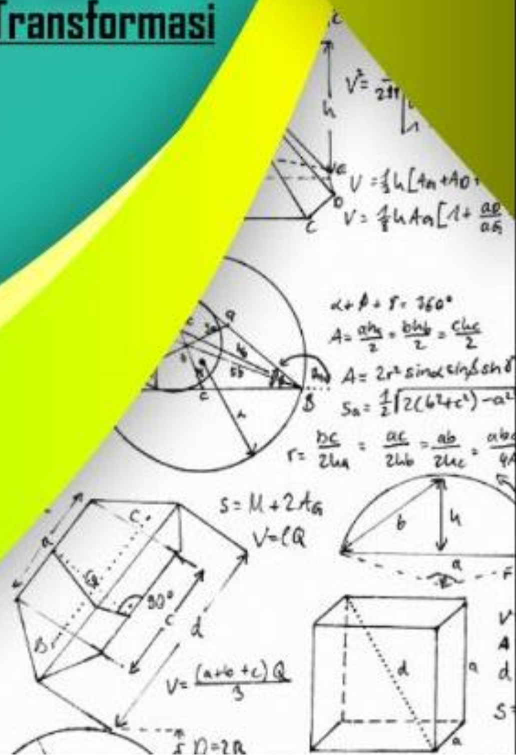
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UHAMKA

Tangkas GEOMETRI TRANSFORMASI

Cepat Tepat Menguasai Geometri Transformasi

Meyta Dwi Kurniasih
Isnaini Handayani



France title

Handy of transformation of Geometry

TANGKAS
GEOMETRI TRANSFORMASI

Meyta Dwi Kurniasih

Isnaini Handayani

Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Prof Dr HAMKA

Jakarta-2017

Copyright

PERSEMBAHAN

Buku Ajar ini kami persembahan
teruntuk orangtua terkasih;

dan teruntuk keluarga tercinta
yang selama ini selalu mensuport
penulis terealisasinya buku ajar ini.

UCAPAN TERIMA KASIH

Syukur Alhamdulillah penulis sampaikan kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat dan kasih sayangNya penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ajar “Tangkas Geometri Transformasi” ini.

Pada kesempatan ini, penulis juga menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak yang telah mendukung, memotivasi, dan mengarahkan penulis dalam proses penulisan sampai atas terbitnya buku ajar ini. Beberapa yang harus penulis sebutkan antara lain :

Pertama, terima kasih penulis sampaikan kepada Kementrian Riset dan Teknologi Pendidikan TInggi yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengembangkan pengajaran dan pembelajaran matematika melalui hibah buku ajar.

Kedua, terima kasih penulis sampaikan kepada pihak rektorat yaitu Prof. Dr. H. Suyatno, M.Pd. (Rektor Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA); Dr. Gunawan Suryosaputro, M.Hum (Wakil Rektor I); Dr. H. Muchdie, MS (Wakil Rektor II); Drs. Bunyamin, M.Pd.I (Wakil Rektor III);

dan Drs. Zamah Sari, MA (Wakil Rektor IV) yang selalu mendukung berbagai program pengembangan pengajaran dan pembelajaran; serta mempermudah proses administrative dalam penyusunan buku ajar sampai dengan penerbitan buku ajar.

Ketiga, Dr. Desvian Bandarsyah, M.Pd. (Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Kependidikan); Dr. Hj. Sri Astuti, M.Pd. (Wakil Dekan I); Dra. Hj. Chandrawaty, M.Pd (Wakil Dekan II); Dr. Tri Wintolo Apoko, M.Pd (Wakil Dekan III); dan Dr. Izza Rohman, M. Ag. (Wakil Dekan IV) yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam proses penulisan buku ajar ini.

Terakhir, penulis sampaikan terima kasih kepada Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan seluruh dosen Program Studi Pendidikan Matematika yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Mereka seluruhnya telah menjadi bagian dari proses pengembangan pengajaran pendidikan matematika melalui diskusi dan perdebatan akademik yang berkelanjutan baik di ruang kelas maupun di luar kelas. Semoga segala amal baik mereka diterima disisi Allah SWT sebagai bagian dari amal shaleh dan pengabdian untuk mencerahkan dan mencerdaskan umat dan bangsa.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

- $Rs(P)$: Refleksi titik P terhadap garis s
- $S_A(P)$: Setengah putaran titik P terhadap titik A
- I : Identitas transformasi
- G : Translasi
- P : Rotasi
- D : Dilatasi
- $\in$: Anggota
- V : Bidang Eulids

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam yang telah mengajarkan dengan kalam (pena). Salawat dan Salam pada nabi besar Muhammad SAW. Pertama tama, selaku Dekan FKIP UHAMKA, saya menyambut baik dan gembira dengan terbitnya buku **"Tangkas Geometri Transformasi."** Kedua, saya menyampaikan selamat kepada kedua penulis yang telah mendedikasikan waktu dan pikirannya nya untuk menulis buku ajar yang akan digunakan oleh para mahasiswa pendidikan matematika secara khusus dan guru matematika serta peminat matematika secara umum.

Dalam perspektif pembelajaran matematika, buku ajar ini akan sangat membantu mahasiswa calon guru pendidikan matematika. Matematika merupakan bagian penting dari kehidupan manusia. Hampir tidak ada kehidupan yang lepas dari unsur matematika, baik dalam hal penghitungan, penjumlahan, pengurangan, pengukuran ruang atau lebih luas lagi dalam pengembangan ilmu pengetahuan yang berkaitan dengan teknologi yang semakin maju pesat.

Oleh karena itulah, secara teoritis, mahasiswa program pendidikan matematika, program matematika, ataupun guru pendidikan matematika memiliki peran yang amat signifikan dalam memberikan dasar-dasar logika bagi para peserta didik. Buku ajar ini diharapkan dapat memberikan pedoman bagi penggunanya, para guru dan bahkan peserta didik untuk lebih kreatif dalam pengajaran dan pembelajaran matematika dalam kaitannya dengan konteks kehidupan sehari-hari.

Dengan demikian, matematika secara berangsur angsur diminati dan disukai oleh peserta didik dan tidak menjadi momok yang cukup “menakutkan” bagi peserta didik. Disinilah peran penting dari buku ajar dan kreativitas guru dalam pengajarannya kepada peserta didik untuk menghadirkan pelajaran matematika yang menyenangkan, memudahkan pemahaman peserta didik. Berkaitan dengan hal itulah, buku ajar ini menjadi amat penting, karena buku ini tidak hanya menghadirkan hitungan matematikan yang rumit tetapi memberikan keterangan atau penjelasan yang gamblang dengan contoh-contoh latihan soal beserta jawabannya.

Sebagai penutup, saya amat mengapresiasi terbitnya buku ini dan berharap agar penulis dapat terus berkarya dan menjadi inspirasi bagi penulis-penulis buku ajar matematika secara khusus dan buku-buku ajar pendidikan lain secara umum. Terima kasih.

Dekan FKIP UHAMKA,

Dr. Desvian Bandarsyah, M.Pd.

HALAMAN PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ajar yang berjudul **"Tangkas Geometri Transformasi."**

Buku Ajar ini disusun dalam rangka memenuhi kebutuhan pembaca pada umumnya dan mahasiswa calon guru pendidikan matematika khususnya untuk lebih memahami, mengeksplorasi geometri transformasi. Berkaitan dengan hal itulah, maka buku ajar ini disusun dengan merujuk pada kebutuhan untuk mengembangkan pengajaran Geometri Transformasi. Buku ajar ini terdiri dari sepuluh bab yang mencakup : Pendahuluan; Transformasi; Isometri; Refleksi; Komposisi dan Invers Transformasi; Setengah Putaran; Rotasi; Translasi; Refleksi Geser; dan Dilatasi.

Dalam setiap bab yang disusun, buku ini membahas beberapa permasalahan penting dalam Geometri seperti ; Deskripsi Materi, Relevansi; Uraian Materi; Latihan Soal; dan Rangkuman.

Oleh karena itulah, untuk memudahkan opemahaman lebih lanjut, Buku ajar ini menyediakan kunci jawaban agar pembaca pada umumnya dan mahasiswa pada khususnya dapat mengecek apakah soal latihan yang telah dikerjakan benar atau tidak.

Dengan mempelajari Buku Ajar ini diharapkan pembaca pada umumnya, dan mahasiswa calon guru pendidikan matematika khususnya, dapat mengeksplorasi geometri transformasi ini secara mandiri. Penulis berharap buku ajar ini dapat bermanfaat secara maksimal dalam rangka menambah wawasan dan mengembangkan geometri transformasi dalam konteks pengajaran dan pembelajaran secara khusus dan dalam konteks kehidupan sehari hari secara umum.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan buku ajar ini masih terdapat banyak kekurangan dan jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis dengan terbuka dan gembira menerima kritik dan saran dalam rangka penyempurnaan buku ajar ini dimasa dating.

Semoga buku ajar ini dapat memberikan kemudahan dalam pemahaman dan pengajaran serta pembelajaran matematika bagi para guru, siswa secara khusus dan bagi peminat matematika serta siapapun yang membacanya secara umum. Akhir kata Penulis menyampaikan permohonan maaf apabila terdapat kesalahan dan kata-kata yang kurang berkenan dalam buku ajar ini.

Jakarta, September 2017

Penulis

BAB I PENDAHULUAN

BAB I PENDAHULUAN

A. Deskripsi Mata Kuliah

Bab pendahuluan ini mencakup garis besar tentang pengertian dan sejarah geometri transformasi. Dalam bab ini pula, akan dijelaskan mengenai prasyarat mempelajari transformasi, yaitu relasi dan fungsi.

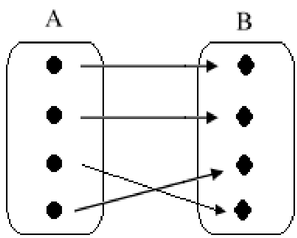
Sebelum mempelajari geometri transformasi, mahasiswa perlu mengetahui apakah yang dimaksud dengan geometri transformasi? Apa urgensi mempelajari geometri transformasi?

Geometri transformasi dapat juga disebut geometri gerak. Geometri transformasi merupakan pemetaan satu-satu dengan menggunakan himpunan titik-titik sebagai masukan/input dan *returning points* sebagai luaran/output. Himpunan-himpunan input tersebut dinamakan sebagai obyek/benda dan output/luaran yang bersesuaian dinamakan sebagai *image*/bayangan.

Perkembangan geometri transformasi di awali oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman yang bernama Felix Klein (1849 – 1925). Klein berjasa dalam mereformasi pembelajaran geometri. Ia menciptakan teori awal dari transformasi geometri yang melepaskan identitas geometri sebagai bidang yang selalu berhubungan dengan teori-teori Euclid. Pada tahun 1872, Klein menciptakan dan menerbitkan sebuah jurnal yang bernama *Erlangen Program*. Dalam jurnal ini, Klein menjelaskan bahwa bangun ruang dan bangun datar juga bisa dikembangkan lewat sumbu simetri yang terdapat pada setiap bangun. Dengan teori ini, geometri menjadi sebuah bidang yang tak hanya membicarakan soal sifat-sifat dan pengukuran bangun ruang, tapi juga tentang perubahan yang terjadi pada bangun. Pada akhirnya, teori ini diakui oleh dunia dan menjadi sebuah pengaruh yang besar bagi perkembangan matematika modern.

Klein memberikan definisi Geometri sebagai berikut "Suatu Geometri didefinisikan oleh suatu group dari transformasi-transformasi, jika definisi dan dalil-dalilnya yang berlaku untuk sifat-sifat dari bangunan itu "invariant" (tidak berubah) oleh transformasi-transformasi dari G, tetapi tidak "invariant" oleh transformasi dari group lain yang mana saja yang memuat G. (Budiyono)

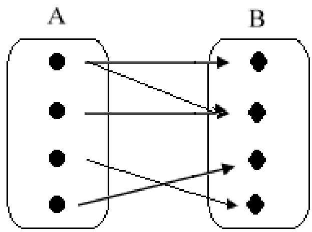
Sebelum mempelajari geometri transformasi, mahasiswa perlu memahami tentang pemetaan pada himpunan bilangan real. Terdapat dua macam pemetaan, yakni relasi dan fungsi. **Relasi** adalah memasangkan satu atau lebih anggota himpunan dengan satu atau lebih anggota himpunan yang lain**.** Sedangkan **fungsi** adalah memasangkan setiap anggota suatu himpunan **tepat** dengan satu anggota himpunan yang lain. Fungsi sering juga disebut dengan istilah pemetaan, padanan, ataupun *mapping.* Untuk lebih memahami perbedaan antara relasi dan fungsi, perhatikan contoh berikut:



Gambar 1.1 Contoh Fungsi

Contoh 1:

Gambar di atas merupakan contoh fungsi, karena setiap anggota pada himpunan A memiliki tepat satu anggota di himpunan B



Gambar 1.2 Contoh Pemetaan

Gambar di atas merupakan bukan fungsi, karena ada anggota di himpunan A yang memiliki lebih dari satu pasangan anggota di himpunan B

Definisi 1

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B.

Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi sebagai berikut :

$$f : A \rightarrow B$$

dibaca "fungsi f pemetaan A ke dalam B"

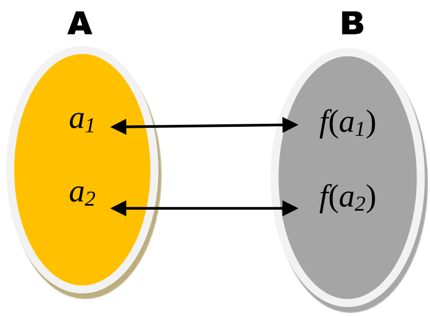
Apabila f memetakan/memadankan suatu elemen $a \in A$ ke suatu $b \in B$ maka dapat dikatakan bahwa b adalah peta/bayangan/image dari a oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$, atau dapat ditulis dengan $f: a \rightarrow f(a)$

Untuk setiap a disebut dengan prapeta/obyek/benda dari $f(a)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f, sedangkan himpunan B disebut dengan daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

Berdasarkan bagaimana cara elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka terdapat tiga sifat fungsi yang akan dijelaskan sebagai berikut:

1) Fungsi injektif

Fungsi f: A → B disebut **fungsi satu-satu** atau **fungsi injektif** jika dan hanya jika untuk sebarang $a_1, a_2 \in$ A dengan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1) = f(a_2)$.



Gambar 1.3 Fungsi Injektif

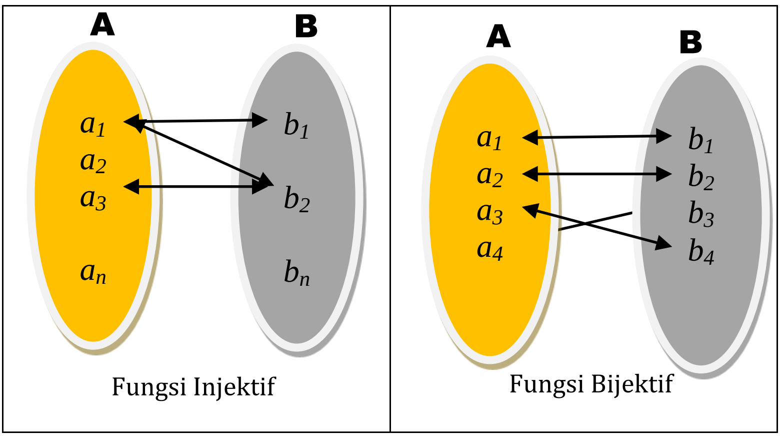
2) Fungsi surjektif (onto)

Fungsi f : A → B disebut **fungsi kepada** atau **fungsi onto** atau **fungsi surjektif** jika dan hanya jika untuk sebarang $b \in B$ terdapat paling tidak satu $a \in A$ sehingga berlaku $f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (*range*).

3) Fungsi bijektif

Fungsi f: A → B disebut disebut **fungsi bijektif** jika dan hanya jika untuk sebarang $b \in B$ terdapat tepat satu $a \in A$ sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota A yang tidak terpetakan dalam B. Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah fungsi injektif sekaligus surjektif.

Berikut contoh diagram venn dari fungsi injektif dan bijektif:



Gambar 1.4 Fungsi Surjektif

B. Prasyarat Matakuliah

Prasyarat matakuliah adalah matakuliah yang merupakan persyaratan untuk suatu matakuliah yang diprasyarati. Apabila suatu matakuliah mempunyai matakuliah prasyarat tertentu, maka pengambilannya hanya dibenarkan setelah persyaratannya dipenuhi. Dengan demikian apabila seorang mahasiswa membatalkan suatu matakuliah prasyarat, semua matakuliah yang diprasyarati juga dinyatakan batal. Pada matakuliah geometri transformasi, mahasiswa diharuskan terlebih dahulu lulus mata kuliah geometri analitik dan aljabar linier.

C. Rencana Pembelajaran

Dalam pembelajaran geometri transformasi, mahasiswa diharapkan dapat mengeksplorasi baik secara individu maupun kelompok kemudian didiskusikan dengan teman sejawat. Adapun peran dosen sebagai fasilitator adalah memastikan mahasiswanya memahami secara jelas dan mendalam serta membantu mahasiswa dalam mengelaborasi geometri transformasi ini.

D. Petunjuk Penggunaan Bahan Ajar

1. Penjelasan bagi mahasiswa

Tiap bab Bahan ajar Tangkas Geometri Transformasi ini terdiri dari tiga subbab, yakni pendahuluan, penyajian, dan penutup.

Pada subbab pendahuluan, berisi tentang deskripsi materi pembelajaran, relevansi, dan capaian pembelajaran yang harus dicapai oleh mahasiswa. Dengan bab pendahuluan ini, sebagai bab pembuka agar mahasiswa mengetahui hal-hal yang harus dicapai.

Adapun subbab penyajian, berisi uraian materi secara lengkap, pembuktian teorema-teorema disertai dengan contoh.

Sedangkan bagian penutup berisi tentang rangkuman materi pembelajaran dan tes formatif.

Sebelum pembelajaran di kelas, mahasiswa diharapkan mampu mengeksplorasi secara individual bahan ajar ini kemudian didiskusikan saat tatap mukadi kelas sehingga terjadi pembelajaran yang aktif di dalam kelas

2. Peran Dosen dalam Pembelajaran

Adapun peran dosen dalam proses pembelajaran adalah sebagai fasilitator, yakni membantu, membimbing, mengarahkan mahasiswa dalam mengeksplorasi, mengelaborasi materi geometri transformasi.

E. Capaian Pembelajaran Lulusan

Capaian pembelajaran lulusan setelah mempelajari geometri transformasi ini adalah :

- S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
- PP7 : Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
- KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
- KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
- KK16 : Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu

Adapun capaian mata kuliah yang diharapkan dalam pembelajaran geometri transformasi adalah :

1) Mahasiswa mampu memahami, dan menjelaskan transformasi dan hasil kali dua transformasi (S9, PP7, KU1, KU2)
2) Mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan isometri dan sifat-sifatnya (S9, PP7, KU1,KU2)
3) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat dan matriks refleksi (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
4) Mahasiswa mampu menjelaskan komposisi dan invers transformasi (S9, PP7, KU1, KU2)
5) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat dan komposisi setengah putaran (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
6) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat, komposisi dan matriks translasi (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
7) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat, komposisi dan matriks rotasi (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
8) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat, komposisi refleksi geser (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)

9) Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat, komposisi dan matriks dilatasi (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)

F. Umpan Balik Aktivitas Belajar

Setelah mempelajari setiap bab dalam bahan ajar ini, diberikan umpan balik berupa pemberian tes formatif yang terdiri dari soal uraian. Dalam bahan ajar ini pula disediakan kunci jawaban agar memudahkan mahasiswa dalam mengecek jawabannya.

BAB II TRANSFORMASI

A. Deskripsi Materi

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, transformasi mempunyai arti perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dsb). Dalam sistem koordinat kartesius, untuk memindahkan satu titik atau bangun pada bidang dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi.

Jadi, transformasi geometri adalah proses mengubah setiap titik koordinat menjadi titik koordinat lain pada bidang tertentu. Transformasi tidak hanya terhadap titik tetapi bisa juga dilakukan pada kumpulan titik yang membentuk bidang/bangun tertentu. (Tujuan)

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami dan membuktikan sifat-sifat sebuah fungsi yang tergolong transformasi atau bukan. Ini sebagai bekal bagi mahasiswa dalam mempelajari materi isometri, namun sebelum mempelajari materi tentang transformasi mahasiswa harus menguasai materi tentang fungsi dan sifat-sifatnya.

C. Capaian Pembelajaran

1. S9 →Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
2. PP7 →Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
3. KU1 →Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
4. KU2 →Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

D. Materi Pelajaran

1. Pengertian Transformasi

Pemetaan atau fungsi diartikan sebagai suatu aturan yang menghubungkan suatu bilangan real dengan bilangan real lainnya. Transformasi merupakan bagian dari fungsi, oleh sebab itu pemahaman mengenai fungsi menjadi hal yang pentinng.

Pemetaan pada bangun geometri disebut sebagai transformasi geometri. Jadi, **transformasi** adalah *suatu fungsi pada bidang V adalah suatu padanan yang mengaitkan setiap anggota V dengan satu anggota V* (Rawuh, 1993).

Jika f adalah fungsi dari V ke V yang mengaitkan setiap x ∈ V dengan y ∈ V maka ditulis:

$$y = f(x)$$

Dimana:

x : prapeta dari y oleh *f*

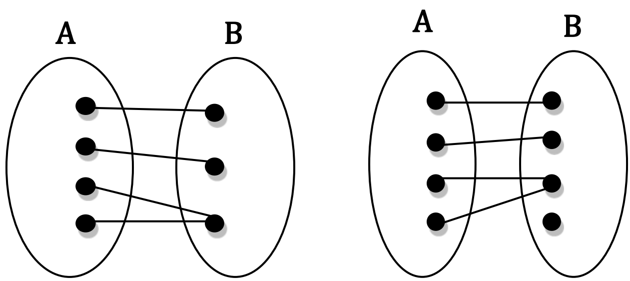
y : peta dari x oleh *f*

Daerah asal (domain) fungsi tersebut adalah V dan daerah nilainya (range) juga V. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi pada *f.*

Suatu transformasi bidang V (bidang Euclid) adalah fungsi bijektif dengan daerah asal(domain) di V dan daerah hasil(kodomain) di V juga. Suatu fungsi yang bijektif adalah sebuah fungsi yang bersifat :

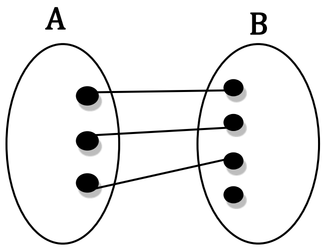
1. Surjektif (onto)
2. Injektif (satu-satu)

Surjektif artinya bahwa pada tiap titik $B \in V$ ada prapeta. Jadi kalau T suatu transformasi maka ada $A \in V$ sehingga $B = T(A)$. B dinamakan peta dari A oleh T dan A dinamakan prapeta dari B.

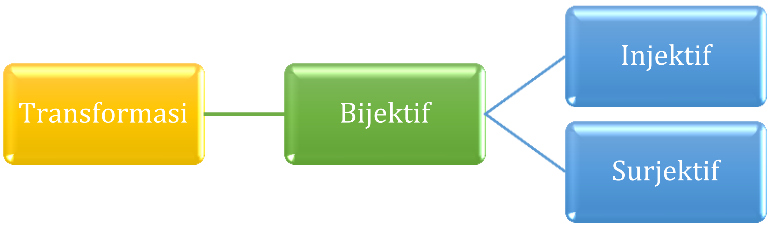


Gambar 2.1 Diagram Venn Fungsi Surjektif

Injektif artinya jika $A_1 \neq A_2$ dan $(A_1) = B_1$, $T(A_2) = B_2$. Maka $B_1 \neq B_2$



Gambar 2.2 Diagram Venn Fungsi Injektif



<u>Contoh Soal 2.1</u>

Sebuah lingkaran b dengan pusat di P dan garis t AB adalah diameter lingkaran b yang sejajar dengan t. Jika f adalah fungsi dari $\mathcal{A} = b - (A, B)$ ke garis t, maka ada sembarang $x \in \mathcal{A}$ sehingga $f(x) = \overleftrightarrow{PX} \cap t$, apakah f suatu transformasi ?

Jawaban Contoh Soal 2.1:

Transformasi = Fungsi Bijektif. Syarat fungsi bijektif yaitu memenuhi fungsi surjektif dan fungsi injektif. Jadi, untuk membuktikan apakah sebuah fungsi f transformasi atau bukan, maka akan dibuktikan apakah f fungsi yang bijektif.

Langkah pertama akan dibuktikan bahwa f surjektif.

$f: \mathcal{A} \rightarrow t$

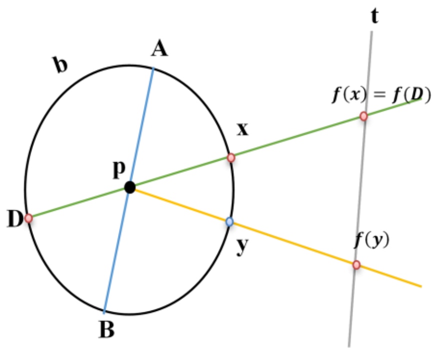
$x \in \mathcal{A} \rightarrow f(x) = \overleftrightarrow{PX} \cap t$

$y \in \mathcal{A} \rightarrow f(y) = \overleftrightarrow{PY} \cap t$

$D \in \mathcal{A} \rightarrow f(D) = \overleftrightarrow{PX} \cap t = f(x)$

$\mathcal{A} = b - (A, B)$

Agar dapat mempermudah pengerjaan, di buat sketsa grafiknya seperti pada gambar 2.3 berikut:



Gambar 2.3 Sketsa Grafik Contoh Soal 2.1

Buktikan apakah transformasi ? jika transformasi maka fungsi tersebut memenuhi sifat surjektif dan injektif

Pembuktian f surjektif?

Domain x Range $f(x)$

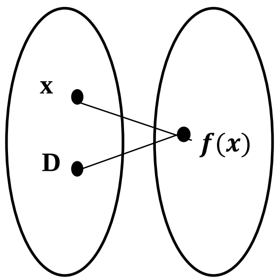
Domain y   Range $f(y)$

Bidang V   Bidang V

Karena setiap prapeta dari V memiliki peta di V, maka terbukti bahkan f bersifat surjektif

Pembuktian f injektif?

Domain C   Range $f(C)$
Domain C   Range $f(C) = f(D)$



Karena setiap peta dari *f(x)=f(D)* padahal $x \neq D$. maka f tidak bersifat injektif (satu-satu), sehingga $\boldsymbol{f}$ **bukan transformasi**.

<u>Contoh Latihan 2.2</u>

Diketahui fungsi T didefisinikan sebagai berikut:

i. $T(A) = A$
ii. $P \neq A, T(P) = Q$, Sehingga Q titik tengah $\overline{AP}$
iii. $E \neq A, T(E) = F$, Sehingga F titik tengah $\overline{AE}$

Tentukan apakah fungsi T merupakan transformasi?

Jawaban Contoh Soal 2.2:

Untuk menentukan apakah fungsi T transformasi atau bukan, ditentukan terlebih dahulu syarat-syarat transformasi yaitu surjektif dan injektif.

- Apakah Surjektif ?

  $\underline{A \neq P \neq E}$ $\qquad\qquad$ $\underline{T(A) \neq T(P) \neq T(E)}$

  Bidang V $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Bidang V

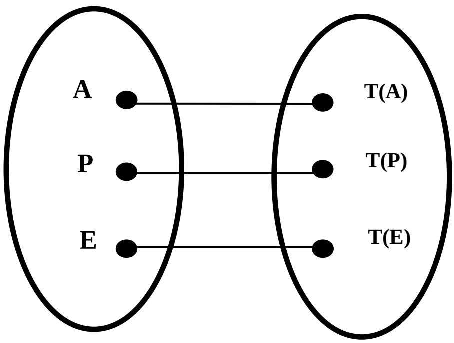
  $\therefore \textit{sehingga fungsi T Surjektif}$

- Apakah Injetktif ?

  Domain $A \rightarrow T(A)$ $\qquad$ $T(A) \neq T(P)$

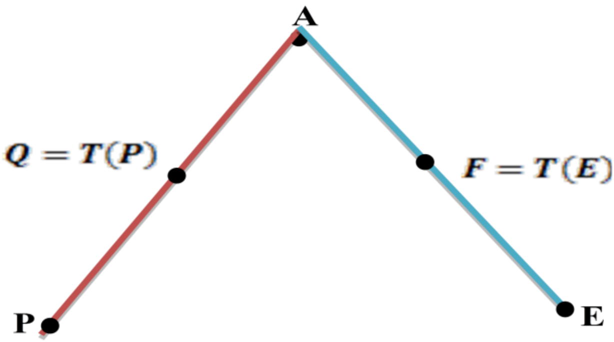
  Domain $P \rightarrow T(P) = Q$ $\quad$ $T(A) \neq T(E)$

  Domain $E \rightarrow T(E) = F$ $\quad$ $T(A) \neq T(p) \neq T(E)$



$\textit{sehingga Fungsi T injektif}$

$\therefore \textit{Kesimpulan : T adalah Transformasi}$



Gambar 2.4 Sketsa Grafik Contoh Soal 2.2

2. Rangkuman

Transformasi geometri adalah proses mengubah setiap titik koordinat menjadi titik koordinat lain pada bidang tertentu. Transformasi tidak hanya terhadap titik tetapi bisa juga dilakukan pada kumpulan titik yang membentuk bidang/bangun tertentu.

Pemetaan pada bangun geometri disebut sebagai transformasi geometri. Suatu fungsi pada bidang V adalah suatu padanan yang mengaitkan setiap anggota V dengan satu anggota V

Suatu transformasi bidang V (bidang Euclid) adalah fungsi bijektif dengan daerah asal(domain) di V dan daerah hasil(kodomain) di V juga.

3. Latihan Soal Transformasi

Kerjakan soal berikut dengan benar dan tepat:

1) Diketahui sebuah fungsi g: sumbu x pada bidang v yang didefinisikan sebagai berikut: Apabila $P(x, 0)$ maka $g(P) = (x, x^2)$.
   a) Tentukan peta dari titik K(2,0) oleh g?
   b) Apakah L(13, 169) merupakan daerah hasil g ?
   c) Gambarkan daerah nilai g?
2) Misalkan V bidang *euclides* dan A sebuah titik tertentu pada V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut : T (P) = A, P = A, P $\neq$ A. Apakah relasi T merupakan fungsi?
3) Jika $P \in v, P \neq A, T\ (P) = Q$, merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$. Apakah relasi T merupakan fungsi?
4) T : $V \rightarrow V$, didefinisikan sebagai berikut: Apabila P(x,y) maka
   i) T(P) = (x + 1, y), untuk x $\geq$ 0
   ii) T(P) = (x - 1, y), untuk x $<$ 0
   a) Tentukan apakah T injektif?

b) Apakah T suatu transformasi?

5) Diketahui tiga titik A, R, S yang berlainan dan tidak segaris. Ada padanan T yang didefinisikan sebagai berikut: $T(A) = A$, $T(P) = P'$ sehingga P titik tengah $\overline{AP}$.

   a) Lukislah $R' = T(R)$!

   b) Lukislah Z sehingga $T(Z) = S$

   c) Apakah T suatu transformasi?

6) Diketahui koordinat titik $P = (0,0)$

   $A_1 = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 = 9\}$

   $A_2 = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 = 25\}$

   T : $A_1 \rightarrow A_2$ adalah suatu padanan yang definisikan sebagai berikut :

   Apabila $X \in A_1$ maka $T(X) = X' = \overleftrightarrow{PX} \cap A_2$

   a) Apabila B = (-1,0) tentukan T(B)

   b) Tentukan prapeta dari C(4,3)

   c) Apabila Z sebarang titik pada daerah asal T, tentukan jarak ZZ', dengan Z' = T(Z).

   d) Apabila E dan F dua titik pada daerah asal T, apakah dapat dikatakan tentang jarak E'F'?

7) Garis k dan ℓ tidak sejajar $A \notin k, A \notin \ell$. Buktikan bahwa X dan Y satu-satunya pasangan yang memenuhi persyaratan

8) Dua garis g dan h tidak sejajar. A sebuah titik yang tidak terletak pada g dan h. tentukan semua titik X dan semua titik Y pada h sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{XY}$. $A \notin g, A \notin h$. Tentukan semua $x \in g, y \in h \ni A$ titik tengah $\overline{XY}$

9) Diketahui sebuah titik K dan ruas garis $\overline{AB}$, $K \notin \overline{AB}$ dan sebuah garis g sehingga g // $\overleftrightarrow{AB}$ dan jarak K dan $\overleftrightarrow{AB}$, adalah dua kali lebih panjang dari pada jarak antara K dan g. Ada padanan T dengan daerah asal $\overline{AB}$ dan daerah nilai g sehingga apabila $P \in \overline{AB}$ maka $T(P) = P' = \overleftrightarrow{KP} \cap g$.
   a) Apakah bentuk himpunan peta-peta P' kalau P bergerak pada $\overline{AB}$
   b) Buktikan bahwa T injektif.

10) Diketahui f: v $\to$ v, jika P(x, y), maka f(P) $= (|x|, |y|)$
   a) Tentukan $f(A)$ Jika $A = (-3,6)$!
   b) Tentukan semua prapeta dari titik $B(4,2)$!
   c) Apakah bentuk daerah nilai f?

d) Apakah f suatu transformasi?

BAB III ISOMETRI

A. Deskripsi Materi

Isometri merupakan suatu transformasi atas refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan translasi (pergeseran) pada sebuah garis yang mempertahankan jarak.

Suatu isometri memiliki sifat-sifat sebagai berikut: (1) Memetakan garis menjadi garis, (2) Mempertahankan ukuran besarnya sudut antara dua garis, dan (3) Mempertahankan kesejajaran dua garis.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami dan membuktikan mana yang termasuk isometri dan yang bukan serta membuktikan sifat-sifat isometri. Ini sebagai bekal bagi mahasiswa dalam mempelajari materi refleksi, translasi dan rotasi sehingga dalam mempelahari isometri mahasiswa akan lebih mudah dalam memahami tiga materi tersebut. Namun sebelum mempelajari materi tentang isometri, mahasiswa harus menguasai materi tentang syarat sebuah transformasi.

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

1. S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
2. PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
3. KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
4. KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

D. Materi Pelajaran

1. Pengertian Isometri

Bahasan mengenai isometri, merupakan suatu transformasi atas pencerminan (refleksi), pergeseran (translasi) dan perputaran (rotasi). Dalam kamus Bahasa isometri diartikan sebagai kata sifat yang berkenaan dengan atau memiliki ukuran yang sama dengan lainnya. **Isometri** merupakan *suatu transformasi yang mengawetkan/mempertahankan jarak.*

Secara matematis dapat ditentukan sebagai: Misalkan $A' = T(A)$ dan $B' = T(B)$, maka T dikatakan suatu isometri jika dan hanya jika $|AB| = |A'B'|$

Contoh Soal 3.1

T adalah sebuah transformasi yang ditentukan oleh $T(P) = (x - 5, y + 3)$ untuk semua titik $P(x, y) \in u$. Selidiki apakah T suatu isometri?

Pembahasan Contoh Soal 3.1

Tabel 2.1 Koordinat benda dan bayangan

Benda	Bayangan
$A(1,0)$	$A'(-4,3)$
$B(0,1)$	$B'(-5,4)$

Syarat isometri.

$$|AB| = |A'B'|$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2}$$

$$\sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{(-5 + 4)^2 + (4 - 3)^2}$$

$$\sqrt{1 + 1} = \sqrt{1 + 1}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Maka $T(P)$ adalah isometri.

2. Sifat-Sifat Isometri

Suatu isometri pada dasarnya memiliki tiga sifat yaitu: 1) memetakan garis ke garis, 2) memetakan besar sudut antara dua garis, dan 3) mengawetkan kesejajaran dua garis. Sifat-sifat tersebut yang akan dijabarkan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1

Bayangan (peta) suatu garis pada suatu isometri adalah sebuah garis. Bila T suatu isometri dan s suatu garis, maka $s' = T(s)$ *adalah suatu garis.*

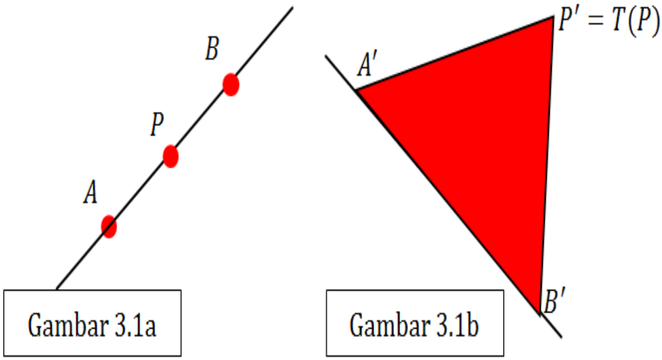
Pembuktian Teorema 3.1:

Terdapat sebuah garis s, maka akan dibuktikan bahwa bayangan/petanya adalah sebuah garis. Misal garis t adalah bayangan (peta) dari $s. s' = t$ untuk membuktikan $s' = t$, tunjukan bahwa setiap titik di s' terletak t, dan begitu pula sebaliknya $(s' \subset t)\ dan\ (t \subset s')$

i) $s' \subset t$

Misal titik-titik di s adalah A dan B maka titik-titik di t adalah A' dan B'. Karena s'adalah himpunan semua bayangan dari titik s, maka dapat dibuktikan bahwa $s' \subset t$

Ambil titik P di s dan akan ditunjukan P' terletak di t. Seperti pada Gambar 3.1. Pada gambar diketahui bahwa $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ dan $T(P) = P'$.



Gambar 3.1 Teorema 3.1

Misal P terletak di antara A dan B, maka:

$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{AB}$ (*Gambar 3.1a*)

Karena s'adalah himpunan semua bayangan dari titik s, maka $\mathrm{P}' = \mathrm{T(P)}$ terletak di s' sehingga

$\mathrm{A'B'} + \mathrm{P'B'} = \mathrm{A'B'} \rightarrow \mathrm{P'}$terletak pada t

Kontradiksi: Jika $\mathrm{P} \notin \mathrm{t}$ maka akan berbentuk segitiga yaitu $\Delta\ \mathrm{A'P'B'}$.

Menurut ketaksamaan Δ berlaku $A'P' + P'B' > A'B'$, sehingga $P \notin s$ adalah salah. (Gambar 3.1b)

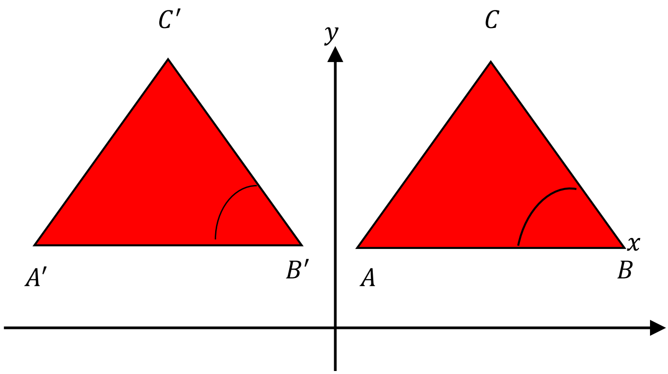
Jadi haruslah $P' \in \underline{t}$. **(Terbukti)**

ii) $t \subset s'$

Tugas 3.1: Diskusikan dengan temanmu untuk membuktikan $t \subset s'$ dengan cara pembuktian dari kanan ke kiri. Lakukan seperti pembuktian teorema (i)

Teorema 3.2

Bayangan (peta) suatu sudut oleh suatu isometri mempunyai ukuran sudut yang sama dengan sudut semula.

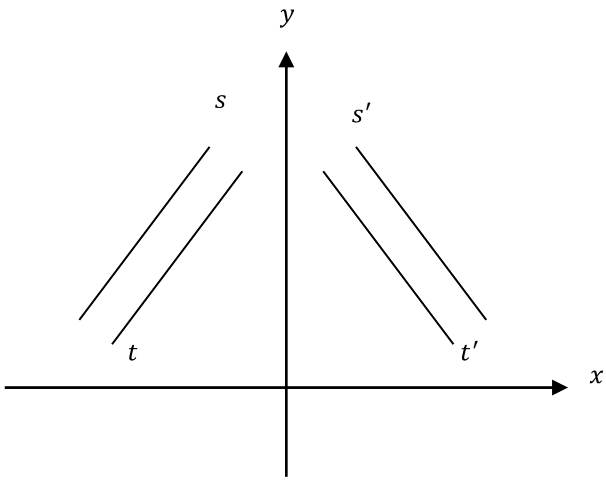


Gambar 3.2 Teorema 3.2

Tugas 3.2 : *Coba diskusikan dengan temanmu untuk membuktikan bahwa* $\angle ABC = \angle A'B'C'$

<u>Teorema 3.3</u>

Bayangan (peta) dua garis oleh suatu isometri adalah sejajar jika dan hanya jika garis-garis semula sejajar.



Gambar 3.3 Teorema 3.3

Bukti : (Gunakan pembuktian kontradiksi)

Andaikan s' berpotongan dengan t' dititik P' maka $T(P) = P'$; sehingga $P' \in g'$ dan $P' \in h'$. $P \in g$ dan $P \in h$ maka pengandaian salah. Sehingga yang benar adalah garis g' sejajar dengan garis h'.

3. Jenis Isometri

Setelah mengetahui pengertian dari isometri dan sifat-sifatnya. Hal lain yang perlu dipelajari mengenai isometri adalah jenis-jenisnya. Terdapat dua jenis isometri yaitu:

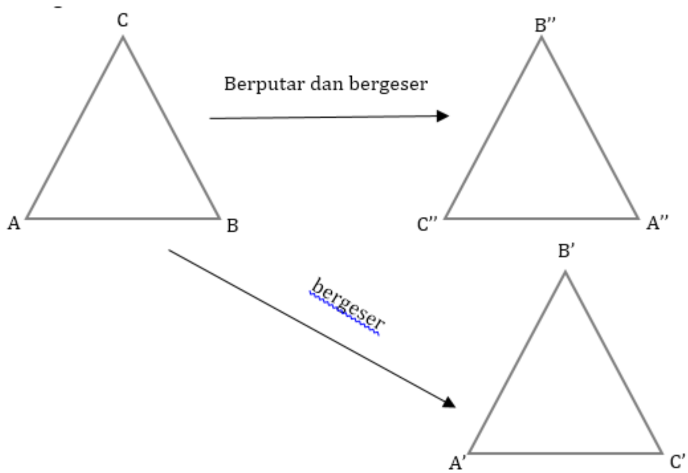
1) Memindahkan bangun geometri langsung dari satu posisi ke posisi lain.
2) Memindahkan suatu bangun dengan memutar bangun tersebut.

Suatu pemetaan dikatakan langsung, jika pemetaan tersebut mengawetkan orientasi; yakni apabila arah gerakan benda sama dengan arah gerakan bayangannya, dan sebaliknya suatu pemetaan disebut berlawanan jika pemetaan itu membalikan orientasi; yakni jika arah gerakan benda berlawanan dengan arah gerakan bayangannya.

Teorema 3.4

Setiap isometri adalah sebuah isometri langsung atau sebuah isometri berlawanan.

Ada dua jenis isometri yaitu 1) yang memindahkan bangun geometri langsung dari satu posisi ke posisi lain dan 2) yang memindahkan suatu bangun dengan memutar bangun tersebut.



Gambar 3.4 Jenis Isometri

4. Rangkuman

Isometri merupakan suatu transformasi atas refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan translasi (pergeseran) pada sebuah garis yang mempertahankan jarak. Misalkan $A' = T(A)$ dan $B' = T(B)$, maka T dikatakan suatu isometric jika $|AB| = |A'B'|$.

5. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar.

1) T adalah sebuah transformasi yang ditentukan oleh $T(P) = (6x + 1, y - 5)$ untuk semua titik

$P(x.y) \in V$. Selidiki apakah T suatu isometri. Apakah sifat tersebut bisa diperluas secara umum?

2) Sebuah transformasi T didefinisikan untuk semua titik $P(x, y)$ sebagai $T(P) = (2x, y - 1)$. Selidiki apakah T suatu isometri?
3) Diketahui titik-titik $A = (1, -1), B = (4,0), C = (-4,1)$ dan $D = (-2, k)$. Apabila T suatu isometri sehingga $T(A) = C$ dan $T(B) = D$. Tentukanlah nilai k?
4) Diketahui titik $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(4,0)$, $\mathrm{C}(-4,1)$, dan $\mathrm{D}(-2, \mathrm{k})$. Apabila T suatu isometri sehingga $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ dan $\mathrm{T}(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$, tentukan nilai k!
5) Periksalah apakah T suatu isometri yang didefinisikan untuk $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ oleh $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = (6\mathrm{x}, 3\mathrm{y} - 2)$!

REFLEKSI BAB IV

A. Deskripsi Materi

Refleksi merupakan materi ketiga dalam geometri trasformasi. Refleksi atau pencerminan memiliki syarat dan sifat-sifat tersendiri. Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian , sifat-sifat dan matriks refleksi sehingga dapat menyelesaikan soal yang berkaitan dengan refleksi (pencerminan) pada sebuah proses pemecahan masalah.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami dan membuktikan sifat-sifat refleksi. Ini sebagai bekal bagi mahasiswa proses penyelesaian masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan refleksi(pencerminan). Selain itu, materi tentang refleksi merupakan dasar dalam mempelajari setengah putaran dan translasi.

C. Capaian Pembelajaran Matakuliah

1. S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas
   pekerjaan di bidang keahliannya secara

mandiri

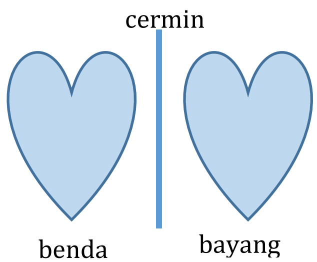
2. PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
3. KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
4. KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
5. KU16 → Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu

D. Materi Pelajaran

1. Pengertian Refleksi

Refleksi (pencerminan) adalah bagian lain dari transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat benda dan

bayangan pada cermin datar.



Suatu refleksi garis S adalah fungsi R_s yang didefinisikan untuk semua titik pada bidang v sebagai berikut:

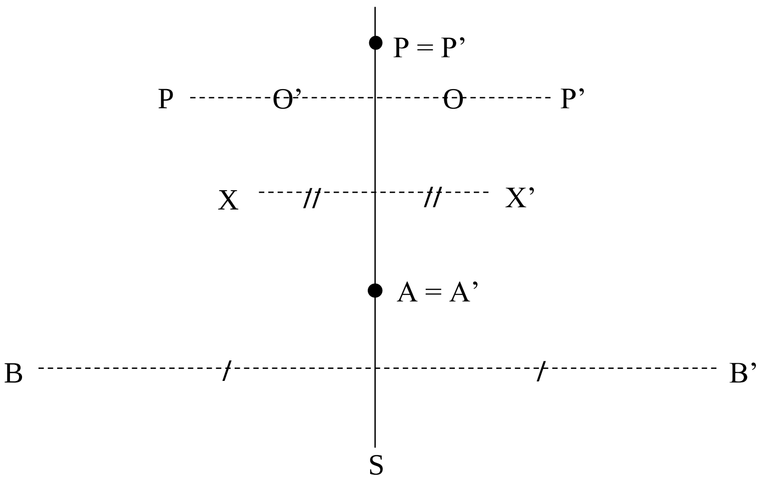
(1) $P \in S, \quad Rs(P) = P'$

(2) $P \notin S, \quad Rs(P) = P'$, sehingga S adalah sumbu ruas $\overline{PP'}$ (Rawuh, 1993)

Dimana R merupakan fungsi refleksi (pencerminan), s adalah cermin, sedangkan P adalah benda dan P' adalah bayangan.

Sifat pada garis adalah mengawetkan jarak. Artinya jarak antara dua benda sama dengan jarak antara dua bayangan. Hal ini disebut ISOMETRI.

Agar mempermudah memahami mengenai refleksi (pencerminan) perhatikan Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1 Refleksi

Perhatikan Gambar 4.1 di atas, diketahui:

R : Fungsi refleksi

S : Cermin

P : Benda

P' : Bayangan

Dapat ditulis: R_s

<u>**Contoh Soal 4.1**</u>

Diketahui: Titik A (2,3)

Garis t = y = 2

Garis s = x + y = 1

Tentukan:

a. Rt (A) = A’
b. Rs(A) = A’’’
c. Rt (S) = S’

<u>**Jawaban Contoh Soal 4.1**</u>

a. Mencari jarak A ke garis S

x + y – 1 = 0 terhadap (2 , 3)

$$d = \left|\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{1\,.\,2 + 1\,.\,3 + (-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{2 + \ 3 + (-1)}{\sqrt{2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

b. Jarak S ke A’’’

$$d = \left|\frac{x + \ y - 1}{\sqrt{2}}\right|, terdapat\ nilai\ (+) dan\ (-)$$

$$2\sqrt{2} = \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} \qquad (+)$$

$$4 = x + y - 1$$

$$x + y = 5 \ldots\ldots (i)$$

$$2\sqrt{2} = -\frac{(x + y - 1)}{\sqrt{2}} \qquad (-)$$

$$4 = -x - y + 1$$

$$-x - y = 3 \ldots\ldots (ii)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = x - 2$$

$$x - y = -1 \ldots\ldots (iii)$$

- Eliminasi persamaan (i) dan (ii)

  $x + y \quad = 5$

  $\underline{-x - y = 3 +}$ (tidak ada hasil)

- Eliminasi persamaan (i) dan (iii)

  $x + y \quad = 5$

  $\underline{x - y \quad = -1 +}$

  $2x \qquad = 4$

  $x \qquad = 2$

  (x , y) = (2 , 3) yang merupakan titik A

$$x + y = 5$$
$$2 + y = 5$$
$$y = 3$$

- Eliminasi persamaan (ii) dan (iii)

  $-x - y \quad = 3$

  $\underline{x - y \quad = -1 +}$

  $-2y \qquad = 2$

  $y \qquad = -1$

  (x , y) = (-2 , -1) yang merupakan titik A'''

  $x - y = -1$

  $x - (-1) = -1$

  $x = -2$

  Cara Lain: dengan menggunakan titik tengah

$$x = \frac{x_A + x_{A'''}}{2}$$

$$0 = \frac{2 + x_{A'''}}{2}$$

$$0 = 2 + x_{A'''}$$

$$x_{A'''} = -2$$

$$y = \frac{y_A + y_{A'''}}{2}$$

$$1 = \frac{3 + y_{A'''}}{2}$$

$$2 = 3 + y_{A'''}$$

$$y_{A'''} = -1$$

(x , y) = (-2 , -1) yang merupakan titik A'''

c. Persamaan garis melalui (1 , 4)

x + y = 1

m = $-\frac{A}{B} = -1$

tegak lurus : $m_1 \times m_2 = -1$

$$-1 \times m_2 = -1$$

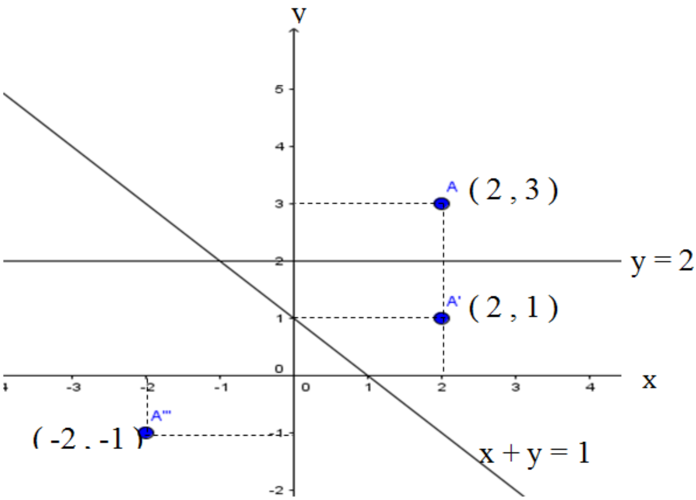
$$m_2 = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 1(x - 1)$$

$$x - y = -3$$

$$x - y + 3 = 0$$



Gambar 4.2 Jawaban Contoh Soal 4.1

Tugas 4.1: Coba anda buktikan sifat-sifat berikut ini:

i. Sebuah titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = k$, maka bayangan titik tersebut atau P' adalah $P'(2k - x, y)$

ii. Sebuah titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = k$, maka bayangan titik tersebut atau P' adalah $P'(x, 2k - y)$

iii. Sebuah titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka bayangan titik tersebut atau P' adalah $P'(y, x)$

iv. Sebuah titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, maka bayangan titik tersebut atau P' adalah $P'(-y, -x)$

Petunjuk: Mulailah dengan mengunakan contoh khusus (titik koordinat tertentu), setelah menemukan pola, barulah gunakan notasi umum yakni $P(x, y)$

2. Rangkuman

Refleksi (pencerminan) adalah salah satu bagian dari transformasi yang memindahkan suatu titik atau bangun dengan menggunakan benda dan bayangan pada cermin datar. Lambang dari refleksi adalah R.

3. Latihan Soal

Selesaikan soal berikut dengan tepat dan benar.

1) Diketahui dua titik A dan B. Lukislah sebuah garis g sehingga $R_g(A) = B$. Tentukan pula $R_g(B)$
2) Diketahui $\underline{\mathrm{n}} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | \mathrm{px} + 2\mathrm{y} - 4 = 0\}$ dan $\mathrm{K}(-3{,}1)$. Carilah p jika $\mathrm{R_n}(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$!

Gambar grafiknya!!

3) Apabila ada V ada sistem sumbu orthogonal (tegak lurus) dan $A(1,3)$ sedangkan $B(-2,-1)$. Tentukanlah sebuah persamaan garis g sehingga $R_g(A) = B$

4) Diketahui $g = \{(x.y) |\ x = -3\}$
   a) Apabila $A(2,1)$ tentukanlah $A' = R_g(A)$
   b) Tentukan C apabila $R_g(C) = (-1,7)$
   c) Apabila $P(x.y)$ sebuah titik sembarang tentukanlah $R_g(P)$

5) Diketahui garis $h = \{(x.y) |\ y = x\}$
   a) Jika $A = (2,-3)$ tentukan $R_h(A)$
   b) Jika $B' = (-3,5)$ tentukan prapeta dari B' oleh R_h
   c) Apabila $P(x.y)$ sebuah titik sembarang tentukanlah $R_h(P) = P'$

6) Diketahui garis $h = \{(x.y) |\ x + y = 0\}$
   a) Jika $A = (2,-3)$ tentukan $R_h(A)$
   b) Jika $B' = (-3,5)$ tentukan prapeta dari B' oleh R_h
   c) Apabila $P(x.y)$ sebuah titik sembarang tentukanlah $R_h(P) = P'$

7) Diketahui garis $g = \{(x. y)|\ x + y = 1\}$

   a) Tentukan $R_g(0)$

   b) Tentukan $R_g(A)$ dengan $A(1,2)$

   c) Jika $P(x, x + 1)$, Tentukan P apabila $R_g(P) = P$

8) Diketahui garis $k = \{(x. y)|\ ax - 3y + 1 = 0\}$ dan sebuah titik $B(3, -1)$. Tentukan a apabila $R_k(B) = B$.

9) Andaikan $h = \{(x, y)|y = 3x\}$. Apabila $A = (4,3)$ tentukan koordinat-koordinat $A' = R_h(A)$

10) Diketahui g sebuah garis dan l sebuah lingkaran. Buktikan bahwa $R_g(l) = l'$ dengan l' sebuah lingkaran pula.

11) Pada V adalah ada sistem sumbu ortogonal X O Y. Ada $g = \{(x, y)|x + y = 1\}$

   a) Jika $A = (1,2)$ tentukan $R_g(A)$

   b) Jika $B = (-2,4)$ tentukanlah C sehingga $R_g(C) = B$. Jika $P = (P_1, P_2)$ tentukanlah $R_g(P)$

KOMPOSISI DAN INVERS TRANSFORMASI

BAB V

A. Deskripsi Materi

Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai transformasi tunggal. Pada bab ini, akan dipelajari komposisi transformasi dan invers transformasi. Komposisi transformasi merupakan transformasi yang diselesaikan dua kali atau lebih secara berurutan. Sedangkan suatu transformasi dikatakan memiliki invers jika perkalian dua transformasi tersebut adalah ***identitasnya*** (I).

B. Relevansi

Jika pada bab sebelumnya penyelesaian soal dilakukan melalui transformasi tunggal, pada bab ini transformasi diselesaikan dengan beberapa tahapan yang berurutan jadi dalam penyelesaian masalahnya dilakukan tahap pertahap. Setelah mempelajari bab ini, sebagai bekal mahasiswa dalam keteraturan dan ketelitian menyelesaikan masalah yang berhubungan komposisi yang biasanya memiliki tingkat kesukaran yang lebih tinggi dibandingkan dengan yang hanya memiliki satu fungsi trasformasi saja.

C. Capaian Pembelajaran Matakuliah

- S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
- PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
- KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
- KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

D. Materi Pelajaran

1. Komposisi Transformasi

Setelah memahami mengenai transformasi tunggal, kini akan dibahas mengenai transformasi yang dalam penyelesaiannya dilakukan dua kali atau lebih secara berurutan. Jadi, komposisi transformasi adalah *menggabungkan beberapa transformasi, sehingga dapat menghasilkan bentuk transformasi yang lebih kompleks atau biasa disebut gabungan transformasi.*

Contoh Soal 5.1

Diketahui dua buah transformasi yaitu R_t dan s dimana garis s sebagai sumbu x dan garis t sebagai sumbu y. Jika $P(x, y)$ adalah suatu titik pada bidang, tentukan apakah $R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$? Dan jika diketahui $S(P) = \left(x, \frac{y}{2}\right)$ maka apakah $R_t S(P) = S R_t(P)$?

1. Apakah $R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$?
2. Apakah $R_t S(P) = S R_t(P)$?
3. Apakah $R_s R_t S(P) = S R_s R_t(P)$? Apakah $S(P)$ isometri?

Pembahasan Contoh Soal 5.1

1. $R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$

   $(x, -y) = (-x, y)$

   $(-x, -y) = (-x, -y)$

   $\therefore$ Terbukti $R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$.

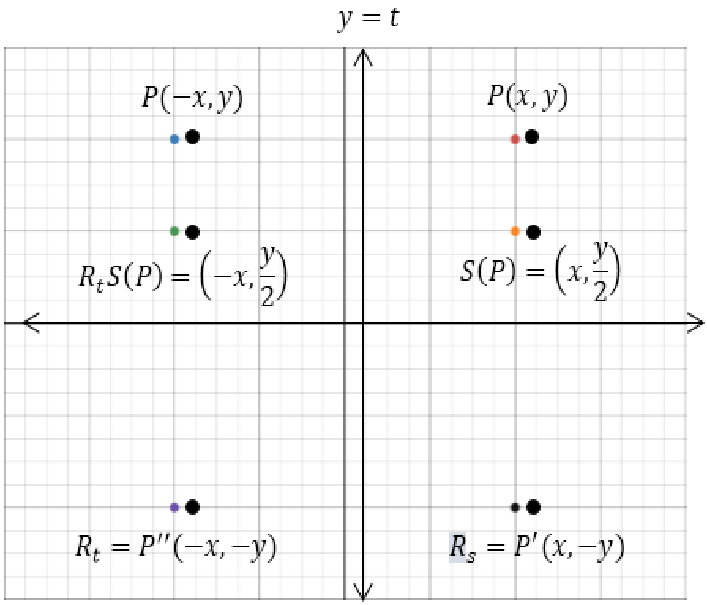
2. $R_t S(P) = S R_t(P)$

   $\left(-x, \frac{y}{2}\right) = S(-x, y)$

$$\left(-x, \frac{y}{2}\right) = \left(-x, \frac{y}{2}\right)$$

$$\therefore Terbukti\ R_t S(P) = SR_t(P)$$

Contoh soal di atas, dapat dibuat sketsa grafik seperti gambar 5.1 berikut:



Gambar 5.1 Jawaban Contoh Soal 5.1

3. $R_s R_t S(P) = SR_s R_t(P)$

$$\left(-x, \frac{y}{2}\right) = (-x, y)$$

$$\left(-x, -\frac{y}{2}\right) = S(-x, -y)$$

$\left(-x, -\frac{y}{2}\right) = \left(-x, -\frac{y}{2}\right)$

$\therefore Terbukti\ R_s R_t S(P) = S R_s R_t (P)$

Pembuktian untuk $S(P)$ *isometri :*

Domain	**Bayangan**
$P(x, y)$	$P'(-x, -y)$
$Q\left(x, \frac{y}{2}\right)$	$Q'\left(-x, -\frac{y}{2}\right)$

Syarat isometri:

$PQ = P'Q'$

$$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(x_{Q'} - x_{P'})^2 + (y_{Q'} - y_{P'})^2}$$

$$\sqrt{(x - x)^2 + \left(\frac{y}{2} - y\right)^2} = \sqrt{(-x - (-x))^2 + \left(-\frac{y}{2} - (-y)\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}y\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}y^2}$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y$$

$\therefore$ Terbukti bahwa S(P) adalah isometri.

Contoh Soal 5.2

Diketahui dua buah transformasi yaitu R_t dan s dimana garis s sebagai sumbu $x = 2$ dan garis t sebagai sumbu y. Jika $P(x, y)$ adalah suatu titik pada bidang, tentukan apakah $R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$?

<u>**Pembahasan Contoh Soal 5.2**</u>

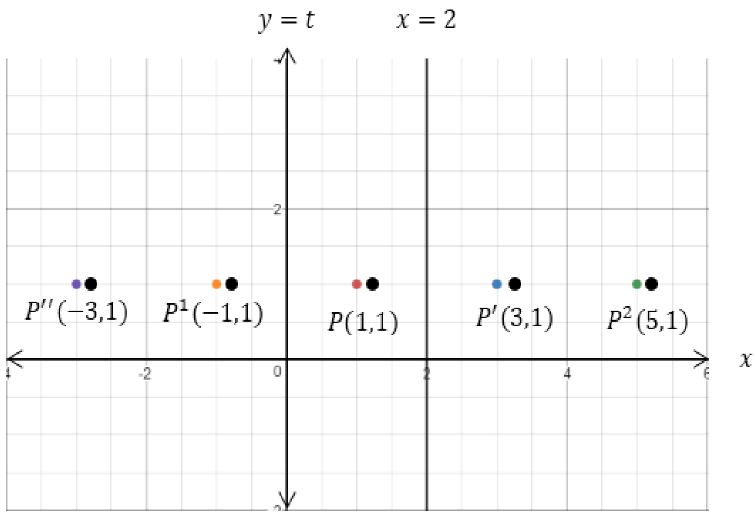
$R_t R_s(P) = R_s R_t(P)$

$(3,1) = (-1,1)$

$(-3,1) \neq (5,1)$

$\therefore$ Tidak Terbukti, dan tidak berlaku untuk garis sejajar

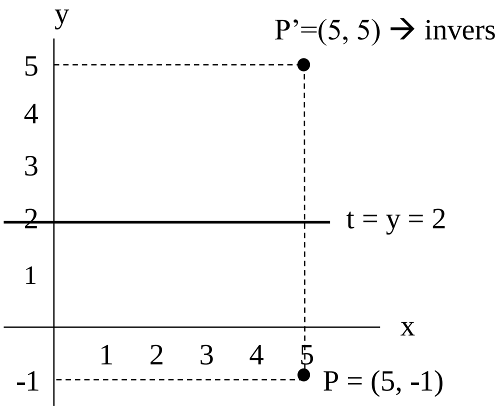
Secara grafik dapat dilihat seperti pada Gambar 5.2 berikut:



Gambar 5.2 Jawaban Contoh Soal 5.3

2. Invers Transformasi

Sebelum membahas lebih jauh mengenai invers transformasi, agar lebih mudah dalam memahami tentang invers perhatikan Gambar 5.3 berikut:



Gambar 5.3 Invers Transformasi

${R_t}^2$ atau $R_t R_t$ = identitas

Identitas dari titik $P = R_t R_t(P) = (5, -1)$ atau $I(P) = (5, -1), \boldsymbol{I(P) = P}$.

- ✓ $R_t I(P) = R_t(P) = (5,5)$
- ✓ $I(P) R_t = I(5,5) = (5,5)$

Jika memiliki nilai yang sama, maka transformasi ini memiliki invers.

Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan yang dimaksud dengan invers transformasi adalah *salah satu cara sederhana untuk mendapatkan koordinat bayangan hasil transformasi atau disebut sebagai balikkan transformasi.*

Transformasi identitas adalah transformasi yang memetakan setiap titik pada dirinya dilambangkan dengan huruf I. Transformasi identitas berperan sebagai bilangan dalam himpunan transformasi-transformasi dengan operasi bilangan perkalian antara transformasi-transformasi.

Contoh Soal 5.3

Perhatikan transformasi F dan G berikut ini untuk setiap titik P(x,y) pada bidang v F(P) = $(x+2\,,\frac{y}{2})$ dan $G(P) = (x-2\,,2y\,)$. Apakah FG = GF = I ?

Pembahasan Contoh Soal 5.3.

Misalkan titik P (-1,3)

FG(P) = F (-1-2 , 2(3))

= F (-3 , 6)

= (-3+2 , $\frac{6}{2}$)

= (-1,3)

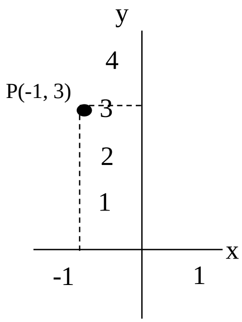
GF(P) = F (-1+2 , $\frac{3}{2}$)

= F (1 , $\frac{3}{2}$)

= (1-2 , 2($\frac{3}{2}$))

= (-1 , 3)

FG = GF = I (terbukti)



Teorema 5.1

Suatu transformasi yang inversnya adalah transformasi itu sendiri dinamakan Involusi.

Pembuktian Teorema 5.1

Andaikan T dan S transformasi maka masing-masing memiliki balikan, yaitu T^{-1} dan S^{-1}. Komposisi transformasi yaitu T o S adalah juga suatu transformasi. Jadi terdapat balikan $(ToS)^{-1}$.

Contoh Soal 5.4

Misalkan t adalah sumbu x dan z adalah persamaan garis $y = x$

a. Tentukan titik D, sedemikian hingga $R_t R_z(D) = (2,7)$

b. $\left(R_z R_t R_z(D)\right)^{-1} = R_z R_t R_z(D)$

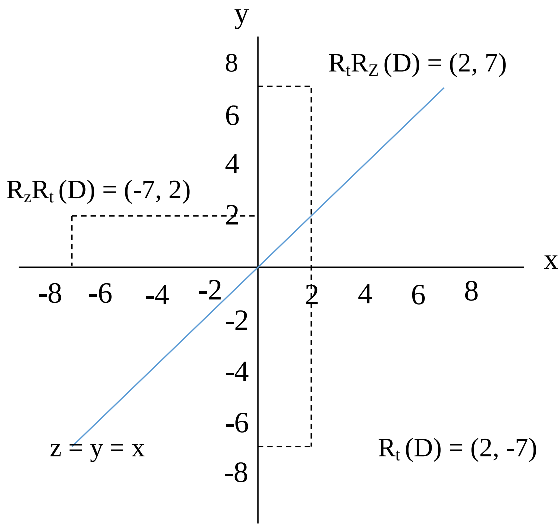
c. Jika t = y = 5, dan $R_z R_t(D) = (7,1)$. Tentukan titik D

d. Jika ada garis s = x = 1 dan $R_s R_t R_z(D) = (3,2)$. Tentukan titik D (t = x)

Pembahasan Contoh Soal 5.4

a. $(R_t R_z(D))^{-1} = R_t R_z(2,7)$

$R_t R_z(2,7) = (-7,2)$ →Titik D = (-7, 2)



Gambar 5.4 Jawaban Contoh Soal 5.4 No. 1a

b. $\left(R_zR_tR_z(D)\right)^{-1} = R_zR_tR_z(D)$

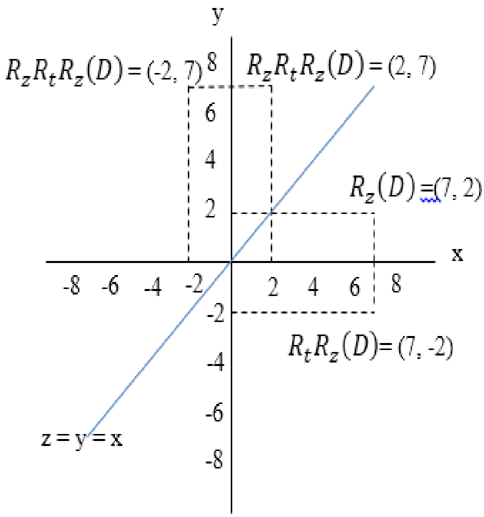
$R_zR_tR_z(D) \rightarrow (2,7)$

$R_z(D) = (7,2)$

$R_tR_z(D) = (7\ ,\text{-}2)$

$R_zR_tR_z(D) = (\text{-}2\ ,7)$

Titik D = (-2 , 7)



Gambar 5.5 Jawaban Contoh Soal 5.4 No.1b

c. Jika t = y = 5, dan $R_tR_z(D) = (7,-1)$. Tentukan titik D?

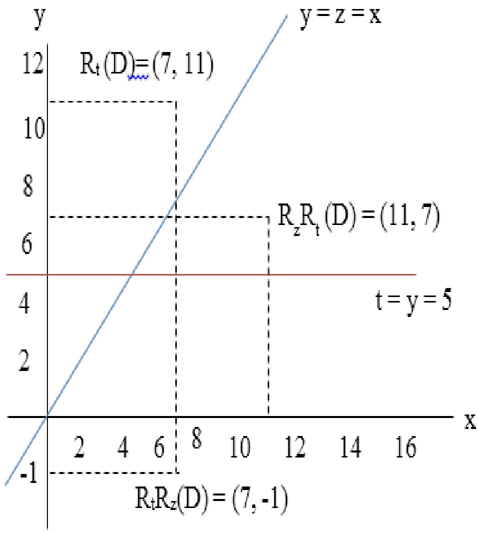
$(\text{RtRz(D)})^{-1} = RzRt(D)$

$= \text{RzRt}(7,-1)$

$= \text{Rz}(7,11)$

$(\text{RtRz(D)})^{-1} = (11,7)$

Titik D = (11,7)



Gambar 5.6 Jawaban Contoh Soal 5.4 No.1c

d. Jika ada garis s = x = 1 dan $R_sR_tR_z(D) = (3,2)$. Tentukan titik D (t = x)

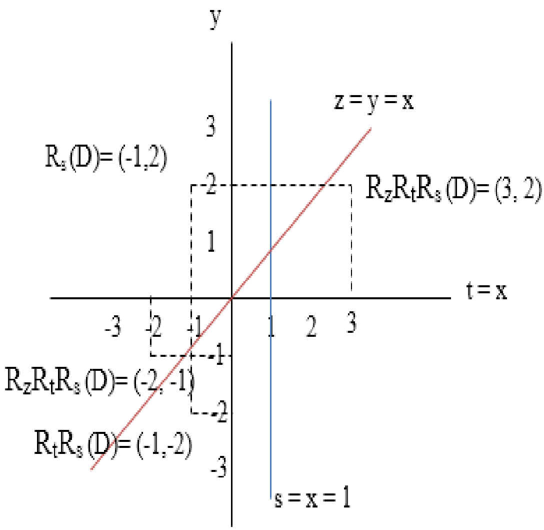
e. $(RsRtRz(D))^{-1} = RzRtRs(D)$

RzRtRs(D) ⟶ (3,2)

Rs(D) = (-1 , 2)

RtRs(D) = (-1 , -2)

RzRtRs (D) = (-2 , 1) → Titik D = (-2 , -1)



Gambar 5.7 Jawaban Contoh Soal 5.4 No.1e

3. Rangkuman

Komposisi Transformasi adalah transformasi yang di gunakan secara berurutan. Suatu transformasi di lanjutkan T1 yang dilanjutkan dengan transformasi T2 di tulis dengan T2 ◦ T1. Sedangkan invers transformasi adalah nilai balikkan dari sebuah transformasi atau dapat digunakan sebagai salah satu cara sederhana untuk mendapatkan koordinat bayangan hasil transformasi atau disebut sebagai balikkan transformasi suatu trasformasi yang memiliki nilai yang sama, maka transformasi ini memiliki invers.

4. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar.

1) Jika garis $\underline{s}$ adalah sumbu x dan $\underline{t}$ adalah sumbu y dan berpotongan di titik A, buktikan bahwa $\mathrm{M_t M_s(B) = A}$ jika dan hanya jika $\mathrm{A = B}$
2) Jika $\underline{s}$ adalah sumbu y dan $\underline{t} = \{(x,y)|y = -x\}$, tentukan:
   a) Persamaan garis $R_s R_t(\underline{s})$
   b) $R_t R_s(P)$ jika $P(2,3)$
3) Diketahui jika $\underline{k} = \{(x,y)|y = 0\}$, $\underline{n} = \{(x,y)|x = 3\}$ dan S adalah transformasi yang didefinisikan jika $R \in \underline{k}$, maka $S(R) = R$. Jika $R \notin \underline{k}$ maka $S(R)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari R ke $\underline{k}$. Jika $P(-2,3)$ dan $R(x,y)$,
   a) Tentukan koordinat $R_n R_k S(P)$!
   b) Tentukan koordinat $R_k R_n S(P)$!
4) Andaikan s adalah sumbu y, $r = \{(x,y)|y = -x\}, S$ adalah transformasi yang didefinisikan sebagai berikut :

   Jika $P \in s$, maka $S(P) = P$. Jika $P \notin s$, maka $S(P)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari P ke s.

Jika $P(x, y)$ sembarang titik, tentukan koordinat $SR_s(P)$! Dan selidiki apakah $SR_s(P) = R_sS(P)$?

5) Diketahui: $g = \{(x, y)|y = 0\}$ dan $h\{(x, y)|y = x\}$. S transformasi sesuai dengan definisi. $A(2, -8)$ dan $P(x, y)$. Tentukan $R_hR_gS(A)$!

6) Misalkan s adalah sumbu y, $t = \{(x, y)|x = 1\}$ dan u adalah persamaan garis $y = x$. Tentukan titik B sedemikian sehingga $R_sR_tR_u(B) = (5,6)$!

7) Jika s suatu garis, W_s suatu transformasi yang didefinisikan untuk semua titik C berlaku:
   i) Jika $C \in s$, maka $W_s(C) = C$
   ii) Jika $C \notin s$, maka $W_s(C)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari`titik C ke s

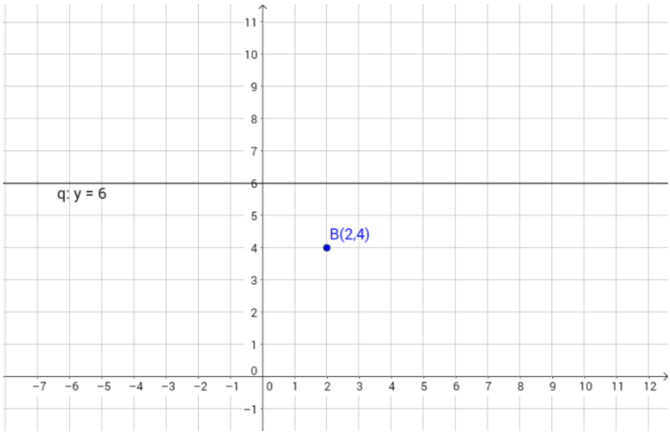
   Jika $s = \{(x, y)|x = 2\}$. Tentukan koordinat $W_s(C)$ untuk $C(4,2)$!

8) Jika s suatu garis, W_s suatu transformasi yang didefinisikan untuk semua titik C berlaku:
   i) Jika $C \in s$, maka $W_s(C) = C$
   ii) Jika $C \notin s$, maka $W_s(C)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari titik C ke s

Jika s adalah sumbu y dan $t = \{(x, y)|x = 2\}$. Tentukan titik C sedemikian sehingga $R_s R_t(C) = (10,2)$!

9) Misalkan t adalah sumbu y dan s adalah persamaan garis $y = -x$. Tentukan titik A sedemikian hingga $R_s R_t(A) = (3,4)$!

10) Perhatikan koordinat kartesius di bawah ini.



Tentukan invers dari B!

BAB VI SETENGAH PUTARAN

A. Deskripsi Materi

Suatu pencerminan pada pada sebuah garis adalah sebuah involusi. Sebuah involusi adalah setengah putaran mengelililngi sebuah titik, sehingga dapat dikatakan bahwa setengah putaran mencerminkan setiap titik bidang pada sebuah titik tertentu. Jika sebelumnya telah dipelajari mengenai refleksi (pencerminan), maka materi inimerupakan pencerminan dari dua buah komposisi dimana yang menjadi cerminnya (garis cerminnya) saling tegak lurus. Jadi, setengah putaran juga disebut sebagai pencerminan (refleksi) pada suatu titik.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami setengah putaran. Setengah putaran yang merupakan refleksi (pencerminan) terhadap sebuah titik. Dengan mempelajari materi ini bererti mahasiswa memiliki bekal yang baik untuk memahami traslasi (perpindahan). .

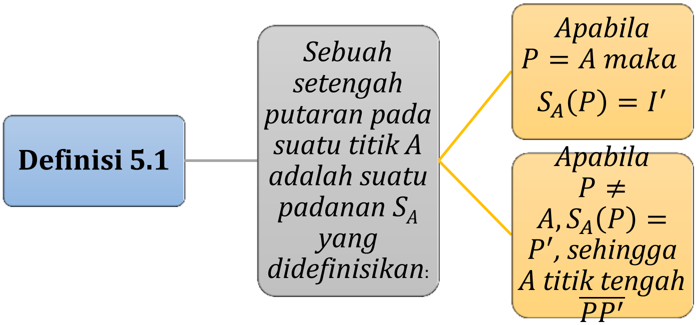
C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

- S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
- PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
- KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
- KU2 → Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu.

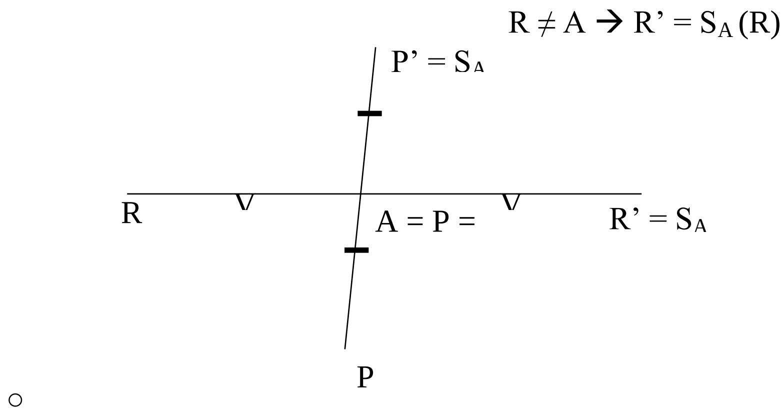
D. Materi Pelajaran

1. Pengertian Setengah putaran

Pencerminan (refleksi) terhadap sebuah titik disebut sebagai setengah putaran. Dari Definisi 5.1 telah dijelaskan mengenai setengah putaran dengan lambang **S_A(P)** dimana S merupakan lambang setengah putaran, A adalah titik putarnya, dan P adalah titik yang akan di transformasi.



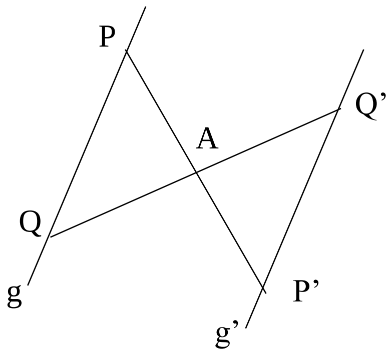
Agar lebih mudah dipahami, dapat dibuat grafik seperti gambar 5.1 berikut:



Gambar 6.1 Setengah Putaran

Dari Gambar 6.1 di atas, titik R yang di setengah putaran pada titik A yaitu R' dengan lambang R' = S_A(R). Titik P di setengah putaran pada titik A adalah P' dapat ditulis P' = S_A(P). Sedangkan untuk untuk titik R = titik A yang disetengah putaran terhadap titik A maka hasilnya adalah titik R itu sendiri.

Gambar 6.1 merupakan contoh setengah putaran dari sebuah titik. Sedangkan untuk garis, seperti pada Gambar 6.2 berikut:



Gambar 6.2 Setengah Putaran Garis

Misalkan akan dibuat setengah putaran garis g terhadap titik A. *Langkah 1,* ambil dua buah titik pada garis g yaitu titik P dan Q. *Langkah 2,* lakukan setengah putaran titik P dan titik Q terhadap titik A didapat: $S_A(P) = P'$ dan $S_A(Q) = Q'$. Langkah 3, hubungkan titik P' dan titik Q' didapatkah garis g' yang merupakan hasil setengah putaran garis g terhadap titik A yang ditulis: $S_A(g) = g'$.

2. Sifat-sifat Setengah Putaran

Setelah memahami mengenai pengertian dari setengah putaran, kemudian akan dibahas tentang sifat-sifat setangah putaran. Perhatikan setiap teorema-teorema berikut:

Teorema 6.1

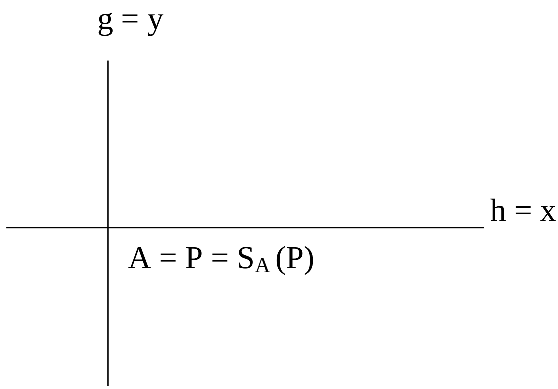
Jika A adalah titik dan $g \perp h$ *berpotongan di A, maka* $S_A = R_g R_h$.

Pembuktian Teorema 6.1:

Berdasarkan definisi 1 tentang setengah putaran bahwa:

Kasus 1: Jika $P = A$ maka $S_A(P) = P$

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 6.3 Sketsa Teorema 6.1

Dari Gambar 6.3 diketahui bahwa garis h merupakan sumbu x dan garis g merupakan sumbu y, dimana kedua garis tersebut saling tegak lurus. Jika A merupakan titik potong garis h dan garis g. Jika titik P=A dilakukan pencerminan (refleksi) terhadap titik P dengan cerminan garis h dan g maka hasil dari dua kali pencerminan tersebut adalah titik P itu sendiri, sehingga dapat dituliskan:

$$R_g R_h(P) = R_g(P) = P$$

Sedangkan jika titik P disetengah putarankan dengan pusat A makan hasil dari setengah putarannya adalah P itu sendiri juga (*berdasarkan definisi setengah putaran*). Maka:

$$\underbrace{R_g R_h(P) = R_g(P) = P = S_A(P)}_{R_g R_h(P) = S_A(P)}$$

Kasus 2: Jika $P \neq A$

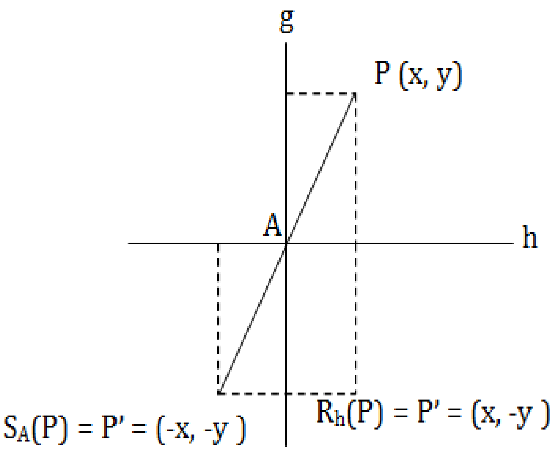
Perhatikan gambar beriku Gambar 6.4

Dari Gambar 6.4 dapat diketahui bahwa:

$R_g R_h(P) = R_g(P') = P''$

$R_g R_h(x, y) = R_g(x, -y) = (-x, -y)$……………..1)

$S_A(P) = (-x, -y)$………………………2)



Gambar 6.4 Sketsa Teorema 6.1 kasus 2

Dari (1) dan (2) di dapat bahwa $S_A(P) = R_g R_h(P)$ untuk $P \neq A$. Dari kasus 1 dan kasus 2 maka terbukti bahwa $S_A = R_g R_h$

Teorema 6.2

Jika $g \perp h$ *maka* $R_g R_h = R_h R_g$.

Pembuktian Teorema 6.2

Berdasarkan teorema 5.1 didapat bahwa $S_A = R_g R_h$, sama seperti pembuktian teorema 5.1 didapat dua kasus yaitu:

Kasus 1, $P = A$

$R_g R_h(P) = R_g R_h(A) = A$......................1)

$$R_h R_g(P) = R_h R_g(A) = A \text{......................} 2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat bahwa:

$R_g R_h(P) = R_h R_g(P)$

Kasus 2, Jika $P \neq A$

$$R_g R_h(P) = R_g[P'(-x, y)]$$
$$= P''(-x, -y)$$
$$R_h R_g(P) = R_h[P'''(x, -y)]$$
$$= P''(-x, -y)$$

Jadi, $R_g R_h(P) = R_h R_g(P)$

Berdasarkan kasus 1 dan kasus 2 dapat disimpulkan bahwa $R_g R_h = R_h R_g$ syarat $g \perp h$.

Teorema 6.3

Jika SA adalah setengah putaran, maka $S^{-1}(A) = S(A)$.

Pembuktian Teorema 6.3

- ✓ Definisi 1

$$S_A = S_A^{-1}$$
$$R_g R_h(A) = R_h R(A)$$
$$R_g(A) = R_h(A)$$
$$P = P$$

$$\therefore S_A^{-1} = S_A = P$$

- ✓ Teorema 5.1

$$S_A = R_g R_h$$

$$S_A^{-1} = \left(R_g R_h\right)^{-1}$$

$$S_A^{-1} = R_h R_g = R_g R_h$$

$$S_A^{-1} = S_A$$

Teorema 6.4

$Jika\, A = (a, b)\ dan\, P(x, y)\ maka\, S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$

Pembuktian Teorema 6.4

$$A = P$$

$$(a, b) = (x, y)$$

$$S_A(A) = A = (a, b)$$

$$(a, b) = [(2a - a), (2b - b)]$$

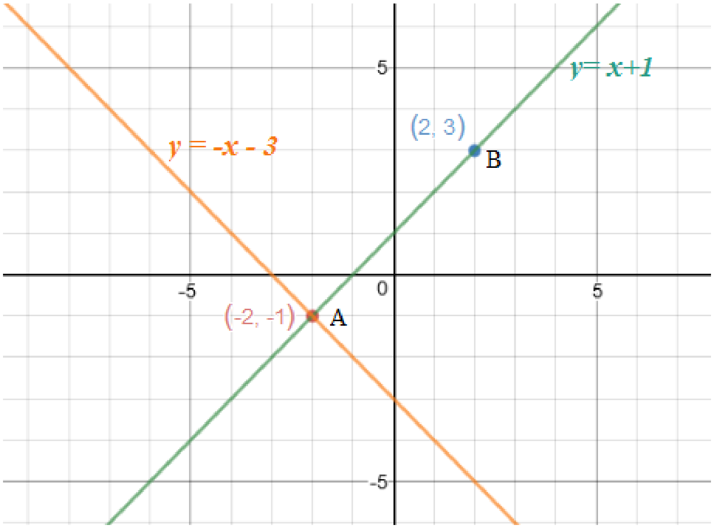
$$(a, b) = (2a - x, 2b - y)$$

$$\therefore\ S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$$

Contoh Soal 6.1

Jika $A(-2, -1)$ dan $B(2\ , 3)$ tentukan persamaan garis s dan t sehingga $R_s(B) = B$ dan $S_A = R_s R_t$!

Pembahasan Contoh Soal 6.1



Gambar 6.5 Grafik Contoh Soal 6.1

Persamaan garis s

$A(-2,-1)$ dan $B(2\,,3)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-(-1)}{3-(-1)}=\frac{x-(-2)}{2-(-2)}$$

$$\frac{y+1}{4}=\frac{x+2}{4}$$

$$4(y+1)=4(x+2)$$

$$4y+4=4x+8$$

$$4y = 4x + 4$$

$$y = x + 1$$

Mencari gradien

$y = x + 1$

$m_1 = 1$

Karena tegak lurus, maka

$m_1 . m_2 = -1$

$1 . m_2 = -1$

$m_2 = -1$

Mencari persamaan garis t

$A(-2, -1)$ dan $m_2 = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -1(x - (-2))$$

$$y + 1 = -1(x + 2)$$

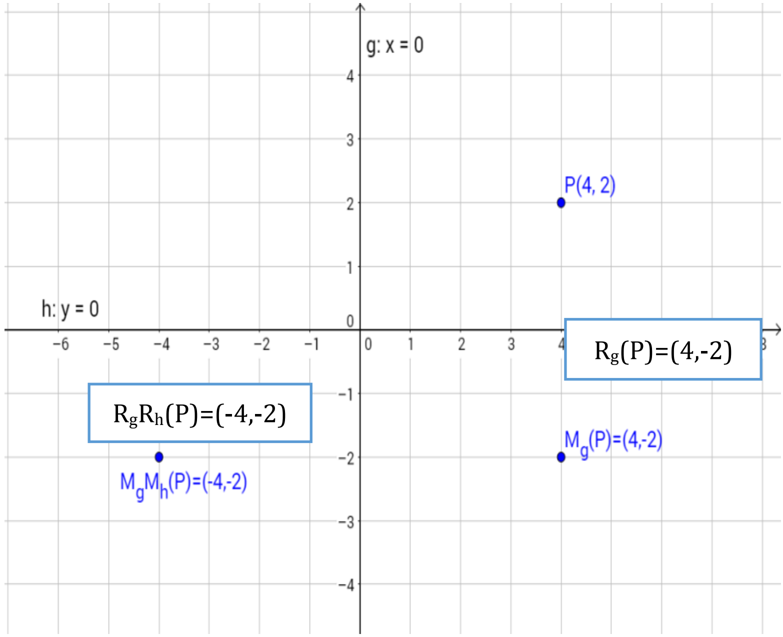
$$y + 1 = -x - 2$$

$$x + y = -3$$

<u>Contoh Soal 6.2</u>

Jika sebuah garis g adalah sumbu y dan garis h adalah sumbu x dan titik A adalah titik pusat dan P(4, 2). Tentukan $S_A(P)$!

<u>Pembahasan Contoh Soal 6.1</u>



Gambar 6.6 Grafik Contoh Soal 6.2

$$S_A(P) = R_g R_h(P) = R_g R_h(4,2) = R_g(4,-2) = (-4,-2)$$

3. Rangkuman

Setengah putaran merupakan pencerminan (refleksi) terhadap sebuah titik. Dilambangkan dengan $S_A(P) = P'$ yaitu Setengah putaran titik P terhadap titik A. Dimana S=setengah putaran, A=pusat putaran, P=prapeta dan P'=peta. Secara matematis dapat ditulis:

$S_A(P)=P'=S_{(a,b)}(x,y)=(2a-x,2b-y)$

4. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan jelas!

1) Diketahui $P(3,2)$ dan $Q(-6,4)$. Bagaimana persamaan garis g dan h sehingga $R_g(Q) = Q$ dan $S_P = R_gR_h$?
2) Jika $B = (1,3)$, tentukan:
   a) $S_B(D)$ apabila $D(-3,4)$
   b) E apabila $S_B(E) = (-2,5)$
3) Jika sebuah garis g adalah sumbu y dan garis h adalah sumbu x dan titik A adalah titik pusat dan P$(-6,5)$, tentukan $\mathrm{S_A}^{-1}(\mathrm{P})$!
4) Jika $\mathrm{D} = (0,-3)$ dan $\mathrm{B} = (2,6)$, tentukanlah :
   a) $\mathrm{S_D S_B(B)}$
   b) $\mathrm{S_D S_B(K)}$ jika $\mathrm{K}(-1,4)$
   c) $\mathrm{S_B S_D(K)}$
5) Diketahui $A(-3\,,1)$, $B(4\,,3)$, dan $C(-4\,,-4)$ tentukan $S_BS_A(c)$! Buatlah gambarnya!

6) Diketahui $A(-4,2)$, $B(5,1)$, dan $C(3,0)$. Tentukan $S_B S_A(C)$!

7) Tentukan persamaan garis s dan t jika F(0,4) dan $G(3,2)$ sehingga $R_s(G) = G$ dan $S_F = R_s R_t$

8) Diketahui $P(0,0)$ dan $Q(1,-4)$. Hitung k jika $S_P S_K(k) = (2,6)$!

TRANSLASI BAB VII

A. Deskripsi Materi

Pergeseran atau translasi merupakan salah satu bagian dari transformasi (perpindahan). Pada bab ini akan dibahas mengenai pengertian dan teorema-teorema dari sebuah translasi(pergeseran). Selain itu, akan dibahas pula soal yang kaitannya dengan translasi.

B. Relevansi

Pada bab setengah putaran dijelaskan bahwa setengah putaran dapat ditulis sebagai hasil kali dua pencerminan pada dua buah garis yang saling tegak lurus. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa tidak hanya dapat melakukan hasil kali pencerminan (refleksi) pada garis yang saling tegak lurus, tapi juga pada dua garis yang sejajar.

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

1. S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri

2. PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
3. KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
4. KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
5. KU16 → Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu

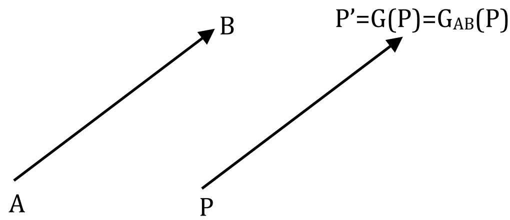
D. Materi Pelajaran

1. Pengertian Translasi (Pergeseran)

Translasi atau yang dikenal dengan istilah pergeseran adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan jarak dan arah yang tetap.

Translasi juga disebut dengan Transformasi yang bersifat Isometri. Secara matematis, translasi dapat didefinisikan sebagai berikut:

Suatu fungsi G (geseran) apabila a ada ruas garis berarah AB sedemikian sehingga untuk setiap titik P berlaku $G(P) = P'$ *dan* $\overline{PP'} = \overline{AB_1} = G_{AB}$.



Gambar 7.1 Translasi

Teorema 7.1

Garis g dan garis h merupakan dua garis yang sejajar. Apabila ada dua titik A dan titik B adalah $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$ dengan $A'' = R_h R_g(A)$ dan $B'' = R_h R_g(B)$.

Pembuktian Teorema 7.1

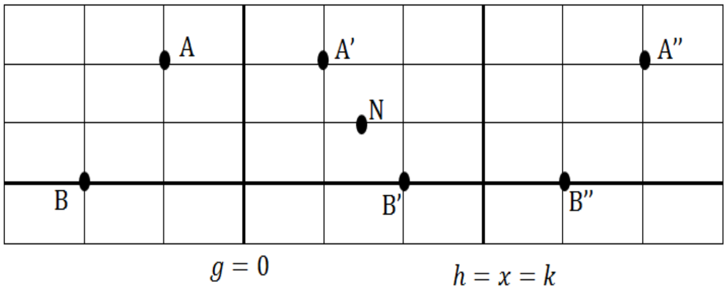
Misalkan:

$R_h R_g(A) = R_h(A') = A''$

$R_h R_g(B) = R_h(B') = B''$

Akan dibuktikan bahwa $\overline{AA''} = \overline{BB''}$

Perhatikan Gambar 7.1 berikut:



Gambar 7.2 Teorema 7.1

Dari Gambar 7.1 diketahui bahwa N adalah titik tengah $\overline{A''B}$, berarti harus dibuktikan N adalah titik tengah $\overline{AB''}$, apabila $P(x, y)$ dan $P' = (R_h(P)) = P' = (2k - x, y)$.

PP'memotong di h, misalkan $\mathrm{Q} = \left(\frac{2\mathrm{k} - \mathrm{x} + \mathrm{x}}{2}, \frac{\mathrm{y} + \mathrm{y}}{2}\right)$

$\mathrm{Q} = (\mathrm{k}, \mathrm{y})$

$P(x, y) \rightarrow R_g(P) = (-x, y)$

Jadi, $R_h R_g(P) = R_h(-x, y) = (2\mathrm{k} - x, y)$

Sehingga:

(i) $A'' = R_h R_g(A)$

$= R_h R_g(a_1, a_2)$

$= (2\mathrm{k} - a_1, a_2)$

(ii) $B'' = R_h R_g(B)$

$= R_h R_g(b_1, b_2)$

$= (2\mathrm{k} - b_1, b_2)$

N merupakan titik tengah $\overline{AB''}$

$$\mathrm{N} = \left(\frac{2\mathrm{k} + b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}\right)$$

Untuk menentukan koordinat $\overline{AA''}$ dengan menggunakan rumus setengah putaran terhadap titik N, ditulis:

$S_N(B) = \overline{AA''}$

$$\overline{AA''} = (2x_N - x_B, 2y_N - x_B)$$

$$= \left(2\left(\frac{2\mathrm{k} + b_1 + a_1}{2}\right) - b_1, 2\left(\frac{b_2 + a_2}{2}\right) - b_2\right)$$

$$= (2k + a_1, a_2\ )$$

Maka $\overline{AA''} = \overline{BB''}$

<u>Contoh Soal 7.1</u>

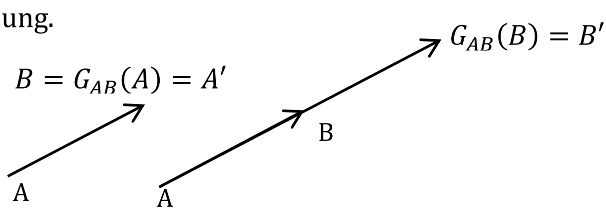
Diketahui titik A, B, dan C tak segaris

b. Lukiskan $G_{AB}(A)$ dan $G_{AB}(B)$

c. Lukiskan $G_{AB}(C)$

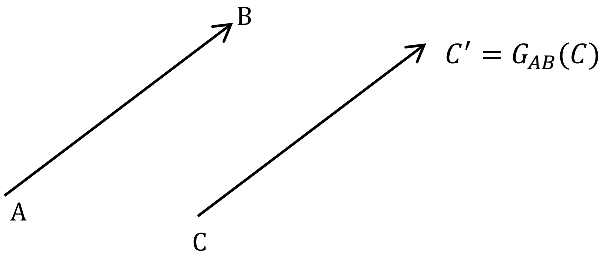
<u>Pembahasan Contoh Soal 7.1</u>

a. Dibuat garis AB dimana A titik pangkal dan B titik ujung.



Gambar 7.3 Contoh Soal 7.1 a

b. Melukis $G_{AB}(C)$



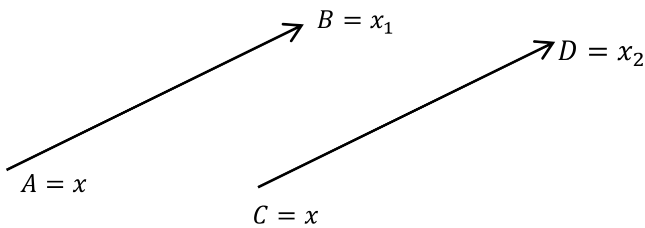
Gambar 7.4 Contoh Soal 7.1 b

<u>Teorema 7.2</u>

Apabila $\overline{AB} = \overline{CD}$ *maka* $G_{AB} = G_{CD}$

<u>Pembuktian Teorema 7.2</u>

Perhatikan Gambar 7.5 berikut:



Gambar 7.5 Teorema 7.4

Misalkan

$G_{AB}(x) = x_1 \rightarrow \overline{AB} = \overline{xx_1}$

$G_{CD}(x) = x_2 \rightarrow \overline{CD} = \overline{xx_2}$

$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{xx_1} = \overline{xx_2}$

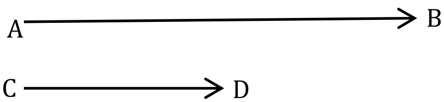
$x_1 = x_2$

Maka terbukti $G_{AB} = G_{CD}$

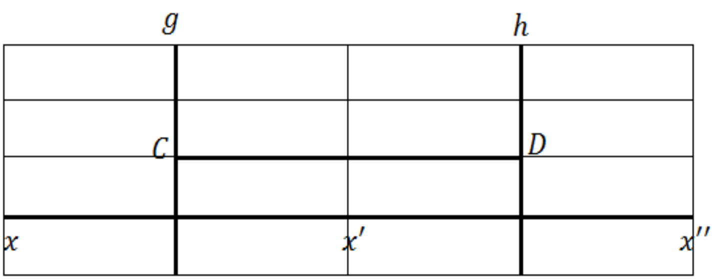
Teorema 7.3

Andaikan g dan h dua garis yang sejajar dan $\overline{CD}$*sebuah garis tegak lurus pada g dengan* $C \in g$ *dan* $D \in h$*. Apabila* $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ *maka* $G_{AB} = R_h R_g$.

Pembuktian Teorema 7.3



Maka



Gambar 7.6 Teorema 7.3

$G_{AB}(x) = x''$

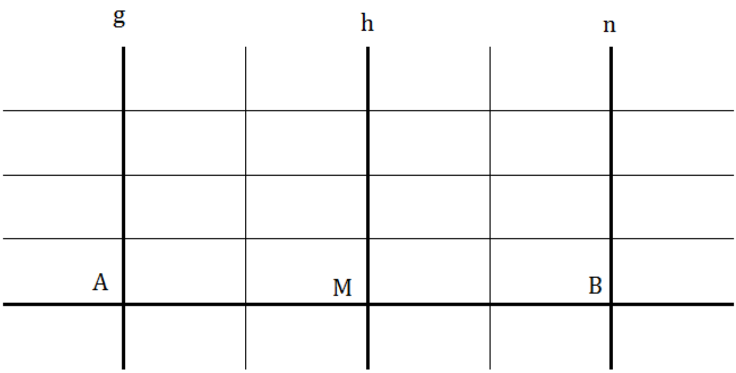
$R_hR_g(x) = R_h(x') = x''$

$G_{AB} = R_hR_g$

Teorema 7.4

Jika G_{AB} *sebuah geseran (translasi) maka* $(G_{AB})^{-1} = G_{BA}$

Pembuktian Teorema 7.4



Gambar 7.7 Teorema 7.4

Dari Gambar 7.6 di atas dapat diperoleh sebagai berikut:

$G_{AB} = R_hR_g = R_nR_h$

$G_{BA} = R_hR_n = R_gR_h$

$(G_{AB})^{-1} = \left(R_hR_g\right)^{-1}$

$\left(R_g\right)^{-1}(R_h)^{-1} = R_gR_n = G_{BA}$

$(G_{AB})^{-1} = G_{BA}$

2. Hasil Kali Geseran

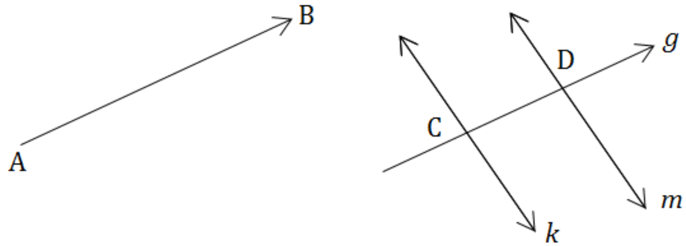
Hasil kali geseran (translasi) merupakan komposisi dari dua buah translasi.

<u>**Teorema 7.5**</u>

Jika G_{AB} sebuah geseran (translasi) sedangkan titik C dan titik D adalah dua titik sehingga $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ maka $G_{AB} = S_D S_C$

<u>**Pembuktian Teorema 7.5**</u>

Andaikan $g = \overleftrightarrow{CD}$ dimana garis k dan garis g saling tegak lurus di C, maka garis m dan garis g tegak lurus di D.



Gambar 7.8 Teorema 7.5

Maka $\overline{CD}$ruas garis berarah dari k ke m. Oleh karena itu $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ maka $G_{AB} = Rm.\, M_k$ sedangkan $S_D = R_m R_g$ dan

$S_C = R_g R_k$. Jadi, $S_D S_C = R_m R_g R_g R_k = R_m (R_g R_g) R_k$ atau $S_D S_C = R_m I R_k = R_m R_k$. Maka $G_{AB} = S_D S_C$.

Teorema 7.6

Komposisi suatu geseran (translasi) dan suatu setengah putaran adalah suatu setengah putaran.

Pembuktian Teorema 7.6

Andaikan G_{AB} suatu geseran (translasi) dan titik C sebuah titik sebarang. Andaikan titik E tunggal, sehingga $\overline{CE} = \overline{AB}$. Andaikan D titik tengah $\overline{CE}$ maka $\overline{CE} = 2\overline{CD}$. Jadi, $G_{AB} S_c = (S_D S_C) S_C = S_D (S_C S_C) = S_D I = S_D$ maka $G_{AB} S_c = S_D$.

Akibat Teorema 7.7

Hasil kali dua translasi adalah translasi.

Catatan

Apabila $\overline{CD} = \overline{BA}$ maka $G_{AB} G_{CD} = G_{AB} G_{BA} = I$. I adalah transformasi identitas. Jadi, jika $\overline{CD} = \overline{BA}$ maka I sebagai translasi.

3. Rangkuman

Translasi adalah *suatu fungsi G (geseran) apabila a ada ruas garis berarah AB sedemikian sehingga untuk setiap titik P berlaku* $G(P) = P'$ *dan* $\overline{PP'} = \overline{AB_1} = G_{AB}$.

Matriks translasi dapat ditulis:

$$A(x, y) \xrightarrow{\binom{a}{b}} A'(x_1 + a, y_1 + b)$$

4. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar!

1) Nyatakan pernyataan berikut ini benar atau salah!
   a) Jika $S_{AB} = R_s R_t$ maka $S_{BA} = R_t R_s$
   b) Setiap translasi adalah suatu involusi
2) Jika $A(2,3)$ dan $B(-4,7)$ adalah titik – titik, tulislah persamaan garis – garis <u>s</u> dan <u>t</u> sedemikian hingga $R_t R_s = S_{AB}$.
3) Jika diketahui titik – titik $A(-1,3)$, $B(-5,-1)$, dan $C(2,4)$.
   a) Tentukan $C' = S_{AB}(C)$
   b) Tulis persamaan garis <u>s</u> dan <u>t</u> sedemikian hingga $C \in s$ dan $R_t R_s = S_{AB}$.
4) Jika A(2,-1) dan B(3,4) serta $s = \{(x + y) | y + 2x = 4\}$. Tuliskan persamaan untuk $s' = S_{AB}(s)$.

BAB VIII ROTASI

A. Deskripsi Materi

Perputaran (rotasi) merupakan suatu transformasi yang memasangkan titik ke himpunan titik lainnya dengan cara memutar. Atau peristiwa memindahkan suatu objek (gambar) melalui garis lengkung dengan pusat pada titik tertentu dan dengan sudut putar yang tertentu dengan arah searah atau berlawanan arah jarum jam yang menyebabkan kedudukan gambar berubah. Pada bab ini akan dibahan mengenai, teorema-teorema tentang perputaran (rotasi) dan penyelesaian soal yang berkaitan dengannya.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami hukum-hukum rotasi (perputaran) dan menggunakannya dalam proses memecahkan masalahnya. Mahasiswa sebelum mempelajari ini, diharapkan mampu menguasai materi tentang setengah putaran, karena materi ini merupakan kelanjutan dari materi tersebut.

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

1. S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
2. PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik
3. KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
4. KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

5. KU16 → Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu

D. Materi Pelajaran

1. Rotasi

Telah diketahui bahwa suatu komposisi dari dua refleksi garis adalah sebuah setengah putaran, jika sumbu-sumbu refleksinya tegak lurus, namun jika sumbu refleksinya sejajar, maka komposisinya merupakan tranlasi.

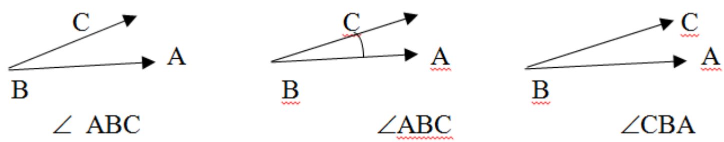
Sebelum mempelajari mengenai perputaran (rotasi) lebih dalam, maka yang perlu dipahami pertam yaitu mengenai sudut berarah. Secara definisi **sudut berarah** adalah *Sebuah sudut berarah adalah suatu sudut yang satu kakinya sebagai sisi (kaki) awal dan kaki yang lain sebagai sisi (kaki) akhir .*

Perputaran (rotasi) merupakan suatu transformasi yang memasangkan titik ke himpunan titik lainnya dengan cara memutar. Namun, ada pula yang menyimpulkan sebagai peristiwa memindahkan suatu objek (gambar) melalui garis lengkung dengan pusat pada titik tertentu dan dengan sudut putar yang tertentu dengan arah searah atau berlawanan arah jarum jam yang menyebabkan kedudukan gambar berubah.

Pada transformasi, perputaran (rotasi) terlihat bahwa titik atau bangun bayangan kongruen dengan bangun semula, maka rotasi memiliki sifat transformasi isometri seperti translasi dan refleksi. Pada transformasi isometri, jarak merupakan besaran yang tidak berubah (inverian). Perputaran (rotasi) ditentukan oleh:

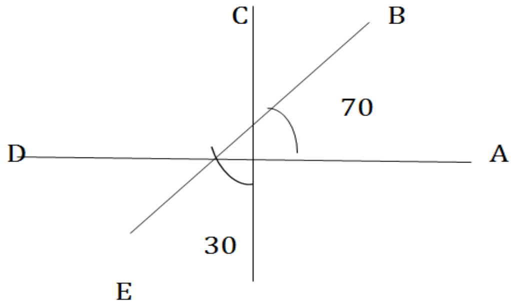
1. Titik pusat rotasi
2. Besar sudut rotasi
3. Arah sudut rotasi

Apabila arah perputaran searah dengan arah jarum jam, maka a dipandang sebagai sudut yang negatif. Sebaliknya apabila arah perputaran berlawanan dengan arah jarum jam maka a dipandang sebagai sudut yang positif.



Gambar 8.1 Sudut Berarah

Untuk menyatakan bahwa ∠ABC merupakan sebuah sudut berarah dengan BA sebagai sisi awal dan BC sebagai sisi akhir, digunakan notasi $\vec{\angle}$ ABC .



Gambar 8.2 Pembuktian ABC

Ukuran sudut dari

1. s ke t = m ∠APB = 70
2. s ke u = m ∠APF = -80
3. u ke t = m ∠CPB = -30

Dengan dimikian, ukuran sudut berarah dari garis ke garis lain mempunyai nilai dari -90 sampai + 90, sedangkan sudut antara dua garis berukuran antara 0 dan 90.

Definisi Rotasi

Andaikan A suatu titik, θ adalah bilangan antara $-180°$ *dan* $180°$ *suatu rotasi yang mengelilingi A dengan sudut* θ *adalah sebuah pemetaan* O_A, θ *yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang berlaku :*

1. $O_A, \theta(A) = A$
2. *Jika* $P \neq A, O_A, \theta(P) = P°$ *sehingga* $m\angle PAP° = \theta$ *dan* $AP° = PA$

<u>Teorema 8.1</u>

Jika s dan t garis-garis yang tidak tegak lurus berpotongan di A, dan jika ukuran sudut dari s ke t sama dengan $\frac{\theta}{2}$ *maka* $O_A, \theta = O_t O_s$.

<u>Pembuktian Teorema 8.1</u>

$R_A, \theta(k) = k°$

$R_t R_s(k) = R_t(k)$

$R_t R_s(k) = k°$

$\therefore R_A, \theta(k) = R_t R_s(k)$

<u>Contoh Soal 8.1</u>

Di*ketahui* $A(3{,}0), B(0{,}0)$

Tentukan :

a) $O_B, 90°(A)$

b) $O_B, -30°(A)$

c) *Garis* s dan t sehingga $O_B, 90° = R_t R_s$

Pembahasan Contoh Soal 8.1

a) $O_B, 90°(A) = A°$

$A° = (0,3)$

b) $O_B, -30°(A) = k$ IV

i) $x = r\cos\theta \rightarrow x = 3\cos -30\,° = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

ii) $y = r\sin\theta \rightarrow y = 3\sin -30° = -\frac{3}{2}$

c) $O_B, 90°(A) = R_t R_s(A)$

$R_t R_s(A) = (0,3)$

$s = sumbu\ x, x = y = 0$

Persamaan garis $t,\ m\ \parallel B$ dan $m = \tan 45° = 1$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$t = y = x$

2. Rangkuman

Perputaran (rotasi) adalah jika *A suatu titik,* θ *adalah bilangan antara* $-180°$ *dan* $180°$ *suatu rotasi yang mengelilingi A dengan sudut* θ *adalah sebuah pemetaan* R_A, θ *yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang berlaku :*

1) $O_A, \theta(A) = A$

2) *Jika* $P \neq A, O_A, \theta(P) = P°$ *sehingga* $m\angle PAP° = \theta$ *dan* $AP° = PA$

Matriks perputaran (rotasi) yaitu: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Dengan beberapa ketentuan yaitu:

a) Perputaran pada titik O(0,0) sejauh a

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

b) Perputaran pada titik P(a,b) sejauh a

$$\begin{bmatrix} x_1' - a \\ y_1^1 - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a \\ y_1 - b \end{bmatrix}$$

3. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar:

1) Nyatakan komposisi berikut dalam bentuk paling sederhana

   a) $O_A, 30 O_A, 60$
   b) $O_A, 120 O_{A,} - 90$
   c) $O_A, 1350 O_A, 900$
   d) $O_A, -60 O_A, -45$
   e) $O_A, 1200 O_A, -150$
   f) $O_A O_A, 60$

2) Jika O adalah titik asal dan $A(1,0)$. Tentukan koordinat dari:
   a) $O_0, 60°(A)$
   b) $O_0, 450°(A)$
   c) $O_0, 120°(A)$
   d) $O_0, -1350°(A)$
3) Tentukan rotasi yang memetakan B(1,0) onto B' $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ mengelilingi titik A(0,0)

BAB XI REFLEKSI GESER

A. Deskripsi Materi

Pada bab sebelumnya telah dipelajari tentang isometri, dan dikenal tiga jenis isometri yaitu pencerminan (refleksi), pergeseran (translasi) dan perputaran (rotasi). Refleksi geser merupakan bagian dari komposisi transformasi, yaitu mengenai perhitungan reflesi dan translasi.

B. Relevansi

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat melakukan perhitungan dari dua transformasi secara sekaligus hingga menghasilkan transformasi yang lebih kompleks. Dua jenis transformasi yang digunakan disini adalah pencerminan (refleksi) dan geseran (translasi).

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

1. S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
2. PP7→Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata

pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik.

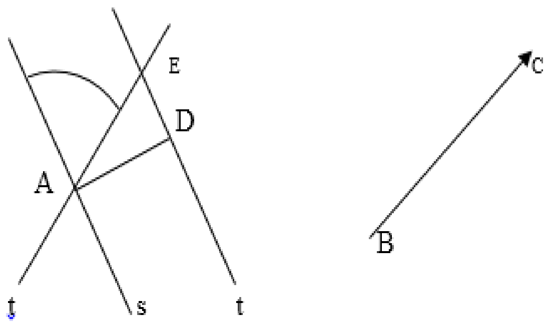
3. KU1→ Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
4. KU2→ Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.
5. KU16→Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu.

D. Materi Pelajaran

1. Pendahuluan Refleksi geser

Sebelumnya telah dibahas beberapa teorema yaitu: 1) komposisi dua geseeran (translasi) adalah sebuah geseran (translasi), 2) komposisi dua pencerminan (refleksi) adalah sebuah geseran (translasi) atau sebuah putaran (rotasi) dan 3) komposisi dua putaran (rotasi) adalah sebuah geseran (translasi) atau sebuah putaran (rotasi).

Telah diketahui sebelumnya bahwa sebuah komposisi dari perputaran (rotasi) $O_{A,0}$ dengan geseran (tranlasi) G_{BC} adalah sebuah perputaran (rotasi)



Gambar 9.1 Komposisi Rotasi+Translasi

$$R_s R_t = O_{A,\sigma}$$

$$R_s R_t = G_{A,\sigma}$$

Garis s sejajar t tapi tegak lurus dengan $\overline{AB}$

Maka jarak s ke $t = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Teorema 9.1

Komposisi (Hasil kali) sebuah perputaran (rotasi) dengan sebuah geseran (translasi) adalah sebuah putaran *(rotasi) yang membentuk sudut sebesar sudut rotasi yang di ketahui.* $G_{BC}O_{A,\rho} = O_{E,\rho}$

Pembuktian Teorema 9.1

Dimisalkan:

- S adalah garis yang melalui A dan tegak lurus $\overline{BC}$
- D adalah titik sehingga $\overline{BC} = 2\overline{AD}$
- t adalah garis yang melalui D dan sejajar s

$$R_tR_s = E_{BC}$$

Ambil garis r yang membentuk sudut $\frac{1}{2}\rho$ dengan garis s pada titik A.

$R_sR_t \quad = O_{A,\rho}$

$E_{BC}O_{A,\rho} = R_tR_s(R_sR_t)$

$= R_tR_s(R^{-1})R^r$

$= R_tR_s$

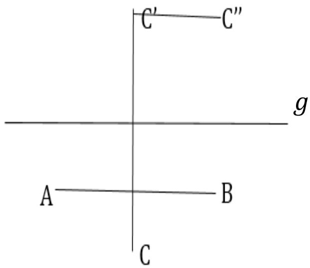
Sudut r ke $t = \frac{1}{2}\rho$

$R_tR_s = O_{E,\rho}$

$$G_{BC}O_{A,\rho} = O_{E,\rho}$$

2. Definisi Reflesi Geser

Suatu pemetaan P disebut ***refleksi geser*** *jika ada sebuah garis v dan segmen berarah AB yang sejajar v sedemikian sehingga P = $G_{AB}R_{V}$.*



Gambar 9.2 Refleksi Geser

$$P(C) = G_{AB}R_g(C) = G_{AB}(P') = P''$$

Garis v dinamakan sumbu refleksi geser. Karena suatu translasi dapat di uraikan dalam suatu komposisi dari dua refleksi, maka setiap refleksi geser dapat dinyatakan sebagai komposisi dari tiga refleksi garis. Hal ini bisa di simpulkan bahwa refleksi geser bukan hanya suatu transformasi , melainkan juga sebagai isometri berlawanan.

Dengan cara yang sama seperti menunjukkan $O_{A0}R_S$, sebagai refleksi geser dapat dibuktikan bahwa $O_{A0}R_S$ juga sebagai refleksi geser.

Teorema 9.2

Suatu komposisi sebuah refleksi terhadap garis dengan sebuah rotasi yang mengelilingi titik terletak pada garis tadi adalah suatu refleksi geser.

Pembuktian Teorema 9.2

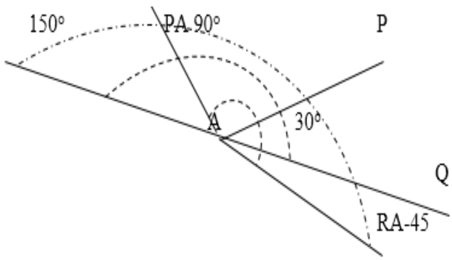
Jika AB merupakan sebuah segmen yang tidak tegak lurus dengan s, maka komposisi dari translasi SAB dengan refleksi garis R adalah suatu refleksi geser.

Contoh Soal

Diketahui titik-titik A dan P . lukislah

a. R,90 (P)
b. R,150 (P)
c. R,-45 (P)
d. Q sedemikian hingga R,30 (Q)=P

Jawaban Contoh Soal 9.1



Gambar 9.3 Jawaban Contoh Soal 9.1

3. Rangkuman

*Suatu pemetaan P disebut **refleksi geser** jika ada sebuah garis v dan segmen berarah AB yang sejajar v sedemikian sehingga* $P = G_{AB}R_{V}$.

Ketentuan dan beberapa sifat refleksi geser. Telah diketahui hingga sekarang fakta-fakta berikut : 1) Komposisi (hasil kali) dua translasi adalah sebuah translasi, 2) Komposisi dua refleksi pada dua garis adalah sebuah rotasi atau sebuah translasi, dan 3) Komposisi dua rotasi adalah sebuah rotasi atau sebuah translasi.

4. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar.

1) Diketahui titik-titik A, B, P, Q setiap tiga titik tidak ada yang kolinear apabila $s = \overline{AB}$, Lukislah

a) $P' = G_{AB}R_s(P)$

b) $P'' = R_sG_{AB}(P)$

c) P Sehingga $G_{AB}R_s(P) = Q$

2) Diketahui tiga garis r, s, t tidak melalui satu titik dan tidak ada sejajar jika $r \cap s = \{C\}, r \cap t = \{A\}, s \cap t = \{B\}$, Lukislah:

a) $A' = R_tR_sR_r(A)$

b) Sumbu refleksi geser $P = R_tR_sR_r$

3) Diketahui $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ lukislah sumbu s dan ruas garis berarah $\overline{AB}$ sehingga refleksi geser $G_{AB}R_s$ memetakan $\triangle ABC$ pada $\triangle XYZ$.

4) Buktikan apabila R suatu refleksi geser, maka P^2 suatu translasi ?

BAB X
DILATASI

A. Deskripsi Materi

Pernahkah kalian melihat miniatur suatu benda misalnya mobil atau gedung atau burger mini yang sangat mirip dengan benda aslinya? Pores merubah ukuran suatu benda tanpa mengubah bentuk benda disebut dengan pembesaran atau pengecilan. Dalam transformasi geometri, pembesaran atau pengecilan disebut dilatasi. Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tersebut disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu itu dinamakan pusat dilatasi. Pada Bab ini akan dibicarakan hal-hal yang terkait dengan dilatasi.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami dan menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan dilatasi. Ini sebagai bekal bagi mahasiswa untuk memahami mata kuliah geometri transformasi secara utuh.

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

- S9 → Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
- PP7 → Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menngunakan konsep kalkulus serta geometri analitik.
- KU1 → Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- KU2 → Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.
- KU16 → Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu.

D. Materi Pelajaran

1. Definisi Dilatasi

Pembesaran atau perkalian (dilatasi) *ialah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperkecil atau memperbesar) suatu bangun tetapi tidak mengubah bentuk bangun yang bersangkutan.* Dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor (faktor skala) dilatasi.

Faktor skala (k) adalah perbandingan antara jarak titik bayangan dari titik pusat dilatasi dan jarak titik benda berkaitan dengan titik pusat dilatasi. Faktor skala (k) jua di definisikan sebagai perbandingan antara panjang sisi tiap bayangan dan panjang sisi yang berkaitan pada benda.

$$\text{Faktor skala k} = \frac{jarak\ bayangan}{jarak\ benda}$$

$$= \frac{panjang\ bayangan}{panjang\ benda}$$

<u>Contoh Soal 10.1</u>

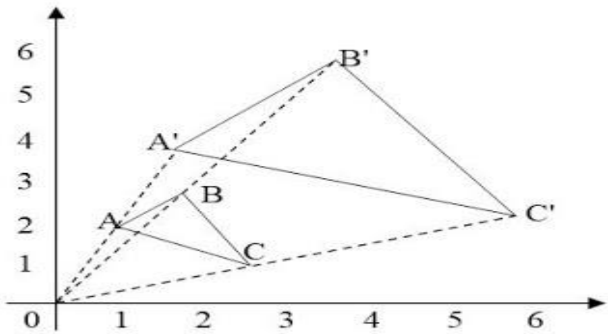
Sebuah segitiga ABC dengan titik A (1,2) B (2,3) dan C (3,1) mendapat dilatasi terhadap titik 0 dengan faktor skala 2. Tentukan koordinat bayangan titik-titik sudut segitiga ABC?

Pembahasan Contoh Soal 10.1

Koordinat bayangan titik A, B dan C masing-masing adalah A1 (2,4), B1(4,6) dan C' (6,2).

Catatan : Misal faktor skala k1 maka

$$K = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{2}{1} = 2 \text{ dan } OA' : OA = 2 : 1$$



Pada dilatasi suatu bangun faktor K akan menentukan ukuran dan letak bangun bayangan.

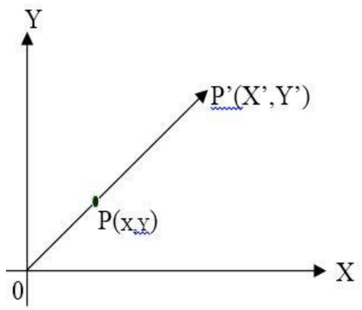
i) Jika K > 1, maka bangun bayangan diperbesar dan terletak sepihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

ii) Jika $0 < K < 1$, maka bangun bayangan diperkecil dan terletak sepihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

iii) Jika $-1 < K < 0$, maka bangun bayangan diperkecil dan terletak berlainan pihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

iv) Jika $K < -1$, maka bangun bayangan diperbesar dan terletak berlainan terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

2. Dilatasi terhadap titik pusat O (0,0)



Jika titik P(x,y) didilatasi terhadap titik pusat O(0,0) dengan faktor skala K didapat bayangan titik P'(x',y'). Maka mempunyai posisi (x',y') dengan:

$$(x', y') \rightarrow \begin{matrix} x' = kx \\ y' = ky \end{matrix}$$

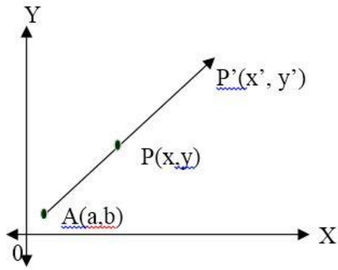
$$[O, k] : P(x, y) \rightarrow P'(kx, ky)$$

3. Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)

Jika titik P(x,y) didilatasikan terhadap titik pusat A(a,b) dengan faktor skala K didapat bayangan titik P'(x',y') maka:

$$x' = a + k(x - a)$$
$$y' = b + k(y - b)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



<u>**Latihan Soal 10.1**</u>

ABCD adalah sebuah persegi dengan koordinat titik-titik sudut A(1,1), B(2,1), C(2,2) dan D(1,2). Tentukan peta atau bayangan dari titik-titik sudut persegi itu oleh dilatasi [O,2]!

<u>**Pembahasan Latihan Soal 10.1**</u>

Peta atau bayangan titik-titik sudut persegi oleh dilatasi [0,2]. Matriks yang bersesuaian dengan dilatasi [0,2] adalah $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Peta atau bayangan dari titik sudut persegi A(1,1), B(2,1), C(2,2) dan D(1,2) adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

∴ Jadi peta dari titik-titik sudut ABCD adalah A'(2,2), B'(4,2), C'(4,4) dan D'(2,4)

4. Rangkuman

Perkalian atau dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tersebut disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu itu dinamakan pusat dilatasi. Suatu dilatasi ditentukan oleh: Faktor skala (k), dan Pusat dilatasi.

5. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan cermat dan benar

1) Titik $A'(-16,24)$ merupakan bayangan dari titik $A(x,y)$ yang didilatasikan dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala -4. Koordinat titik A adalah...

2) Tentukan persamaan peta dari garis $3x - 5y + 15 = 0$ oleh dilatasi terhadap pusat $O(0,0)$ dengan faktor skala 5!
3) Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Jika ditransformasikan dengan dilatasi [0,4], persamaan bayangannya adalah...
4) Diketahui titik $P(12, -5)$ dan $A(-2,1)$. Bayangan titik P oleh dilatasi $\left[A, \frac{1}{2}\right]$ adalah...
5) Bayangan titik $P(-2,3)$ oleh dilatasi [O,k] adalah P'(4,-6) sehingga bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh [O,4k] adalah..

Bibliography

Darhim, & Rasmedi, A. (2012). *Geometri Transformasi.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Rawuh. (1993). *Geometri Transformasi.* Jakarta: Proyek Pembinaan Kependidikan Pendidikan Tinggi.

Sudrajat. (2003). *Pengentar Geometri Transformasi.* Bandung: Pustaka Setia.

Sukirman, d. (2011). *Matematika.* Jakarta : Universitas Terbuka.

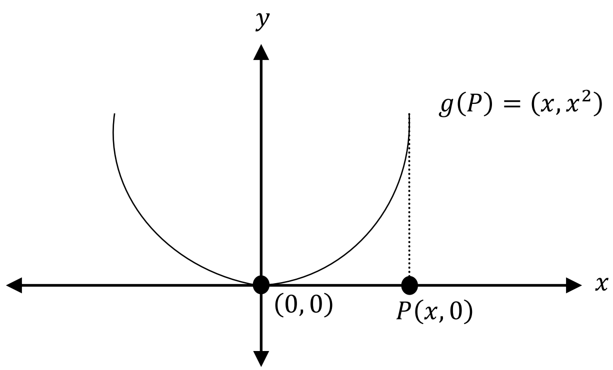
Kunci Jawaban Latihan

BAB II

1) a) $g(2,0) = (2,4)$

b) iya, jelas $L \in V$, dan L mempunyai prapeta yaitu $L'(13,0)$ pada sumbu x, jadi $L \in$ daerah nilai g.

c) Gambar daerah hasil g



2) Ambil sebarang $P \in v$, karena A merupakan titik tertentu pada v maka memunculkan 2 kondisi: 1) $P = A$ dan 2) $P \neq A$

- Menentukan $P = A$

  Sudah jelas bahwa P mempunyai prapeta yaitu titik A itu sendiri, sehingga

  T (P) = A

T (M) = P

- Menentukan p ≠ A

Secara geometris $\overline{AP}$ pada bidang v terdapat titik M yang merupakan prapeta dari P yaitu T (M) = P, T (M) merupakan titik tengah. Karena $P \in v$ mempunyai prapeta oleh fungsi T, yaitu T (M) sehingga T merupakan fungsi pada atau fungsi surjektif.

$$\therefore Relasi\ T\ merupakan\ Transformasi$$

3) Ambil sebarang titik P dan Q pada bidang v sehingga T (P) = T (Q). Hal ini memunculkan kondisi: P = A, P ≠ A, Q = A, Q ≠ A

- Untuk P = A

  Maka T (P) = P = A, sedangkan T (P) = T (Q) sehingga T (Q) = A.

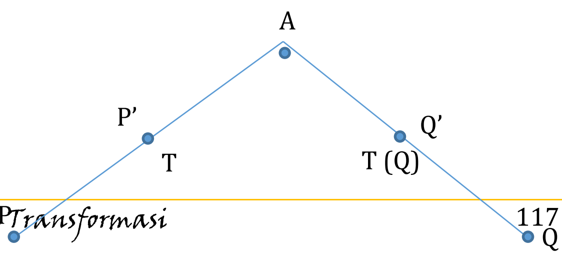
  Jadi Q = A dan P = A

- Untuk Q = A

  Maka T (Q) = Q = A, sedangkan T (P) = T (Q) sehingga T (P) = A.

  Jadi P = A dan Q = A

- Untuk P ≠ A dan Q ≠ A



Misalkan $P' \in \overline{AP}$ dan $Q' \in \overline{AQ}$ maka $P' = T\ (P)$ dan $Q' = T\ (Q)$. Karena $P' \in \overline{AP}$ maka $\overline{AP} = \overline{AP'}$, $Q \in \overline{AQ'}$ maka $\overline{AQ} = \overline{AQ'}$. Dengan demikian, $\overline{AP} = \overline{AQ}$. Jadi A, P, dan Q merupakan kolinear (tidak segaris) dengan P' titik tengah.

4) a) Ambil P(x_1,y_1) dan Q(x_2,y_2) sehingga $P \neq Q$

Akan dibuktikan $T(P) \neq T(Q)$

Karena $P \neq Q$ maka $x_1 \neq x_2$ atau $y_1 \neq y_2$

(i) Untuk x $\geq$ 0

T(P) = (x_1+1, y_1)

T(Q) = (x_2+1, y_2)

Jelas $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ atau $y_1 \neq y_2$

$\therefore$ Jadi $T(P) \neq T(Q)$

(ii) Untuk x $<$ 0

T(P) = (x_1-1, y_1)

T(Q) = (x_2-1, y_2)

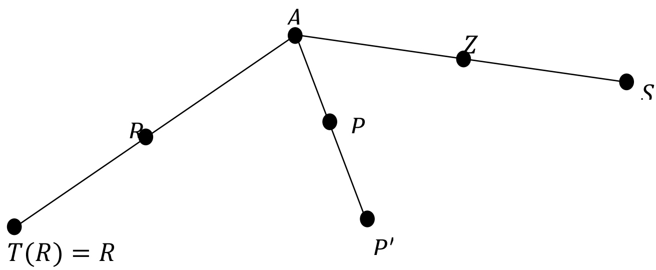
Jelas $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1$ atau $y_1 \neq y_2$

$\therefore$ Jadi $T(P) \neq T(Q)$

∴ Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa T injektif.

b) T bukan suatu transformasi

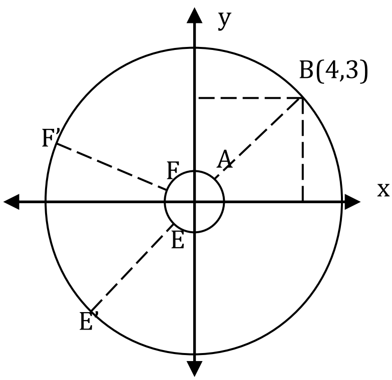
5) Perhatikan gambar dibawah ini



T adalah transformasi karena R', P', dan S' terletak pada bidang v dan merupakan bijektif.

6) a) $T(A) = (-5,0)$

b) Perhatikan gambar berikut:



$Lihat\ \Delta\ APC\ dan\ \Delta PQB.$

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BQ}$$

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{PA}{PB} \Leftrightarrow \frac{PC}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow PC = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AC}{BQ} = \frac{PA}{PB} \Leftrightarrow \frac{AC}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{3}{5}$$

$\therefore$ Jadi prapeta B adalah A $= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

c) Dipunyai $Z \in$ daerah asal T. Maka $Z \in C_1$.

Berarti $Z = (x_1, y_1)$ dimana $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Jelas $ZP = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1} = 1$.

Selanjutnya $Z' = T(Z)$.

Maka $Z' \in C_2$.

Berarti $Z' = (x_2, y_2)$ dimana $x_2^2 + y_2^2 = 25$.

Jelas $Z'P = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{25} = 5$.

Jelas P, Z, Z' segaris.

$Z'P = Z'Z + ZP$

$\Leftrightarrow 5 = Z'Z + 1$

$\Leftrightarrow Z'Z = 5 - 1$

$\Leftrightarrow 5 = Z'Z + 1$

$\Leftrightarrow ZZ' = Z'Z = 4$

Jadi jarak $ZZ' = 4$.

d) Dipunyai $E, F \in C_1, E \neq F$

Maka panjang busur $EF = \frac{m(\angle EPF)}{2\pi}. kelilingC_1$

$$EF = \frac{m(\angle EPF)}{2\pi}. 2\pi. 1$$

$$EF = m(\angle EPF)$$

Selanjutnya $E' = T(E)$ dan $F' = T(F)$.

Maka panjang busur $E'F'$

$$E'F' = \frac{m(\angle E'PF')}{2\pi}. kelilingC_2$$

$$E'F' = \frac{m(\angle E'PF')}{2\pi}. 2\pi. 5$$

$$E'F' = 5. m(\angle E'PF').$$

Karena P, E, E' segaris dan P, F, F' segarismaka

$m(\angle E'PF') = m(\angle EPF)$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} E'F' &= 5. m(\angle E'PF') \\ &= 5. m(\angle EPF) \\ &= 5. EF \end{aligned}$$

$\therefore$ Jadi $E'F' = 5EF$

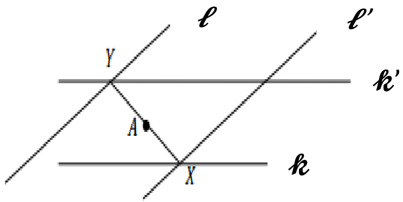
7) Ambil k tidak sejajar ℓ, k tidak tegak lurus ℓ, dan $A \notin k, A \notin \ell$.

Karena $A \notin \ell$, maka $S_A(\ell) = \ell'//\ell$

ℓ' akan memotong g dititik X, sehingga $X \in \ell'$

Karena $S_A(\ell) = \ell'//\ell$, maka $S_A(X) = Y \in \ell$

Berikut sketsnya:



Karena titik potong dari dua garis atau lebih akan hanya ada satu titik potong,

maka X dan Y satu-satunya pasangan.

Sehingga $X \in h', X \in k, X \in XY$ dan $Y \in h', Y \in k, Y \in XY$

∴ Jadi X dan Y satu-satunya pasangan.

8) Ambil $P \in g$

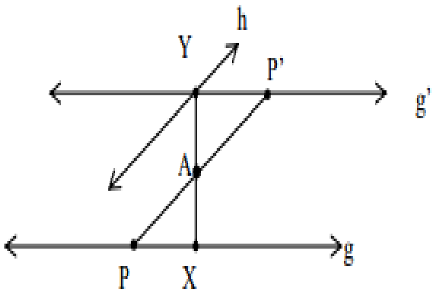
Jika $P' = S_A(P)$ maka $g' = S_A(g)$ melalui P'

dan $PA = AP', g'//g$

Jika g' memotong h di Y

Tarik $\overleftrightarrow{YA}$ memotong g di X

Maka X dan Y pasangan titik yang dicari.



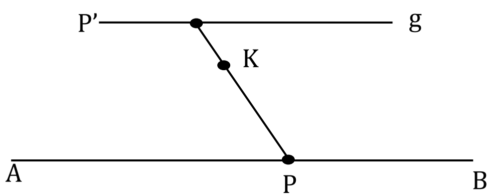
9) a) $K \notin \overline{AB}$, g // $\overleftrightarrow{AB}$, T: $\overline{AB} \rightarrow g$

$P \in \overline{AB}$ maka $T(P) = P' = \overleftrightarrow{KP} \cap g$

$P' = \overleftrightarrow{KP} \cap g$

sehingga $P' \in g$

∴ Jadi bentuk himpunan peta-peta P' adalah ruas garis pada g.



b) Akan dibuktikan T injektif

Ambil dua titik X dan Y pada $\overline{AB}$, $X \neq Y$

Akan dibuktikan $T(X) \neq T(Y)$

Andaikan $T(X) = T(Y)$

Oleh karena $T(X) = \overleftrightarrow{KX} \cap g$ dan $T(Y) = \overleftrightarrow{KY} \cap g$

Dalam hal ini $\overleftrightarrow{XA}$ dan $\overleftrightarrow{YA}$ memiliki dua titik sekutu yaitu A dan $T(X) = T(Y)$.

Ini berarti bahwa garis $\overleftrightarrow{XA}$ dan $\overleftrightarrow{YA}$ berimpit, sehingga berakibat $X = Y$.

Hal ini suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah,maka haruslah $T(X) \neq T(Y)$

$\therefore$ Jadi T injektif

10) a) $A = (-3,6)$ maka $f(A) = (|-3|, |6|) = (3,6)$

b) Prapeta dari $B\ (4,2)$ adalah $(4,2)$, $(4,-2)$, $(-4,2)$, $(-4,-2)$

c) Daerah nilai f adalah himpunan semua titik titik di kuadran I

d) Pilih $A_1 = (4,2) \in v, A_2 = (4,-2) \in v$

Jelas $A_1 \neq A_2$, maka $f(A_1) = (4,2)$ dan $f(A_2) = (4,2)$

Diperoleh $f(A_1) = f(A_2)$

Jadi terdapat $A_1 \neq A_2$ dan $f(A_1) = f(A_2)$

Artrinya f tidak injektif, karena f tidak injektif maka f bukan transformasi.

BAB III

1) Perhatikan tabel di bawah ini:

Domain	Bayangan
$A(2,0)$	$T(A) = A' = (13, -5)$
$B(5,6)$	$T(B) = B' = (31,1)$

Syarat isometri:

$$AB = A'B'$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2}$$

$$\sqrt{(5-2)^2 + (6+0)^2} = \sqrt{(31-13)^2 + (1+5)^2}$$

$$\sqrt{(3)^2 + (6)^2} = \sqrt{(18)^2 + (6)^2}$$

$$\sqrt{9+36} = \sqrt{324+36}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{360}$$

$$3\sqrt{5} \neq 6\sqrt{10}$$

Jadi, T bukan suatu isometri.

2) Perhatikan tabel berikut:

Domain	Bayangan
$A(a,b)$	$A'(2a, b-1)$
$B(x,y)$	$B'(2x, y-1)$

Syarat isometri:

$$AB = A'B'$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(2x-2a)^2 + (y-1-b+1)^2}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \neq \sqrt{(2x-2a)^2 + (y-b)^2}$$

Sehingga, T bukan suatu isometri.

3) Karena T isometri, maka AB = CD

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(-3+2)^2 + (k-1)^2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + (k-1)^2}$$

$$2 = 1 + (k-1)^2$$

$$1 = (k-1)^2$$

$$\pm\sqrt{1} = k - 1$$

$$\pm 1 = k - 1$$

$$k = 1 \pm 1$$

$$k_1 = 1 + 1 = 2 \bigvee k_2 = 1 - 1 = 0$$

4) Isometri $AB = CD$

$$\sqrt{(4-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(-2+4)^2 + (k-1)^2}$$

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{2^2 + (k-1)^2}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{4 + (k-1)^2}$$

$$10 = 4 + k^2 - 2k + 1$$

$$10 - 4 - 1 = k^2 - 2k$$

$$5 = k^2 - 2k$$

$$k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k^2 - 2k = 5$$

$$k^2 - 2k + 1 = 5 + 1$$
$$(k-1)^2 = 6$$
$$k - 1 = \pm\sqrt{6}$$
$$k = 1 \pm \sqrt{6}$$
$$k = 1 - \sqrt{6} \bigvee k = 1 + \sqrt{6}$$

5) Perhatikan tabel berikut:

Domain	Bayangan
$P(1{,}5)$	$T(P) = P' = (6{,}13)$
$Q(9{,}3)$	$T(Q) = Q' = (54{,}7)$

Syarat isometri:

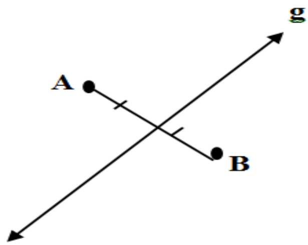
$$PQ = P'Q'$$
$$\sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2} = \sqrt{\left(x_{Q'} - x_{P'}\right)^2 + \left(y_{Q'} - y_{P'}\right)^2}$$
$$\sqrt{(9-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(54-6)^2 + (7-13)^2}$$
$$\sqrt{(8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(48)^2 + (-6)^2}$$
$$\sqrt{64+4} = \sqrt{2304+36}$$
$$\sqrt{68} = \sqrt{2340}$$
$$2\sqrt{17} \neq 2\sqrt{585}$$

Jadi, T bukan suatu isometri.

BAB IV

1) $R_g(A) = B$

$R_g(B) = A$



2) $px + 2y - 4 = 0$

$p(-3) + 2(1) - 4 = 0$

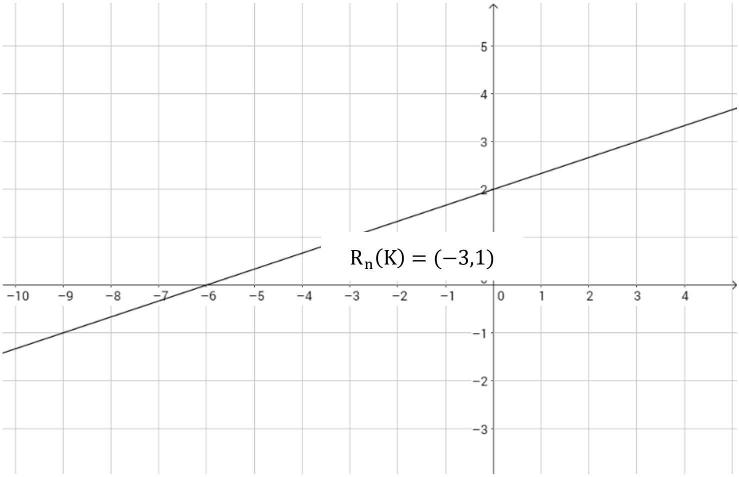
$-3p + 2 - 4 = 0$

$-3p - 2 = 0$

$-3p - 2 + 2 = 0 + 2$

$-3p = 2$

$p = -\frac{2}{3}$



3) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$ atau $6x + 8y - 5 = 0$

4) a) $A'(-8,1)$

   b) $C(-5,7)$

   c) $(-6 - x, y)$

5) a) $A' = (-3,2)$

   b) $B = (5,-3)$

   c) $P' = (y, x)$

6) $a)$ $A' = (3,-2)$

   b) $B = (-5,3)$

   c) $P' = (-y,-x)$

7) $a)$ $R_g(0) = (1,1)$

   b) $R_g(A) = A' = (-1,0)$

8) $a = -\frac{4}{3}$

9) $\left(\frac{1}{5}, \frac{96}{10}\right)$

10) $l \equiv (x+2)^2 + y^2 = 4$

Titik pusat (-2,0) dan jari-jari 2.

$l(-2{,}0) \Longrightarrow R_g(l) = l' = (2{,}0)$

Jadi terbukti, $R_g(l) = l'$ adalah lingkaran dengan titik pusat (2,0) dan jari jari 2.

11) a) $R_g(A) = (-1{,}0)$

b) $C = (-3{,}3)$

c) $P = (P_1, P_2) \Longrightarrow P' = (P_1{}', P_2{}')$

Jadi, $R_g(P) = P' = (P_1', P_2') = (2 - P_1, -P_2)$

BAB V

1) *Pembuktian dari kiri ke kanan*

Maka titik potongnya di $A(0{,}0)$.

Misal, kita ambil titik $B(1{,}2)$.

Maka $R_t R_s(B) = (-1, -2)$. Karena titik $A \neq R_t R_s(B)$. Hal ini kontradiksi dengan permisalan sehingga permisalan yang benar adalah $A = B$.

Pembuktian dari kanan ke kiri.

Kita ambil titik B(0,0), maka $R_tR_s(B) = (0,0)$. Sehingga $R_tR_s(B) = A$.

Pembuktian dari kiri ke kanan

Maka titik potongnya di A(0,0).

Misal, kita ambil titik B(1,2).

Maka $R_tR_s(B) = (-1,-2)$. Karena titik $A \neq R_tR_s(B)$. Hal ini kontradiksi dengan permisalan sehingga permisalan yang benar adalah $A = B$.

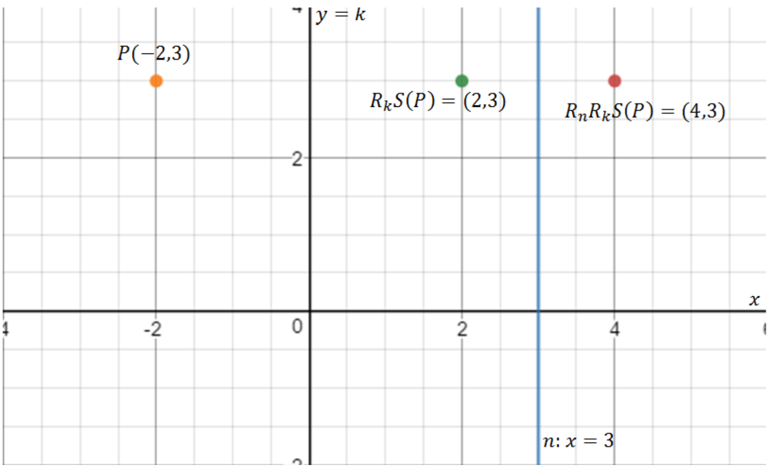
Pembuktian dari kanan ke kiri.

Kita ambil titik B(0,0), maka $R_tR_s(B) = (0,0)$. Sehingga $R_tR_s(B) = A$.

2) a) persamaan garis $R_sR_t(\underline{s})$ adalah sumbu x atau $y = 0$.

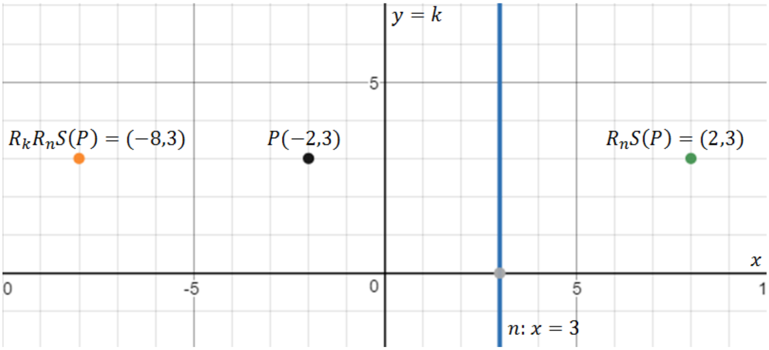
   b) $R_s(P) = (-2,3)$. $R_tR_s(P) = (-3,2)$

3) a) Perhatikan gambar berikut:



Jadi, $R_n R_k S(P) = (4,3)$

b) $R_k R_n S(P) = (-8,3)$



4) Misal $P(2,2)$

$S(P)$ titik tengah $\perp$ dari P ke s

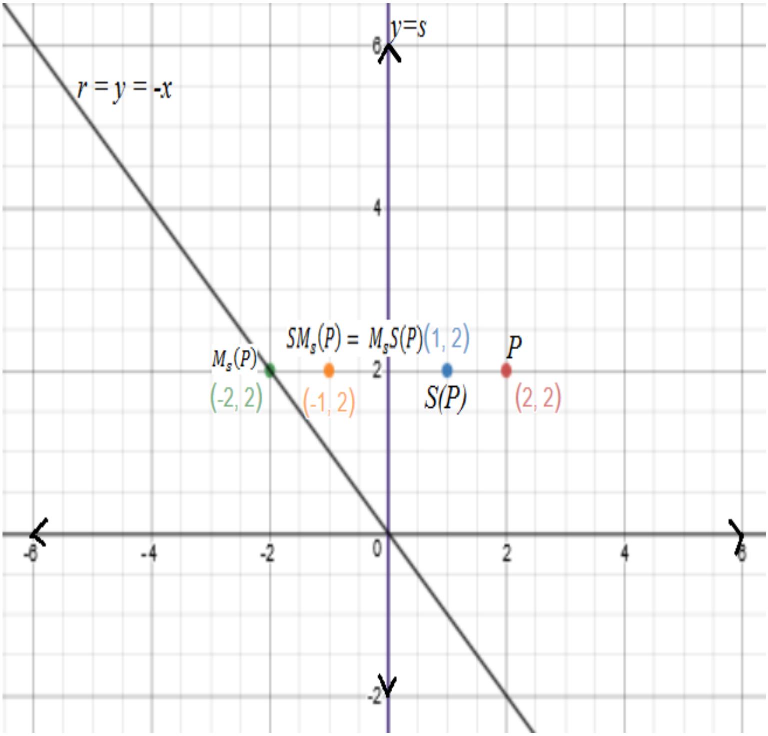
$S(P) = (1,2)$ atau $\left(\frac{x}{2}, y\right)$

$SR_s(P) = S\,(-2,2) = (-1\,,2)$

$SM_s(P) = M_s S(P)$ $\qquad$ $P(2,2)$

$(-1,2) = (-1,2)$ $\qquad$ $S(P) = (1,2)$

Terbukti $SM_s(P) = M_s S(P)$



5) Diketahui bahwa $A(2, -8)$

$A' = S(A)$

Sesuai definisi S (jika $P \notin g$ maka $S(P)$ adalah titik tengah ruas garis tegak lurus dari P pada g) maka A' adalah titik tengah garis yang melalui A dan $\perp g$.

$$A' = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+(-8)}{2}\right) = (2, -4)$$

Jadi, $S(A) = (2, -4)$

$A'' = M_g S(A) = M_g(2,-4)$

Sesuai definisi pencerminan, maka garis g adalah garis sumbu titik $(2,-4)$ dan A''. Misal:

$A'' = (a,b)$, maka:

$$(2,0) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{-4+b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2,0) = \left(1 + \frac{a}{2}, \frac{b}{2} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow a = 2, b = 4$$

Jadi, $A'' = R_g S(A) = R_g(2,4) = (4,2)$

Selanjutnya, $A''(4,2)$ dicerminkan terhadap garis $h\{(x,y)|y = x\}$. Diperoleh $A'''(2,4)$

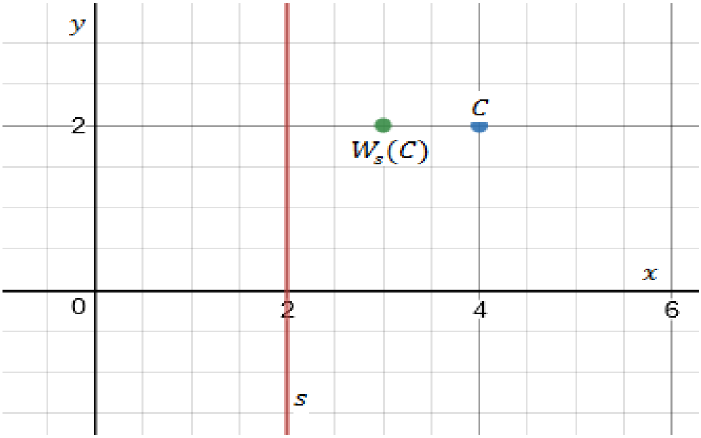
Jadi, koordinat titik $R_h R_g S(A)$ adalah $A'''(2,4)$.

6) $[R_s R_t R_u(B)]^{-1} = R_u R_t R_s(B)$

$$\begin{aligned} &= R_u R_t R_s(5,6) \\ &= R_u R_t(-5,6) \\ &= R_u(7,6) \\ &= (6,7) \end{aligned}$$

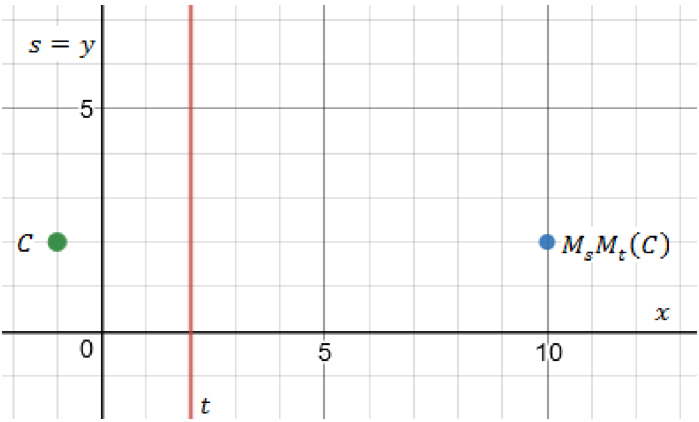
Jadi titik B adalah $(6,7)$

7) Perhatikan gambar berikutJ:



Jadi, $W_s(C)$ berada pada titik (2,2).

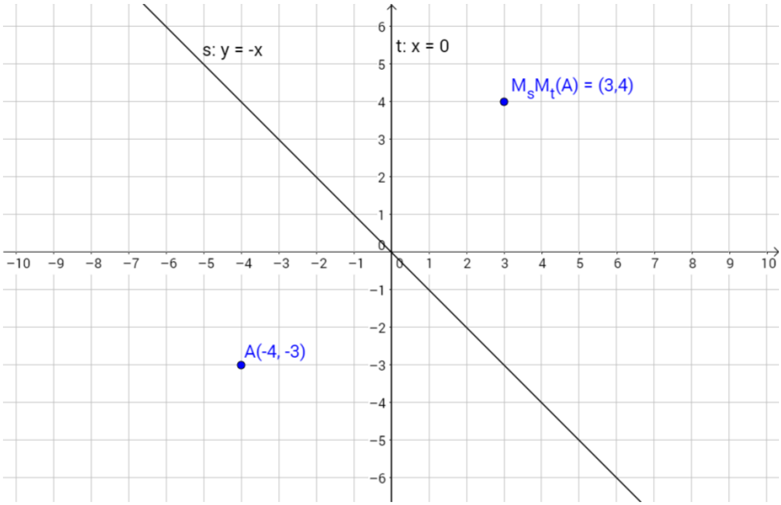
8) Perhatikan gambar berikut:



$$
\begin{aligned}
[R_sR_t(C)]^{-1} &= R_tR_s(C)\\
&= R_tR_s(10,2)\\
&= R_t(5,2)\\
&= (-1,2)
\end{aligned}
$$

Jadi titik C adalah $(-1,2)$

9) Perhatikan gambar beriku:



$$\left(R_sR_t(A)\right)^{-1} = R_tR_s(A)$$

$$= R_t(-4,-3)$$

$$= (4,-3)$$

Jadi, titik A adalah $(4,-3)$

10) $R_q\mathrm{I}(\mathrm{B}) = (2,8)$

$\mathrm{I}R_q(\mathrm{B}) = \mathrm{I}(2,8) = (2,8)$

Jadi, invers dari B adalah (2,8)

BAB VI

1) Persamaan garis g:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-3}{-6-3}$$

$$\frac{y-2}{2}=\frac{x-3}{-9}$$

$$2x-6=-9y+18$$

$$9y=-2x+24$$

$$y=\frac{-2x+24}{9}$$

Mencari gradien:

$$m_1=-\frac{2}{9};\ m_2=\frac{9}{2}$$

Persamaan garis h:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{9}{2}(x-3)$$

$$2y-4=9x-27$$

$$2y=9x-23$$

$$y=\frac{9x-23}{2}$$

$$9x-2y-23=0$$

2) a) $D(-3,4)$

$S_B(D)=[2.1-(-3),2.(-3)-4]$

$=(5,-10)$

b) $S_B(E)=(-2,5)$

Misal $E = (x, y)$

Maka,

$2.1 - x = -2$

$2 - x = -2$

$x = 4$

$2.(-3) - y = 5$

$-6 - y = 5$

$\mathrm{y} = -11$

Jadi, $\mathrm{E} = (4, -11)$.

3) $S_A{}^{-1}(P) = R_h R_g(-6{,}5)$

$= R_h(6{,}5)$

$= (6, -5)$

4) a) $S_B(B) = [2.2 - 2, 2.(6) - 6]$

$S_B(B) = (2, 6)$

$S_D S_B(B) = S_D(2, 6)$

$= [2(0) - 2, 2(-3) - 6]$

$= (-2, -12)$

b) $K = (1, -4)$

$S_B(K) = [2(2) - 1, 2(6) + 4]$

$= (3, 16)$

$S_D S_B(K) = S_D(3, 16)$

$S_D S_B(K) = [2(0) - 3, 2(-3) - 16]$

$S_D S_B(K) = (-3, -22)$

c) $\mathrm{S_D(K)} = [2(0) - \ 1, 2(-3) + 4]$

$= (-1, -2)$

$S_B S_D(K) = S_B(-1, -2)$

$= [2(2) + 1, 2(6) + 2]$

$= (5, 14)$

5) $S_B S_A(c) \ \ = S_B(2a - x\ , 2b - y)$

$= S_B(2(-3) - (-4)\ , 2(1) - (-4))$

$= S_B(-6 + 4\ , 2 + 4)$

$= S_B(-2\ , 6)$

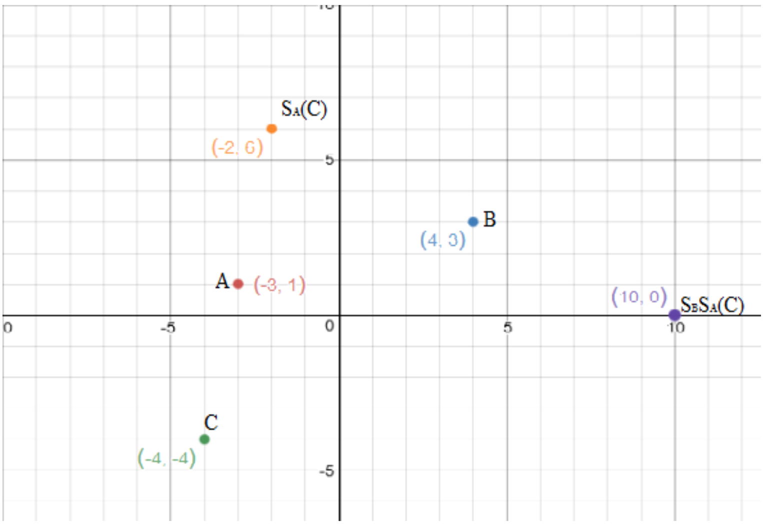
$= (2a - x\ , 2b - y)$

$= (2(4) - (-2)\ , 2(3) - 6)$

$= (8 + 2\ , 6 - 6)$

$= (10\ , 0)$

Sketsa gambarnya:



6) $S_Q S_P(R) = S_Q(2a - x\ , 2b - y)$

$S_Q S_P(R) = S_Q[2(-4) - 3, 2(2) - 0]$

$S_Q S_P(R) = S_Q(-11\ , 4)$

$S_Q S_P(R) = (2a - x, 2b - y)$

$S_Q S_P(R)\ =\ [2(5) + 11, 2(1) - 4]$

$S_Q S_P(R) = (21, -1)$

7) Persamaan garis s melalui $F(0,4)$ dan G(3,2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{2 - 4} = \frac{x - 0}{3 - 0}$$

$$3(y-4) = -2x$$

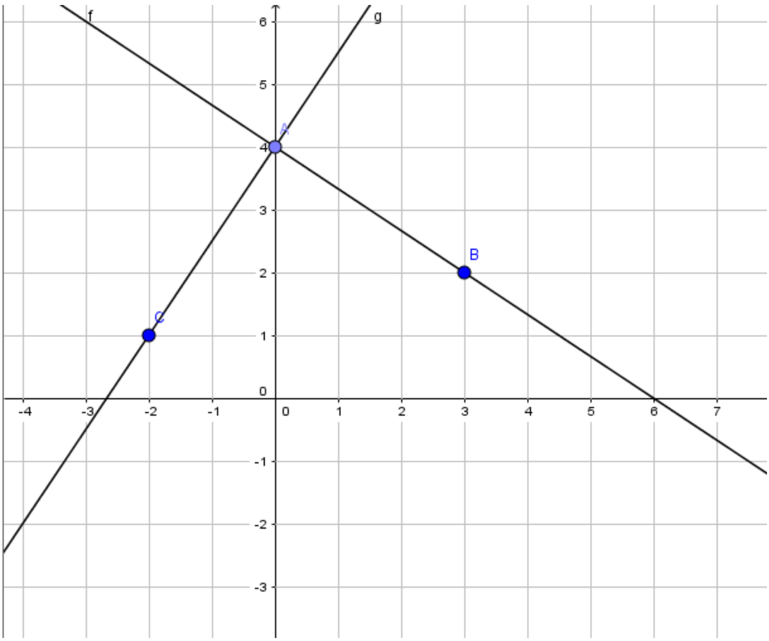
$$3y - 12 = -2x$$

$$3y + 2x = 12$$

$$y = \frac{12-2x}{3}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}, m_2 = \frac{3}{2}$$

Agar lebih mudah memahami perhatikan gambar berikut:



Persamaan garis t tegak lurus dengan garis s yang melalui F(0,4)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 4$$

$$3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 4 = 0$$

8) $H_P H_Q(k) = (2, 6)$

$$H_P H_Q(x, y) = (2, 6)$$

$$H_P[2(1) - x, 2(-4) - y] = (2, 6)$$

$$H_P(2 - x, -8 - y) = (2,6)$$

$$[2(0) - (2 - x), 2(0) - (-8 - y)] = (2, 6)$$

$$[0 - 2 + x, 0 + 8 + y] = (2, 6)$$

$$x - 2 = 2 \; dan \; y + 8 = 6$$

$$x = 4 \; dan \; y = -2$$

BAB VII

1) a) Jika $S_{AB} = R_s R_t$ maka $S_{BA} = R_t R_s$

$$(S_{AB})^{-1} = (R_s R_t)^{-1}$$

$$S_{BA} = {R_t}^{-1} {R_s}^{-1}$$

$$S_{BA} = R_t R_s \rightarrow \text{Benar}$$

b) Setiap translasi adalah suatu involusi

$(S_{AB})^{-1} = S_{BA} \rightarrow$ Benar

2) Persamaan garis AB

$$\frac{y-3}{7-3} = \frac{x-2}{-4-2}$$

$-6y + 18 = 4x - 8$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

Maka, $m_{AB} = -\frac{2}{3}$

$R_t R_s = S_{AB}$; *s // t; jarak s ke t* $= \frac{1}{2}AB$

s melalui A(2,3) tegak lurus AB, maka $m_s = \frac{3}{2}$

$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$

$2y - 6 = 3x - 6$

$s \equiv y = \frac{3}{2}x$

t melalui titik tengah AB $= \left(\frac{-4+2}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (-1{,}5)$

$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 1)$

$2y - 10 = 3x + 3$

$2y = 3x + 13$

$t \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

Jadi persamaan garis t adalah $3x - 2y + 13 = 0$

3) a) $C' = S_{AB}(C) = (2 - 4, 4 - 4) = (-2{,}0)$

b) $R_t R_s = S_{AB} \rightarrow$ t // s; $s \perp AB$; $\overrightarrow{AB} = 2st$

- $s \perp AB$

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{-5-(-1)} = 1$

$m_s = -1$

$s \perp AB$; melalui C(2,4)

$y - 4 = -1(x - 2)$

$y = -x + 2 + 4$

$s \equiv y = 6 - x$

- $\overrightarrow{AB} = 2st \rightarrow \overrightarrow{st} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

  Karena $AB = CC'$ maka $\frac{1}{2}CC' = st$

  P titik tengah $CC' \rightarrow P = \left(\frac{2-2}{2}; \frac{4+0}{2}\right) = (0,2)$

  t // s; t melalui P(0,2)

  $y - 2 = -1(x - 0)$

  $t \equiv y = 2 - x$

4) Ambil 2 buah titik pada s

   $M(0,4) \rightarrow M'(1,9)$

   $N(2,0) \rightarrow N'(3,5)$

   s' melalui M' dan N'

   $\frac{y-9}{5-9} = \frac{x-1}{3-1}$

   $2y - 18 = -4x + 4$

   $2y = -4x + 22$

$s' \equiv y - 2x + 11$

BAB VIII

1) Nyatakan komposisi berikut dalam bentuk paling sederhana

   a) $O_A, 30 O_A, 60 = O_A, 90$
   b) $O_A, 120 O_{A,} - 90 = O_A, 30$
   c) $O_A, 1350 O_A, 900 = O_A, 225$
   d) $O_A, -60 O_A, -45 = O, -150$
   e) $O_A, 120 O_A, -150 = O_A, -30$
   f) $O_A O_A, 60 = O_A, 120$

2) Jika O adalah titik asal dan $A(1,0)$. Tentukan koordinat dari:

   a) $A(1,0), \theta = 60°$

   $x = r\, cos 60°$ $\quad$ $y = r\, sin\, 60°$

   $x = 1\, cos\, 60°$ $\quad$ $y = 1\, sin\, 60°$

   $x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   b) $A(1,0), \theta = 45°$

   $x = r \cos 45\,°$ $\quad$ $y = r \sin 45°$

   $x = 1 \cos 45°$ $\quad$ $y = 1 \sin 45°$

   $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   c) $A(1,0), \theta = 120°$

$x = r\cos 120\,°$ $\quad$ $y = r\sin 120°$

$x = 1\cos 120°$ $\quad$ $y = 1\sin 120°$

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d) $A(1{,}0), \theta = -135°$

$x = r\cos -135\,°$ $\quad$ $y = r\sin -135°$

$x = 1\cos -135°$ $\quad$ $y = 1\sin -135°$

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3) $B(1{,}0) \rightarrow r = 1$

$B'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $y = r\sin\theta$

$-\frac{1}{2} = 1\cos\theta$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\sin\theta$

$-\frac{1}{2} = \cos\theta$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta$

$\theta = 120°, -120°$ $\quad$ $\theta =$

$120°, 60°$

4) $O_A, 180°. R_A, 90° = A(x', y')$

$x' = x\,cos\,90° - y\,sin\,90°$

$y' = x\,sin\,90° + y\,cos\,90°$

$x' = 1\,cos\,90° - 3\,sin\,90°$

$y' = 1\,sin\,90° + 3\,cos\,90°$

$x' = -3$ $\quad$ $y' = 1$

$\therefore A'(-3,1)$

Persamaan garis t *Persamaan garis s*

$t = \frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{-3-0}$ $s = \frac{y-0}{3-0} = \frac{x-0}{1-0}$

$-3y = x$ $y = 3x$

$y = -\frac{1}{3}x$

3) $B(1,0) \rightarrow r = 1$

$B'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$-\frac{1}{2} = 1\cos\theta$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\sin\theta$

$-\frac{1}{2} = \cos\theta$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta$

$\theta = 120°, -120°$ $\theta = 120°, 60°$

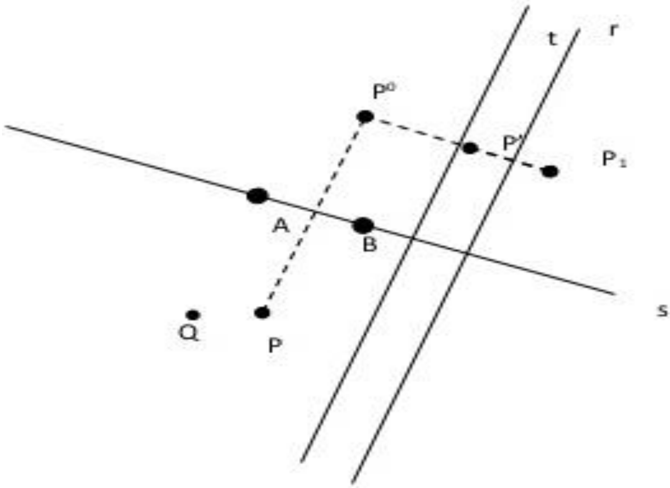
BAB IX

1) a). $P' = G_{AB}M_s(P)$

$P° = R_s(P)$

$P' = R_t(P°) = R_tR_s(P)$

$P' = R_t(P_1) = R_tR_tR_s(P) = G_{AB}R_s(P)$



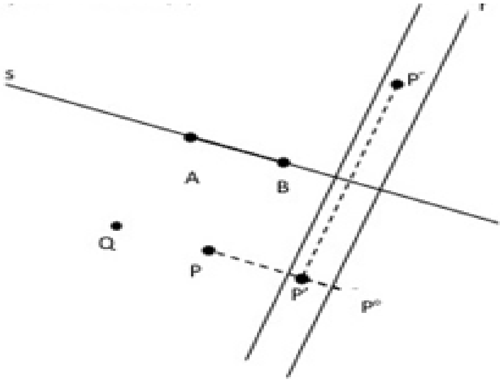
Gambar 9.4 Jawaban Latihan Soal 1a

b) $P'' = R_s G_{AB}(P)$

$P^\circ = R_s P$

$P' = R_s(P^\circ) = R_s R_s(P)$

$P'' = R_s(P') = R_s R_s R_s(P) = R_s G_{AB}(P)$



Gambar 9.5 Jawaban Latihan Soal 1b

c) R Sehingga $G_{AB}R_s(P) = Q$

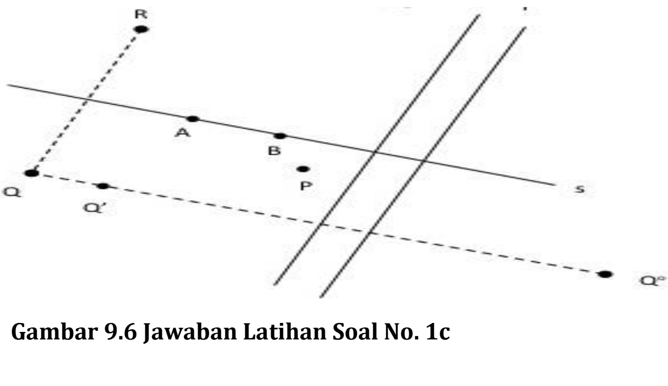
$R_rR_tR_s(R) = Q$

$R = R_sG_{AB}(P)$

$Q° = R_t(Q)$

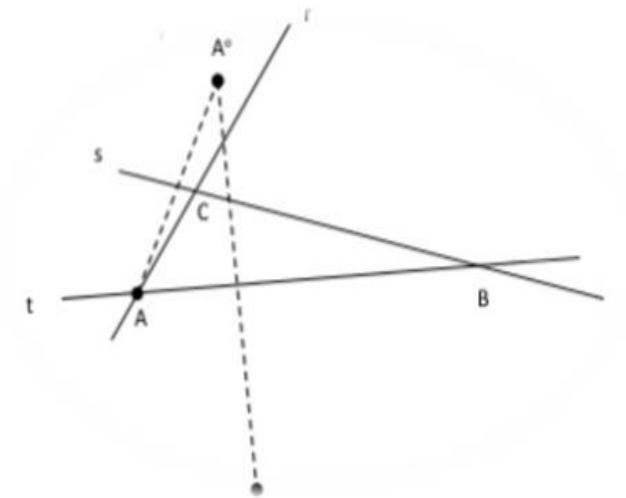
$Q' = R_t(Q°) = R_tR_r(Q)$

$R = M_s(Q') = M_sM_tM_r(Q)$



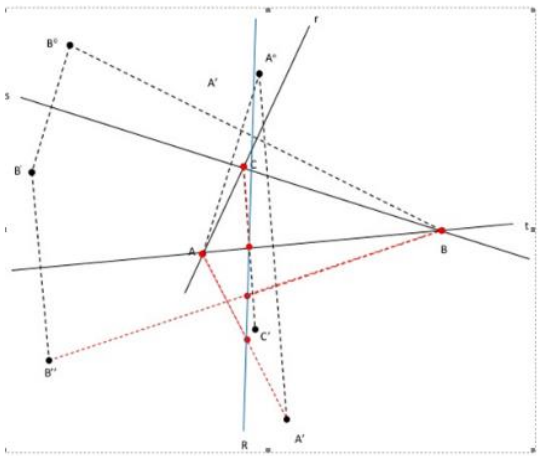
Gambar 9.6 Jawaban Latihan Soal No. 1c

2) a)



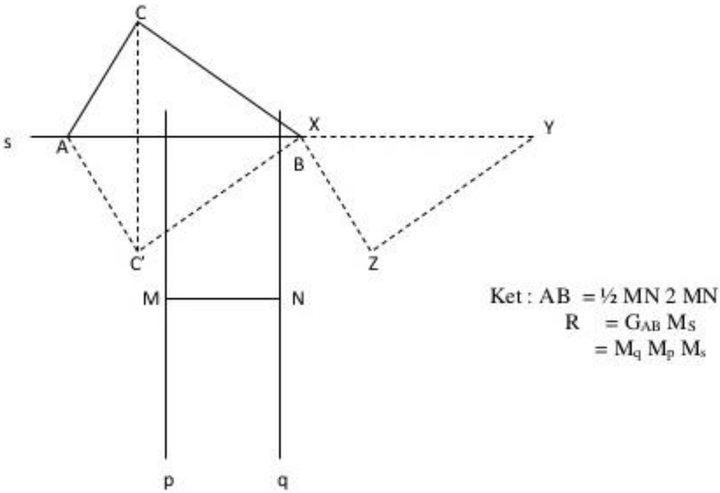
Gambar 9.7 Jawaban Latihan Soal No.2a

b)



Gambar 9.8 Jawaban Latihan Soal No. 2b

3) Lukislah sumbu s sehingga $R = G_{AB}M_s$ memetakan $\triangle\, ABC$ pada $\triangle\, XYZ$



Gambar 9.9 Jawaban Latihan Soal No. 3

4) Dipunya sebuah refleksi M_g dan sebuah translasi G_{AB} maka $R = G_{AB}M_g$

Sehingga $R^2 = R\ R$

$$= G_{AB}M_gG_{AB}M_g$$

$$= G_{AB}M_gM_gG_{AB}$$

$$= G_{AB}\ \mathrm{I}\ G_{AB}$$

$$= G_{AB}G_{AB}$$

$$= G_{CD}$$

BAB X

1) Titik A’(-16,24) merupakan bayangan dari titik $A(4,-6)$ yang didilatasikan dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala -4.
2) Peta dari dilatasi garis $3x - 5y + 15 = 0$ terhadap pusat $O(0,0)$ dengan faktor skala 5 adalah $3x - 5y + 75 = 0$
3) bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ yang didilatasi [O,4] adalah $x^2 + y^2 - 24x + 8y + 16 = 0$
4) bayangan Titik P(12,-5) yang didilatasi $[A, \frac{1}{2}]$ adalah P’(5,-2).
5) bayangan titik Q(3,-2) oleh [O,4k] adalah Q’(-24,16)

Glosarium

Biografi Penulis

Meyta Dwi Kurniasih, M. Pd lahir di Jakarta, 17 Mei 1986 ini aktif mengajar sebagai dosen di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) UHAMKA Jakarta. Saat ini Meyta menjabat sebagai sekretaris Program Studi Matematika UHAMKA periode 2017-2021. Selain mengajar, Meyta juga menjadi salah satu anggota IndoMS dan aktif mengikuti berbagai kegiatan IndoMS. Pendidikan terakhir Meyta adalah memperoleh Magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Jakarta tahun 2014.

Isnaini Handayani, M. Pd lahir di Jakarta, 13 Oktober 1986, saat ini berprofesi sebagai dosen pendidikan matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) UHAMKA Jakarta. Saat ini Isnaini menjadi salah satu anggota IndoMS dan aktif dalam berbagai kegiatan yang diselenggarakan oleh organisasi profesi ini. Pendidikan terakhir Isnaini adalah memperoleh Magister Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia Bandung tahun 2011.

Buku Ajar ini menampilkan pembelajaran Geometri Transformasi secara mudah dipahami dan keeutentikan sebagai bahan ajar yang dapat menjadi sumber belajar bagi mahasiswa.

Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd. Kaprodi P. Matematika