Los problemas de duplicación del rectángulo y del cubo en la Grecia antigua. Utilización de la regla y el compás por Euclides, presentación del mesolabio de Eratóstenes.

Unidad 1

I. Las conctrucciones a la regla y el compás : un problema muy antiguo

1) *Contexto histórico*

No se sabe exactamente en dónde toma origen la Geometría. Es posible que se iniciara en el valle del Indo o en Mesopotamia hacia el año 3000 a.C. Fue vehiculada más tarde a China, Egipto y posteriormente a Grecia.

Los restos históricos (tablas de arcilla, papiros, …) que hemos hallado nos permiten deducir que en su inicio, la geometría se presentaba como un conjunto de recetas para el cálculo de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes en todo tipo de problemas de construcción, astronomía y agricultura.

Por eso, cuando los griegos recuperaron todos estos conocimientos decidieron llamarlos « Geometría » de *Geo* = tierra, *metria* = medida. Sin embargo, ellos no se conformaron con compilar todas estas recetas por muy sofisticadas que fueran sino que serían los primeros en Europa en establecer las reglas formales de razonamiento, garantizando la veracidad de las conclusiones obtenidas.

Antes de los griegos, es evidente que ya se dibujaban puntos, rectas y círculos. La Geometría griega va a darles un estatuto diferente ya que al definirlos de manera precisa se convierten en objetos abstractos con los que se pueden generar objetos más complejos mediante construcciones exactas que los relacionaban entre sí.

Pero, ¿ qué significa ser « exacto » ?

Era imperativo aclarar desde el principio qué construcciones podían considerarse exactas. Ellos consideraron que solamente las construcciones con regla y compás podían ser acceptadas. Todo otro instrumento era considerado como poco fiable y así pues descartado.

Las definiciones y postulados dados en los famosos *Elementos* de Euclides se basan en tales construcciones. Se fijaron estas peticiones básicas a partir de las cuales cualquier otra construcción debía ser una combinación de éstas, entre ellas :

1) Trazar una recta entre dos puntos dados y prolongarla continuamente
2) Trazar una circunferencia a partir de dos puntos dados

En particular, los puntos de intersección de dichas construcciones eran acceptados.

¡A ti te toca !

Ejercicio 1

Utilizando **únicamente** la regla (no graduada) y el compás, intenta trazar :

a) Un triángulo equilátero a partir de un segmento (¡ muy fácil !)
b) La tangente a una circunferencia que pase por un punto exterior a la misma.
c) Una paralela a una recta dada que pase por un punto exterior a la misma.

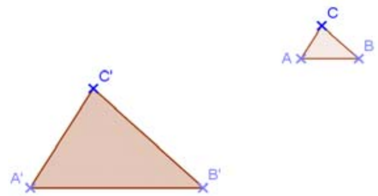
2) *Construcción de proporcionales en los Elementos de Euclides*

En el libro VI de los *Elementos* se muestran unas construcciones que resultaron ser de mucha utilidad para los problemas de medida de los campos agrarios y para los cálculos de los arquitectos.

2.1) Un poco de vocabulario

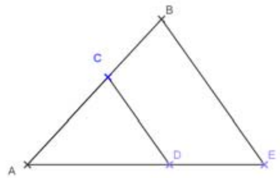
El Libro VI de los *Elementos* establece los Teoremas fundamentales de los triángulos semejantes y las construcciones de la tercera proporcional (proposición 11), la cuarta proporcional (proposición 12) y la media proporcional (proposición 13).

a) Dos triángulos son **semejantes** si sus lados son proporcionales entre sí o si tienen los mismos ángulos.



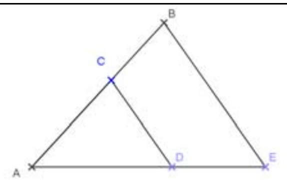
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

b) Dados tres segmentos a, b y c, el segmento x tal que: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ es llamado **cuarta proporcional** entre a, b y c.	c) Dados dos segmentos a y b, el segmento x tal que $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$ es llamado **tercera proporcional** entre a, b y c.



AB = b   AC = a   AD = c   AE = x

Figura 1



AB = b   AC = a   AD = b   AE = x

Figura 2

d) Dados dos segmentos a y b, el segmento x tal que $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ es llamado **media proporcional** entre a y b.

Ya sabéis que Euclides se **autoriza únicamente dos instrumentos de construcción : el compás y la regla.** No tiene ni instrumentos más sofisticados (que podremos ver más tarde), ni tampoco una calculadora que le dé valores aproximados. Sus construcciones son de esta manera consideradas <u>exactas</u>.

Los problemas de construcción de tercera y cuarta proporcional se pueden resolver utilizando únicamente el **teorema de Tales**.

<u>Ejercicio 2</u>

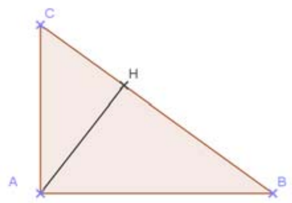
Decir por qué en la figura 1, el segmento de longitud x construido es solución al problema de la cuarta proporcional y por qué en la figura 2, el segmento de longitud x construido es solución al problema de la búsqueda de la tercera proporcional. (Utilizad el Teorema de Tales).

Unidad 2

2.2) Construcción de la media proporcional y duplicación del rectángulo

La construcción de la media proporcional entre dos segmentos permite obtener un cuadrado de misma área que un rectángulo dado de lados a y b. Pero se va a necesitar una proposición euclidiana que vamos a demostrar enseguida.

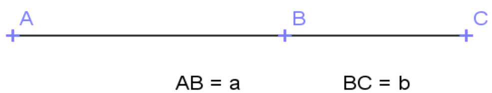
Proposición: Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre sí.



Ejercicio 3

1) Demostrar que los triángulos ACH y AHB son semejantes. (Observar los ángulos)

2) **Construcción de la media proporcional (proposición 13):**

Trazad un segmento AB de longitud a y otro BC de longitud b, uno al lado del otro.	
Trazad la semi circunferencia de diámetro AC. A partir de B, elevad la perpendicular a AB, que corta la circunferencia en H. El segmento BH es la media proporcional entre a y b.	

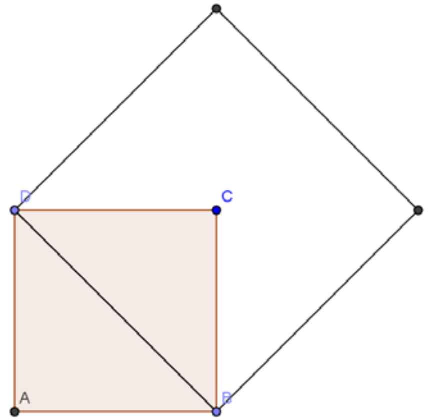
Haced la construcción propuesta y explicad por qué la longitud BH es la media proporcional. Con esta construcción obtenemos un **cuadrado de misma área que un rectángulo dado.**

Ejercicio 4

Los griegos sabían cómo resolver el problema de duplicar el cuadrado.

Tomar un cuadrado ABCD y dibujar la diagonal DB. Construir un cuadrado BDEF usando BD. De ahí es fácil ver que el área de BDEF es el doble de ABCD.

1) Explicar por qué esta construcción permite duplicar el cuadrado.



2) Explicar ahora comó se puede duplicar el área de un rectángulo dado, es decir construir con la regla y el compás un cuadrado que tenga un área doble.

Unidad 3

II. La duplicación del cubo y la búsqueda de dos medias proporcionales : dos problemas muy "íntimos"

Con la ayuda de Euclides, hemos construido un cuadrado de área doble de la de un rectángulo utilizando únicamente la regla y el compás. Esta construcción está muy ligada con la que permite obtener una media proporcional entre dos segmentos a y b.

Otro problema que interesó los griegos es la generalización del problema anterior es decir: la duplicación del volumen del cubo que llamamos más simplemente "duplicación del cubo".

En una carta[1] al Rey Tolomeo, Eratóstenes explica como surgió este problema:

Eratóstenes *al Rey Tolomeo, saludos.*
La anécdota dice que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba medía cien pies de cada lado, dijo "Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada lado de la tumba."

Ejercicio 5

1) Esto claramente era un error. Explicad que si seguimos los consejos de Minos no conseguimos duplicar el volumen.
2) Explicad por qué la solución de la ecuación $x^3 = 2a^3$ nos permite encontrar la arista buscada.

Esta solución es llamada "raíz cúbica" de $2a^3$ y se escribe $\sqrt[3]{2a^3}$. Si la raíz cuadrada de un número se puede construir con la regla y el compás (**Ejercicio 3**), ¿cómo construir una raíz cúbica utilizando únicamente los mismos instrumentos?

Este problemá atormentó a los matemáticos griegos porque, pero ellos no lo sabían, no se puede resolver únicamente con la regla y el compás.

Pues bien, este problema está ligado íntimamente con la búsqueda de dos medias proporcionales, es decir, dadas dos líneas a y b, encontrar dos segmentos x e y tales que:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

El primer paso importante en la duplicación del cubo fue dado por Hipócrates de Quíos (470-410 aC) probablemente no mucho después de que el problema apareciera por primera vez.
Así bien para resolver el problema de la duplicación de un cubo de arista a Hipócrates afirma que es suficiente la búsqueda de dos medias proporcionales con b = 2a es decir:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

Ejercicio 6
Demostrar que x es solución de la ecuación $x^3 = 2a^3$.
Consejo: Intentad eliminar y.

Aunque muchos métodos distintos fueron inventados para duplicar el cubo e importantes descubrimientos matemáticos fueron realizados en los intentos, los antiguos Griegos **nunca habrían de encontrar la solución** que realmente buscaban, es decir, una solución que pudiera hacerse mediante una construcción con regla y compás. Nunca encontrarían tal construcción ya que ésta no puede lograrse. Sin embargo, no había forma de que ellos pudieran demostrar este resultado porque requiere matemática que estaban muy lejos de las que ellos desarrollaron.

La demostración de la imposibilidad tendría que esperar por las matemáticas del siglo XIX. Las piezas finales del argumento fueron reunidas por Pierre Wantzel. En 1837, Wantzel publicó en el *Journal* de Liouville demostraciones de:
... los medios para establecer si un problema geométrico puede o no ser resuelto mediante regla y compás.

La solución que vamos a presentar fue proporcionada por Eratóstenes y por supuesto no utiliza la regla y el compás sino un instrumento que fue llamado « mesolabio[2]».

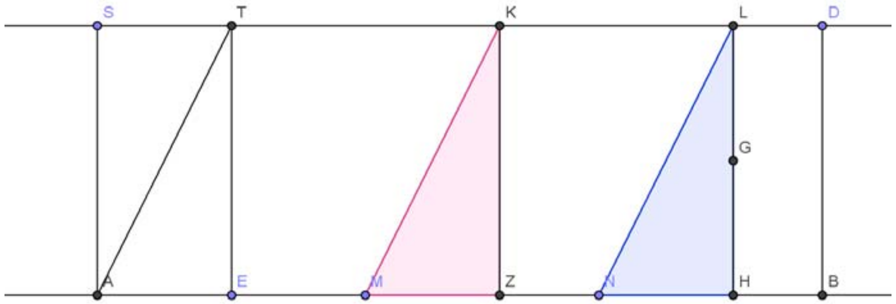
[1] Extracto de los comentarios de Eutocius d'Ascalon sobre el *Tratado de la esfera y el cilindro* (V siglo).

[2] Del griego « coger una media »

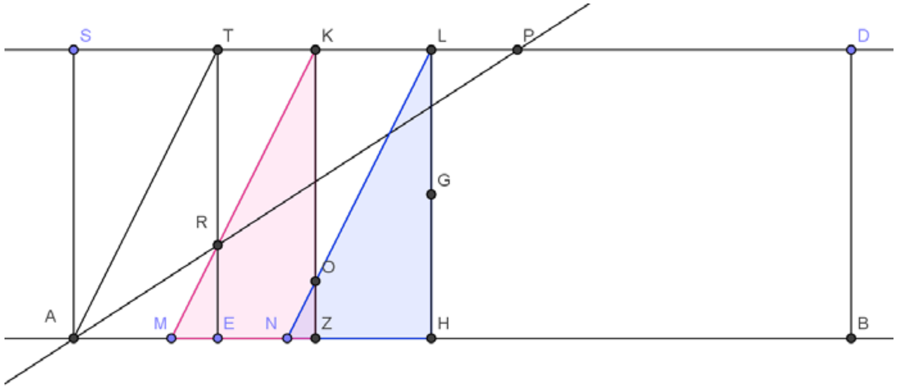
III. Resolución por Eratóstenes

Eratóstenes (III siglo a.C.) diseñó un instrumento para construir estas medias proporcionales. El resultado es aproximativo ya que la manipulación se hace con las manos y por tanteo. El mecanismo está dibujado en la figura siguiente (y es mucho más complejo que utilizar la regla y el compás).

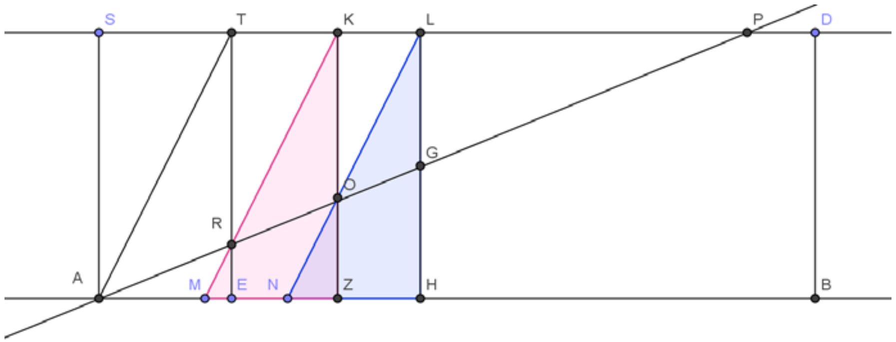
Consta de un armazón[3] formado por dos líneas paralelas (AB), (SD) (se fija SD = 2a) en donde tenemos tres triángulos isométricos AET, MZK y NHL que se pueden deslizar entre estas dos barras paralelas como si se deslizaran entre dos guías. La posición inicial es :



En la segunda figura mantenemos AET sin mover como antes en la primera posición, pero deslizamos los triángulos segundo y tercero a las nuevas posiciones. Llamamos R la intersección entre (KM) y (TE) y O la intersección entre (LN) y (KZ). LG = a. Trazamos la línea (AR).



Si deslizamos de tal manera que los puntos A, R, O y G estén alineados entonces **KO es la arista del cubo doble**.



Ejercicio 7

Nos proponemos demostrar este resultado. La demostración está basada en la utilización « en cascada » del teorema de Tales.

[3] « armature »

Justificar las igualdades siguientes :

Triángulos	Igualdad
KOP y LGP	$\frac{LG}{KO}=$.......
KRP y LOP	$\frac{LP}{KP}=$ …..
TRP y KOP	$\frac{OP}{RP}=\frac{KO}{TR}=$ …….
TAP y KRP	$\frac{KP}{TP}=$ …….
SAP y TRP	$\frac{RP}{AP}=$ ………

Deducimos de estas igualdades que $\frac{LG}{KO}=\frac{KO}{TR}=\frac{TR}{SA}$.

Ejercicio 8

Con la ayuda del ordenador y de un programa de geometría dinámica, reproducir el instrumento de Eratóstenes.

El vocabulario matemático griego

Las matemáticas europeas tuvieron su origen en Grecia. Durante los siglos que siguieron, los científicos y en particular los matemáticos siguieron utilizando el mismo vocabulario.

1) Ya conoces muchos términos ¿pero podrías completar la siguiente tabla teniendo en cuenta que frecuentemente falta el artículo determinado ?

Francés	Castellano
……. abscisse	….. ……………………..
…… arête	…… …………………..
…… axiome	…… ……………………..
……... ………………………………..	….. apotema
….. ……………………..	….. decágono
un dodécaèdre	un ………………………
……… …………….	…… elipse
un ennéagone	
…………………	homotético
la géométrie	… ………………. ;
….. ……………………	un hemisferio
un hectolitre	…….. …………………
un heptaèdre	……. …………………………
un hexagone	…….. ………………………
homothétique	………………………………
…………………..	un icosaedro
une isométrie	….. …………………..
…… lemme	…… …………………..
la mathématique	….. ……………………………
…… …………………….	un nonágono
un octaèdre	…. ………………….
….. …………………….	ortogonal
une hyperbole	…… …………………….
….. …………………..	…… hipótesis
l'hypoténuse	…… ………………….

la parabole	…… ……………………………
….. ………………..	una paralela
un polygone	….. ………………..
…. ………………….	…… problema
semblable	……………….
une symétrie	….. ……………….
…. …………………..	….. teorema

2) Has debido notar que algunas palabras que acaban en « a » no son necesariamente de género feminino. ¿Qué desinencia utiliza el francés ?

3) Algunas palabras en griego antiguo empiezan por la letra upsilon por ejemplo : « uperbola ». ¿Puedes explicar como se transcribe en castellano y en francés ?

4) El alfabeto griego contiene dos t : el tô que se escribe τ y la thêta que se escribe θ. Por ejemplo el griego escribe con la letra tô la palabra que se traduce por « symétrie » en francés y escribe con thêta la palabra que se traduce por « orthographe ».

Verificad que esta regla se aplica en otras palabras en francés. ¿ Esta regla de traducción se aplica también en castellano ?