] Hart, H.: Einführung in die Meßtechnik. 5., durchgesehene Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1989).
- [88] Schrüfer, E.: Elektrische Meßtechnik - Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen. 3., erweiterte Auflage. München, Wien: Hanser. (1988).
- [89] Cooper, W.D.; Helfrick, A.D.: Elektrische Meßtechnik. Weinheim, Basel, Cambridge, New York: VCH. (1989).
- [90] Grimsehl, E.: Lehrbuch der Physik, Band 2: Elektrizitätslehre. 21., korrigierte Auflage. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft. (1988).
- [91] Recknagel, A.: Physik - Elektrizität und Magnetismus. 15., durchgesehene Auflage. Berlin: Verlag Technik. (1990).
- [92] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: Lehrbuch der theoretischen Physik - in zehn Bänden, Band II: Klassische Feldtheorie. 12., überarbeitete Auflage. Berlin: Akademie-Verlag. (1992).
- [93] Fritsch, V.: Die Ableitung eines Blitzstromes durch einen Erder. Die Technik 2. (1952). S. 97-108, 137-143.
- [94] Bulla, W.: Die Ausbreitung von Stoßströmen über Erder. Ö.Z.E. Jg.11 (1958). Heft 9. S.406-416.
- [95] Bulla, W.: Die Ausbreitung von Stoßströmen über Erder. Ö.Z.E. Jg.11 (1958). Heft 11. S.477-486.
- [96] Bulla, W.: Die Ausbreitung von Stoßströmen über Erder. Ö.Z.E. Jg.11 (1958). Heft 12. S.506-508.
- [97] Wagner, K.W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik. 2., verbesserte Auflage. Leipzig: J.A. Barth. (1950).

- [98] Fischer, R.; Kießling, F.: Freileitungen - Planung, Berechnung, Ausführung. 3., völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1989).
- [99] Maier, H.A.: Wanderwellenverfahren zur Berechnung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge in Drehstrom-Hochspannungsnetzen unter Berücksichtigung frequenzabhängiger Leitungsdaten. Stuttgart: HochschulVerlag. (1978).
- [100] Schildt, G. -H.: Grundlagen der Impulstechnik. Stuttgart: Teubner. (1987).
- [101] Klein, W.: Mehrorttheorie. 3.Auflage. Berlin: Akademie-Verlag. (1976).
- [102] Marko, H.: Theorie linearer Zweipole, Vierpole und Mehrpole - Eine Einführung mit einer Zusammenstellung der Formeln und Tabellen für den praktischen Gebrauch. Stuttgart: Hirzel. (1971).
- [103] Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Unveränderter Nachdruck der 8.Auflage. Stuttgart: Hirzel. (1976).
- [104] Unbehauen, R.: Elektrische Netzwerke - Eine Einführung in die Analyse. 3., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1987).
- [105] Bulla, W.: Der Stoßausbreitungswiderstand von Erdern. Die Technik 2. (1952). S. 129-136.
- [106] Hellmund, U.; Klitzsch, W.; Schumann, K.: Grundlagen der Statistik. 1.Auflage. Landsberg: Verlag Moderne Industrie. (1992).
- [107] Müller-Fonfara, R.; Scholl, W.: Mathematik 4 - Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik, Statistik, numerische Verfahren, Differentialgleichungen. Niedernhausen: Falken. (1992).
- [108] Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 11.Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1989).
- [109] Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3., unveränderte Auflage. Thun, Frankfurt am Main: Harri Deutsch. (1980).
- [110] Frei, J.: Einsatzoptimierung im hydrothermischen Verbundsystem mit Hilfe des Maximumprinzips von Pontrjagin - Konstruktionsübung aus Elektrische Anlagen 3. Institut für Elektrische Anlagen. Graz: Technische Universität. (1994).
- [111] Papageorgiou, M.: Optimierung - Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung. München, Wien: Oldenbourg. (1991).
- [112] Unbehauen, R.: Systemtheorie - Grundlagen für Ingenieure. 5., völlig überarbeitete und wesentlich erweiterte Auflage. München, Wien: Oldenbourg. (1990).
- [113] Föllinger, O.: Optimierung dynamischer Systeme - Eine Einführung für Ingenieure. 2., verbesserte Auflage. München, Wien: Oldenbourg. (1988).
- [114] Sauer, R.: Ingenieur-Mathematik, Erster Band: Differential- und Integralrechnung. 4., verbesserte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1969).
- [115] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I. 16.Auflage. Thun, Frankfurt / Main: Harri Deutsch. (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften). (1971).
- [116] Spiegel, M.R.: Fourier-Analysis: Theorie und Anwendung - Mit Anwendungen auf Grenzwertprobleme. Nachdruck 1990. London, New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Guatemala [u.a.]: McGraw-Hill (1990).

- [117] Hotop, H.J.; Oberg, H.J.: Vorlesungen zum Informatik- und Ingenieurstudium, Band 9: Fourier- und Laplacetransformation - Theorie und Anwendungen in der Elektrotechnik. 1.Auflage. Augsburg: Wißner. (1996).
- [118] Philippow, E.: Grundlagen der Elektrotechnik. 8., bearbeitete Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1989).
- [119] Föllinger, O.: Regelungstechnik - Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1990).
- [120] Groß, H.-G.: Die Berechnung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt. Archiv für Elektrotechnik. XXXIV.Band (1940). 5.Heft. S.241-268.
- [121] Lettowsky, F.: Skineffekt in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt bei hohen Frequenzen. Archiv für Elektrotechnik. XXXV.Band (1941). Heft 11. S.643-662.
- [122] Lipinski, W.; Gramz, M.; Krason, P.: Ein Beitrag zur Berechnung der Stromverdrängung in einem Bandleiter. Archiv für Elektrotechnik 62 (1980). S.51-55.
- [123] Ehrich, M.: Vereinfachte Verlust- und Induktivitätsberechnung bei ebenen Stromverdrängungsproblemen. Archiv für Elektrotechnik 60 (1978). S.129-135.
- [124] Pouplier, L.: Berechnung des komplexen Wechselstromwiderstandes von zylindrischen Leitern mit rechteckigem Querschnitt. ETZ-A. Band 89 (1968). Heft 22. S.611-617.
- [125] Ehrich, M.: Transiente und quasistationäre Stromverdrängung ebener Leiteranordnungen. Habilitationsschrift. Technische Universität Berlin. (1979).
- [126] Franz, J.J.: Die numerische Berechnung der Stromverdrängung in Bandleitern und Zylinderspulen mit Hilfe der Fredholmschen Integralgleichungsmethode. Diplomarbeit. Technische Universität Graz. (1983).
- [127] Sanystra, M.W.: Die numerische Berechnung der Stromverdrängung in Bandleitern mit Hilfe der Integralgleichungsmethode. Diplomarbeit. Technische Universität Graz. (1982).
- [128] Rüdberg, R.: Die Ausbreitung der Erdströme in der Umgebung von Wechselstromleitungen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band 5 (1925). Heft 5. S.361-389.
- [129] Kaden, H.: Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. 2., vollkommen umgearbeitete Auflage von: Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer. München: J.F. Bergmann. (1959).
- [130] Cupsa, A.: Blitzschutz der Leittechnik in Kraftwerken und Industrieanlagen - Berechnungsgrundlagen für blitzbedingte Überspannungen. Berlin, Offenbach: VDE-Verlag. (1994).
- [131] Österreichischer Verband für Elektrotechnik, Fachausschuß EN "Elektrische Niederspannungsanlagen" (Hrsg.): ÖVE-EN1, Teil 1/1989 - Errichtung von Starkstromanlagen mit Nennspannungen bis 1000V A.C. und 1500V D.C., Teil 1: Begriffe und Schutz gegen gefährliche Körperströme (Schutzmaßnahmen). Wien: Österreichischer Verband für Elektrotechnik. (1990).
- [132] Böhme, G.: Einstieg in die Mathematische Logik. München, Wien: Hanser. (1981).
- [133] Fricke, H.; Vaske, P.: Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 1: Elektrische Netzwerke. 17., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. (1982).
- [134] Doetsch, G.: Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften - Mathematische Reihe, Band 14: Handbuch der Laplace-Transformation - Band I: Theorie der Laplace-Transformation. Basel: Birkhäuser. (1950).
- [135] Hackbusch, W.: Integralgleichungen - Theorie und Numerik. Stuttgart: Teubner. (1989).

- [136] Sauer, R.: Ingenieur-Mathematik, Zweiter Band: Differentialgleichungen und Funktionentheorie. 3., erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1968).
- [137] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil II. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1990).
- [138] Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung III. 11.Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1987).
- [139] Marsal, D.: Finite Differenzen und Elemente - Numerische Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer. (1989).
- [140] Klein, B.: FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode. 2., neubearbeitete Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. (1997).
- [141] Steinke, P.: Finite-Element-Methode - Theorie und Anwendungen. 1.Auflage. Düsseldorf: Cornelsen Verlag Schwann Girardet. (1992).
- [142] Blume, S.: Theorie elektromagnetischer Felder. 3., überarbeitete Auflage. Heidelberg: Hüthig. (1991).
- [143] Sigl, R.: Einführung in die Potentialtheorie. 2., überarbeitete Auflage. Karlsruhe: Wichmann. (1989).
- [144] Landkof, N.S.: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 180: Foundations of Modern Potential Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. (1972).
- [145] Österreichischer Verband für Elektrotechnik, Fachausschuß EH "Elektrische Hochspannungsanlagen" (Hrsg.): ÖVE-EH 41/1987 - Erdungen in Wechselstromanlagen mit Nennspannungen über 1kV. Wien: Österreichischer Verband für Elektrotechnik. (1987).
- [146] Eckhardt, H.: Numerische Verfahren in der Energietechnik. Stuttgart: Teubner. (1978).
- [147] Anderson, O.: Iterative Solution of Finite Element Equations in Magnetic Field Problems. IEEE Conference Paper C72 425-7. San Francisco (1972).
- [148] Silverster, P.; Cabayan, P.; Browne, H.: Efficient Techniques for Finite Element Analysis of Electrical Machines. IEEE 73, Nr.6. (1973). S.1274-1281.
- [149] Frei, J.: Technischer Bericht 166: Messung und Berechnung der Impedanz ausgedehnter Erdsysteme. Institut für Elektrische Anlagen und Hochspannungstechnik. Graz: Technische Universität. (2000).
- [150] Fricke, H.; Frohne, H.; Vaske, P. (Hrsg.): Leitfaden der Elektrotechnik, Band 1: Grundlagen der Elektrotechnik. 16., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Teubner. (1976).
- [151] Gerthsen, C.; Vogel, H.: Physik - Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. 17., verbesserte und erweiterte Auflage - bearbeitet von H. Vogel. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest: Springer. (1993).
- [152] Helms, L.L.: Einführung in die Potentialtheorie. Berlin, New York: W. de Gruyter. (1973).
- [153] Mangoldt, H.v.; Knopp, K.: Höhere Mathematik - Eine Einführung für Studierende und zum Selbststudium, Dritter Band : Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. 15.Auflage. Stuttgart: Hirzel. (1990).

- [154] Cockcroft, J.D.: Skin effect in rectangular conductors at high frequencies. Proc. Roy. Soc. London (A). Bd. 122. (1929). S.533-542.
- [155] Haefner, S.J.: Alternating-current resistance of rectangular conductors. Proc. Instn. Radio Eng. Bd.25 (1937). S.434-447.

ANHANG

(A) Fortran-Programme zur FEM-Berechnung

(A.1) Programm ERDER

```
PROGRAM ERDER
C
C *****
C ***      PREPROZESSOR      ***
C ***      ERDERANORDNUNG    ***
C ***
C ***  15.11.1996      FREI/RE  ***
C *****
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,Q-Z)
C
C PARAMETER (NMAC2 = 308) ! ANZAHL DER 2D-ELEMENTE
C PARAMETER (NZS = 4) ! ANZAHL DER Z-SCHICHTEN
C PARAMETER (NMAC3 = NMAC2*NZS) ! 3D-ELEMENTE
C PARAMETER (NPOINT = 2000) ! ANZAHL DER MAX. PUNKTE
C
C -----
C ** UNTERTEILUNG IN X-RICHTUNG ***
C -----
C
C PARAMETER (I1 = 2)
C PARAMETER (I2 = 3)
C PARAMETER (I3 = 3)
C PARAMETER (I4 = 2)
C PARAMETER (I5 = 3)
C PARAMETER (I6 = 3)
C PARAMETER (I7 = 2)
C PARAMETER (I8 = 3)
C PARAMETER (I9 = 2)
C PARAMETER (I10 = 2)
C PARAMETER (I11 = 3)
C PARAMETER (I12 = 3)
C PARAMETER (I13 = 3)
C PARAMETER (I14 = 2)
C PARAMETER (I15 = 3)
C PARAMETER (I16 = 3)
C PARAMETER (I17 = 2)
C PARAMETER (I18 = 2)
C PARAMETER (I19 = 2)
C PARAMETER (I20 = 2)
C PARAMETER (I21 = 2)
C PARAMETER (I22 = 2)
C PARAMETER (I23 = 2)
C PARAMETER (I24 = 2)
C PARAMETER (I25 = 2)
C PARAMETER (I26 = 2)
C PARAMETER (I27 = 2)
C PARAMETER (I28 = 2)
C PARAMETER (I29 = 2)
C PARAMETER (I30 = 2)
C PARAMETER (I31 = 2)
C PARAMETER (I32 = 2)
C
C -----
C ** UNTERTEILUNG IN Y-RICHTUNG ***
C -----
C
C PARAMETER (J1 = 3)
C PARAMETER (J2 = 3)
C PARAMETER (J3 = 2)
C PARAMETER (J4 = 3)
C PARAMETER (J5 = 3)
C PARAMETER (J6 = 3)
C PARAMETER (J7 = 2)
C PARAMETER (J8 = 2)
C PARAMETER (J9 = 3)
C PARAMETER (J10 = 2)
C PARAMETER (J11 = 3)
```

```

PARAMETER (J12 = 3)
PARAMETER (J13 = 2)
PARAMETER (J14 = 3)
PARAMETER (J15 = 3)
PARAMETER (J16 = 2)
C
C -----
C ** UNTERTEILUNG IN Z-RICHTUNG ***
C -----
PARAMETER (K1 = 2)
PARAMETER (K2 = 2)
PARAMETER (K3 = 2)
PARAMETER (K4 = 2)
C
C -----
C ***** ANZIEHUNGSFAKTOREN *****
C ***** PN = [0.35, 0.65] *****
C -----
PARAMETER (P1 = 0.5)
PARAMETER (P2 = 0.5)
PARAMETER (P3 = 0.65)
PARAMETER (P4 = 0.65)
C
C -----
C *****
C -----
REAL*8 SHP(8),CX(9,NMAC2),CY(9,NMAC2)
REAL*8 X(NPOINT),Y(NPOINT)
REAL*8 Z(5),DZ(4),AZ(4)
INTEGER IUNTZ(4)
C
C -----
C *****
C -----
INTEGER IUNT(X(NMAC2),IUNTY(NMAC2))
C
INTEGER HNODE(8,NMAC2) /
C
ELEMENT 1
*747,916,915,917,918,919,752,753,
C
ELEMENT 2
*915,746,745,749,750,751,918,917,
C
ELEMENT 3
*745,765,764,766,767,768,750,749,
C
ELEMENT 4
*764,780,779,781,782,783,767,766,
C
ELEMENT 5
*779,795,794,796,797,798,782,781,
C
ELEMENT 6
*794,810,809,811,873,812,797,796,
C
ELEMENT 7
*809,824,823,825,826,827,873,811,
C
ELEMENT 8
*823,839,838,840,841,842,826,825,
C
ELEMENT 9
*838,854,853,855,856,857,841,840,
C
ELEMENT 10
*853,869,868,870,871,872,856,855,
C
ELEMENT 11
*868,895,526,532,531,896,871,870,
C
ELEMENT 12
*526,525,524,528,529,530,531,532,
C
ELEMENT 13
*524,579,578,580,581,582,529,528,
C
ELEMENT 14
*578,629,628,630,631,632,581,580,
C
ELEMENT 15
*628,677,676,678,679,680,631,630,
C
ELEMENT 16
*676,725,724,726,727,728,679,678,

```

C ELEMENT 17
*913,1066,912,914,915,916,747,748,
C ELEMENT 18
*912,741,740,744,745,746,915,914,
C ELEMENT 19
*740,762,761,763,764,765,745,744,
C ELEMENT 20
*761,777,776,778,779,780,764,763,
C ELEMENT 21
*776,792,791,793,794,795,779,778,
C ELEMENT 22
*791,807,806,808,809,810,794,793,
C ELEMENT 23
*806,821,820,822,823,824,809,808,
C ELEMENT 24
*820,836,835,837,838,839,823,822,
C ELEMENT 25
*835,851,850,852,853,854,838,837,
C ELEMENT 26
*850,866,865,867,868,869,853,852,
C ELEMENT 27
*865,894,521,527,526,895,868,867,
C ELEMENT 28
*521,520,519,523,524,525,526,527,
C ELEMENT 29
*519,576,575,577,578,579,524,523,
C ELEMENT 30
*575,626,625,627,628,629,578,577,
C ELEMENT 31
*625,674,673,675,676,677,628,627,
C ELEMENT 32
*673,722,721,723,724,725,676,675,
C ELEMENT 33
*742,1065,1060,1061,912,1066,913,1067,
C ELEMENT 34
*1062,1064,1058,1059,1060,1065,742,1063,
C ELEMENT 35
*1046,1052,1056,1057,1058,1064,1062,743,
C ELEMENT 36
*1048,1051,1054,1055,1056,1052,1046,1047,
C ELEMENT 37
*737,1050,909,1053,1054,1051,1048,1049,
C ELEMENT 38
*1056,1055,1054,910,1060,1059,1058,1057,
C ELEMENT 39
*1054,1053,909,911,912,1061,1060,910,
C ELEMENT 40
*909,736,735,739,740,741,912,911,
C ELEMENT 41
*735,759,758,760,761,762,740,739,
C ELEMENT 42
*758,774,773,775,776,777,761,760,
C ELEMENT 43
*773,789,788,790,791,792,776,775,
C ELEMENT 44
*788,804,803,805,806,807,791,790,
C ELEMENT 45
*803,818,817,819,820,821,806,805,
C ELEMENT 46
*817,833,832,834,835,836,820,819,
C ELEMENT 47
*832,848,847,849,850,851,835,834,
C ELEMENT 48
*847,863,862,864,865,866,850,849,
C ELEMENT 49

*862,893,516,522,521,894,865,864,
C ELEMENT 50
*516,515,514,518,519,520,521,522,
C ELEMENT 51
*514,573,572,574,575,576,519,518,
C ELEMENT 52
*572,623,622,624,625,626,575,574,
C ELEMENT 53
*622,671,670,672,673,674,625,624,
C ELEMENT 54
*670,719,718,720,721,722,673,672,
C ELEMENT 55
*733,907,906,908,909,1050,737,738,
C ELEMENT 56
*906,732,731,734,735,736,909,908,
C ELEMENT 57
*731,756,755,757,758,759,735,734,
C ELEMENT 58
*755,771,770,772,773,774,758,757,
C ELEMENT 59
*770,786,785,787,788,789,773,772,
C ELEMENT 60
*785,801,800,802,803,804,788,787,
C ELEMENT 61
*800,815,814,816,817,818,803,802,
C ELEMENT 62
*814,830,829,831,832,833,817,816,
C ELEMENT 63
*829,845,844,846,847,848,832,831,
C ELEMENT 64
*844,860,859,861,862,863,847,846,
C ELEMENT 65
*859,892,511,517,516,893,862,861,
C ELEMENT 66
*511,510,509,513,514,515,516,517,
C ELEMENT 67
*509,570,569,571,572,573,514,513,
C ELEMENT 68
*569,620,619,621,622,623,572,571,
C ELEMENT 69
*619,668,667,669,670,671,622,621,
C ELEMENT 70
*667,716,715,717,718,719,670,669,
C ELEMENT 71
*468,904,903,905,906,907,733,729,
C ELEMENT 72
*903,467,465,730,731,732,906,905,
C ELEMENT 73
*465,464,462,754,755,756,731,730,
C ELEMENT 74
*462,461,459,769,770,771,755,754,
C ELEMENT 75
*459,458,456,784,785,786,770,769,
C ELEMENT 76
*456,455,453,799,800,801,785,784,
C ELEMENT 77
*453,452,450,813,814,815,800,799,
C ELEMENT 78
*450,449,447,828,829,830,814,813,
C ELEMENT 79
*447,446,890,843,844,845,829,828,
C ELEMENT 80
*890,889,444,858,859,860,844,843,
C ELEMENT 81
*444,443,442,512,511,892,859,858,

C ELEMENT 82
*442,507,506,508,509,510,511,512,
C ELEMENT 83
*506,567,566,568,569,570,509,508,
C ELEMENT 84
*566,617,616,618,619,620,569,568,
C ELEMENT 85
*616,665,664,666,667,668,619,618,
C ELEMENT 86
*664,898,900,714,715,716,667,666,
C ELEMENT 87
*430,1014,419,902,903,904,468,469,
C ELEMENT 88
*419,418,411,466,465,467,903,902,
C ELEMENT 89
*411,410,408,463,462,464,465,466,
C ELEMENT 90
*408,407,405,460,459,461,462,463,
C ELEMENT 91
*405,404,402,457,456,458,459,460,
C ELEMENT 92
*402,401,399,454,453,455,456,457,
C ELEMENT 93
*399,398,396,451,450,452,453,454,
C ELEMENT 94
*396,395,393,448,447,449,450,451,
C ELEMENT 95
*393,392,390,445,890,446,447,448,
C ELEMENT 96
*390,389,387,891,444,889,890,445,
C ELEMENT 97
*387,386,385,441,442,443,444,891,
C ELEMENT 98
*385,504,503,505,506,507,442,441,
C ELEMENT 99
*503,564,563,565,566,567,506,505,
C ELEMENT 100
*563,614,613,615,616,617,566,565,
C ELEMENT 101
*613,662,901,663,664,665,616,615,
C ELEMENT 102
*901,712,899,713,900,898,664,663,
C ELEMENT 103
*431,1015,438,1022,419,1014,430,1013,
C ELEMENT 104
*432,1016,887,1020,438,1015,431,1012,
C ELEMENT 105
*433,1017,886,888,887,1016,432,921,
C ELEMENT 106
*434,1018,436,1021,886,1017,433,1011,
C ELEMENT 107
*435,1019,421,1023,436,1018,434,1010,
C ELEMENT 108
*886,1021,436,437,438,1020,887,888,
C ELEMENT 109
*436,1023,421,420,419,1022,438,437,
C ELEMENT 110
*421,965,413,412,411,418,419,420,
C ELEMENT 111
*413,414,349,409,408,410,411,412,
C ELEMENT 112
*349,348,347,406,405,407,408,409,
C ELEMENT 113
*347,363,364,403,402,404,405,406,
C ELEMENT 114

*364, 366, 367, 400, 399, 401, 402, 403,
C ELEMENT 115
*367, 369, 370, 397, 396, 398, 399, 400,
C ELEMENT 116
*370, 372, 373, 394, 393, 395, 396, 397,
C ELEMENT 117
*373, 375, 376, 391, 390, 392, 393, 394,
C ELEMENT 118
*376, 378, 379, 388, 387, 389, 390, 391,
C ELEMENT 119
*379, 381, 382, 384, 385, 386, 387, 388,
C ELEMENT 120
*382, 501, 500, 502, 503, 504, 385, 384,
C ELEMENT 121
*500, 561, 560, 562, 563, 564, 503, 502,
C ELEMENT 122
*560, 611, 610, 612, 613, 614, 563, 562,
C ELEMENT 123
*610, 660, 659, 661, 901, 662, 613, 612,
C ELEMENT 124
*659, 710, 709, 711, 899, 712, 901, 661,
C ELEMENT 125
*427, 942, 950, 943, 421, 1019, 435, 471,
C ELEMENT 126
*950, 425, 416, 415, 413, 965, 421, 943,
C ELEMENT 127
*416, 417, 344, 350, 349, 414, 413, 415,
C ELEMENT 128
*344, 1005, 358, 357, 356, 1004, 349, 350,
C ELEMENT 129
*358, 1006, 877, 362, 876, 1009, 356, 357,
C ELEMENT 130
*877, 359, 878, 360, 875, 361, 876, 362,
C ELEMENT 131
*878, 1007, 352, 353, 354, 1008, 875, 360,
C ELEMENT 132
*352, 1002, 341, 346, 347, 1003, 354, 353,
C ELEMENT 133
*356, 355, 354, 1003, 347, 348, 349, 1004,
C ELEMENT 134
*876, 361, 875, 1008, 354, 355, 356, 1009,
C ELEMENT 135
*358, 351, 352, 1007, 878, 359, 877, 1006,
C ELEMENT 136
*344, 343, 341, 1002, 352, 351, 358, 1005,
C ELEMENT 137
*341, 340, 338, 365, 364, 363, 347, 346,
C ELEMENT 138
*338, 337, 335, 368, 367, 366, 364, 365,
C ELEMENT 139
*335, 334, 332, 371, 370, 369, 367, 368,
C ELEMENT 140
*332, 331, 329, 374, 373, 372, 370, 371,
C ELEMENT 141
*329, 328, 326, 377, 376, 375, 373, 374,
C ELEMENT 142
*326, 325, 323, 380, 379, 378, 376, 377,
C ELEMENT 143
*323, 322, 321, 383, 382, 381, 379, 380,
C ELEMENT 144
*321, 498, 497, 499, 500, 501, 382, 383,
C ELEMENT 145
*497, 558, 557, 559, 560, 561, 500, 499,
C ELEMENT 146
*557, 608, 607, 609, 610, 611, 560, 559,

C ELEMENT 147
*607,657,656,658,659,660,610,609,
C ELEMENT 148
*656,707,706,708,709,710,659,658,
C ELEMENT 149
*228,941,951,944,950,942,427,428,
C ELEMENT 150
*951,225,222,472,416,425,950,944,
C ELEMENT 151
*222,221,220,345,344,417,416,472,
C ELEMENT 152
*220,218,216,342,341,343,344,345,
C ELEMENT 153
*216,215,213,339,338,340,341,342,
C ELEMENT 154
*213,212,195,336,335,337,338,339,
C ELEMENT 155
*195,194,192,333,332,334,335,336,
C ELEMENT 156
*192,191,190,330,329,331,332,333,
C ELEMENT 157
*190,319,318,327,326,328,329,330,
C ELEMENT 158
*318,316,314,324,323,325,326,327,
C ELEMENT 159
*314,313,312,320,321,322,323,324,
C ELEMENT 160
*312,495,494,496,497,498,321,320,
C ELEMENT 161
*494,555,554,556,557,558,497,496,
C ELEMENT 162
*554,605,604,606,607,608,557,556,
C ELEMENT 163
*604,654,653,655,656,657,607,606,
C ELEMENT 164
*653,704,703,705,706,707,656,655,
C ELEMENT 165
*167,940,952,945,951,941,228,229,
C ELEMENT 166
*952,164,161,223,222,225,951,945,
C ELEMENT 167
*161,160,158,219,220,221,222,223,
C ELEMENT 168
*158,157,155,217,216,218,220,219,
C ELEMENT 169
*155,154,152,214,213,215,216,217,
C ELEMENT 170
*152,151,149,196,195,212,213,214,
C ELEMENT 171
*149,997,201,200,199,996,195,196,
C ELEMENT 172
*201,998,209,208,207,1001,199,200,
C ELEMENT 173
*209,210,211,204,205,206,207,208,
C ELEMENT 174
*211,999,203,920,197,1000,205,204,
C ELEMENT 175
*203,994,147,193,192,995,197,920,
C ELEMENT 176
*199,198,197,995,192,194,195,996,
C ELEMENT 177
*207,206,205,1000,197,198,199,1001,
C ELEMENT 178
*201,202,203,999,211,210,209,998,
C ELEMENT 179

*149,148,147,994,203,202,201,997,
C ELEMENT 180
*147,188,187,189,190,191,192,193,
C ELEMENT 181
*187,310,308,317,318,319,190,189,
C ELEMENT 182
*308,307,305,315,314,316,318,317,
C ELEMENT 183
*305,304,303,311,312,313,314,315,
C ELEMENT 184
*303,492,491,493,494,495,312,311,
C ELEMENT 185
*491,552,551,553,554,555,494,493,
C ELEMENT 186
*551,602,601,603,604,605,554,553,
C ELEMENT 187
*601,651,650,652,653,654,604,603,
C ELEMENT 188
*650,701,700,702,703,704,653,652,
C ELEMENT 189
*127,939,953,946,952,940,167,168,
C ELEMENT 190
*953,123,121,162,161,164,952,946,
C ELEMENT 191
*121,120,118,159,158,160,161,162,
C ELEMENT 192
*118,117,115,156,155,157,158,159,
C ELEMENT 193
*115,114,112,153,152,154,155,156,
C ELEMENT 194
*112,111,110,150,149,151,152,153,
C ELEMENT 195
*110,145,144,146,147,148,149,150,
C ELEMENT 196
*144,185,184,186,187,188,147,146,
C ELEMENT 197
*184,301,299,309,308,310,187,186,
C ELEMENT 198
*299,298,296,306,305,307,308,309,
C ELEMENT 199
*296,295,294,302,303,304,305,306,
C ELEMENT 200
*294,489,488,490,491,492,303,302,
C ELEMENT 201
*488,549,548,550,551,552,491,490,
C ELEMENT 202
*548,599,598,600,601,602,551,550,
C ELEMENT 203
*598,648,647,649,650,651,601,600,
C ELEMENT 204
*647,698,697,699,700,701,650,649,
C ELEMENT 205
*93,938,954,947,953,939,127,128,
C ELEMENT 206
*954,90,87,122,121,123,953,947,
C ELEMENT 207
*87,86,84,119,118,120,121,122,
C ELEMENT 208
*84,83,81,116,115,117,118,119,
C ELEMENT 209
*81,80,79,113,112,114,115,116,
C ELEMENT 210
*79,108,107,109,110,111,112,113,
C ELEMENT 211
*107,142,141,143,144,145,110,109,

C ELEMENT 212
*141,182,181,183,184,185,144,143,
C ELEMENT 213
*181,274,273,300,299,301,184,183,
C ELEMENT 214
*273,292,290,297,296,298,299,300,
C ELEMENT 215
*290,289,288,293,294,295,296,297,
C ELEMENT 216
*288,486,485,487,488,489,294,293,
C ELEMENT 217
*485,546,545,547,548,549,488,487,
C ELEMENT 218
*545,596,595,597,598,599,548,547,
C ELEMENT 219
*595,645,644,646,647,648,598,597,
C ELEMENT 220
*644,695,694,696,697,698,647,646,
C ELEMENT 221
*65,937,955,948,954,938,93,94,
C ELEMENT 222
*955,61,59,88,87,90,954,948,
C ELEMENT 223
*59,58,56,85,84,86,87,88,
C ELEMENT 224
*56,55,54,82,81,83,84,85,
C ELEMENT 225
*54,77,76,78,79,80,81,82,
C ELEMENT 226
*76,105,104,106,107,108,79,78,
C ELEMENT 227
*104,139,138,140,141,142,107,106,
C ELEMENT 228
*138,179,178,180,181,182,141,140,
C ELEMENT 229
*178,989,278,277,276,988,181,180,
C ELEMENT 230
*278,992,884,284,883,991,276,277,
C ELEMENT 231
*884,285,885,286,882,283,883,284,
C ELEMENT 232
*885,993,280,281,282,990,882,286,
C ELEMENT 233
*280,986,269,272,273,987,282,281,
C ELEMENT 234
*276,275,282,987,273,274,181,988,
C ELEMENT 235
*883,283,882,990,282,275,276,991,
C ELEMENT 236
*278,279,280,993,885,285,884,992,
C ELEMENT 237
*178,271,269,986,280,279,278,989,
C ELEMENT 238
*269,268,266,291,290,292,273,272,
C ELEMENT 239
*266,265,264,287,288,289,290,291,
C ELEMENT 240
*264,483,482,484,485,486,288,287,
C ELEMENT 241
*482,543,542,544,545,546,485,484,
C ELEMENT 242
*542,593,592,594,595,596,545,544,
C ELEMENT 243
*592,642,641,643,644,645,595,594,
C ELEMENT 244

*641,691,690,693,694,695,644,643,
C ELEMENT 245
*35,936,956,949,955,937,65,66,
C ELEMENT 246
*956,31,29,60,59,61,955,949,
C ELEMENT 247
*29,44,43,57,56,58,59,60,
C ELEMENT 248
*43,52,51,53,54,55,56,57,
C ELEMENT 249
*51,74,73,75,76,77,54,53,
C ELEMENT 250
*73,102,101,103,104,105,76,75,
C ELEMENT 251
*101,136,135,137,138,139,104,103,
C ELEMENT 252
*135,176,175,177,178,179,138,137,
C ELEMENT 253
*175,470,261,270,269,271,178,177,
C ELEMENT 254
*261,260,258,267,266,268,269,270,
C ELEMENT 255
*258,257,256,263,264,265,266,267,
C ELEMENT 256
*256,480,479,481,482,483,264,263,
C ELEMENT 257
*479,540,539,541,542,543,482,481,
C ELEMENT 258
*539,590,589,591,592,593,542,541,
C ELEMENT 259
*589,639,638,640,641,642,592,591,
C ELEMENT 260
*638,688,687,689,690,691,641,640,
C ELEMENT 261
*22,966,20,30,956,936,35,36,
C ELEMENT 262
*20,32,957,28,29,31,956,30,
C ELEMENT 263
*957,929,958,42,43,44,29,28,
C ELEMENT 264
*958,930,959,50,51,52,43,42,
C ELEMENT 265
*959,931,960,72,73,74,51,50,
C ELEMENT 266
*960,932,961,100,101,102,73,72,
C ELEMENT 267
*961,933,962,134,135,136,101,100,
C ELEMENT 268
*962,934,963,174,175,176,135,134,
C ELEMENT 269
*963,935,233,964,261,470,175,174,
C ELEMENT 270
*233,243,242,259,258,260,261,964,
C ELEMENT 271
*242,254,253,255,256,257,258,259,
C ELEMENT 272
*253,477,476,478,479,480,256,255,
C ELEMENT 273
*476,537,536,538,539,540,479,478,
C ELEMENT 274
*536,587,586,588,589,590,539,538,
C ELEMENT 275
*586,636,635,637,638,639,589,588,
C ELEMENT 276
*635,685,684,686,687,688,638,637,

C ELEMENT 277
*15,967,12,968,20,966,22,23,
C ELEMENT 278
*7,6,5,971,12,967,15,16,
C ELEMENT 279
*1,2,3,4,5,6,7,8,
C ELEMENT 280
*3,9,10,970,12,971,5,4,
C ELEMENT 281
*10,17,18,969,20,968,12,970,
C ELEMENT 282
*18,24,25,928,957,32,20,969,
C ELEMENT 283
*25,37,38,927,958,929,957,928,
C ELEMENT 284
*38,45,46,926,959,930,958,927,
C ELEMENT 285
*46,67,68,925,960,931,959,926,
C ELEMENT 286
*68,95,96,924,961,932,960,925,
C ELEMENT 287
*96,129,130,923,962,933,961,924,
C ELEMENT 288
*130,169,170,922,963,934,962,923,
C ELEMENT 289
*170,230,231,980,233,935,963,922,
C ELEMENT 290
*231,972,235,981,246,979,233,980,
C ELEMENT 291
*235,973,236,982,249,985,246,981,
C ELEMENT 292
*236,237,238,983,247,248,249,982,
C ELEMENT 293
*238,974,239,977,244,984,247,983,
C ELEMENT 294
*239,975,240,976,242,978,244,977,
C ELEMENT 295
*249,248,247,984,244,245,246,985,
C ELEMENT 296
*246,245,244,978,242,243,233,979,
C ELEMENT 297
*240,250,251,252,253,254,242,976,
C ELEMENT 298
*251,473,474,475,476,477,253,252,
C ELEMENT 299
*474,533,534,1044,536,537,476,475,
C ELEMENT 300
*534,1045,535,1036,1037,1043,536,1044,
C ELEMENT 301
*535,1035,1034,1040,1039,1038,1037,1036,
C ELEMENT 302
*1034,583,1032,1031,1030,1041,1039,1040,
C ELEMENT 303
*1032,1033,584,1028,1027,1029,1030,1031,
C ELEMENT 304
*584,1024,585,1025,586,1026,1027,1028,
C ELEMENT 305
*1039,1041,1030,1029,1027,1042,1037,1038,
C ELEMENT 306
*1037,1042,1027,1026,586,587,536,1043,
C ELEMENT 307
*585,633,897,634,635,636,586,1025,
C ELEMENT 308
*897,681,682,683,684,685,635,634/
C -----

```
C      ***** PARAMETER Z-SCHICHTEN *****
C      -----
C      ***** KOORDINATENURSPRUNG *****
C      -----
C      PARAMETER (ZM1 = 0.0)
C      -----
C      ** ABSTAND DER Z-SCHICHTEN VOM **
C      ***** KOORDINATENURSPRUNG *****
C      -----
C      PARAMETER (ZM2 = 0.2)
C      PARAMETER (ZM3 = 0.4)
C      PARAMETER (ZM4 = 1.4)
C      PARAMETER (ZM5 = 5.4)
C      -----
C      ** KOORDINATEN DER Z-SCHICHTEN **
C      -----
C      Z(1) = ZM1 - ZM2
C      Z(2) = ZM1 - ZM3
C      Z(3) = ZM1 - ZM4
C      Z(4) = ZM1 - ZM5
C      DZ(1) = ZM2
C      DZ(2) = ZM3 - ZM2
C      DZ(3) = ZM4 - ZM3
C      DZ(4) = ZM5 - ZM4
C      -----
C      *** UNTERTEILUNG DER EINZELNEN ***
C      ***** ELEMENTE *****
C      -----
C      IUNTX(1) = I1
C      IUNTY(1) = J1
C      -----
C      IUNTX(2) = I2
C      IUNTY(2) = J1
C      -----
C      IUNTX(3) = I3
C      IUNTY(3) = J1
C      -----
C      IUNTX(4) = I4
C      IUNTY(4) = J1
C      -----
C      IUNTX(5) = I5
C      IUNTY(5) = J1
C      -----
C      IUNTX(6) = I6
C      IUNTY(6) = J1
C      -----
C      IUNTX(7) = I7
C      IUNTY(7) = J1
C      -----
C      IUNTX(8) = I8
C      IUNTY(8) = J1
C      -----
C      IUNTX(9) = I9
C      IUNTY(9) = J1
C      -----
C      IUNTX(10) = I10
C      IUNTY(10) = J1
C      -----
C      IUNTX(11) = I11
C      IUNTY(11) = J1
C      -----
C      IUNTX(12) = I12
C      IUNTY(12) = J1
C      -----
C      IUNTX(13) = I13
```

```
IUNTY(13) = J1
-----
C
IUNTX(14) = I14
IUNTY(14) = J1
-----
C
IUNTX(15) = I15
IUNTY(15) = J1
-----
C
IUNTX(16) = I16
IUNTY(16) = J1
-----
C
IUNTX(17) = I1
IUNTY(17) = J2
-----
C
IUNTX(18) = I2
IUNTY(18) = J2
-----
C
IUNTX(19) = I3
IUNTY(19) = J2
-----
C
IUNTX(20) = I4
IUNTY(20) = J2
-----
C
IUNTX(21) = I5
IUNTY(21) = J2
-----
C
IUNTX(22) = I6
IUNTY(22) = J2
-----
C
IUNTX(23) = I7
IUNTY(23) = J2
-----
C
IUNTX(24) = I8
IUNTY(24) = J2
-----
C
IUNTX(25) = I9
IUNTY(25) = J2
-----
C
IUNTX(26) = I10
IUNTY(26) = J2
-----
C
IUNTX(27) = I11
IUNTY(27) = J2
-----
C
IUNTX(28) = I12
IUNTY(28) = J2
-----
C
IUNTX(29) = I13
IUNTY(29) = J2
-----
C
IUNTX(30) = I14
IUNTY(30) = J2
-----
C
IUNTX(31) = I15
IUNTY(31) = J2
-----
C
IUNTX(32) = I16
IUNTY(32) = J2
-----
C
IUNTX(33) = I1
IUNTY(33) = I31
-----
C
IUNTX(34) = I1
IUNTY(34) = I32
-----
C
```

```
IUNTX(35) = I1
IUNTY(35) = J3
C -----
IUNTX(36) = I1
IUNTY(36) = I32
C -----
IUNTX(37) = I1
IUNTY(37) = I31
C -----
IUNTX(38) = I32
IUNTY(38) = J3
C -----
IUNTX(39) = I31
IUNTY(39) = J3
C -----
IUNTX(40) = I2
IUNTY(40) = J3
C -----
IUNTX(41) = I3
IUNTY(41) = J3
C -----
IUNTX(42) = I4
IUNTY(42) = J3
C -----
IUNTX(43) = I5
IUNTY(43) = J3
C -----
IUNTX(44) = I6
IUNTY(44) = J3
C -----
IUNTX(45) = I7
IUNTY(45) = J3
C -----
IUNTX(46) = I8
IUNTY(46) = J3
C -----
IUNTX(47) = I9
IUNTY(47) = J3
C -----
IUNTX(48) = I10
IUNTY(48) = J3
C -----
IUNTX(49) = I11
IUNTY(49) = J3
C -----
IUNTX(50) = I12
IUNTY(50) = J3
C -----
IUNTX(51) = I13
IUNTY(51) = J3
C -----
IUNTX(52) = I14
IUNTY(52) = J3
C -----
IUNTX(53) = I15
IUNTY(53) = J3
C -----
IUNTX(54) = I16
IUNTY(54) = J3
C -----
IUNTX(55) = I1
IUNTY(55) = J4
C -----
IUNTX(56) = I2
IUNTY(56) = J4
```

```
C -----  
IUNTX(57) = I3  
IUNTY(57) = J4  
C -----  
IUNTX(58) = I4  
IUNTY(58) = J4  
C -----  
IUNTX(59) = I5  
IUNTY(59) = J4  
C -----  
IUNTX(60) = I6  
IUNTY(60) = J4  
C -----  
IUNTX(61) = I7  
IUNTY(61) = J4  
C -----  
IUNTX(62) = I8  
IUNTY(62) = J4  
C -----  
IUNTX(63) = I9  
IUNTY(63) = J4  
C -----  
IUNTX(64) = I10  
IUNTY(64) = J4  
C -----  
IUNTX(65) = I11  
IUNTY(65) = J4  
C -----  
IUNTX(66) = I12  
IUNTY(66) = J4  
C -----  
IUNTX(67) = I13  
IUNTY(67) = J4  
C -----  
IUNTX(68) = I14  
IUNTY(68) = J4  
C -----  
IUNTX(69) = I15  
IUNTY(69) = J4  
C -----  
IUNTX(70) = I16  
IUNTY(70) = J4  
C -----  
IUNTX(71) = I1  
IUNTY(71) = J5  
C -----  
IUNTX(72) = I2  
IUNTY(72) = J5  
C -----  
IUNTX(73) = I3  
IUNTY(73) = J5  
C -----  
IUNTX(74) = I4  
IUNTY(74) = J5  
C -----  
IUNTX(75) = I5  
IUNTY(75) = J5  
C -----  
IUNTX(76) = I6  
IUNTY(76) = J5  
C -----  
IUNTX(77) = I7  
IUNTY(77) = J5  
C -----  
IUNTX(78) = I8
```

```
IUNTY(78) = J5
C -----
IUNTX(79) = I9
IUNTY(79) = J5
C -----
IUNTX(80) = I10
IUNTY(80) = J5
C -----
IUNTX(81) = I11
IUNTY(81) = J5
C -----
IUNTX(82) = I12
IUNTY(82) = J5
C -----
IUNTX(83) = I13
IUNTY(83) = J5
C -----
IUNTX(84) = I14
IUNTY(84) = J5
C -----
IUNTX(85) = I15
IUNTY(85) = J5
C -----
IUNTX(86) = I16
IUNTY(86) = J5
C -----
IUNTX(87) = I1
IUNTY(87) = J6
C -----
IUNTX(88) = I2
IUNTY(88) = J6
C -----
IUNTX(89) = I3
IUNTY(89) = J6
C -----
IUNTX(90) = I4
IUNTY(90) = J6
C -----
IUNTX(91) = I5
IUNTY(91) = J6
C -----
IUNTX(92) = I6
IUNTY(92) = J6
C -----
IUNTX(93) = I7
IUNTY(93) = J6
C -----
IUNTX(94) = I8
IUNTY(94) = J6
C -----
IUNTX(95) = I9
IUNTY(95) = J6
C -----
IUNTX(96) = I10
IUNTY(96) = J6
C -----
IUNTX(97) = I11
IUNTY(97) = J6
C -----
IUNTX(98) = I12
IUNTY(98) = J6
C -----
IUNTX(99) = I13
IUNTY(99) = J6
C -----
```

```
IUNTX(100) = I14
IUNTY(100) = J6
C -----
IUNTX(101) = I15
IUNTY(101) = J6
C -----
IUNTX(102) = I16
IUNTY(102) = J6
C -----
IUNTX(103) = I1
IUNTY(103) = I23
C -----
IUNTX(104) = I1
IUNTY(104) = I24
C -----
IUNTX(105) = I1
IUNTY(105) = J7
C -----
IUNTX(106) = I1
IUNTY(106) = I24
C -----
IUNTX(107) = I1
IUNTY(107) = I23
C -----
IUNTX(108) = I24
IUNTY(108) = J7
C -----
IUNTX(109) = I23
IUNTY(109) = J7
C -----
IUNTX(110) = I2
IUNTY(110) = J7
C -----
IUNTX(111) = I3
IUNTY(111) = J7
C -----
IUNTX(112) = I4
IUNTY(112) = J7
C -----
IUNTX(113) = I5
IUNTY(113) = J7
C -----
IUNTX(114) = I6
IUNTY(114) = J7
C -----
IUNTX(115) = I7
IUNTY(115) = J7
C -----
IUNTX(116) = I8
IUNTY(116) = J7
C -----
IUNTX(117) = I9
IUNTY(117) = J7
C -----
IUNTX(118) = I10
IUNTY(118) = J7
C -----
IUNTX(119) = I11
IUNTY(119) = J7
C -----
IUNTX(120) = I12
IUNTY(120) = J7
C -----
IUNTX(121) = I13
IUNTY(121) = J7
```

```
C -----  
IUNTX(122) = I14  
IUNTY(122) = J7  
C -----  
IUNTX(123) = I15  
IUNTY(123) = J7  
C -----  
IUNTX(124) = I16  
IUNTY(124) = J7  
C -----  
IUNTX(125) = I1  
IUNTY(125) = J8  
C -----  
IUNTX(126) = I2  
IUNTY(126) = J8  
C -----  
IUNTX(127) = I3  
IUNTY(127) = J8  
C -----  
IUNTX(128) = I21  
IUNTY(128) = J8  
C -----  
IUNTX(129) = I22  
IUNTY(129) = J8  
C -----  
IUNTX(130) = I4  
IUNTY(130) = J8  
C -----  
IUNTX(131) = I22  
IUNTY(131) = J8  
C -----  
IUNTX(132) = I21  
IUNTY(132) = J8  
C -----  
IUNTX(133) = I4  
IUNTY(133) = I21  
C -----  
IUNTX(134) = I4  
IUNTY(134) = I22  
C -----  
IUNTX(135) = I4  
IUNTY(135) = I22  
C -----  
IUNTX(136) = I4  
IUNTY(136) = I21  
C -----  
IUNTX(137) = I5  
IUNTY(137) = J8  
C -----  
IUNTX(138) = I6  
IUNTY(138) = J8  
C -----  
IUNTX(139) = I7  
IUNTY(139) = J8  
C -----  
IUNTX(140) = I8  
IUNTY(140) = J8  
C -----  
IUNTX(141) = I9  
IUNTY(141) = J8  
C -----  
IUNTX(142) = I10  
IUNTY(142) = J8  
C -----  
IUNTX(143) = I11
```

```
IUNTY(143) = J8
-----
C
IUNTX(144) = I12
IUNTY(144) = J8
-----
C
IUNTX(145) = I13
IUNTY(145) = J8
-----
C
IUNTX(146) = I14
IUNTY(146) = J8
-----
C
IUNTX(147) = I15
IUNTY(147) = J8
-----
C
IUNTX(148) = I16
IUNTY(148) = J8
-----
C
IUNTX(149) = I1
IUNTY(149) = J9
-----
C
IUNTX(150) = I2
IUNTY(150) = J9
-----
C
IUNTX(151) = I3
IUNTY(151) = J9
-----
C
IUNTX(152) = I4
IUNTY(152) = J9
-----
C
IUNTX(153) = I5
IUNTY(153) = J9
-----
C
IUNTX(154) = I6
IUNTY(154) = J9
-----
C
IUNTX(155) = I7
IUNTY(155) = J9
-----
C
IUNTX(156) = I8
IUNTY(156) = J9
-----
C
IUNTX(157) = I9
IUNTY(157) = J9
-----
C
IUNTX(158) = I10
IUNTY(158) = J9
-----
C
IUNTX(159) = I11
IUNTY(159) = J9
-----
C
IUNTX(160) = I12
IUNTY(160) = J9
-----
C
IUNTX(161) = I13
IUNTY(161) = J9
-----
C
IUNTX(162) = I14
IUNTY(162) = J9
-----
C
IUNTX(163) = I15
IUNTY(163) = J9
-----
C
IUNTX(164) = I16
IUNTY(164) = J9
-----
C
```

```
IUNTX(165) = I1
IUNTY(165) = J10
C -----
IUNTX(166) = I2
IUNTY(166) = J10
C -----
IUNTX(167) = I3
IUNTY(167) = J10
C -----
IUNTX(168) = I4
IUNTY(168) = J10
C -----
IUNTX(169) = I5
IUNTY(169) = J10
C -----
IUNTX(170) = I6
IUNTY(170) = J10
C -----
IUNTX(171) = I19
IUNTY(171) = J10
C -----
IUNTX(172) = I20
IUNTY(172) = J10
C -----
IUNTX(173) = I7
IUNTY(173) = J10
C -----
IUNTX(174) = I20
IUNTY(174) = J10
C -----
IUNTX(175) = I19
IUNTY(175) = J10
C -----
IUNTX(176) = I7
IUNTY(176) = I19
C -----
IUNTX(177) = I7
IUNTY(177) = I20
C -----
IUNTX(178) = I7
IUNTY(178) = I20
C -----
IUNTX(179) = I7
IUNTY(179) = I19
C -----
IUNTX(180) = I8
IUNTY(180) = J10
C -----
IUNTX(181) = I9
IUNTY(181) = J10
C -----
IUNTX(182) = I10
IUNTY(182) = J10
C -----
IUNTX(183) = I11
IUNTY(183) = J10
C -----
IUNTX(184) = I12
IUNTY(184) = J10
C -----
IUNTX(185) = I13
IUNTY(185) = J10
C -----
IUNTX(186) = I14
IUNTY(186) = J10
```

```
C -----  
IUNTX(187) = I15  
IUNTY(187) = J10  
C -----  
IUNTX(188) = I16  
IUNTY(188) = J10  
C -----  
IUNTX(189) = I1  
IUNTY(189) = J11  
C -----  
IUNTX(190) = I2  
IUNTY(190) = J11  
C -----  
IUNTX(191) = I3  
IUNTY(191) = J11  
C -----  
IUNTX(192) = I4  
IUNTY(192) = J11  
C -----  
IUNTX(193) = I5  
IUNTY(193) = J11  
C -----  
IUNTX(194) = I6  
IUNTY(194) = J11  
C -----  
IUNTX(195) = I7  
IUNTY(195) = J11  
C -----  
IUNTX(196) = I8  
IUNTY(196) = J11  
C -----  
IUNTX(197) = I9  
IUNTY(197) = J11  
C -----  
IUNTX(198) = I10  
IUNTY(198) = J11  
C -----  
IUNTX(199) = I11  
IUNTY(199) = J11  
C -----  
IUNTX(200) = I12  
IUNTY(200) = J11  
C -----  
IUNTX(201) = I13  
IUNTY(201) = J11  
C -----  
IUNTX(202) = I14  
IUNTY(202) = J11  
C -----  
IUNTX(203) = I15  
IUNTY(203) = J11  
C -----  
IUNTX(204) = I16  
IUNTY(204) = J11  
C -----  
IUNTX(205) = I1  
IUNTY(205) = J12  
C -----  
IUNTX(206) = I2  
IUNTY(206) = J12  
C -----  
IUNTX(207) = I3  
IUNTY(207) = J12  
C -----  
IUNTX(208) = I4
```

```
IUNTY(208) = J12
-----
C
IUNTX(209) = I5
IUNTY(209) = J12
-----
C
IUNTX(210) = I6
IUNTY(210) = J12
-----
C
IUNTX(211) = I7
IUNTY(211) = J12
-----
C
IUNTX(212) = I8
IUNTY(212) = J12
-----
C
IUNTX(213) = I9
IUNTY(213) = J12
-----
C
IUNTX(214) = I10
IUNTY(214) = J12
-----
C
IUNTX(215) = I11
IUNTY(215) = J12
-----
C
IUNTX(216) = I12
IUNTY(216) = J12
-----
C
IUNTX(217) = I13
IUNTY(217) = J12
-----
C
IUNTX(218) = I14
IUNTY(218) = J12
-----
C
IUNTX(219) = I15
IUNTY(219) = J12
-----
C
IUNTX(220) = I16
IUNTY(220) = J12
-----
C
IUNTX(221) = I1
IUNTY(221) = J13
-----
C
IUNTX(222) = I2
IUNTY(222) = J13
-----
C
IUNTX(223) = I3
IUNTY(223) = J13
-----
C
IUNTX(224) = I4
IUNTY(224) = J13
-----
C
IUNTX(225) = I5
IUNTY(225) = J13
-----
C
IUNTX(226) = I6
IUNTY(226) = J13
-----
C
IUNTX(227) = I7
IUNTY(227) = J13
-----
C
IUNTX(228) = I8
IUNTY(228) = J13
-----
C
IUNTX(229) = I17
IUNTY(229) = J13
-----
C
```

```
IUNTX(230) = I18
IUNTY(230) = J13
-----
C
IUNTX(231) = I9
IUNTY(231) = J13
-----
C
IUNTX(232) = I18
IUNTY(232) = J13
-----
C
IUNTX(233) = I17
IUNTY(233) = J13
-----
C
IUNTX(234) = I9
IUNTY(234) = I17
-----
C
IUNTX(235) = I9
IUNTY(235) = I18
-----
C
IUNTX(236) = I9
IUNTY(236) = I18
-----
C
IUNTX(237) = I9
IUNTY(237) = I17
-----
C
IUNTX(238) = I10
IUNTY(238) = J13
-----
C
IUNTX(239) = I11
IUNTY(239) = J13
-----
C
IUNTX(240) = I12
IUNTY(240) = J13
-----
C
IUNTX(241) = I13
IUNTY(241) = J13
-----
C
IUNTX(242) = I14
IUNTY(242) = J13
-----
C
IUNTX(243) = I15
IUNTY(243) = J13
-----
C
IUNTX(244) = I16
IUNTY(244) = J13
-----
C
IUNTX(245) = I1
IUNTY(245) = J14
-----
C
IUNTX(246) = I2
IUNTY(246) = J14
-----
C
IUNTX(247) = I3
IUNTY(247) = J14
-----
C
IUNTX(248) = I4
IUNTY(248) = J14
-----
C
IUNTX(249) = I5
IUNTY(249) = J14
-----
C
IUNTX(250) = I6
IUNTY(250) = J14
-----
C
IUNTX(251) = I7
IUNTY(251) = J14
```

```
C -----  
IUNTX(252) = I8  
IUNTY(252) = J14  
C -----  
IUNTX(253) = I9  
IUNTY(253) = J14  
C -----  
IUNTX(254) = I10  
IUNTY(254) = J14  
C -----  
IUNTX(255) = I11  
IUNTY(255) = J14  
C -----  
IUNTX(256) = I12  
IUNTY(256) = J14  
C -----  
IUNTX(257) = I13  
IUNTY(257) = J14  
C -----  
IUNTX(258) = I14  
IUNTY(258) = J14  
C -----  
IUNTX(259) = I15  
IUNTY(259) = J14  
C -----  
IUNTX(260) = I16  
IUNTY(260) = J14  
C -----  
IUNTX(261) = I1  
IUNTY(261) = J15  
C -----  
IUNTX(262) = I2  
IUNTY(262) = J15  
C -----  
IUNTX(263) = I3  
IUNTY(263) = J15  
C -----  
IUNTX(264) = I4  
IUNTY(264) = J15  
C -----  
IUNTX(265) = I5  
IUNTY(265) = J15  
C -----  
IUNTX(266) = I6  
IUNTY(266) = J15  
C -----  
IUNTX(267) = I7  
IUNTY(267) = J15  
C -----  
IUNTX(268) = I8  
IUNTY(268) = J15  
C -----  
IUNTX(269) = I9  
IUNTY(269) = J15  
C -----  
IUNTX(270) = I10  
IUNTY(270) = J15  
C -----  
IUNTX(271) = I11  
IUNTY(271) = J15  
C -----  
IUNTX(272) = I12  
IUNTY(272) = J15  
C -----  
IUNTX(273) = I13
```

```
IUNTY(273) = J15
-----
C
IUNTX(274) = I14
IUNTY(274) = J15
-----
C
IUNTX(275) = I15
IUNTY(275) = J15
-----
C
IUNTX(276) = I16
IUNTY(276) = J15
-----
C
IUNTX(277) = I1
IUNTY(277) = I27
-----
C
IUNTX(278) = I1
IUNTY(278) = I28
-----
C
IUNTX(279) = I1
IUNTY(279) = J16
-----
C
IUNTX(280) = I28
IUNTY(280) = J16
-----
C
IUNTX(281) = I27
IUNTY(281) = J16
-----
C
IUNTX(282) = I2
IUNTY(282) = J16
-----
C
IUNTX(283) = I3
IUNTY(283) = J16
-----
C
IUNTX(284) = I4
IUNTY(284) = J16
-----
C
IUNTX(285) = I5
IUNTY(285) = J16
-----
C
IUNTX(286) = I6
IUNTY(286) = J16
-----
C
IUNTX(287) = I7
IUNTY(287) = J16
-----
C
IUNTX(288) = I8
IUNTY(288) = J16
-----
C
IUNTX(289) = I9
IUNTY(289) = J16
-----
C
IUNTX(290) = I25
IUNTY(290) = J16
-----
C
IUNTX(291) = I26
IUNTY(291) = J16
-----
C
IUNTX(292) = I10
IUNTY(292) = J16
-----
C
IUNTX(293) = I26
IUNTY(293) = J16
-----
C
IUNTX(294) = I25
IUNTY(294) = J16
-----
C
```

```

      IUNTX(295) = I10
      IUNTY(295) = I26
C-----
      IUNTX(296) = I10
      IUNTY(296) = I25
C-----
      IUNTX(297) = I11
      IUNTY(297) = J16
C-----
      IUNTX(298) = I12
      IUNTY(298) = J16
C-----
      IUNTX(299) = I13
      IUNTY(299) = J16
C-----
      IUNTX(300) = I29
      IUNTY(300) = J16
C-----
      IUNTX(301) = I30
      IUNTY(301) = J16
C-----
      IUNTX(302) = I14
      IUNTY(302) = J16
C-----
      IUNTX(303) = I30
      IUNTY(303) = J16
C-----
      IUNTX(304) = I29
      IUNTY(304) = J16
C-----
      IUNTX(305) = I14
      IUNTY(305) = I30
C-----
      IUNTX(306) = I14
      IUNTY(306) = I29
C-----
      IUNTX(307) = I15
      IUNTY(307) = J16
C-----
      IUNTX(308) = I16
      IUNTY(308) = J16
C-----
C      *** UNTERTEILUNG DER EINZELNEN **
C      ***** Z-SCHICHTEN *****
C-----
      IUNTZ(1) = K1
      IUNTZ(2) = K2
      IUNTZ(3) = K3
      IUNTZ(4) = K4
C-----
C      ***** ANZIEHUNGSFAKTOREN *****
C      ***** AZ(N) = [0.35, 0.65] *****
C-----
      AZ(1) = P1
      AZ(2) = P2
      AZ(3) = P3
      AZ(4) = P4
C-----
C      *****
C-----
C      CALL ERDER1(X,Y,NMAC2)
C
      DO I=1,NMAC2
      DO J=1,8
      CX(J,I)=X(HNODE(J,I))

```

```
      CY(J,I)=Y(HNODE(J,I))
      ENDDO
      ENDDO
C
C -----
C *** BEGINN DER AUSGABEROUTINE ***
C -----
C *** FLAECHENMITTENKOORDINATEN ***
C -----
      XL=0.D0
      YL=0.D0
      CALL SHAP09(XL,YL,SHP)
      DO IEL=1,NMAC2
      DO L=1,8
      CX(9,IEL)=CX(9,IEL)+SHP(L)*CX(L,IEL)
      CY(9,IEL)=CY(9,IEL)+SHP(L)*CY(L,IEL)
      ENDDO
      ENDDO
C
      open(50,file='geo.ein',status='unknown',access='sequential')
C
      WRITE(50,*) NMAC3
      WRITE(50,*) NMAC2
C
      DO IEL=1,NMAC2
      DO J=1,8
      WRITE(50,*) CX(J,IEL),CY(J,IEL)
      ENDDO
      WRITE(50,*) IUNTX(IEL),IUNTY(IEL)
C
      WRITE(50,*) 1,1
      ENDDO
C
      DO IEL=1,NMAC2
      WRITE(50,*) CX(9,IEL),CY(9,IEL)
      ENDDO
C
      DO I=1,NZS
      WRITE(50,*) Z(I),DZ(I),AZ(I),IUNTZ(I)
      ENDDO
      WRITE(50,*) 0,0,0,0
C
      END
```

(A.2) Programm ERDER1

```

SUBROUTINE ERDER1(X,Y,NMAC2)
C
C *****
C **  MODELL ZUR BRECHNUNG DES  **
C **  STOSSERDUNGSWIDERSTANDES  **
C **                               **
C **  15.11.1996          FREI/RE  **
C *****
C
C  IMPLICIT REAL*8 (R-Z,K)
C
C  -----
C  ****  VERSCHIEDENE KONSTANTEN  ****
C  -----
C  ***** (A) WINKELFUNKTIONEN *****
C  -----
C  ***** (1) SIN 45° = COS 45° *****
C  -----
C  PARAMETER (W1 = 0.707107)
C  -----
C  ***** (2) SIN 22.5° *****
C  -----
C  PARAMETER (W2 = 0.382683)
C  -----
C  ***** (3) COS 22.5° *****
C  -----
C  PARAMETER (W3 = 0.923880)
C  -----
C  ***** (B) WURZELN *****
C  -----
C  ***** (1) WURZEL AUS 2 *****
C  -----
C  PARAMETER (W4 = 1.414214)
C  -----
C  ***** KOORDINATENURSPRUNG = *****
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 1  ****
C  -----
C  PARAMETER (XM1 = 0.0)
C  PARAMETER (YM1 = 0.0)
C  -----
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 2  ****
C  ***** YM2 = YM1 ! *****
C  -----
C  PARAMETER (XM2 = 11.0)
C  PARAMETER (YM2 = 0.0)
C  -----
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 3  ****
C  -----
C  PARAMETER (XM3 = 10.16)
C  PARAMETER (YM3 = 4.21)
C  -----
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 4  ****
C  -----
C  PARAMETER (XM4 = 7.78)
C  PARAMETER (YM4 = 7.78)
C  -----
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 5  ****
C  -----
C  PARAMETER (XM5 = 4.21)
C  PARAMETER (YM5 = 10.16)
C  -----
C  ****  MITTELPUNKT ELEKTRODE 6  ****
C  ***** XM6 = XM1 ! *****
C  -----

```

```

PARAMETER (XM6 = 0.0)
PARAMETER (YM6 = 11.0)
C
C
C **** MITTELPUNKT ELEKTRODE 7 ****
C ***** YM18 = YM1 ! *****
C
PARAMETER (XM18 = 16.58)
PARAMETER (YM18 = 0.0)
C
C
C **** MITTELPUNKT ELEKTRODE 8 ****
C ***** XM8 = XM1 ! *****
C
PARAMETER (XM8 = 0.0)
PARAMETER (YM8 = 16.90)
C
C
C ***** RADIEN *****
C
C * ELEKTRODE 1 / UM ELEKTRODE 1 **
C
PARAMETER (R1 = 0.009)
PARAMETER (R2 = 0.2)
C
C
C * ELEKTRODE 2 / UM ELEKTRODE 2 **
C
PARAMETER (R3 = 0.005)
PARAMETER (R4 = 0.1)
C
C
C * ELEKTRODE 3 / UM ELEKTRODE 3 **
C
PARAMETER (R5 = 0.005)
PARAMETER (R6 = 0.1)
C
C
C * ELEKTRODE 4 / UM ELEKTRODE 4 **
C
PARAMETER (R7 = 0.005)
PARAMETER (R8 = 0.1)
C
C
C * ELEKTRODE 5 / UM ELEKTRODE 5 **
C
PARAMETER (R9 = 0.005)
PARAMETER (R10 = 0.1)
C
C
C * ELEKTRODE 6 / UM ELEKTRODE 6 **
C
PARAMETER (R11 = 0.005)
PARAMETER (R12 = 0.1)
C
C
C * ELEKTRODE 7 / UM ELEKTRODE 7 **
C
PARAMETER (R15 = 0.005)
PARAMETER (R16 = 0.4)
C
C
C * ELEKTRODE 8 / UM ELEKTRODE 8 **
C
PARAMETER (R13 = 0.005)
PARAMETER (R14 = 0.4)
C
C
C *** PARAMETER DER KNOTENPUNTE ***
C
C ***** (1) X-RICHTUNG *****
C
PARAMETER (XM7 = 2.16)
PARAMETER (XM10 = 6.25)
PARAMETER (XM12 = 9.25)
PARAMETER (XM13 = 12.89)

```

```

PARAMETER (XM14 = 13.56)
PARAMETER (XM15 = 14.38)
PARAMETER (XM21 = 18.74)
PARAMETER (XM22 = 20.50)
PARAMETER (XM23 = 25.00)
C
-----
C ***** (2) Y-RICHTUNG *****
C
PARAMETER (YM7 = 2.16)
PARAMETER (YM10 = 6.25)
PARAMETER (YM12 = 9.25)
PARAMETER (YM13 = 12.89)
PARAMETER (YM14 = 13.56)
PARAMETER (YM15 = 14.38)
PARAMETER (YM21 = 18.74)
PARAMETER (YM22 = 20.50)
PARAMETER (YM23 = 25.00)
C
-----
REAL*8 X(*),Y(*)
C
-----
C * KOORDINATEN DER KNOTENPUNKTE **
C
-----
C ***** (1) X-KOORDINATEN *****
C
-----
C ***** ELEKTRODE 6 *****
C
-----
X(421) = XM6 + R12 * W1
X(419) = X(421)
X(436) = XM6 + R11 * W1
X(438) = X(436)
X(435) = XM6
X(434) = XM6
X(433) = XM6
X(921) = XM6
X(432) = XM6
X(431) = XM6
X(430) = XM6
X(420) = XM6 + R12
X(437) = XM6 + R11
X(886) = XM6 + R11 / 2.D0
X(887) = X(886)
X(888) = X(886)
X(418) = (XM7 + X(419)) / 2.D0
X(904) = (X(419) + XM1) / 2.D0
X(1010) = XM6
X(1011) = XM6
X(1012) = XM6
X(1013) = XM6
X(1014) = XM6 + R12 * W2
X(1019) = X(1014)
X(1015) = XM6 + R11 * W2
X(1018) = X(1015)
X(1016) = XM6 + R11 / 4.D0
X(1017) = X(1016)
X(1020) = XM6 + R11 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(1021) = X(1020)
X(1022) = XM6 + (R11 + R12) * W1 / 2.D0
X(1023) = X(1022)
C
-----
C *****
C
-----
X(907) = X(904)
X(910) = X(904)
X(913) = X(904)
X(916) = X(904)

```

```

C -----
C *****
C -----
X(902) = X(419)
X(903) = X(419)
X(905) = X(419)
X(906) = X(419)
X(908) = X(419)
X(909) = X(419)
X(911) = X(419)
X(912) = X(419)
C -----
C *****
C -----
X(965) = X(418)
X(467) = X(418)
X(732) = X(418)
X(736) = X(418)
X(741) = X(418)
X(746) = X(418)
X(751) = X(418)
C -----
C *****
C -----
X(35) = XM1
X(66) = XM1
X(65) = XM1
X(94) = XM1
X(93) = XM1
X(128) = XM1
X(127) = XM1
X(168) = XM1
X(167) = XM1
X(229) = XM1
X(228) = XM1
X(428) = XM1
X(427) = XM1
X(471) = XM1
X(469) = XM1
X(468) = XM1
X(729) = XM1
X(733) = XM1
X(738) = XM1
X(737) = XM1
X(743) = XM1
X(742) = XM1
X(748) = XM1
X(747) = XM1
X(753) = XM1
X(752) = XM1
C -----
C ***** ELEKTRODE 8 *****
C -----
X(909) = XM8 + R14 * W1
X(912) = X(909)
X(1054) = XM8 + R13 * W1
X(1060) = X(1054)
X(737) = XM8
X(1048) = XM8
X(1046) = XM8
X(743) = XM8
X(1062) = XM8
X(742) = XM8
X(913) = XM8
X(911) = XM8 + R14

```

```

X(910) = XM8 + R13
X(1056) = XM8 + R13 / 2.D0
X(1058) = X(1056)
X(1057) = X(1056)
X(746) = (XM7 + X(912)) / 2.D0
X(916) = (X(912) + XM1) / 2.D0
X(1049) = XM8
X(1047) = XM8
X(1063) = XM8
X(1067) = XM8
X(1066) = XM8 + R14 * W2
X(1050) = X(1066)
X(1065) = XM8 + R13 * W2
X(1051) = X(1065)
X(1052) = XM8 + R13 / 4.D0
X(1064) = X(1052)
X(1059) = XM8 + R13 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(1055) = X(1020)
X(1061) = XM8 + (R13 + R14) * W1 / 2.D0
X(1053) = X(1061)
C -----
C *****
C -----
X(919) = X(916)
C -----
C *****
C -----
X(914) = X(912)
X(915) = X(912)
X(917) = X(912)
X(918) = X(912)
C -----
C ***** ELEKTRODE 1 *****
C -----
X(1) = XM1
X(8) = XM1
X(7) = XM1
X(16) = XM1
X(15) = XM1
X(23) = XM1
X(22) = XM1
X(36) = XM1
X(2) = XM1 + R1 / 4.D0
X(6) = X(2)
X(3) = XM1 + R1 / 2.D0
X(4) = X(3)
X(5) = X(3)
X(9) = XM1 + 3.D0 * R1 / 4.D0
X(10) = XM1 + R1
X(17) = XM1 + (R2 + R1) / 2.D0
X(18) = XM1 + R2
X(24) = (XM7 + X(18)) / 2.D0
X(12) = XM1 + R1 * W1
X(20) = XM1 + R2 * W1
X(32) = (XM7 + X(20)) / 2.D0
X(966) = XM1 + R2 * W2
X(967) = XM1 + R1 * W2
X(969) = XM1 + R2 * W3
X(970) = XM1 + R1 * W3
X(968) = XM1 + (R1 + R2) * W1 / 2.D0
X(971) = XM1 + R1 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
C -----
C *****
C -----
X(25) = XM7

```

```

X(928) = XM7
X(957) = XM7
X(28) = XM7
X(29) = XM7
X(60) = XM7
X(59) = XM7
X(88) = XM7
X(87) = XM7
X(122) = XM7
X(121) = XM7
X(162) = XM7
X(161) = XM7
X(223) = XM7
X(222) = XM7
X(472) = XM7
X(416) = XM7
X(415) = XM7
X(413) = XM7
X(412) = XM7
X(411) = XM7
X(466) = XM7
X(465) = XM7
X(730) = XM7
X(731) = XM7
X(734) = XM7
X(735) = XM7
X(739) = XM7
X(740) = XM7
X(744) = XM7
X(745) = XM7
X(749) = XM7
X(750) = XM7

```

```

C -----
C ***** ELEKTRODE 5 *****
C -----
X(358) = XM5 - R9 * W1
X(356) = X(358)
X(352) = XM5 + R9 * W1
X(354) = X(352)
X(344) = XM5 - R10 * W1
X(417) = (X(344) + XM7) / 2.D0
X(349) = X(344)
X(341) = XM5 + R10 * W1
X(347) = X(341)
X(350) = XM5 - R10
X(346) = XM5 + R10
X(343) = XM5
X(351) = XM5
X(359) = XM5
X(360) = XM5 + R9 / 2.D0
X(362) = XM5 - R9 / 2.D0
X(361) = XM5
X(355) = XM5
X(348) = XM5
X(353) = XM5 + R9
X(357) = XM5 - R9
X(874) = XM5
X(875) = X(360)
X(878) = X(360)
X(876) = X(362)
X(877) = X(362)
X(340) = (XM10 + X(341)) / 2.D0
X(363) = X(340)
X(1004) = XM5 - (R9 + R10) * W1 / 2.D0
X(1005) = X(1004)

```

```
X(1003) = XM5 + (R9 + R10) * W1 / 2.D0
X(1002) = X(1003)
X(1008) = XM5 + R9 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(1007) = X(1008)
X(1009) = XM5 - R9 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(1006) = X(1009)
C -----
C *****
C -----
X(37) = X(417)
X(929) = X(417)
X(44) = X(417)
X(58) = X(417)
X(86) = X(417)
X(120) = X(417)
X(160) = X(417)
X(221) = X(417)
X(414) = X(417)
X(410) = X(417)
X(464) = X(417)
X(756) = X(417)
X(759) = X(417)
X(762) = X(417)
X(765) = X(417)
X(768) = X(417)
C -----
C *****
C -----
X(38) = X(344)
X(927) = X(344)
X(958) = X(344)
X(42) = X(344)
X(43) = X(344)
X(57) = X(344)
X(56) = X(344)
X(85) = X(344)
X(84) = X(344)
X(119) = X(344)
X(118) = X(344)
X(159) = X(344)
X(158) = X(344)
X(219) = X(344)
X(220) = X(344)
X(345) = X(344)
X(409) = X(344)
X(408) = X(344)
X(463) = X(344)
X(462) = X(344)
X(754) = X(344)
X(755) = X(344)
X(757) = X(344)
X(758) = X(344)
X(760) = X(344)
X(761) = X(344)
X(763) = X(344)
X(764) = X(344)
X(766) = X(344)
X(767) = X(344)
C -----
C *****
C -----
X(45) = XM5
X(930) = XM5
X(52) = XM5
X(55) = XM5
```

```

X(83) = XM5
X(117) = XM5
X(157) = XM5
X(218) = XM5
X(407) = XM5
X(461) = XM5
X(771) = XM5
X(774) = XM5
X(777) = XM5
X(780) = XM5
X(783) = XM5
C -----
C *****
C -----
X(46) = X(341)
X(926) = X(341)
X(959) = X(341)
X(50) = X(341)
X(51) = X(341)
X(53) = X(341)
X(54) = X(341)
X(82) = X(341)
X(81) = X(341)
X(116) = X(341)
X(115) = X(341)
X(156) = X(341)
X(155) = X(341)
X(217) = X(341)
X(216) = X(341)
X(342) = X(341)
X(406) = X(341)
X(405) = X(341)
X(460) = X(341)
X(459) = X(341)
X(769) = X(341)
X(770) = X(341)
X(772) = X(341)
X(773) = X(341)
X(775) = X(341)
X(776) = X(341)
X(778) = X(341)
X(779) = X(341)
X(781) = X(341)
X(782) = X(341)
C -----
C *****
C -----
X(67) = X(340)
X(931) = X(340)
X(74) = X(340)
X(77) = X(340)
X(80) = X(340)
X(114) = X(340)
X(154) = X(340)
X(215) = X(340)
X(404) = X(340)
X(458) = X(340)
X(786) = X(340)
X(789) = X(340)
X(792) = X(340)
X(795) = X(340)
X(798) = X(340)
C -----
C *****
C -----

```

```

X(68) = XM10
X(925) = XM10
X(960) = XM10
X(72) = XM10
X(73) = XM10
X(75) = XM10
X(76) = XM10
X(78) = XM10
X(79) = XM10
X(113) = XM10
X(112) = XM10
X(153) = XM10
X(152) = XM10
X(214) = XM10
X(213) = XM10
X(339) = XM10
X(338) = XM10
X(365) = XM10
X(364) = XM10
X(403) = XM10
X(402) = XM10
X(457) = XM10
X(456) = XM10
X(784) = XM10
X(785) = XM10
X(787) = XM10
X(788) = XM10
X(790) = XM10
X(791) = XM10
X(793) = XM10
X(794) = XM10
X(796) = XM10
X(797) = XM10

```

```

C -----
C ***** ELEKTRODE 4 *****
C -----
X(147) = XM4 + R8 * W1
X(192) = X(147)
X(149) = XM4 - R8 * W1
X(195) = X(149)
X(201) = XM4 - R7 * W1
X(199) = X(201)
X(203) = XM4 + R7 * W1
X(197) = X(203)
X(148) = XM4
X(202) = XM4
X(210) = XM4
X(879) = XM4
X(206) = XM4
X(198) = XM4
X(194) = XM4
X(196) = XM4 - R8
X(200) = XM4 - R7
X(920) = XM4 + R7
X(193) = XM4 + R8
X(204) = XM4 + R7 / 2.D0
X(205) = X(204)
X(211) = X(204)
X(208) = XM4 - R7 / 2.D0
X(207) = X(208)
X(209) = X(208)
X(151) = (X(149) + XM10) / 2.D0
X(996) = XM4 - (R7 + R8) * W1 / 2.D0
X(997) = X(996)
X(995) = XM4 + (R7 + R8) * W1 / 2.D0

```

```

X(994) = X(995)
X(1000) = XM4 + R7 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(999) = X(1000)
X(1001) = XM4 - R7 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(998) = X(1001)
C -----
C *****
C -----
X(95) = X(151)
X(932) = X(151)
X(102) = X(151)
X(105) = X(151)
X(108) = X(151)
X(111) = X(151)
X(212) = X(151)
X(337) = X(151)
X(366) = X(151)
X(401) = X(151)
X(455) = X(151)
X(801) = X(151)
X(804) = X(151)
X(807) = X(151)
X(810) = X(151)
X(812) = X(151)
C -----
C *****
C -----
X(96) = X(149)
X(924) = X(149)
X(961) = X(149)
X(100) = X(149)
X(101) = X(149)
X(103) = X(149)
X(104) = X(149)
X(106) = X(149)
X(107) = X(149)
X(109) = X(149)
X(110) = X(149)
X(150) = X(149)
X(336) = X(149)
X(335) = X(149)
X(368) = X(149)
X(367) = X(149)
X(400) = X(149)
X(399) = X(149)
X(454) = X(149)
X(453) = X(149)
X(799) = X(149)
X(800) = X(149)
X(802) = X(149)
X(803) = X(149)
X(805) = X(149)
X(806) = X(149)
X(808) = X(149)
X(809) = X(149)
X(811) = X(149)
X(873) = X(149)
C -----
C *****
C -----
X(129) = XM4
X(933) = XM4
X(136) = XM4
X(139) = XM4
X(142) = XM4

```

```

X(145) = XM4
X(334) = XM4
X(369) = XM4
X(398) = XM4
X(452) = XM4
X(815) = XM4
X(818) = XM4
X(821) = XM4
X(824) = XM4
X(827) = XM4
C -----
C *****
C -----
X(130) = X(147)
X(923) = X(147)
X(962) = X(147)
X(134) = X(147)
X(135) = X(147)
X(137) = X(147)
X(138) = X(147)
X(140) = X(147)
X(141) = X(147)
X(143) = X(147)
X(144) = X(147)
X(146) = X(147)
X(333) = X(147)
X(332) = X(147)
X(371) = X(147)
X(370) = X(147)
X(397) = X(147)
X(396) = X(147)
X(451) = X(147)
X(450) = X(147)
X(813) = X(147)
X(814) = X(147)
X(816) = X(147)
X(817) = X(147)
X(819) = X(147)
X(820) = X(147)
X(822) = X(147)
X(823) = X(147)
X(825) = X(147)
X(826) = X(147)
C -----
C *****
C -----
X(169) = XM12
X(934) = XM12
X(176) = XM12
X(179) = XM12
X(182) = XM12
X(185) = XM12
X(188) = XM12
X(191) = XM12
X(331) = XM12
X(372) = XM12
X(395) = XM12
X(449) = XM12
X(830) = XM12
X(833) = XM12
X(836) = XM12
X(839) = XM12
X(842) = XM12
C -----
C ***** ELEKTRODE 3 *****

```

```

C -----
X(178) = XM3 - R6 * W1
X(181) = X(178)
X(269) = XM3 + R6 * W1
X(273) = X(269)
X(280) = XM3 + R5 * W1
X(282) = X(280)
X(278) = XM3 - R5 * W1
X(276) = X(278)
X(880) = XM3
X(271) = XM3
X(279) = XM3
X(285) = XM3
X(283) = XM3
X(275) = XM3
X(274) = XM3
X(180) = XM3 - R6
X(272) = XM3 + R6
X(277) = XM3 - R5
X(281) = XM3 + R5
X(286) = XM3 + R5 / 2.D0
X(885) = X(286)
X(882) = X(286)
X(284) = XM3 - R5 / 2.D0
X(883) = X(284)
X(884) = X(284)
X(988) = XM3 - (R5 + R6) * W1 / 2.D0
X(989) = X(988)
X(987) = XM3 + (R5 + R6) * W1 / 2.D0
X(986) = X(987)
X(991) = XM3 - R5 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(992) = X(991)
X(990) = XM3 + R5 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(993) = X(990)
X(242) = XM2 + R4 * W1
X(268) = (X(269) + X(242)) / 2.D0
X(292) = X(268)

```

```

C -----
C *****
C -----
X(170) = X(178)
X(922) = X(178)
X(963) = X(178)
X(174) = X(178)
X(175) = X(178)
X(177) = X(178)
X(183) = X(178)
X(184) = X(178)
X(186) = X(178)
X(187) = X(178)
X(189) = X(178)
X(190) = X(178)
X(330) = X(178)
X(329) = X(178)
X(374) = X(178)
X(373) = X(178)
X(394) = X(178)
X(393) = X(178)
X(448) = X(178)
X(447) = X(178)
X(828) = X(178)
X(829) = X(178)
X(831) = X(178)
X(832) = X(178)
X(834) = X(178)

```

```

X(835) = X(178)
X(837) = X(178)
X(838) = X(178)
X(840) = X(178)
X(841) = X(178)
C
-----
C ***** ELEKTRODE 2 *****
C
X(233) = XM2 - R4 * W1
X(246) = XM2 - R3 * W1
X(244) = XM2 + R3 * W1
X(231) = XM2 - R4
X(240) = XM2 + R4
X(235) = XM2 - R3
X(239) = XM2 + R3
X(237) = XM2
X(248) = XM2
X(245) = XM2
X(243) = XM2
X(236) = XM2 - R3 / 2.D0
X(249) = X(236)
X(238) = XM2 + R3 / 2.D0
X(247) = X(238)
X(230) = (X(231) + X(178)) / 2.D0
X(251) = XM13
X(250) = (X(251) + X(240)) / 2.D0
X(254) = (XM13 + X(242)) / 2.D0
X(935) = (X(233) + X(178)) / 2.D0
X(972) = XM2 - (R3 + R4) / 2.D0
X(975) = XM2 + (R3 + R4) / 2.D0
X(973) = XM2 - 3.D0 * R3 / 4.D0
X(974) = XM2 + 3.D0 * R3 / 4.D0
X(977) = XM2 + R3 * W3
X(981) = XM2 - R3 * W3
X(976) = XM2 + R4 * W3
X(980) = XM2 - R4 * W3
X(978) = XM2 + (R3 + R4) * W1 / 2.D0
X(979) = XM2 - (R3 + R4) * W1 / 2.D0
X(982) = X(236)
X(983) = X(238)
X(984) = XM2 + R3 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(985) = XM2 - R3 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
C
-----
C *****
C
X(301) = XM3
X(310) = XM3
X(319) = XM3
X(328) = XM3
X(375) = XM3
X(392) = XM3
X(446) = XM3
X(845) = XM3
X(848) = XM3
X(851) = XM3
X(854) = XM3
X(857) = XM3
C
-----
C *****
C
X(300) = X(269)
X(299) = X(269)
X(309) = X(269)
X(308) = X(269)
X(317) = X(269)

```

X(318) = X(269)
 X(327) = X(269)
 X(326) = X(269)
 X(377) = X(269)
 X(376) = X(269)
 X(391) = X(269)
 X(390) = X(269)
 X(445) = X(269)
 X(890) = X(269)
 X(843) = X(269)
 X(844) = X(269)
 X(846) = X(269)
 X(847) = X(269)
 X(849) = X(269)
 X(850) = X(269)
 X(852) = X(269)
 X(853) = X(269)
 X(855) = X(269)
 X(856) = X(269)

C -----
 C *****
 C -----

X(268) = X(268)
 X(292) = X(268)
 X(298) = X(268)
 X(307) = X(268)
 X(316) = X(268)
 X(325) = X(268)
 X(378) = X(268)
 X(389) = X(268)
 X(889) = X(268)
 X(860) = X(268)
 X(863) = X(268)
 X(866) = X(268)
 X(869) = X(268)
 X(872) = X(268)

C -----
 C *****
 C -----

X(259) = X(242)
 X(258) = X(242)
 X(267) = X(242)
 X(266) = X(242)
 X(291) = X(242)
 X(290) = X(242)
 X(297) = X(242)
 X(296) = X(242)
 X(306) = X(242)
 X(305) = X(242)
 X(315) = X(242)
 X(314) = X(242)
 X(324) = X(242)
 X(323) = X(242)
 X(380) = X(242)
 X(379) = X(242)
 X(388) = X(242)
 X(387) = X(242)
 X(891) = X(242)
 X(444) = X(242)
 X(858) = X(242)
 X(859) = X(242)
 X(861) = X(242)
 X(862) = X(242)
 X(864) = X(242)
 X(865) = X(242)

```

X(867) = X(242)
X(868) = X(242)
X(870) = X(242)
X(871) = X(242)
C -----
C *****
C -----
X(257) = X(254)
X(265) = X(254)
X(289) = X(254)
X(295) = X(254)
X(304) = X(254)
X(313) = X(254)
X(322) = X(254)
X(381) = X(254)
X(386) = X(254)
X(443) = X(254)
X(892) = X(254)
X(893) = X(254)
X(894) = X(254)
X(895) = X(254)
X(896) = X(254)
C -----
C ***** ELEKTRODE 7 *****
C -----
X(536) = XM18 - R16 * W1
X(586) = XM18 + R16 * W1
X(1037) = XM18 - R15 * W1
X(1027) = XM18 + R15 * W1
X(534) = XM18 - R16
X(585) = XM18 + R16
X(535) = XM18 - R15
X(584) = XM18 + R15
X(583) = XM18
X(1041) = XM18
X(1042) = XM18
X(587) = XM18
X(1034) = XM18 - R15 / 2.D0
X(1039) = X(1034)
X(1032) = XM18 + R15 / 2.D0
X(1030) = X(1032)
X(533) = (X(534) + XM15) / 2.D0
X(633) = (XM21 + X(585)) / 2.D0
X(636) = (XM21 + X(586)) / 2.D0
X(537) = (X(536) + XM15) / 2.D0
X(1045) = XM18 - (R15 + R16) / 2.D0
X(1024) = XM18 + (R15 + R16) / 2.D0
X(1035) = XM18 - 3.D0 * R15 / 4.D0
X(1033) = XM18 + 3.D0 * R15 / 4.D0
X(1028) = XM18 + R15 * W3
X(1036) = XM18 - R15 * W3
X(1025) = XM18 + R16 * W3
X(1044) = XM18 - R16 * W3
X(1026) = XM18 + (R15 + R16) * W1 / 2.D0
X(1043) = XM18 - (R15 + R16) * W1 / 2.D0
X(1040) = X(1034)
X(1031) = X(1032)
X(1029) = XM18 + R15 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
X(1038) = XM18 - R15 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
C -----
C *****
C -----
X(252) = XM13
X(253) = XM13
X(255) = XM13

```

X(256) = XM13
 X(263) = XM13
 X(264) = XM13
 X(287) = XM13
 X(288) = XM13
 X(293) = XM13
 X(294) = XM13
 X(302) = XM13
 X(303) = XM13
 X(311) = XM13
 X(312) = XM13
 X(320) = XM13
 X(321) = XM13
 X(383) = XM13
 X(382) = XM13
 X(384) = XM13
 X(385) = XM13
 X(441) = XM13
 X(442) = XM13
 X(512) = XM13
 X(511) = XM13
 X(517) = XM13
 X(516) = XM13
 X(522) = XM13
 X(521) = XM13
 X(527) = XM13
 X(526) = XM13
 X(532) = XM13
 X(531) = XM13

C
 C
 C

X(473) = XM14
 X(477) = XM14
 X(480) = XM14
 X(483) = XM14
 X(486) = XM14
 X(489) = XM14
 X(492) = XM14
 X(495) = XM14
 X(498) = XM14
 X(501) = XM14
 X(504) = XM14
 X(507) = XM14
 X(510) = XM14
 X(515) = XM14
 X(520) = XM14
 X(525) = XM14
 X(530) = XM14

C
 C
 C

X(474) = XM15
 X(475) = XM15
 X(476) = XM15
 X(478) = XM15
 X(479) = XM15
 X(481) = XM15
 X(482) = XM15
 X(484) = XM15
 X(485) = XM15
 X(487) = XM15
 X(488) = XM15
 X(490) = XM15
 X(491) = XM15

X(493) = XM15
X(494) = XM15
X(496) = XM15
X(497) = XM15
X(499) = XM15
X(500) = XM15
X(502) = XM15
X(503) = XM15
X(505) = XM15
X(506) = XM15
X(508) = XM15
X(509) = XM15
X(513) = XM15
X(514) = XM15
X(518) = XM15
X(519) = XM15
X(523) = XM15
X(524) = XM15
X(528) = XM15
X(529) = XM15

C
C
C

X(540) = X(537)
X(543) = X(537)
X(546) = X(537)
X(549) = X(537)
X(552) = X(537)
X(555) = X(537)
X(558) = X(537)
X(561) = X(537)
X(564) = X(537)
X(567) = X(537)
X(570) = X(537)
X(573) = X(537)
X(576) = X(537)
X(579) = X(537)
X(582) = X(537)

C
C
C

X(538) = X(536)
X(539) = X(536)
X(541) = X(536)
X(542) = X(536)
X(544) = X(536)
X(545) = X(536)
X(547) = X(536)
X(548) = X(536)
X(550) = X(536)
X(551) = X(536)
X(553) = X(536)
X(554) = X(536)
X(556) = X(536)
X(557) = X(536)
X(559) = X(536)
X(560) = X(536)
X(562) = X(536)
X(563) = X(536)
X(565) = X(536)
X(566) = X(536)
X(568) = X(536)
X(569) = X(536)
X(571) = X(536)
X(572) = X(536)

```

X(574) = X(536)
X(575) = X(536)
X(577) = X(536)
X(578) = X(536)
X(580) = X(536)
X(581) = X(536)
C -----
C *****
C -----
X(590) = XM18
X(593) = XM18
X(596) = XM18
X(599) = XM18
X(602) = XM18
X(605) = XM18
X(608) = XM18
X(611) = XM18
X(614) = XM18
X(617) = XM18
X(620) = XM18
X(623) = XM18
X(626) = XM18
X(629) = XM18
X(632) = XM18
C -----
C *****
C -----
X(588) = X(586)
X(589) = X(586)
X(591) = X(586)
X(592) = X(586)
X(594) = X(586)
X(595) = X(586)
X(597) = X(586)
X(598) = X(586)
X(600) = X(586)
X(601) = X(586)
X(603) = X(586)
X(604) = X(586)
X(606) = X(586)
X(607) = X(586)
X(609) = X(586)
X(610) = X(586)
X(612) = X(586)
X(613) = X(586)
X(615) = X(586)
X(616) = X(586)
X(618) = X(586)
X(619) = X(586)
X(621) = X(586)
X(622) = X(586)
X(624) = X(586)
X(625) = X(586)
X(627) = X(586)
X(628) = X(586)
X(630) = X(586)
X(631) = X(586)
C -----
C *****
C -----
X(639) = X(636)
X(642) = X(636)
X(645) = X(636)
X(648) = X(636)
X(651) = X(636)

```

```
X(654) = X(636)
X(657) = X(636)
X(660) = X(636)
X(662) = X(636)
X(665) = X(636)
X(668) = X(636)
X(671) = X(636)
X(674) = X(636)
X(677) = X(636)
X(680) = X(636)
C -----
C *****
C -----
X(897) = XM21
X(634) = XM21
X(635) = XM21
X(637) = XM21
X(638) = XM21
X(640) = XM21
X(641) = XM21
X(643) = XM21
X(644) = XM21
X(646) = XM21
X(647) = XM21
X(649) = XM21
X(650) = XM21
X(652) = XM21
X(653) = XM21
X(655) = XM21
X(656) = XM21
X(658) = XM21
X(659) = XM21
X(661) = XM21
X(901) = XM21
X(663) = XM21
X(664) = XM21
X(666) = XM21
X(667) = XM21
X(669) = XM21
X(670) = XM21
X(672) = XM21
X(673) = XM21
X(675) = XM21
X(676) = XM21
X(678) = XM21
X(679) = XM21
C -----
C *****
C -----
X(681) = XM22
X(685) = XM22
X(688) = XM22
X(691) = XM22
X(695) = XM22
X(698) = XM22
X(701) = XM22
X(704) = XM22
X(707) = XM22
X(710) = XM22
X(712) = XM22
X(898) = XM22
X(716) = XM22
X(719) = XM22
X(722) = XM22
X(725) = XM22
```

```

X(728) = XM22
-----
C
C *****
C
-----
X(682) = XM23
X(683) = XM23
X(684) = XM23
X(686) = XM23
X(687) = XM23
X(689) = XM23
X(690) = XM23
X(693) = XM23
X(694) = XM23
X(696) = XM23
X(697) = XM23
X(699) = XM23
X(700) = XM23
X(702) = XM23
X(703) = XM23
X(705) = XM23
X(706) = XM23
X(708) = XM23
X(709) = XM23
X(711) = XM23
X(899) = XM23
X(713) = XM23
X(900) = XM23
X(714) = XM23
X(715) = XM23
X(717) = XM23
X(718) = XM23
X(720) = XM23
X(721) = XM23
X(723) = XM23
X(724) = XM23
X(726) = XM23
X(727) = XM23
-----
C
C ***** (2) Y-KOORDINATEN *****
C
C ***** ELEKTRODE 1 *****
C
-----
Y(1) = YM1
Y(2) = YM1
Y(3) = YM1
Y(9) = YM1
Y(10) = YM1
Y(17) = YM1
Y(18) = YM1
Y(24) = YM1
Y(7) = YM1 + R1 / 2.D0
Y(6) = Y(7)
Y(5) = Y(7)
Y(8) = YM1 + R1 / 4.D0
Y(4) = Y(8)
Y(16) = YM1 + 3.D0 * R1 / 4.D0
Y(15) = YM1 + R1
Y(23) = YM1 + (R2 + R1) / 2.D0
Y(22) = YM1 + R2
Y(36) = (YM7 + Y(22)) / 2.D0
Y(12) = YM1 + R1 * W1
Y(20) = YM1 + R2 * W1
Y(30) = (YM7 + Y(20)) / 2.D0
Y(966) = YM1 + R2 * W3
Y(967) = YM1 + R1 * W3

```

```

Y(969) = YM1 + R2 * W2
Y(970) = YM1 + R1 * W2
Y(968) = YM1 + (R1 + R2) * W1 / 2.D0
Y(971) = YM1 + R1 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
C
C
C
-----
*****
-----
Y(25) = YM1
Y(37) = YM1
Y(38) = YM1
Y(45) = YM1
Y(46) = YM1
Y(67) = YM1
Y(68) = YM1
Y(95) = YM1
Y(96) = YM1
Y(129) = YM1
Y(130) = YM1
Y(169) = YM1
Y(170) = YM1
Y(251) = YM1
Y(473) = YM1
Y(474) = YM1
Y(533) = YM1
Y(534) = YM1
Y(583) = YM1
Y(584) = YM1
Y(633) = YM1
Y(897) = YM1
Y(681) = YM1
Y(682) = YM1
C
C
C
-----
***** ELEKTRODE 2 *****
-----
Y(230) = YM2
Y(231) = YM2
Y(235) = YM2
Y(236) = YM2
Y(237) = YM2
Y(238) = YM2
Y(239) = YM2
Y(240) = YM2
Y(250) = YM2
Y(247) = YM2 + R3 / 2.D0
Y(248) = Y(247)
Y(249) = Y(247)
Y(244) = YM2 + R3 * W1
Y(246) = Y(244)
Y(245) = YM2 + R3
Y(242) = YM2 + R4 * W1
Y(233) = Y(242)
Y(243) = YM2 +R4
Y(259) = (YM7 + Y(242)) / 2.D0
Y(252) = (Y(242) - YM2) / 2.D0
Y(972) = YM2
Y(973) = YM2
Y(974) = YM2
Y(975) = YM2
Y(982) = YM2 + R3 / 4.D0
Y(983) = Y(982)
Y(977) = YM2 + R3 * W2
Y(981) = Y(977)
Y(976) = YM2 + R4 * W2
Y(980) = Y(976)
Y(978) = YM2 + (R3 + R4) * W1 / 2.D0

```

```

Y(979) = Y(978)
Y(984) = YM2 + R3 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(985) = Y(984)
-----
C
C
*****
C
-----
Y(475) = Y(252)
Y(535) = Y(252)
Y(585) = Y(252)
Y(634) = Y(252)
-----
C
C
*****
C
-----
Y(254) = Y(242)
Y(253) = Y(242)
Y(477) = Y(242)
Y(476) = Y(242)
Y(537) = Y(242)
Y(536) = Y(242)
Y(587) = Y(242)
Y(586) = Y(242)
-----
C
C
*****
C
-----
Y(964) = Y(259)
Y(255) = Y(259)
Y(478) = Y(259)
Y(538) = Y(259)
Y(588) = Y(259)
Y(637) = Y(259)
Y(686) = Y(259)
-----
C
C
*****
C
-----
Y(35) = YM7
Y(936) = YM7
Y(956) = YM7
Y(31) = YM7
Y(29) = YM7
Y(44) = YM7
Y(43) = YM7
Y(52) = YM7
Y(51) = YM7
Y(74) = YM7
Y(73) = YM7
Y(102) = YM7
Y(101) = YM7
Y(136) = YM7
Y(135) = YM7
Y(176) = YM7
Y(175) = YM7
Y(470) = YM7
Y(261) = YM7
Y(260) = YM7
Y(258) = YM7
Y(257) = YM7
Y(256) = YM7
Y(480) = YM7
Y(479) = YM7
Y(540) = YM7
Y(539) = YM7
Y(590) = YM7
Y(589) = YM7
Y(639) = YM7
Y(638) = YM7

```

```

Y(688) = YM7
Y(687) = YM7
C -----
C ***** ELEKTRODE 7 *****
C -----
Y(533) = YM18
Y(534) = YM18
Y(535) = YM18
Y(1034) = YM18
Y(583) = YM18
Y(1032) = YM18
Y(584) = YM18
Y(585) = YM18
Y(633) = YM18
Y(1030) = YM18 + R15 / 2.D0
Y(1041) = Y(1030)
Y(1039) = Y(1030)
Y(1027) = YM18 + R15 * W1
Y(1037) = Y(1027)
Y(1042) = YM18 + R15
Y(586) = YM18 + R16 * W1
Y(536) = Y(586)
Y(587) = YM18 + R16
Y(588) = (YM7 + Y(586)) / 2.D0
Y(634) = (Y(586) - YM18) / 2.D0
Y(1024) = YM18
Y(1033) = YM18
Y(1035) = YM18
Y(1045) = YM18
Y(1031) = YM18 + R15 / 4.D0
Y(1040) = Y(1031)
Y(1028) = YM18 + R15 * W2
Y(1036) = Y(1028)
Y(1025) = YM18 + R16 * W2
Y(1044) = Y(1025)
Y(1026) = YM18 + (R15 + R16) * W1 / 2.D0
Y(1043) = Y(1026)
Y(1029) = YM18 + R15 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1038) = Y(1029)
C -----
C *****
C -----
Y(683) = Y(634)
C -----
C *****
C -----
Y(636) = Y(586)
Y(635) = Y(586)
Y(685) = Y(586)
Y(684) = Y(586)
C -----
C ***** ELEKTRODE 3 *****
C -----
Y(180) = YM3
Y(277) = YM3
Y(284) = YM3
Y(880) = YM3
Y(286) = YM3
Y(281) = YM3
Y(272) = YM3
Y(283) = YM3 + R5 / 2.D0
Y(882) = Y(283)
Y(883) = Y(283)
Y(285) = YM3 - R5 / 2.D0
Y(884) = Y(285)

```

```

Y(885) = Y(285)
Y(275) = YM3 + R5
Y(279) = YM3 - R5
Y(274) = YM3 + R6
Y(271) = YM3 - R6
Y(282) = YM3 + R5 * W1
Y(276) = Y(282)
Y(280) = YM3 - R5 * W1
Y(278) = Y(280)
Y(181) = YM3 + R6 * W1
Y(273) = Y(181)
Y(178) = YM3 - R6 * W1
Y(269) = Y(178)
Y(183) = (YM10 + Y(181)) / 2.D0
Y(177) = (Y(178) + YM7) / 2.D0
Y(987) = YM3 + (R5 + R6) * W1 / 2.D0
Y(988) = Y(987)
Y(986) = YM3 - (R5 + R6) * W1 / 2.D0
Y(989) = Y(986)
Y(990) = YM3 + R5 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(991) = Y(990)
Y(993) = YM3 - R5 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(992) = Y(993)

```

```

C -----
C *****
C -----

```

```

Y(66) = Y(177)
Y(949) = Y(177)
Y(60) = Y(177)
Y(57) = Y(177)
Y(53) = Y(177)
Y(75) = Y(177)
Y(103) = Y(177)
Y(137) = Y(177)
Y(270) = Y(177)
Y(267) = Y(177)
Y(263) = Y(177)
Y(481) = Y(177)
Y(541) = Y(177)
Y(591) = Y(177)
Y(640) = Y(177)
Y(689) = Y(177)

```

```

C -----
C *****
C -----

```

```

Y(65) = Y(178)
Y(937) = Y(178)
Y(955) = Y(178)
Y(61) = Y(178)
Y(59) = Y(178)
Y(58) = Y(178)
Y(56) = Y(178)
Y(55) = Y(178)
Y(54) = Y(178)
Y(77) = Y(178)
Y(76) = Y(178)
Y(105) = Y(178)
Y(104) = Y(178)
Y(139) = Y(178)
Y(138) = Y(178)
Y(179) = Y(178)
Y(268) = Y(178)
Y(266) = Y(178)
Y(265) = Y(178)
Y(264) = Y(178)

```

```

Y(483) = Y(178)
Y(482) = Y(178)
Y(543) = Y(178)
Y(542) = Y(178)
Y(593) = Y(178)
Y(592) = Y(178)
Y(642) = Y(178)
Y(641) = Y(178)
Y(691) = Y(178)
Y(690) = Y(178)
C -----
C *****
C -----
Y(94) = YM3
Y(948) = YM3
Y(88) = YM3
Y(85) = YM3
Y(82) = YM3
Y(78) = YM3
Y(106) = YM3
Y(140) = YM3
Y(291) = YM3
Y(287) = YM3
Y(484) = YM3
Y(544) = YM3
Y(594) = YM3
Y(643) = YM3
Y(693) = YM3
C -----
C *****
C -----
Y(93) = Y(181)
Y(938) = Y(181)
Y(954) = Y(181)
Y(90) = Y(181)
Y(87) = Y(181)
Y(86) = Y(181)
Y(84) = Y(181)
Y(83) = Y(181)
Y(81) = Y(181)
Y(80) = Y(181)
Y(79) = Y(181)
Y(108) = Y(181)
Y(107) = Y(181)
Y(142) = Y(181)
Y(141) = Y(181)
Y(182) = Y(181)
Y(292) = Y(181)
Y(290) = Y(181)
Y(289) = Y(181)
Y(288) = Y(181)
Y(486) = Y(181)
Y(485) = Y(181)
Y(546) = Y(181)
Y(545) = Y(181)
Y(596) = Y(181)
Y(595) = Y(181)
Y(645) = Y(181)
Y(644) = Y(181)
Y(695) = Y(181)
Y(694) = Y(181)
C -----
C *****
C -----
Y(128) = Y(183)

```

```

Y(947) = Y(183)
Y(122) = Y(183)
Y(119) = Y(183)
Y(116) = Y(183)
Y(113) = Y(183)
Y(109) = Y(183)
Y(143) = Y(183)
Y(300) = Y(183)
Y(297) = Y(183)
Y(293) = Y(183)
Y(487) = Y(183)
Y(547) = Y(183)
Y(597) = Y(183)
Y(646) = Y(183)
Y(696) = Y(183)
-----
C
C
*****
-----
C
Y(127) = YM10
Y(939) = YM10
Y(953) = YM10
Y(123) = YM10
Y(121) = YM10
Y(120) = YM10
Y(118) = YM10
Y(117) = YM10
Y(115) = YM10
Y(114) = YM10
Y(112) = YM10
Y(111) = YM10
Y(110) = YM10
Y(145) = YM10
Y(144) = YM10
Y(185) = YM10
Y(184) = YM10
Y(301) = YM10
Y(299) = YM10
Y(298) = YM10
Y(296) = YM10
Y(295) = YM10
Y(294) = YM10
Y(489) = YM10
Y(488) = YM10
Y(549) = YM10
Y(548) = YM10
Y(599) = YM10
Y(598) = YM10
Y(648) = YM10
Y(647) = YM10
Y(698) = YM10
Y(697) = YM10
-----
C
C
***** ELEKTRODE 4 *****
-----
C
Y(196) = YM4
Y(200) = YM4
Y(208) = YM4
Y(879) = YM4
Y(204) = YM4
Y(920) = YM4
Y(193) = YM4
Y(210) = YM4 - R7 / 2.D0
Y(209) = Y(210)
Y(211) = Y(210)
Y(206) = YM4 + R7 / 2.D0

```

```

Y(205) = Y(206)
Y(207) = Y(206)
Y(198) = YM4 + R7
Y(202) = YM4 - R7
Y(194) = YM4 + R8
Y(148) = YM4 - R8
Y(199) = YM4 + R7 * W1
Y(197) = Y(199)
Y(201) = YM4 - R7 * W1
Y(203) = Y(201)
Y(192) = YM4 + R8 * W1
Y(195) = Y(192)
Y(147) = YM4 - R8 * W1
Y(149) = Y(147)
Y(150) = (Y(149) + YM10) / 2.D0
Y(995) = YM4 + (R7 + R8) * W1 / 2.D0
Y(996) = Y(995)
Y(994) = YM4 - (R7 + R8) * W1 / 2.D0
Y(997) = Y(994)
Y(1000) = YM4 + R7 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1001) = Y(1000)
Y(999) = YM4 - R7 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(998) = Y(999)

```

C
C
C

```

-----
*****
-----

```

```

Y(168) = Y(150)
Y(946) = Y(150)
Y(162) = Y(150)
Y(159) = Y(150)
Y(156) = Y(150)
Y(153) = Y(150)
Y(146) = Y(150)
Y(186) = Y(150)
Y(309) = Y(150)
Y(306) = Y(150)
Y(302) = Y(150)
Y(490) = Y(150)
Y(550) = Y(150)
Y(600) = Y(150)
Y(649) = Y(150)
Y(699) = Y(150)

```

C
C
C

```

-----
*****
-----

```

```

Y(167) = Y(147)
Y(940) = Y(147)
Y(952) = Y(147)
Y(164) = Y(147)
Y(161) = Y(147)
Y(160) = Y(147)
Y(158) = Y(147)
Y(157) = Y(147)
Y(155) = Y(147)
Y(154) = Y(147)
Y(152) = Y(147)
Y(151) = Y(147)
Y(188) = Y(147)
Y(187) = Y(147)
Y(310) = Y(147)
Y(308) = Y(147)
Y(307) = Y(147)
Y(305) = Y(147)
Y(304) = Y(147)
Y(303) = Y(147)

```

Y(492) = Y(147)
 Y(491) = Y(147)
 Y(552) = Y(147)
 Y(551) = Y(147)
 Y(602) = Y(147)
 Y(601) = Y(147)
 Y(651) = Y(147)
 Y(650) = Y(147)
 Y(701) = Y(147)
 Y(700) = Y(147)

C -----
 C *****
 C -----

Y(229) = YM4
 Y(945) = YM4
 Y(223) = YM4
 Y(219) = YM4
 Y(217) = YM4
 Y(214) = YM4
 Y(189) = YM4
 Y(317) = YM4
 Y(315) = YM4
 Y(311) = YM4
 Y(493) = YM4
 Y(553) = YM4
 Y(603) = YM4
 Y(652) = YM4
 Y(702) = YM4

C -----
 C *****
 C -----

Y(228) = Y(192)
 Y(941) = Y(192)
 Y(951) = Y(192)
 Y(225) = Y(192)
 Y(222) = Y(192)
 Y(221) = Y(192)
 Y(220) = Y(192)
 Y(218) = Y(192)
 Y(216) = Y(192)
 Y(215) = Y(192)
 Y(213) = Y(192)
 Y(212) = Y(192)
 Y(191) = Y(192)
 Y(190) = Y(192)
 Y(319) = Y(192)
 Y(318) = Y(192)
 Y(316) = Y(192)
 Y(314) = Y(192)
 Y(313) = Y(192)
 Y(312) = Y(192)
 Y(495) = Y(192)
 Y(494) = Y(192)
 Y(555) = Y(192)
 Y(554) = Y(192)
 Y(605) = Y(192)
 Y(604) = Y(192)
 Y(654) = Y(192)
 Y(653) = Y(192)
 Y(704) = Y(192)
 Y(703) = Y(192)

C -----
 C *****
 C -----

Y(428) = YM12

```

Y(944) = YM12
Y(472) = YM12
Y(345) = YM12
Y(342) = YM12
Y(339) = YM12
Y(336) = YM12
Y(333) = YM12
Y(330) = YM12
Y(327) = YM12
Y(324) = YM12
Y(320) = YM12
Y(496) = YM12
Y(556) = YM12
Y(606) = YM12
Y(655) = YM12
Y(705) = YM12
C -----
C ***** ELEKTRODE 5 *****
C -----
Y(350) = YM5
Y(357) = YM5
Y(362) = YM5
Y(874) = YM5
Y(360) = YM5
Y(353) = YM5
Y(346) = YM5
Y(359) = YM5 - R9 / 2.D0
Y(877) = Y(359)
Y(878) = Y(359)
Y(361) = YM5 +R9 / 2.D0
Y(875) = Y(361)
Y(876) = Y(361)
Y(355) = YM5 + R9
Y(351) = YM5 - R9
Y(348) = YM5 + R10
Y(343) = YM5 - R10
Y(354) = YM5 + R9 * W1
Y(356) = Y(354)
Y(352) = YM5 - R9 * W1
Y(358) = Y(352)
Y(347) = YM5 + R10 * W1
Y(349) = Y(347)
C
C Y(419) = YM6 + R12 * W1
C
Y(406) = (Y(419) + Y(347)) / 2.D0
Y(409) = Y(406)
Y(341) = YM5 - R10 * W1
Y(344) = Y(341)
Y(1003) = YM5 + (R9 + R10) * W1 / 2.D0
Y(1004) = Y(1003)
Y(1002) = YM5 - (R9 + R10) * W1 / 2.D0
Y(1005) = Y(1002)
Y(1008) = YM5 + R9 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1009) = Y(1008)
Y(1007) = YM5 - R9 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1006) = Y(1007)
C -----
C *****
C -----
Y(427) = Y(341)
Y(942) = Y(341)
Y(950) = Y(341)
Y(425) = Y(341)
Y(416) = Y(341)

```

Y(417) = Y(341)
Y(340) = Y(341)
Y(338) = Y(341)
Y(337) = Y(341)
Y(335) = Y(341)
Y(334) = Y(341)
Y(332) = Y(341)
Y(331) = Y(341)
Y(329) = Y(341)
Y(328) = Y(341)
Y(326) = Y(341)
Y(325) = Y(341)
Y(323) = Y(341)
Y(322) = Y(341)
Y(321) = Y(341)
Y(498) = Y(341)
Y(497) = Y(341)
Y(558) = Y(341)
Y(557) = Y(341)
Y(608) = Y(341)
Y(607) = Y(341)
Y(657) = Y(341)
Y(656) = Y(341)
Y(707) = Y(341)
Y(706) = Y(341)

C
C
C

Y(365) = YM5
Y(368) = YM5
Y(371) = YM5
Y(374) = YM5
Y(377) = YM5
Y(380) = YM5
Y(383) = YM5
Y(499) = YM5
Y(559) = YM5
Y(609) = YM5
Y(658) = YM5
Y(708) = YM5

C
C
C

Y(363) = Y(347)
Y(364) = Y(347)
Y(366) = Y(347)
Y(367) = Y(347)
Y(369) = Y(347)
Y(370) = Y(347)
Y(372) = Y(347)
Y(373) = Y(347)
Y(375) = Y(347)
Y(376) = Y(347)
Y(378) = Y(347)
Y(379) = Y(347)
Y(381) = Y(347)
Y(382) = Y(347)
Y(501) = Y(347)
Y(500) = Y(347)
Y(561) = Y(347)
Y(560) = Y(347)
Y(611) = Y(347)
Y(610) = Y(347)
Y(660) = Y(347)
Y(659) = Y(347)

```

Y(710) = Y(347)
Y(709) = Y(347)
-----
C
C ***** ELEKTRODE 6 *****
C
-----
Y(921) = YM6
Y(888) = YM6
Y(437) = YM6
Y(420) = YM6
Y(432) = YM6 + R11 / 2.D0
Y(887) = Y(432)
Y(433) = YM6 - R11 / 2.D0
Y(886) = Y(433)
Y(431) = YM6 + R11
Y(434) = YM6 - R11
Y(430) = YM6 + R12
Y(435) = YM6 - R12
Y(438) = YM6 + R11 * W1
Y(436) = YM6 - R11 * W1
Y(419) = YM6 + R12 * W1
Y(421) = YM6 - R12 * W1
Y(469) = (YM13 + Y(430)) / 2.D0
Y(471) = (Y(435) + Y(427)) / 2.D0
Y(902) = (YM13 + Y(419)) / 2.D0
Y(943) = (Y(421) + Y(341)) / 2.D0
Y(1013) = YM6 + (R11 + R12) / 2.D0
Y(1012) = YM6 + 3.D0 * R11 / 4.D0
Y(1011) = YM6 - 3.D0 * R11 / 4.D0
Y(1010) = YM6 - (R11 + R12) / 2.D0
Y(1016) = Y(432)
Y(1017) = Y(433)
Y(1014) = YM6 + R12 * W3
Y(1015) = YM6 + R11 * W3
Y(1018) = YM6 - R11 * W3
Y(1019) = YM6 - R12 * W3
Y(1020) = YM6 + R11 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1021) = YM6 - R11 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1022) = YM6 + (R11 + R12) * W1 / 2.D0
Y(1023) = YM6 - (R11 + R12) * W1 / 2.D0
-----
C
C *****
C
-----
Y(403) = Y(406)
Y(400) = Y(406)
Y(397) = Y(406)
Y(394) = Y(406)
Y(391) = Y(406)
Y(388) = Y(406)
Y(384) = Y(406)
Y(502) = Y(406)
Y(562) = Y(406)
Y(612) = Y(406)
Y(661) = Y(406)
Y(711) = Y(406)
-----
C
C *****
C
-----
Y(418) = Y(419)
Y(411) = Y(419)
Y(410) = Y(419)
Y(408) = Y(419)
Y(407) = Y(419)
Y(405) = Y(419)
Y(404) = Y(419)
Y(402) = Y(419)

```

Y(401) = Y(419)
 Y(399) = Y(419)
 Y(398) = Y(419)
 Y(396) = Y(419)
 Y(395) = Y(419)
 Y(393) = Y(419)
 Y(392) = Y(419)
 Y(390) = Y(419)
 Y(389) = Y(419)
 Y(387) = Y(419)
 Y(386) = Y(419)
 Y(385) = Y(419)
 Y(504) = Y(419)
 Y(503) = Y(419)
 Y(564) = Y(419)
 Y(563) = Y(419)
 Y(614) = Y(419)
 Y(613) = Y(419)
 Y(662) = Y(419)
 Y(901) = Y(419)
 Y(712) = Y(419)
 Y(899) = Y(419)

C
C
C

Y(466) = Y(902)
 Y(463) = Y(902)
 Y(460) = Y(902)
 Y(457) = Y(902)
 Y(454) = Y(902)
 Y(451) = Y(902)
 Y(448) = Y(902)
 Y(445) = Y(902)
 Y(891) = Y(902)
 Y(441) = Y(902)
 Y(505) = Y(902)
 Y(565) = Y(902)
 Y(615) = Y(902)
 Y(663) = Y(902)
 Y(713) = Y(902)

C
C
C

Y(468) = YM13
 Y(904) = YM13
 Y(903) = YM13
 Y(467) = YM13
 Y(465) = YM13
 Y(464) = YM13
 Y(462) = YM13
 Y(461) = YM13
 Y(459) = YM13
 Y(458) = YM13
 Y(456) = YM13
 Y(455) = YM13
 Y(453) = YM13
 Y(452) = YM13
 Y(450) = YM13
 Y(449) = YM13
 Y(447) = YM13
 Y(446) = YM13
 Y(890) = YM13
 Y(889) = YM13
 Y(444) = YM13
 Y(443) = YM13

```
Y(442) = YM13
Y(507) = YM13
Y(506) = YM13
Y(567) = YM13
Y(566) = YM13
Y(617) = YM13
Y(616) = YM13
Y(665) = YM13
Y(664) = YM13
Y(898) = YM13
Y(900) = YM13
-----
C
C
C
*****
-----
Y(729) = YM14
Y(905) = YM14
Y(730) = YM14
Y(754) = YM14
Y(769) = YM14
Y(784) = YM14
Y(799) = YM14
Y(813) = YM14
Y(828) = YM14
Y(843) = YM14
Y(858) = YM14
Y(512) = YM14
Y(508) = YM14
Y(568) = YM14
Y(618) = YM14
Y(666) = YM14
Y(714) = YM14
-----
C
C
C
*****
-----
Y(733) = YM15
Y(907) = YM15
Y(906) = YM15
Y(732) = YM15
Y(731) = YM15
Y(756) = YM15
Y(755) = YM15
Y(771) = YM15
Y(770) = YM15
Y(786) = YM15
Y(785) = YM15
Y(801) = YM15
Y(800) = YM15
Y(815) = YM15
Y(814) = YM15
Y(830) = YM15
Y(829) = YM15
Y(845) = YM15
Y(844) = YM15
Y(860) = YM15
Y(859) = YM15
Y(892) = YM15
Y(511) = YM15
Y(510) = YM15
Y(509) = YM15
Y(570) = YM15
Y(569) = YM15
Y(620) = YM15
Y(619) = YM15
Y(668) = YM15
Y(667) = YM15
```

```

Y(716) = YM15
Y(715) = YM15
C
-----
C ***** ELEKTRODE 8 *****
C
-----
Y(743) = YM8
Y(1057) = YM8
Y(910) = YM8
Y(911) = YM8
Y(1062) = YM8 + R13 / 2.D0
Y(1058) = Y(1062)
Y(1046) = YM8 - R13 / 2.D0
Y(1056) = Y(1046)
Y(742) = YM8 + R13
Y(1048) = YM8 - R13
Y(913) = YM8 + R14
Y(737) = YM8 - R14
Y(1060) = YM8 + R13 * W1
Y(1054) = YM8 - R13 * W1
Y(912) = YM8 + R14 * W1
Y(909) = YM8 - R14 * W1
Y(748) = (YM21 + Y(913)) / 2.D0
Y(738) = (Y(737) + YM15) / 2.D0
Y(914) = (YM21 + Y(912)) / 2.D0
Y(908) = (Y(909) + YM15) / 2.D0
Y(1067) = YM8 + (R13 + R14) / 2.D0
Y(1063) = YM8 + 3.D0 * R13 / 4.D0
Y(1047) = YM8 - 3.D0 * R13 / 4.D0
Y(1049) = YM8 - (R13 + R14) / 2.D0
Y(1064) = Y(1062)
Y(1052) = Y(1046)
Y(1066) = YM8 + R14 * W3
Y(1065) = YM8 + R13 * W3
Y(1051) = YM8 - R13 * W3
Y(1050) = YM8 - R14 * W3
Y(1059) = YM8 + R13 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1055) = YM8 - R13 * (1 + W4) * W1 / W4 / 2.D0
Y(1061) = YM8 + (R13 + R14) * W1 / 2.D0
Y(1053) = YM8 - (R13 + R14) * W1 / 2.D0
C
-----
C *****
C
-----
Y(734) = Y(908)
Y(757) = Y(908)
Y(772) = Y(908)
Y(787) = Y(908)
Y(802) = Y(908)
Y(816) = Y(908)
Y(831) = Y(908)
Y(846) = Y(908)
Y(861) = Y(908)
Y(517) = Y(908)
Y(513) = Y(908)
Y(571) = Y(908)
Y(621) = Y(908)
Y(669) = Y(908)
Y(717) = Y(908)
C
-----
C *****
C
-----
Y(736) = Y(909)
Y(735) = Y(909)
Y(759) = Y(909)
Y(758) = Y(909)
Y(774) = Y(909)

```

Y(773) = Y(909)
Y(789) = Y(909)
Y(788) = Y(909)
Y(804) = Y(909)
Y(803) = Y(909)
Y(818) = Y(909)
Y(817) = Y(909)
Y(833) = Y(909)
Y(832) = Y(909)
Y(848) = Y(909)
Y(847) = Y(909)
Y(863) = Y(909)
Y(862) = Y(909)
Y(893) = Y(909)
Y(516) = Y(909)
Y(515) = Y(909)
Y(514) = Y(909)
Y(573) = Y(909)
Y(572) = Y(909)
Y(623) = Y(909)
Y(622) = Y(909)
Y(671) = Y(909)
Y(670) = Y(909)
Y(719) = Y(909)
Y(718) = Y(909)

C -----
C *****
C -----

Y(739) = YM8
Y(760) = YM8
Y(775) = YM8
Y(790) = YM8
Y(805) = YM8
Y(819) = YM8
Y(834) = YM8
Y(849) = YM8
Y(864) = YM8
Y(522) = YM8
Y(518) = YM8
Y(574) = YM8
Y(624) = YM8
Y(672) = YM8
Y(720) = YM8

C -----
C *****
C -----

Y(741) = Y(912)
Y(740) = Y(912)
Y(762) = Y(912)
Y(761) = Y(912)
Y(777) = Y(912)
Y(776) = Y(912)
Y(792) = Y(912)
Y(791) = Y(912)
Y(807) = Y(912)
Y(806) = Y(912)
Y(821) = Y(912)
Y(820) = Y(912)
Y(836) = Y(912)
Y(835) = Y(912)
Y(851) = Y(912)
Y(850) = Y(912)
Y(866) = Y(912)
Y(865) = Y(912)
Y(894) = Y(912)

```

Y(521) = Y(912)
Y(520) = Y(912)
Y(519) = Y(912)
Y(576) = Y(912)
Y(575) = Y(912)
Y(626) = Y(912)
Y(625) = Y(912)
Y(674) = Y(912)
Y(673) = Y(912)
Y(722) = Y(912)
Y(721) = Y(912)
-----
C
*****
C
-----
Y(744) = Y(914)
Y(763) = Y(914)
Y(778) = Y(914)
Y(793) = Y(914)
Y(808) = Y(914)
Y(822) = Y(914)
Y(837) = Y(914)
Y(852) = Y(914)
Y(867) = Y(914)
Y(527) = Y(914)
Y(523) = Y(914)
Y(577) = Y(914)
Y(627) = Y(914)
Y(675) = Y(914)
Y(723) = Y(914)
-----
C
*****
C
-----
Y(747) = YM21
Y(916) = YM21
Y(915) = YM21
Y(746) = YM21
Y(745) = YM21
Y(765) = YM21
Y(764) = YM21
Y(780) = YM21
Y(779) = YM21
Y(795) = YM21
Y(794) = YM21
Y(810) = YM21
Y(809) = YM21
Y(824) = YM21
Y(823) = YM21
Y(839) = YM21
Y(838) = YM21
Y(854) = YM21
Y(853) = YM21
Y(869) = YM21
Y(868) = YM21
Y(895) = YM21
Y(526) = YM21
Y(525) = YM21
Y(524) = YM21
Y(579) = YM21
Y(578) = YM21
Y(629) = YM21
Y(628) = YM21
Y(677) = YM21
Y(676) = YM21
Y(725) = YM21
Y(724) = YM21

```

```

C -----
C *****
C -----
Y(753) = YM22
Y(917) = YM22
Y(749) = YM22
Y(766) = YM22
Y(781) = YM22
Y(796) = YM22
Y(811) = YM22
Y(825) = YM22
Y(840) = YM22
Y(855) = YM22
Y(870) = YM22
Y(532) = YM22
Y(528) = YM22
Y(580) = YM22
Y(630) = YM22
Y(678) = YM22
Y(726) = YM22
C -----
C *****
C -----
Y(752) = YM23
Y(919) = YM23
Y(918) = YM23
Y(751) = YM23
Y(750) = YM23
Y(768) = YM23
Y(767) = YM23
Y(783) = YM23
Y(782) = YM23
Y(798) = YM23
Y(797) = YM23
Y(812) = YM23
Y(873) = YM23
Y(827) = YM23
Y(826) = YM23
Y(842) = YM23
Y(841) = YM23
Y(857) = YM23
Y(856) = YM23
Y(872) = YM23
Y(871) = YM23
Y(896) = YM23
Y(531) = YM23
Y(530) = YM23
Y(529) = YM23
Y(582) = YM23
Y(581) = YM23
Y(632) = YM23
Y(631) = YM23
Y(680) = YM23
Y(679) = YM23
Y(728) = YM23
Y(727) = YM23
C -----
C ***** GERADE 1 *****
C **** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 421 UND 20) ****
C -----
C ***** STEIGUNG *****
C -----
K1 = (Y(20) - Y(421)) / (X(20) - X(421))
C -----
C ***** ORDINATENABSCHNITT *****

```

```

C -----
C D1 = Y(20) - K1 * X(20)
C -----
C ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 1 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C X(943) = (Y(943) - D1) / K1
C X(950) = (Y(950) - D1) / K1
C X(944) = (Y(944) - D1) / K1
C X(951) = (Y(951) - D1) / K1
C X(945) = (Y(945) - D1) / K1
C X(952) = (Y(952) - D1) / K1
C X(946) = (Y(946) - D1) / K1
C X(953) = (Y(953) - D1) / K1
C X(947) = (Y(947) - D1) / K1
C X(954) = (Y(954) - D1) / K1
C X(948) = (Y(948) - D1) / K1
C X(955) = (Y(955) - D1) / K1
C X(949) = (Y(949) - D1) / K1
C X(956) = (Y(956) - D1) / K1
C X(30) = (Y(30) - D1) / K1
C -----
C ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 1 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C X(942) = (XM1 + X(950)) / 2.D0
C X(425) = (XM7 + X(950)) / 2.D0
C X(941) = (XM1 + X(951)) / 2.D0
C X(225) = (XM7 + X(951)) / 2.D0
C X(940) = (XM1 + X(952)) / 2.D0
C X(164) = (XM7 + X(952)) / 2.D0
C X(939) = (XM1 + X(953)) / 2.D0
C X(123) = (XM7 + X(953)) / 2.D0
C X(938) = (XM1 + X(954)) / 2.D0
C X(90) = (XM7 + X(954)) / 2.D0
C X(937) = (XM1 + X(955)) / 2.D0
C X(61) = (XM7 + X(955)) / 2.D0
C X(936) = (XM1 + X(956)) / 2.D0
C X(31) = (XM7 + X(956)) / 2.D0
C -----
C ***** GEARDE 2 *****
C ***** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 233 UND 20) *****
C -----
C ***** STEIGUNG *****
C -----
C K2 = (Y(20) - Y(233)) / (X(20) - X(233))
C -----
C ***** ORDINATENABSCHITT *****
C -----
C D2 = Y(20) - K2 * X(20)
C -----
C ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 2 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----

```

```

Y(32) = K2 * X(32) + D2
Y(957) = K2 * X(957) + D2
Y(929) = K2 * X(929) + D2
Y(958) = K2 * X(958) + D2
Y(930) = K2 * X(930) + D2
Y(959) = K2 * X(959) + D2
Y(931) = K2 * X(931) + D2
Y(960) = K2 * X(960) + D2
Y(932) = K2 * X(932) + D2
Y(961) = K2 * X(961) + D2
Y(933) = K2 * X(933) + D2
Y(962) = K2 * X(962) + D2
Y(934) = K2 * X(934) + D2
Y(963) = K2 * X(963) + D2
Y(935) = K2 * X(935) + D2
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 2 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
Y(28) = (YM7 + Y(957)) / 2.D0
Y(928) = (YM1 + Y(957)) / 2.D0
Y(42) = (YM7 + Y(958)) / 2.D0
Y(927) = (YM1 + Y(958)) / 2.D0
Y(50) = (YM7 + Y(959)) / 2.D0
Y(926) = (YM1 + Y(959)) / 2.D0
Y(72) = (YM7 + Y(960)) / 2.D0
Y(925) = (YM1 + Y(960)) / 2.D0
Y(100) = (YM7 + Y(961)) / 2.D0
Y(924) = (YM1 + Y(961)) / 2.D0
Y(134) = (YM7 + Y(962)) / 2.D0
Y(923) = (YM1 + Y(962)) / 2.D0
Y(174) = (YM7 + Y(963)) / 2.D0
Y(922) = (YM1 + Y(963)) / 2.D0
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** GERADE 3 *****
C *** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 269 UND 233) ***
C -----
C ***** STEIGUNG *****
C -----
K3 = (Y(269) - Y(233)) / (X(269) - X(233))
C -----
C ***** ORDINATENABSCHNITT *****
C -----
D3 = Y(233) - K3 * X(233)
C -----
C ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 3 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
X(270) = (Y(270) - D3) / K3
X(261) = (Y(261) - D3) / K3
X(964) = (Y(964) - D3) / K3

```

```

C -----
C ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 3 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C X(260) = (X(258) + X(261)) / 2.D0
C X(470) = (X(261) + X(175)) / 2.D0
C -----
C ***** GERADE 4 *****
C *** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 349 UND 421) ***
C -----
C ***** STEIGUNG *****
C -----
C K4 = (Y(349) - Y(421)) / (X(349) - X(421))
C -----
C ***** ORDINATENABSCHNITT *****
C -----
C D4 = Y(421) - K4 * X(421)
C -----
C ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 4 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C Y(414) = K4 * X(414) + D4
C Y(413) = K4 * X(413) + D4
C Y(965) = K4 * X(965) + D4
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 4 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C Y(415) = (Y(413) + Y(416)) / 2.D0
C Y(412) = (Y(411) + Y(413)) / 2.D0
C -----
C ***** X - RICHTUNG *****
C -----
C ***** SIEHE OBEN ! *****
C -----
C ***** GERADE 5 *****
C *** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 242 UND 536) ***
C -----
C ***** STEIGUNG *****
C -----
C K5 = (Y(536) - Y(242)) / (X(536) - X(242))
C -----
C ***** ORDINATENABSCHNITT *****
C -----
C D5 = Y(536) - K5 * X(536)
C -----
C ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 5 *****
C -----
C ***** Y - RICHTUNG *****
C -----
C Y(537) = K5 * X(537) + D5
C Y(476) = K5 * X(476) + D5
C Y(477) = K5 * X(477) + D5
C Y(253) = K5 * X(253) + D5

```

```

C      Y(254) = K5 * X(254) + D5
C      -----
C      ***** X - RICHTUNG *****
C      -----
C      ***** SIEHE OBEN ! *****
C      -----
C      ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 5 *****
C      -----
C      ***** Y - RICHTUNG *****
C      -----
C      Y(475) = (Y(474) + Y(476)) / 2.D0
C      Y(478) = (Y(476) + Y(479)) / 2.D0
C      Y(252) = (Y(251) + Y(253)) / 2.D0
C      Y(255) = (Y(253) + Y(256)) / 2.D0
C      -----
C      ***** X - RICHTUNG *****
C      -----
C      ***** SIEHE OBEN ! *****
C      -----
C      ***** GERADE 6 *****
C      *** (ZWISCHEN DEN KNOTEN 419 UND 909) ***
C      -----
C      ***** STEIGUNG *****
C      -----
C      K6 = (Y(419) - Y(909)) / (X(419) - X(909))
C      -----
C      ***** ORDINATENABSCHNITT *****
C      -----
C      D6 = Y(419) - K6 * X(419)
C      -----
C      ***** PUNKTE (KNOTEN) DER GERADEN 6 *****
C      -----
C      ***** Y - RICHTUNG *****
C      -----
C      ***** SIEHE OBEN ! *****
C      -----
C      ***** X - RICHTUNG *****
C      -----
C      X(908) = (Y(908) - D6) / K6
C      X(906) = (Y(906) - D6) / K6
C      X(905) = (Y(905) - D6) / K6
C      X(903) = (Y(903) - D6) / K6
C      X(902) = (Y(902) - D6) / K6
C      -----
C      ***** KNOTEN NEBEN DER GERADEN 6 *****
C      -----
C      ***** Y - RICHTUNG *****
C      -----
C      ***** SIEHE OBEN ! *****
C      -----
C      ***** X - RICHTUNG *****
C      -----
C      X(907) = (X(906) + X(733)) / 2.D0
C      X(732) = (X(731) + X(906)) / 2.D0
C      X(904) = (X(903) + X(468)) / 2.D0
C      X(467) = (X(465) + X(903)) / 2.D0
C      -----
C      END

```

(A.3) Programm ERDER2

```

PROGRAMM ERDER2
C
C *****
C ***          LISTEN          ***
C ***          ERDERANORDNUNG  ***
C ***          ***
C *** 15.11.1996      FREI/RE  ***
C *****
C
C IMPLICIT REAL*8 (S,V)
C
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEITEN *****
C -----
C *** ELEKTRODE 1 - 8, ERDREICH ***
C -----
C
C PARAMETER (S1 = 1)
C PARAMETER (S2 = 1)
C PARAMETER (S3 = 1)
C PARAMETER (S4 = 1)
C PARAMETER (S5 = 1)
C PARAMETER (S6 = 1)
C PARAMETER (S7 = 1)
C PARAMETER (S8 = 1)
C PARAMETER (SE = 1)
C
C -----
C ***** POTENTIALE *****
C -----
C ***** ELEKTRODE 1 - 8 *****
C -----
C
C PARAMETER (V1 = 1)
C PARAMETER (V2 = 1)
C PARAMETER (V3 = 1)
C PARAMETER (V4 = 1)
C PARAMETER (V5 = 1)
C PARAMETER (V6 = 1)
C PARAMETER (V7 = 1)
C PARAMETER (V8 = 1)
C
C -----
C *****
C ***** MATERIALLISTE *****
C *****
C -----
C
C open (40,file='mat.ein',status='unknown',access='sequential')
C -----
C ***** HOMOGENES MATERIAL *****
C -----
C
C write(40,*)(40,*) 1
C -----
C ***** ISOTROPES MATERIAL *****
C -----
C
C write(40,*)1
C -----
C ***** RELATIVE PERMEABILITÄT *****
C -----
C
C write(40,*)1
C -----
C
C *** ANZAHL DER MAKROELEMENTE ***
C -----
C
C write(40,*)1,:
C -----
C ***** ENDE DER EINGABE *****
C -----
C
C write(40,*)(0,0)

```

```
C -----
C ***** GESAMTENDE *****
C -----
C write(40,*)(0)
C -----
C ***** INHOMOGENES MATERIAL *****
C -----
C write(40,*)(0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 1 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 1 *****
C -----
C write(40,*)(S1)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 277 BIS 281 *****
C -----
C write(40,*)(277,281)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 2 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 2 *****
C -----
C write(40,*)(S2)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 290 BIS 296 *****
C -----
C write(40,*)(290,296)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 3 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 3 *****
C -----
C write(40,*)(S3)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 229 BIS 237 *****
C -----
C write(40,*)(229,237)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
```

```
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 4 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 4 *****
C -----
C write(40,*)(S4)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 171 BIS 179 *****
C -----
C write(40,*)(171,179)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 5 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 5 *****
C -----
C write(40,*)(S5)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 128 BIS 136 *****
C -----
C write(40,*)(128,136)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 6 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 6 *****
C -----
C write(40,*)(S6)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 103 BIS 109 *****
C -----
C write(40,*)(103,109)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 7 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 7 *****
```

```
C -----
C write(40,*)(S7)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 300 BIS 306 *****
C -----
C write(40,*)(300,306)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C * LEITFÄHIGKEIT DER ELEKTRODE 8 *
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT 8 *****
C -----
C write(40,*)(S8)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C ***** 33 BIS 39 *****
C -----
C write(40,*)(33,39)
C -----
C ***** ENDE *****
C -----
C write(40,*)(0,0)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT DER ERDE *****
C -----
C * ISOTROPE HOMOG. LEITFÄHIGKEIT *
C -----
C write(40,*)(1)
C -----
C ***** LEITFÄHIGKEIT E *****
C -----
C write(40,*)(SE)
C -----
C **** ZUGEHÖRIGE MAKROELEMENTE ***
C -----
C ***** 1 BIS 32 *****
C -----
C write(40,*)(1,32)
C -----
C ***** 40 BIS 102 *****
C -----
C write(40,*)(40,102)
C -----
C ***** 110 BIS 127 *****
C -----
C write(40,*)(110,127)
C -----
C ***** 137 BIS 170 *****
C -----
C write(40,*)(137,170)
C -----
C ***** 180 BIS 228 *****
C -----
C write(40,*)(180,228)
C -----
C ***** 238 BIS 276 *****
C -----
C -----
```



```
C -----
C ***** ELEKTRODE 3 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V3) *****
C -----
write(40,*)(229,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(230,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(231,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(232,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(233,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(234,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(235,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(236,6)
write(40,*)(V3)
write(40,*)(237,6)
write(40,*)(V3)
C -----
C ***** ELEKTRODE 4 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V4) *****
C -----
write(40,*)(171,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(172,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(173,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(174,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(175,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(176,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(177,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(178,6)
write(40,*)(V4)
write(40,*)(179,6)
write(40,*)(V4)
C -----
C ***** ELEKTRODE 5 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V5) *****
C -----
write(40,*)(128,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(129,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(130,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(131,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(132,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(133,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(134,6)
write(40,*)(V5)
```

```

write(40,*)(135,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(136,6)
write(40,*)(V5)
C
C -----
C ***** ELEKTRODE 6 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V6) *****
C -----
write(40,*)(103,6)
write(40,*)(V6)
write(40,*)(104,6)
write(40,*)(V6)
write(40,*)(105,6)
write(40,*)(V6)
write(40,*)(106,6)
write(40,*)(V5)
write(40,*)(107,6)
write(40,*)(V6)
write(40,*)(108,6)
write(40,*)(V6)
write(40,*)(109,6)
write(40,*)(V6)
C
C -----
C ***** ELEKTRODE 7 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V7) *****
C -----
write(40,*)(300,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(301,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(302,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(303,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(304,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(305,6)
write(40,*)(V7)
write(40,*)(306,6)
write(40,*)(V7)
C
C -----
C ***** ELEKTRODE 8 *****
C -----
C ***** (ME,FL) - (V8) *****
C -----
write(40,*)(33,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(34,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(35,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(36,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(37,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(38,6)
write(40,*)(V8)
write(40,*)(39,6)
write(40,*)(V8)
C
C -----
C *****
C -----
write(40,*)(0,0)

```

```
write(40,*)(0)
write(40,*)(0)
write(40,*)(0)
write(40,*)(0)
C -----
C *****
C -----
C
END
```

(A.4) Programm ERDER_RB

```

PROGRAM ERDER_RB
C
C *****
C ** EINGABE DER RANDBEDINGUNGEN ***
C **     SKALARPOTENTIAL V     ***
C **     (ERDERPROBELM)       ***
C **                               ***
C **     22.10.1996     FREI/RE ***
C *****
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C PARAMETER (MMAC = 10000) ! MAXIMALE ANZAHL VON ME
C PARAMETER (IFGKOOR = 17)
C
C REAL*8 STROM(3) /1.0,0.5,0.5/ ! STROMVERHÄLTNISSE AN DEN ELEKTRODEN
C REAL*8 V1 /60.D0/ ! SPANNUNG AN INNERER ELEKTRODE (PEAK-VALUE)
C REAL*8 V2 /-15.D0/ ! SPANNUNG AN DEN ÄUSSEREN ELEKTRODEN
C
C REAL*8 null/0.D0/,offen/1.D30/
C
C INTEGER S2(26)/279,280,281,282,283,284,285,286,287,288,289,290,
*           291,292,293,294,297,298,299,300,301,302,303,304,
*           307,308/
C INTEGER S3(16)/ 16, 32, 54, 70, 86,102,124,148,164,188,204,220,
*           244,260,276,308/
C INTEGER s5(26)/ 1, 17, 33, 34, 35, 36, 37, 55, 71, 87,103,104,
*           105,106,107,125,149,165,189,205,221,245,261,277,
*           278,279/
C
C open(50,file='rb.ein',access='sequential',status='unknown')
C
C -----
C ** DIRICHLETSCHES RANDBEDINGUNG ***
C ** (KONSTANTE RANDBEDINGUNG) ***
C -----
C
C write(50,*) 1
C
C -----
C ***** FLÄCHE 1 *****
C -----
C
C isheet=4
C ish1=(isheet-1)*308
C do iel=1,308
C write(50,*) ish1+iel,1
C write(50,*) null
C enddo
C
C -----
C ***** FLÄCHE 2 *****
C -----
C
C do isheet=1,4
C ish1=(isheet-1)*308
C do i=1,26
C iel=s2(i)
C write(50,*) ish1+iel,2
C write(50,*) offen
C enddo
C enddo
C
C -----

```

```

C      ***** FLÄCHE 3 *****
C      -----
C
do isheet=1,4
ishl=(isheet-1)*308
do i=1,16
iel=s3(i)
write(50,*) ish1+iel,3
write(50,*) null
enddo
enddo

C
C      -----
C      ***** FLÄCHE 4 *****
C      -----
C
do isheet=1,4
ishl=(isheet-1)*308
do iel=1,16
write(50,*) ish1+iel,4
write(50,*) null
enddo
enddo

C
C      -----
C      ***** FLÄCHE 5 *****
C      -----
C
do isheet=1,4
ishl=(isheet-1)*308
do i=1,26
iel=s5(i)
write(50,*) ish1+iel,5
write(50,*) offen
enddo
enddo

C
C      -----
C      ***** FLÄCHE 6 *****
C      -----
C
do iel=1,308

write(50,*) iel,6
if (iel.ge.278 .and. iel.le.280) then
write(50,*) V1          ELEKTRODE 1
goto 10
endif
if (iel.ge.291. and. iel.le.293) then
write(50,*) V2          ! ELEKTRODE 2
if (iel.eq.295)
*write(50,*) V2          ! ELEKTRODE 2
goto 10
endif
if (iel.ge.229. and. iel.le.237) then
write(50,*) V2          ! ELEKTRODE 3
goto 10
endif
if (iel.ge.171. and. iel.le.175) then
write(50,*) V2          ! ELEKTRODE 4
goto 10
endif
if (iel.ge.128. and. iel.le.136) then
write(50,*) V2          ! ELEKTRODE 5
goto 10

```

```
endif
if (iel.ge.103. and. iel.le.109) then
write(50,*) V2      ! ELEKTRODE 6
goto 10
endif
write(50,*) offen
enddo
10
C
write(50,*) 0,0
write(50,*) 0
write(50,*) 0
write(50,*) 0
C
C
C -----
C ** RANDBEDINGUNG ENTLANG KANTEN **
C -----
C
write(50,*) 0
C
END
```