非整数階の微積分

岩山 隆寛*
神戸大学 大学院理学研究科 地球惑星科学専攻

2013 年 10 月 9 日

1　はじめに

実変数 t のある実関数 $f(t)$ を微分することを考えよう. $f(t)$ の 1 階微分を求めるには, 微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を f に 1 回作用させる. $f(t)$ の n 階微分は微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を f に n 回作用させればよい. ここで n は正の整数であるが, n が非整数 (実数) の場合, すなわち非整数階の微分というものを考えられないだろうか? という素朴な疑問がわく.

例えば, $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $(a \in \mathbb{R})$, を考えると,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \beta(t-a)^{\beta-1}, \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} &= \beta(\beta-1)(t-a)^{\beta-2}, \\
&\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} &= \beta(\beta-1)\ldots\{\beta-(n-1)\}(t-a)^{\beta-n}.
\end{aligned}$$

となることは明らかである. ここで, 最後の表式を gamma 関数

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad (n > 1) \tag{1}$$

を用いて表現してみる. gamma 関数 は

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \tag{2}$$

* e-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp

という性質を持っている．そこで,

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(t-a)^{\alpha-n}, \tag{3}$$

と表せる．

gamma 関数は, (2) なる性質を持つもので, 実変数 $\nu \in \mathbb{R}$ に対しても解析接続により $\Gamma(\nu)$ を定義することができる．そこで, (3) で n を実数 ν にとって, $(t-a)^{\beta}$ の ν 階微分なるものを定義できそうである．では冪関数ではなく一般の関数に対してもこのように非整数階の微分やさらには積分といったものは定義し, 計算できるであろうか?

非整数階の微積分は決して新しい概念ではなく, 古典的な微積分のアイデアが知られたころにはすでに興味が持たれ始めている．例えば, 微積分を創始した Leibnitz が 1695 年に L'Hospital にあてた手紙の中に, そのような記述があると言われている．初期の系統的な研究は 19 世紀の初めから中ごろにかけて Liouville(1832) によって行われたが, Euler(1730), Lagrange(1772) 等も非整数階微積分の研究の初期段階において貢献してきたそうである.[5] 本稿では非整数階の微積分についてその基礎を整理し, 書き留めておくことにする．

非整数階の微分の定義にはいくつかの流儀があるようである．大雑把に, 有限差分 (後方差分) を基礎にした定義の仕方（Grünwald–Letnikov Fractional Derivatives）, 積分を基礎にした定義の仕方（Riemann–Liouville Derivatives, Caputo's Fractional Derivatives）, それ以外の方法に大別できる.[6][*1]

本稿では, 広く用いられている積分を基礎にした定義の仕方（Riemann–Liouville Derivatives, Caputo's Fractional Derivatives）とその性質を解説することにする．日本語による非整数階微積分の解説は, 杉本 (1985, 1990) に詳しいが, 式の詳しい証明は記されていない．本稿は式の証明を丁寧に解説することにする．即ち, 本稿は杉本 (1985, 1990) を読むための序論的文章という位置づけである．本稿では幾つかの関数の非整数階微積分について紹介しているが, 充分ではない．また, 非整数階微積分の応用は本稿には含まれていない．別の機会に書くことにする．

記号の定義をしておく．Davis(1936) にしたがって, 実関数 $f(t)$ に対する 非整数階微分（ν 階微分）を

$${}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \tag{4}$$

[*1] 一方, 非整数階積分の定義は, 非整数階微分のような種類はなく, Riemann-Liouville 積分のみであるようである．

と表す．ここで ν は正の実数である ($\nu \in \mathbb{R}$)．添え字 a, t も実数で非整数階微分演算に関連した 2 つの極限を表し, Ross(1977) にしたがって, 非整数階微分の terminal と呼ぶことにする．

非整数階積分は, 負の次数を持つ微分と考え, 非整数階微分と記号の区別をすることなく,

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t), \quad (\lambda > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}) \tag{5}
$$

と表す.

2 Riemann–Liouville 微分

2.1 非整数階積分（Riemann-Liouville 積分）

積分は 2 重積分, 3 重積分など n 重 (n–fold) 積分という言葉で表現するが, ここでは積分を微分の拡張と考え, 2 重積分, 3 重積分を 2 階積分, 3 階積分といった n 階 (n th order) 積分という言葉で表現する．先ず, 多重積分を整数階から非整数階に拡張することから始める.

2.1.1 Cauchy の積分公式

実変数 t の実関数 $f(t)$ の n 階積分を以下のように定義する:

$$
\mathrm{I}^n f(t) \equiv \int_a^t \mathrm{d}t_n \int_a^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_a^{t_3} \mathrm{d}t_2 \int_a^{t_2} \mathrm{d}t_1 f(t_1). \tag{6}
$$

ここで n は自然数とする ($n \in \mathbb{N}$)．(6) は以下のような積分に書き下すことができる:

$$
\mathrm{I}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{7}
$$

(7) は Cauchy の積分公式と呼ばれるものである.

(7) を数学的帰納法によって証明する．(7) において $n = 1$ とすると

$$
\mathrm{I}^1 f(t) = \int_a^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau
$$

であり, $n = 1$ のとき (7) は成り立つ．次に, (7) が $n = m - 1$ において成り立つと仮定する．即ち,

$$
\mathrm{I}^{m-1} f(t) = \frac{1}{(m-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-2} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8}
$$

このとき (8) を a から t まで積分すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}^m f(t) &= \int_a^t \mathrm{I}^{m-1} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0 \\
&= \int_a^t \mathrm{d}t_0 \frac{1}{(m-2)!} \int_a^{t_0} \mathrm{d}\tau\,(t_0-\tau)^{m-2} f(\tau) \\
&= \frac{1}{(m-2)!} \int_a^t \mathrm{d}\tau\, f(\tau) \int_\tau^t \mathrm{d}t_0\,(t_0-\tau)^{m-2} \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t \mathrm{d}\tau\,(t-\tau)^{m-1} f(\tau).
\end{aligned}
$$

2 番目から 3 番目の表現の変形では, τ による積分と t_0 による積分の順序を交換した:

$$
\int_a^t \mathrm{d}t_0 \int_a^{t_0} \mathrm{d}\tau = \int_a^t \mathrm{d}\tau \int_\tau^t \mathrm{d}t_0. \tag{9}
$$

以上より (7) が証明できた.

2.1.2 非整数階積分（Riemann-Liouville 積分）の定義

Cauchy の積分公式 (7) は gamma 関数を用いて

$$
\mathrm{I}^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10}
$$

と書き下すことができる. そこで (10) を拡張して, $\lambda > 0$ となる実数として λ 階積分を以下で定義する:

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{11}
$$

なお, $t-\tau \to \tau$ の変数変換によって, (11) は

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{t-a} \tau^{\lambda-1} f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{12}
$$

と書くこともできる. (11) もしくは (12) は Riemann-Liouville 積分と呼ばれる.

2.1.3 Riemann-Liouville 積分の性質

1. 0 階積分:

   $\lambda \to 0$ の極限において, 非整数階積分は

   $$\lim_{\lambda \to 0} {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) = f(t) \tag{13}$$

   となる.

   (11) で λ をゼロとすると分母に $\Gamma(0)(=\infty)$ が現れてしまうので, (11) において λ がゼロの極限は自明ではない. (13) を証明する. それには (11) の右辺を部分積分する:

   $$\begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda)} \left.(t-\tau)^{\lambda} f(\tau)\right|_{\tau=a}^{t} + \frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda} \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} (t-a)^{\lambda} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda} \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

   (14) において $\lambda \to 0$ の極限を取ると

   $$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0} {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) &= f(a) + \int_a^t \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(a) + f(t) - f(a) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

   となり, (13) が証明できた.

2. 加法則と可換則:

   q 階積分ののち, p 階積分を行うことは, $p+q$ 階積分を行うことと同等である. 即ち, 加法則

   $$\boxed{{}_a\mathrm{D}_t^{-p} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t) \right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{-p-q} f(t).} \tag{15}$$

   が成り立つ. また, 積分の順序によらない (可換則):

   $${}_a\mathrm{D}_t^{-p} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t) \right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{-q} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-p} f(t) \right\}. \tag{16}$$

先ず, (15) を証明する.

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-p}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-q}f(t)\right\} &= {}_a\mathrm{D}_t^{-p}\left\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t \mathrm{d}\tau_1 (t-\tau_1)^{p-1}\int_a^{\tau_1}\mathrm{d}\tau_2\,(\tau_1-\tau_2)^{q-1}f(\tau_2) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t \mathrm{d}\tau_2 f(\tau_2)\int_{\tau_2}^t \mathrm{d}\tau_1 (t-\tau_1)^{p-1}(\tau_1-\tau_2)^{q-1}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ここで, 第 2 式から第 3 式への変形では, τ_1 による積分と τ_2 による積分の順序を交換した. (17) の最後の表現に現れた積分 $\int_{\tau_2}^t \mathrm{d}\tau_1 (t-\tau_1)^{p-1}(\tau_1-\tau_2)^{q-1}$ を考える. 変数変換 $\xi = \tau_1 - \tau_2$ を行うと

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau_2}^t \mathrm{d}\tau_1\,(t-\tau_1)^{p-1}(\tau_1-\tau_2)^{q-1} &= \int_0^{t-\tau_2}\mathrm{d}\xi\,(t-\tau_2-\xi)^{p-1}\xi^{q-1} \\
&= (t-\tau_2)^{p+q-1}\int_0^1 \mathrm{d}\eta\,(1-\eta)^{p-1}\eta^{q-1} \\
&= (t-\tau_2)^{p+q-1}B(q,p)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

となる. ここで $B(q,p)=\int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}\,\mathrm{d}x$ は beta 関数である. (18) の第 1 の表現から第 2 の表現には, 再び変数変換 $\eta = \xi/(t-\tau_2)$ を用いた. beta 関数と gamma 関数の関係式

$$
B(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{19}
$$

を用いると最終的に,

$$
\boxed{\int_{\tau_2}^t \mathrm{d}\tau_1\,(t-\tau_1)^{p-1}(\tau_1-\tau_2)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}(t-\tau_2)^{p+q-1}} \tag{20}
$$

を得る. (20) を (17) に代入すると

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-p}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-q}f(t)\right\} &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t \mathrm{d}\tau_2\, f(\tau_2)(t-\tau_2)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^t (t-\tau_2)^{p+q-1}f(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2 \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-p-q}f(t)
\end{aligned}
$$

となり, 加法則 (15) が証明できた.

可換則 (16) については, 加法則の証明で p と q を交換すると,

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-q}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-p}f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{-p-q}f(t) \tag{21}
$$

が証明できるので, 加法則 (15) と (21) より 可換則 (16) が証明できる.

3. 1 階積分は -1 階微分である:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-1}f(t)\right\} = f(t). \tag{22}
$$

(22) を証明する前に以下の公式を証明する:

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}f(t)\right\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(t-a)^{\lambda-1}f(a) + {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}.} \tag{23}
$$

(12) を t で微分する. 非整数階積分として (12) の表式を採用し, 微分を定義に戻っ

て差分の極限としてとらえる:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)\right\} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t+\Delta t) - {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Delta t}\left\{\int_0^{t+\Delta t-a}\tau^{\lambda-1} f(t+\Delta t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \int_0^{t-a}\tau^{\lambda-1} f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Delta t}\left\{\int_{t-a}^{t+\Delta t-a}\tau^{\lambda-1} f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_0^{t-a}\tau^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}f(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\Delta t\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{O}\left((\Delta t^2)\right)\right\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left\{(t-a)^{\lambda-1} f(a) + \int_0^{t-a}\tau^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}f(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{O}(\Delta t)\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left\{(t-a)^{\lambda-1} f(a) + \int_0^{t-a}\tau^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}f(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left\{(t-a)^{\lambda-1} f(a) - \int_0^{t-a}\tau^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}f(t-\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left\{(t-a)^{\lambda-1} f(a) + \int_a^{t}(t-\tau)^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (24)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(t-a)^{\lambda-1} f(a) + {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}.
\end{aligned}
$$

2 行目から 3 行目の表現には f の Taylor 展開を用いた. (24) において $\lambda \to 1$ とすると (22) が証明できる:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-1} f(t)\right\} = f(a) + \int_a^t \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = f(t).
$$

4. 線形性: 非整数階積分は線形演算である.

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\,{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) + \beta\,{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} g(t) \qquad (25)
$$

Riemann-Liouville 積分の定義に従えば, (25) は簡単に示せる:

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}(\alpha f(\tau)+\beta g(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \frac{\beta}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \alpha\,{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t) + \beta\,{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} g(t).
\end{aligned}$$

2.2 非整数階微分（Riemann-Liouville 微分）

2.2.1 非整数階微分（Riemann-Liouville 微分）の定義

$0<\lambda\le 1$ とした λ 階積分を m 階微分することにより非整数階微分を導入する. ここで m は自然数とする ($m\in\mathbb{N}$). 即ち,

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{m-\lambda} f(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)\right\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

(26) で $\nu = m-\lambda\ (>0)$ とすると, $0\le m-1\le \nu < m$ となる ν 階微分として

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f(t)\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\nu)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{27}$$

を定義する. (27) が最も広く知られている非整数階微分の定義で, Riemann-Liouville の定義 (もしくは, Riemann-Liouville 微分) と呼ばれる.

2.2.2 Riemann-Liouville 微分の性質

1. $\nu = m-1$ のとき,

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{m-1} f(t) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-1} f(t)\right\} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}$$

即ち, (27) は通常の微分に戻る.

2. $\nu = m$ のとき,

$$ {}_a\mathrm{D}_t^m f(t) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^0 f(t) \right\} = \frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}. $$

ここで, (13) を用いた. したがって, (27) は通常の微分に戻る.

3. ν 階積分を ν 階微分するともとの関数に戻る:

$$ \boxed{ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-\nu} f(t) \right\} = f(t). \qquad (28) } $$

実際に, (27) と加法則 (15) を用いて

$$ \begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-\nu} f(t) \right\} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-\nu} f(t) \right\} \right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-m} f(t) \right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-1} \right\}}_{=1 \ \because\ (22)} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-1)} f(t) \right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-1)} f(t) \right\} \\ &= \ldots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-1} f(t) \right\} = f(t). \end{aligned} $$

が示せる.

4. Riemann-Liouville 微積分の可換性・加法性: $f(t)$ を ν 階微分ののち ν 階積分を行った場合,

$$ \boxed{ {}_a\mathrm{D}_t^{-\nu} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \right\} = f(t) - \sum_{j=1}^{m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{\nu-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-j}}{\Gamma(\nu+1-j)} \qquad (29) } $$

となる. ここで, $m-1 \leq \nu < m$, $m \in \mathbb{N}$ である. (29) を証明する. 先ず

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{-\nu} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(\nu+1)} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \right\} \right] \qquad (30) $$

である．ここで (30) の被微分関数は

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-(\nu+1)}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t)\right\} &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\nu}\,{}_a\mathrm{D}_\tau^{\nu} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\nu}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(m-\nu)} f(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= -\left[\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}\,{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t (t-\tau)^{\nu-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\tau^{m-1}}\left\{{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(m-\nu)} f(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= -\left[{}_a\mathrm{D}_t^{\nu-1} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t (t-\tau)^{\nu-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\tau^{m-1}}\left\{{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(m-\nu)} f(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= -\sum_{j=1}^{m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{\nu-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\nu+1-j}}{\Gamma(\nu+2-j)} - {}_a\mathrm{D}_t^{-1} f(t).
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで, 第 2 式から第 3 式への変形には部分積分を 1 回行い, 第 4 式から第 5 式への変形には $m-1$ 回の部分積分を行った．上の式を (30) に代入し, (22) を用いることにより, (29) が導かれる．

(28) と (29) より非整数階の積分と非整数階微分は可換ではない．これは整数階の微積分でも同様である．

(28) と (29) の一般化として, 正の実数 p, q に対して

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{p}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t) \tag{31}
$$

と

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-q}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{p} f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q+1-j)} \tag{32}
$$

が成り立つ．なお, $0 \leq m-1 \leq p < m$, $m \in \mathbb{N}$ である．

先ず (31) を証明する．$q \geq p \geq 0$ と $p > q \geq 0$ の場合に分けて考える．先ず, $q \geq p \geq 0$ の場合,

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^p \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t) \right\} &= {}_a\mathrm{D}_t^p \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-p} \left({}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} f(t) \right) \right\} \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} f(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t).\end{aligned}$$

ここで, (15) と (28) を用いた．次に $p > q \geq 0$ の場合, $m-1 \leq p < m$ となる $m \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^p \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t) \right\} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p)} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t) \right\} \right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p+q)} f(t) \right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t).\end{aligned}$$

第 2 式への変形には, (15) を再び用いている．

次に (32) を証明する．再び, $q \geq p \geq 0$ の場合と, $p > q \geq 0$ の 2 つの場合について分けて考える．$q \geq p \geq 0$ のとき, (15) と (29) を用いると,

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^{-q} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^p f(t) \right\} &= {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{-p} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^p f(t) \right\} \right] \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} \left\{ f(t) - \sum_{j=1}^{m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p+1-j)} \right\} \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} f(t) - \sum_{j=1}^{m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{{}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} (t-a)^{p-j}}{\Gamma(p+1-j)} \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t) - \sum_{j=1}^{m} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q+1-j)}.\end{aligned}$$

ここで, m は $m-1 \leq p < m$ となる $m \in \mathbb{N}$ である．第 3 式から第 4 式への変形には冪関数の非整数階微分 (44) を用いた．(44) はあとで証明する．$p > q \geq 0$ のとき, (31) を用いて

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{-q} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^p f(t) \right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} \left[{}_a\mathrm{D}_t^{-p} \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^p f(t) \right\} \right] $$

とかけるので, $q \geq p \geq 0$ のときと同様にして, (32) が証明できる．

5. Riemann-Liouville 微分の加法性・可換性: $f(t)$ を q 階微分したのち p 階微分を行った結果は, $m, n \in \mathbb{N}$, ただし $0 \leq m-1 \leq p < m$, $0 \leq n-1 \leq q < n$, として

$$
{}_a\mathrm{D}_t^p\left\{{}_a\mathrm{D}_t^q f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)} \quad (33)
$$

である. (33) を証明する.

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^p\left\{{}_a\mathrm{D}_t^q f(t)\right\} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p)}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^q f(t)\right\}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(m+1-p-j)}\right] \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j).}
\end{aligned}
$$

ここで, 第 1 式から第 2 式への変形には (32) を, 第 2 式から第 3 式への変形には (43) を用いた.

$f(t)$ を p 階微分したのち q 階微分を行った結果は

$$
{}_a\mathrm{D}_t^q\left\{{}_a\mathrm{D}_t^p f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \qquad (34)
$$

となる. (34) は (33) において p と q, m と n を交換すれば得られる. (33), (34) より一般に Riemann-Liouville 微分は微分の順序に可換性はない. $p=q$ という自明な場合, もしくは (33), (34) の総和の項がゼロの場合のみ可換則が成り立つ.

6. 線形性: 非整数階微分は線形演算である.

$$
{}_a\mathrm{D}_t^\nu\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\,{}_a\mathrm{D}_t^\nu f(t) + \beta\,{}_a\mathrm{D}_t^\nu g(t). \qquad (35)
$$

Riemann-Liouville 微分の定義に従えば, (35) は簡単に示せる:

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^\nu\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} &= \frac{1}{\Gamma(m-\nu)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1}(\alpha f(\tau) + \beta g(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(m-\nu)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \frac{\beta}{\Gamma(m-\nu)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \alpha\,{}_a\mathrm{D}_t^\nu f(t) + \beta\,{}_a\mathrm{D}_t^\nu g(t).
\end{aligned}
$$

2.3 具体的な関数の非整数階微積分

ここでは, 具体的な関数の非整数階微積分を計算する. 取り上げる関数としては定数関数と冪関数と指数関数である.

2.3.1 Riemann-Liouville **積分**

1. **定数関数**

   定数

$$f(t) = A, \tag{36}$$

   の非整数階積分を行う. ここで A は定数である. このとき $f(t)$ の λ 階積分は,

$$\boxed{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} A = \frac{A}{\Gamma(\lambda+1)}(t-a)^{\lambda}} \tag{37}$$

   である.[*2]

2. **冪関数**

   冪関数

$$f(t) = (t-a)^{\beta} \tag{38}$$

   の λ 階積分は,

$$\boxed{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\lambda+\beta+1)}(t-a)^{\lambda+\beta}} \tag{39}$$

[*2] (37) の証明:

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} A &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} A \, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{A}{\Gamma(\lambda+1)}(t-a)^{\lambda}.
\end{aligned}$$

である.[*3]

3. **指数関数**

   指数関数

$$f(t) = e^{\alpha t} \tag{40}$$

   の λ 階積分[*4]は,

$$\boxed{{}_0\mathrm{D}_t^{-\lambda} e^{\alpha t} = t^\lambda E_{1,1+\lambda}(\alpha t) \tag{41}}$$

   である. ここで, $E_{\alpha,\beta}(x)$ は Mittag-Leffler 関数 (72) である. [*5]

2.3.2 Riemann-Liouville 微分

2.3.1 節の結果を使って, 定数関数と冪関数の Riemann-Liouville 微分を計算する.

1. **定数関数**

   定数関数 (36) の ν 階 Riemann-Liouville 微分は

[*3] (39) の証明:

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}(\tau-a)^\beta \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\lambda+\beta+1)}(t-a)^{\lambda+\beta}.\end{aligned}$$

ここで, 第 1 式から第 2 式への変形には (20) を用いた.

[*4] ここで terminal $a = 0$ としていることに注意.

[*5] (41) の証明:

$$\begin{aligned}{}_0\mathrm{D}_t^{-\lambda} e^{\alpha t} &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} e^{\alpha\tau} \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\frac{(\alpha\tau)^k}{\Gamma(k+1)} \, \mathrm{d}\tau \\ &= t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\lambda+1)}(\alpha t)^k \\ &= t^\lambda E_{1,1+\lambda}(\alpha t).\end{aligned}$$

ここで, 第 1 式から第 2 式への変形は指数関数の Taylor 展開を, 第 2 式から第 3 式への変形には (20) を用いた.

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} A = \frac{A}{\Gamma(1-\nu)}(t-a)^{-\nu} \tag{42}
$$

である.[*6]整数階の微分とは異なり, Riemann-Liouville 微分では定数は微分してもゼロにはならないことに注意する．これは Riemann-Liouville 微分の特徴の一つである．なお, あとで見るように非整数階微分の別の定義である Caputo 微分では定数の微分はゼロになる.

2. **冪関数**

冪関数 (38) の ν 階微分は,

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)}(t-a)^{\beta-\nu} \tag{44}
$$

---

*6 (42) の証明:

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} A &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} A\right\} \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{\frac{A}{\Gamma(m-\nu+1)}(t-a)^{m-\nu}\right\} \\
&= \frac{A}{\Gamma(1-\nu)}(t-a)^{-\nu}.
\end{aligned}
$$

ここで, 第 1 式から第 2 式への変形には, (37) を用いた．また, 第 2 式から第 3 式の変形には冪関数 $(t-a)^{\beta}$ の m 階微分,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(t-a)^{\beta} &= \beta(\beta-1)\cdots(\beta-m+1)(t-a)^{\beta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(t-a)^{\beta-m},
\end{aligned} \tag{43}
$$

の公式を用いた.

である.[*7]

3. **指数関数**

指数関数 (40) の ν 階微分[*8]は,

$$ {}_0\mathrm{D}_t^{\nu} e^{\alpha t} = t^{-\nu} E_{1,1-\nu}(\alpha t) \tag{45} $$

である.[*9]

その他の関数の Riemann-Liouville 微分は Podlubny (1999) の付録に表が掲載されている.

---

*7 (44) の証明:

$$ \begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}(t-a)^{\beta} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)}(t-a)^{\beta} \right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\nu+\beta+1)}(t-a)^{m-\nu+\beta} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)}(t-a)^{\beta-\nu}. \end{aligned} $$

*8 ここで terminal $a = 0$ としていることに注意.

*9 (45) の証明:

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{D}_t^{\nu} e^{\alpha t} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{ {}_0\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} e^{\alpha t} \right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{ t^{m-\nu} E_{1,1+m-\nu}(\alpha t) \right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left\{ t^{m-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+m-\nu+1)}(\alpha t)^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1-\nu)} t^{k-\nu} \\ &= t^{-\nu} E_{1,1-\nu}(\alpha t). \end{aligned} \tag{46} $$

ここで, 第 1 式から第 2 式への変形は (41) を, 第 2 式から第 3 式への変形には Mittag-Leffler 関数の定義 (72) を, 第 3 式から第 4 式への変形には (43) を用いた.

3　Caputo 微分

3.1　Caputo 微分の定義

Riemann-Liouville 微分とは別の非整数階微分として, Caputo (1967) によって導入された Caputo 微分が知られている．Caputo 微分は次のように定義される:

$$
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{m-\lambda} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} \frac{\mathrm{d}^m f(\tau)}{\mathrm{d}\tau^m}\, \mathrm{d}\tau. \tag{47}
$$

もしくは, $\nu \equiv m - \lambda$ として ν 階微分を

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) &\equiv {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} \left\{ \frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m} \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1} \frac{\mathrm{d}^m f(\tau)}{\mathrm{d}\tau^m}\, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{48}
$$

と定義する．ここで, $m-1 \leq \nu < m$ である．

Caputo 微分と Riemann-Liouville 微分とは次の関係式で結ばれる:

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-\nu)} (t-a)^{j-\nu} f^{(j)}(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t). \tag{49}
$$

$f^{(j)}(x)$ は $f(x)$ の j 階微分である．

(49) を数学的帰納法により証明する．(49) において, $m = 1$ のとき

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (t-a)^{-\nu} f(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t). \tag{50}
$$

一方, 先に導出した公式 (23) と Riemann-Liouville 微分の定義, Caputo 微分の定義, 及

び $\nu = 1 - \lambda$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)\right\} &= {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(t-a)^{\lambda-1} f(a) + {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}(t-a)^{-\nu} f(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \end{aligned} \tag{51}$$

となり, (49) は $m = 1$ のときに成立する. (49) が $m = n(= \nu + \lambda)$ のときに成立すると仮定する. 即ち,

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(j+1-\nu)}(t-a)^{j-\nu} f^{(j)}(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(j+1-\nu)}(t-a)^{j-\nu} f^{(j)}(a) + {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}. \end{aligned} \tag{52}$$

(52) を t で微分する. (23) および $\nu = n - \lambda$ に注意すると

$$\begin{aligned}{}_a\mathrm{D}_t^{\nu+1} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t)\right\} = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda} f(t)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{j-\nu}{\Gamma(j+1-\nu)}(t-a)^{j-\nu-1} f^{(j)}(a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(j-\nu)}(t-a)^{j-\nu-1} f^{(j)}(a) + \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(t-a)^{\lambda-1} f^{(n)}(a) + {}_a\mathrm{D}_t^{-\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+1} f(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}}\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(j-\nu)}(t-a)^{j-\nu-1} f^{(j)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}(t-a)^{n-\nu-1} f^{(n)}(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu+1} f(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\Gamma(j+1-(\nu+1))}(t-a)^{j-(\nu+1)} f^{(j)}(a) + {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu+1} f(t). \end{aligned} \tag{53}$$

(53) は (49) が $\nu + 1$ でも成立することを示している.

3.1.1 Caputo **微分の性質**

1. $\nu = m - 1$ のとき, (48) より

$$ {}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = \frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}, \tag{54}$$

即ち, 整数階の Caputo 微分は通常の微分に一致する.

2. $\nu = m$ のとき,

$$ {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\nu}_{t} f(t) = \frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}, \tag{55} $$

即ち, 整数階の Caputo 微分は通常の微分に一致する.

(55) を証明する. 部分積分により,

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\nu}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\nu-1} f^{(m)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[-\frac{1}{(m-\nu)\Gamma(m-\nu)} (t-\tau)^{m-\nu} f^{(m)}(\tau) \right]_{\tau=a}^{t} \\ &\quad + \frac{1}{(m-\nu)\Gamma(m-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\nu} f^{(m+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\nu+1)} (t-a)^{m-\nu} f^{(m)}(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\nu+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\nu} f^{(m+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{56} $$

を得る. (56) において, $\nu = m$ とすると,

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{m}_{t} f(t) &= f^{(m)}(a) + \int_a^t f^{(m+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f^{(m)}(a) + f^{(m)}(t) - f^{(m)}(a) = f^{(m)}(t) \end{aligned} $$

となり, (55) が証明できた.

3. 線形性: Caputo 微分は線形演算である.

$$ {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\nu}_{t} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\nu}_{t} f(t) + \beta {}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\nu}_{t} g(t). \tag{57} $$

3.2 具体的な関数の Caputo 微分

2.3.1 節の結果を使って, 定数関数と冪関数の Caputo 微分を計算する.

1. **定数関数**

定数関数 (36) の ν 階 Capto 微分は

$$
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} A = 0 \tag{58}
$$

である．[*10]

2. **冪関数**

 冪関数 (38) の ν 階 Caputo 微分は,

$$
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)} (t-a)^{\beta-\nu} \tag{59}
$$

 である．[*11] ここで考えた冪関数の非整数階微分では Riemann-Liouville 微分と Caputo 微分が一致する．これは, Riemann-Liouville 微分と Caputo 微分の関係式 (49) で $f^{(m)}(a) = 0$ であることからもわかる．

4 非整数階微積分の Laplace 変換

本節では, 微積分の terminal a をゼロにとる: $a = 0$. また関数 $f(t)$ の Laplace 変換を大文字 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\}$ で表す．

[*10] (58) を証明する．

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} A &= \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} \frac{\mathrm{d}^m A}{\mathrm{d}t^m} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

[*11] (59) を証明する:

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} (t-a)^{\beta} &= \left\{ {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} \frac{\mathrm{d}^m (t-a)^{\beta}}{\mathrm{d}t^m} \right\} \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} \left\{ \beta(\beta-1)\dots(\beta-m+1)(t-a)^{\beta-m} \right\} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)} (t-a)^{\beta-\nu}.
\end{aligned} \tag{60}
$$

ここで, 第 1 式から第 2 式への表現には (43) を, 第 2 式から第 3 式への表現には (39) を用いた．

4.1 Riemann-Liouville 積分の Laplace 変換

Riemann-Liouville 積分は畳み込み積分として書くことができる:

$$
\begin{aligned}
{}_0D_t^{-\lambda} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} * f(t).
\end{aligned}
\tag{61}
$$

(61) を Laplace 変換する. 畳み込み積分の Laplace 変換 (69) を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}_0D_t^{-\lambda} f(t); s\right\} &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \mathcal{L}\left\{t^{\lambda-1} * f(t); s\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \mathcal{L}\left\{t^{\lambda-1}; s\right\} \mathcal{L}\left\{f(t); s\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで, 冪関数 $t^{\lambda-1}$ の Laplace 変換は

$$
\mathcal{L}\left\{t^{\lambda-1}; s\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\lambda-1}\, \mathrm{d}t = s^{-\lambda} \int_0^\infty \xi^{\lambda-1} e^{-\xi}\, \mathrm{d}\xi = s^{-\lambda}\Gamma(\lambda) \tag{62}
$$

である. したがって,

$$
\boxed{\mathcal{L}\left\{{}_0D_t^{-\lambda} f(t); s\right\} = s^{-\lambda} F(s)} \tag{63}
$$

を得る.

4.2 Riemann-Liouville 微分の Laplace 変換

Riemann-Liouville 微分は

$$
{}_0\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{{}_0\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f(t)\right\}
$$

と書けるので, 導関数の Laplace 変換 (71) と Riemann-Liouville 積分の Lapalce 変換 (63) の知識を使って

$$\mathcal{L}\left\{{}_0\mathrm{D}_t^{\nu} f(t); s\right\} = s^{\nu}F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^j \left[{}_0\mathrm{D}_t^{\nu-j-1} f(t)\right]_{t=0} \tag{64}$$

となる.*12 Riemann-Liouville 微分の Laplace 変換の特徴は, (64) の右辺第 2 項に現れている非整数階微分の初期値が必要な点である.

4.3 Caputo 微分の Laplace 変換

Caputo 微分は

$$ {}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = {}_0\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f^{(m)}(t)$$

と書けるので, 導関数の Laplace 変換 (71) と Riemann-Liouville 積分の Lapalce 変換 (63) の知識を使って

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t); s\right\} = s^{\nu}F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^{\nu-j-1} f^{(j)}(0) \tag{65}$$

*12 (64) の証明:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}_0\mathrm{D}_t^{\nu} f(t); s\right\} &= s^m \mathcal{L}\left\{{}_0\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f(t); s\right\} - \sum_{j=0}^{m-1} s^j \left[\frac{\mathrm{d}^{m-j-1}}{\mathrm{d}t^{m-j-1}} \left\{{}_0\mathrm{D}_t^{-(m-\nu)} f(t)\right\}\right]_{t=0} \\
&= s^m s^{-m+\nu} F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^j \left[{}_0\mathrm{D}_t^{\nu-j-1} f(t)\right]_{t=0} \\
&= s^{\nu} F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^j \left[{}_0\mathrm{D}_t^{\nu-j-1} f(t)\right]_{t=0}.
\end{aligned}$$

となる.[*13] 非整数階微分の初期値に依存する Riemann-Liouville 微分の Laplace 変換とは異なり, Caputo 微分の Laplace 変換の特徴は, (65) の右辺第 2 項に現れている整数階微分の初期値が必要な点である.

5 まとめ

非整数階の微積分について, その定義と代表的な性質を見てきた. 整数階の微分は, 関数の局所的な性質を表すのに対して, 非整数階の微分は, 畳み込み積分の形で与えられるので非局所的な量であり, 被微分関数を時間の関数と見なすと履歴の効果を含んでいることになる. 履歴の効果を含んだ物理量という観点は決して新しい概念ではないが, ある種の履歴効果が微分と見なせるという点が目新しく, また（個人的には）面白い. なお, 本稿ではあまり多くの具体的な関数の非整数階微分を取り扱わなかったが, (terminal の選び方にもよるが) 簡単に非整数階微分できる関数は基本的に冪関数であり, それ以外の関数の計算例は余り多くないようである.[6, 10] なお, 整数階の微分では Leibnitz 則や合成関数の微分に関する公式が存在する. これらの性質が非整数階微分ではどのようになるのかも, 非整数階微分のテキストには書かれている基本的な事項であるが, 本稿では取り扱っていない. これらの法則が非整数階微分ではこれらは成り立たないことは, 非整数階微分が積分で表現できることから容易に想像できるであろう.

[*13]
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\nu} f(t); s\right\} &= s^{-(m-\nu)}\mathcal{L}\left\{f^{(m)}(t); s\right\} \\
&= s^{-(m-\nu)}\left\{s^m F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^j f^{(m-j-1)}(0)\right\} \\
&= s^{\nu} F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^{\nu-m+j} f^{(m-j-1)}(0) \\
&= s^{\nu} F(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^{\nu-j-1} f^{(j)}(0).
\end{aligned}$$

付録 A　Laplace 変換の基礎

本文で必要な Laplace 変換の知識を整理しておく．関数 $f(x)$ の Laplace 変換を以下のように定義する:

$$\mathcal{L}\left\{f(t); s\right\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{66}$$

ここで, $s > 0$ である.

関数 $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分は次のように定義される:

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{67}$$

畳み込み積分は可換であることを注意しておく．即ち,

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t). \tag{68}$$

(68) を証明するには, (67) において, $t - \tau = \xi$ と変換する．即ち,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\xi) g(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi = g(t) * f(t).$$

したがって, (68) が証明できた.

畳み込み積分を Laplace 変換する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t); s\right\} &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} \int_0^t \mathrm{d}\tau\, f(t-\tau) g(\tau) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, e^{-s\tau} g(\tau) \int_\tau^\infty \mathrm{d}t\, e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, e^{-s\tau} g(\tau) \int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, e^{-s\xi} f(\xi) \\
&= \mathcal{L}\left\{f(t); s\right\} \mathcal{L}\left\{g(t); s\right\}
\end{aligned} \tag{69}$$

即ち, 2 つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分の Laplace 変換は, それぞれの関数の Laplace 変換の積で表される.

導関数 $\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m}$ の Laplace 変換は,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f^{(m)}(t); s\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-st} f^{(m-1)}(t)\right]_0^\infty - s\int_0^\infty e^{-st} f^{(m-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -f^{(m-1)}(0) + s\mathcal{L}\left\{f^{(m-1)}(t); s\right\}
\end{aligned} \tag{70}$$

となる. (70) を繰り返し適用して,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(m)}(t);s\right\} = s^m \mathcal{L}\left\{f(t);s\right\} - \sum_{j=0}^{m-1} s^j f^{(m-j-1)}(0) \tag{71}$$

を得る.

付録 B　Mittag-Leffler 関数

指数関数 e^x は整数階の微積分に対してその関数形をかえないので, 整数階微積分にとって重要な関数である. 指数関数の冪級数展開に基づいて以下のような 2 つのパラメターを持った関数を定義する:

$$\boxed{E_{\alpha,\beta}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.} \tag{72}$$

ここで, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ である. Mittag-Leffler 関数 (Mittag-Leffler(1903, 1904, 1905)) とは

$$E_{\alpha,1}(x) \equiv E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{73}$$

によって定義される関数である. そこで, (72) は Mittag-Leffler タイプの 2 パラメター関数とよばれるが, ここでは (72) を広義に Mittag-Leffler 関数と呼ぶことにする.

以下に Mittag-Leffler 関数の公式を記しておく.

$$
\begin{aligned}
E_{1,1}(x) &= E_1(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \qquad (74) \\
E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right) = \frac{e^x - 1}{x}. \qquad (75) \\
E_{1,3}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} \\
&= \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} \right) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

一般に,

$$
E_{1,m}(x) = \frac{1}{x^{m-1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!} \right). \qquad (77)
$$

双曲線関数も Mittag-Leffler 関数として書くことができる.

$$
\begin{aligned}
E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= \cosh(x), \qquad (78) \\
E_{2,2}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \frac{\sinh(x)}{x}. \qquad (79)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Davis, H. D. 1936 *The Theory of Linear Operators*. Principia Press, Bloomington, Indiana.

[2] Mittag-Leffler, G. M. 1903 Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **137**, 554-558.

[3] Mittag-Leffler, G. M. 1904 Sopra la funzione $E_\alpha(x)$. *Rend. Acc. Lincei*, ser. 5 **13**, 3-5.

[4] Mittag-Leffler, G. M. 1905 Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. *Acta Mathmatica*, **29**, 101-182.

[5] Oldham, K. R. & Spanier, J. 2002 *The Fractional Calculus*. Dover, New York, 234pp.

[6] Podlubny, I. 1999 *Fractional Differential Equations*. Academic Press., California, 340pp.

[7] Ross, B. 1977 Fractional calculus: a historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antdifferentiation of non integer orders. *Math. Mag.*, **50**, 115-122.

[8] 杉本信正 1985 非整数階微分・積分とその応用. ながれ **4**, 110–120. (`http://www-nlmech.me.es.osaka-u.ac.jp/pdf/NAGARE-4-1985-p110.pdf`).

[9] 杉本信正 1990 非整数 1/2 階微分で与えられる履歴を伴う非線形波動. 京都大学数理解析研究所 講究録 No.740「流体中の非線形型波動の数理的側面」, 1–26. (`http://www-nlmech.me.es.osaka-u.ac.jp/pdf/RIMS90.pdf`).

[10] Yajima, T. and Yamasaki, K. 2012 Geometry of structures with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows. *J. Phys.* A**45**, 065201.