

## مقایسه اثر مدل هیدرودینامیکی و مدل هیدرواستاتیکی برای ترم تصویح فشار موجود در مدل دو سیالی در مدل سازی جریان‌های دوفازی گاز-مایع

کاظم اسماعیلی<sup>۱</sup>، وحید شکری<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری

\* ساری، صندوق پستی ۴۸۱۶۱۱۹۳۱۸

### چکیده

در این مقاله یک مطالعه عددی با استفاده از مدل دو سیالی برای مقایسه اثر مدل هیدرودینامیکی و هیدرواستاتیکی برای ترم تصویح فشار موجود در مدل دو سیالی جهت ارائه مدل دقیقتر انجام شده است. مدل دو سیالی توسط حل گر ریمنی تقریبی گذوگنی حل شده است. مدل دو سیالی یک بار با استفاده از ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک و یک بار توسط ترم تصویح فشار هیدرودینامیک برای چهار مسأله نمونه، شیر آب، چدیش آب و هوا، لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و لوله شاک تامی اعمال شده است. با در نظر گرفتن ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک برای هندسه قائم، این ترم حذف می‌شود، مدل دو سیالی در این هندسه پیچگاه هایپربولیک نمی‌شود. بنابراین ترم تصویح فشار هیدرواستاتیکی نمی‌تواند به صورت یک ترم پایدار کننده عمل کند. همچنین ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک در لوله‌های افقی برای شرایط اتمسفریک جواب‌های بهتری نسبت به ترم تصویح فشار هیدرودینامیک ارائه می‌کند. اما در شرایط غیره اتمسفریک، ترم تصویح فشار هیدرودینامیکی جواب‌های بهتری را ارائه می‌کند. بنابراین برای انتخاب ترم تصویح فشار مناسب برای مدل دو سیالی باید هندسه (قائم یا افقی) و شرایط جریان (اتمسفریک یا تحت فشار) در نظر گرفته شود و ترم تصویح فشار هیدرودینامیک در سیستم معادلات دو سیالی، در محدود وسیع تری نسبت به ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک هایپربولیک می‌باشد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دراфт: ۲۰ مرداد ۱۳۹۵

پذیرش: ۲۸ مهر ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۰۳ آذر ۱۳۹۵

کلید واژگان:

جریان دو فازی

مدل دو سیالی

ترم تصویح فشار

شبیه‌سازی عددی

## Comparison of the effect of hydrodynamic and hydrostatic models for Pressure correction term in two-fluid model in modeling gas-liquid two-phase flows

Kazem Esmaeili, Vahid Shokri\*

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Sari Branch, Sari, Iran  
\* P.O.B. 4816119318, Sari, Iran, shokri.vhd@iausari.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 August 2016  
Accepted 19 October 2016  
Available Online 23 November 2016

**Keywords:**  
Two phase flow  
Two-fluid model  
Pressure correction term  
Numerical simulation

### ABSTRACT

This paper presents a numerical study using two-fluid model in order to compare the effect of hydrodynamic and hydrostatic models for pressure correction term in two-fluid model in modeling gas-liquid two-phase flows to provide a more accurate model. Two-fluid model is solved by Godunov Approximate Riemann Solver. The two-fluid model is applied using both hydrodynamic pressure correction term and hydrostatic pressure correction term for four sample examples including Water Faucet Case, Water-Air Separation Case, Toumi's Shock Tube Case, and Large Relative Velocity Shock Tube Case. Hydrostatic pressure correction term is neglected for vertical geometry, therefore, in this geometry; two-fluid model cannot be hyperbolic. Thus, hydrostatic pressure correction term is not a stabilizing term. Also, in horizontal pipe and for atmospheric conditions, hydrostatic pressure correction term presents better results than hydrodynamic pressure correction term. But, in non-atmospheric conditions, hydrodynamic pressure correction term presents better results. Therefore, in order to select a suitable pressure correction term for two-fluid model, we consider geometry (vertical or horizontal) and flow conditions (atmospheric or under-pressure). Also, hydrodynamic pressure correction term in two-fluid equations system is hyperbolic in a broader range than hydrostatic pressure correction term.

وجود دارد. همچنین در نیروگاه‌های بخار و خنک‌کاری نیروگاه‌های هسته‌ای جریان دوفازی از بخار آب و آب در لوله‌ها جاری هستند. به طور کلی سه مدل متفاوت برای شبیه‌سازی سیستم‌های جریان دو فازی وجود دارد: مدل هموژن پایدار<sup>۱</sup> [۱]، مدل شار رانشی<sup>۱</sup> [۲] و مدل دو سیالی<sup>۲</sup> [۴,۳]. در این

**۱- مقدمه**  
پیش‌بینی دقیق دینامیک سیال مرتبط با جریان دوفازی همیشه از اهمیت بالایی برخوردار است. برای مثال، در صنعت نفت در انتقال نفت خام از سکوهای دور از ساحل به تجهیزات ساحلی نظریه کننده‌ها یا جداکننده ها، مخلوطی از نفت خام، گاز، آب و ذرات پخش شده احتمالی همانند ماسه

<sup>۱</sup> Homogeneous Equilibrium Model

که در رابطه فوق،  $\delta = 1.2$  و  $\alpha_g = \rho_g / (\rho_g + \rho_l)$  به ترتیب کسر حجمی فاز گاز و کسر حجمی فاز مایع،  $u_g$  و  $u_l$  به ترتیب چگالی فاز گاز و مایع،  $P_g$  و  $P_{gi}$  به ترتیب سرعت فازهای گاز و مایع می باشد. اوج و فلاتن طرح های ترکیبی جداسازی بردار شار را برای حل مدل دو سیالی به کار گیری کردند [9]. آن ها در مدل شان از همان فرض فشار به کار گیری شده توسط پایلر و همکاران [8] از مدل دو سیالی برای شبیه سازی استفاده کردند. عیسی و کمپف [10] از مدل دو سیالی برای شبیه سازی جریان اسلامگ در لوله های افقی و کمی شبیه دار استفاده کردند. آن ها در مدل شان از ترم تصمیح فشار در فاز گاز صرف نظر کردند ( $\Delta P_{gi} = P_g - P_{gi} = 0$ ). همچنین فشار فاز گاز در فصل مشترک را برابر فشار مایع در فصل مشترک در نظر گرفتند ( $P_{gi} = P_{li}$ ) و تغییر فشار فاز مایع در راستای قائم را بصورت هیدرو استاتیکی در نظر گرفتند. در "شکل 1" نمای جانبی لوله جریان دو فازی نشان داده شده است.

$$P = P_g = P_{gi} = P_{li} \quad (8)$$

$$P_l(y) = P + \rho_l G (h_l - y) \cos \beta \quad (9)$$

که در روابط فوق  $P$  بیانگر فشار فاز گاز (و فشار فاز گاز در فصل مشترک و فشار فاز مایع در فصل مشترک) و  $(y)$  فشار فاز مایع،  $\rho_l$  چگالی فاز مایع،  $G$  شتاب گرانش،  $h_l$  ارتفاع فاز مایع و  $\beta$  شیب لوله می باشد.

بونیزی و عیسی [11] مدلی را برای شبیه سازی حباب دار شدن رژیم جریان دوفازی اسلامگ ارائه کردند. آن ها در مدل دو سیالی در نظر گرفته شده برای ترم های فشار از همان فرضیات ارائه شده توسط عیسی و کمپف [10] استفاده کردند. بونیزی و عیسی [12] با استفاده از مدل چند سیالی رژیم اسلامگ را در جریان سه فازی گاز، نفت و مایع شبیه سازی کردند. در مدل آن ها یک فاز گاز و یک فاز مخلوط (نفت پخش شده در آب) وجود داشت و از همان فرضیات فشار عیسی و کمپف [10] برای ترم فشار استفاده کردند. کارنیرو و همکاران [13] و هانیانگ و لیئن [14] از مدل دو سیالی گذرا برای بررسی ناپایداری های فصل مشترک و شروع رژیم اسلامگ در جریان های دوفازی گاز- مایع در کanal افقی استفاده کردند. آن ها در مدل شان برای  $P_g$  و  $P_{li}$  از فرض فشار هیدرو استاتیک استفاده کردند و فشارهای هر فاز در فصل مشترک را با کشش سطحی بهم مربوط کردند:

$$P_{gi} - P_{li} = \sigma \frac{\partial^2 h_l}{\partial y^2} \quad (10)$$

که در رابطه فوق  $\sigma$  کشش سطحی می باشد. گارسیا و سالادور [15] روش های دقت بالا را بر مدل دو سیالی شش معادله ای اعمال کردند. آن ها در مدل شان از فرضیات به کار گیری شده توسط پایلر و همکاران [8] برای ترم های فشار استفاده کردند. کارنیرو و نیکله [16] از مدل دو سیالی برای مدل سازی مشخصه های جریان اسلامگ در خطوط لوله شبیه دار استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هیدرو استاتیک برای فشارهای گاز و مایع استفاده کردند و فشار فاز گاز در فصل مشترک را برابر فشار فاز مایع در فصل مشترک در نظر گرفتند. انصاری و شکری [17] یک

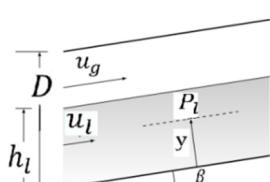


Fig. 1 Side view two-phase flow pipelines

شکل 1 نمای جانبی لوله جریان دوفازی

مقاله، تمرکز روی مدل دو سیالی می باشد. در فرمولاسیون مدل دو سیالی معادلات بقاء (جرم، مومنتوم و انرژی) برای هر فاز به صورت جداگانه ارائه می گردد. بنابراین جزئیات دقیق تری از هر فاز توسط این مدل در اختیار قرار می گیرد و از سوی دیگر، کامل ترین مدل دو سیالی بر پایه متوسط گیری دوفازی می باشد. فرم متوسط گیری شده مدل دو سیالی برای جریان بر روی سطح مقطع لوله انتگرال گیری شده است و متعاقباً با استفاده از مقداری مانگین مناسب جایگزین شده است [5]. فعل و انفعالات بین فازهای مایع و گاز توسط روابط بستنده<sup>3</sup> که اثر قابل توجهی بر میدان حل دارند، ارائه می شود.

در مدل دو سیالی بین فشار هر فاز و فشار هر فاز در فصل مشترک تمایز وجود دارد. اختلاف فشار هر فاز با فشار همان فاز در فصل مشترک ترم تصمیح فشار نامیده می شود:

$$\Delta P_{ki} = P_k - P_{ki} \quad (1)$$

که در ترم  $\Delta P_{ki}$  فشار فاز  $k$  (اگر  $k = g$  فاز گاز است و اگر  $k = l$  فاز مایع است) است.  $P_k$  فشار فاز  $k$  و  $P_{ki}$  فشار فاز  $k$  در فصل مشترک است.

عیسی و وودبرن [6] از مدل دو سیالی برای مدل سازی ناپایداری های فصل مشترک و شکل گیری اسلامگ در جریان های دو فازی افقی استفاده کردند. آن ها در مدل شان  $\Delta P_{ki} = 0$  در نظر گرفتند. یعنی در مدل آن ها بین "فشار فاز" و "فشار فاز در فصل مشترک" تمایزی وجود ندارد. فاز گاز با یک فشار  $P_g$  و فاز مایع با یک فشار  $P_l$  نشان داده می شود. از طرف دیگر در مدل آن ها فرض شده  $P_g = P_l$  است. یعنی فشار گاز و مایع با هم برابر در نظر گرفته شده است و کل سیستم دو فازی با یک تک فشار  $P$  مدل می شود.

$$P = P_g = P_{gi} = P_l = P_{li} \quad (2)$$

ماسلو و همکارانش [7] یک شبیه سازی گذرا از جریان های دو فازی در لوله ها با استفاده از مدل دو سیالی ارائه کردند. آن ها فشار فاز گاز در فصل مشترک را با فشار مایع در فصل مشترک برابر فرض کردند ( $P = P_{gi} = P_{li}$ ). اما ترم تصمیح فشار را در مدل شان به صورت ذیل لحظ کردند:

$$\Delta P_g = P_g - P \quad (3)$$

$$\Delta P_l = P_l - P \quad (4)$$

که در روابط فوق  $\Delta P_g$  ترم تصمیح فشار فاز گاز،  $\Delta P_l$  ترم تصمیح فشار فاز مایع و  $P$  فشار فصل مشترک می باشد و این ترم های تصمیح فشار از فرض تغییر فشار هیدرو استاتیکی در راستای محور قائم به دست می آیند.

پایلر و همکاران [8] مدل دو سیالی ایزنتروپیک و مدل 6 معادله ای را در کارشناس مورد استفاده قرار دادند. آن ها در مدل دو سیالی ایزنتروپیک از فرضیات ذیل برای فشار استفاده کردند:

$$P = P_g = P_l \quad (5)$$

$$P_i = P_{gi} = P_{li} \quad (6)$$

که در روابط فوق  $P$  فشار فاز (در این مدل فشار دو فاز برابر در نظر گرفته شده است) و  $P_i$  فشار فصل مشترک می باشد و رابطه بین  $P$  و  $P_i$  به صورت رابطه (7) پیشنهاد شد:

$$\Delta P = P - P_i = \delta \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 \quad (7)$$

<sup>1</sup> Drift Flux Model

<sup>2</sup> Two Fluid Model

<sup>3</sup> Closure Relations

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (11)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (12)$$

معادله بقای مومنتوم گاز:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g^2) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} ((P_g - P_{gi}) \alpha_g) - \alpha_g \frac{\partial P_{gi}}{\partial x} + S_g \end{aligned} \quad (13)$$

معادله بقای مومنتوم مایع:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l^2) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} ((P_l - P_{li}) \alpha_l) - \alpha_l \frac{\partial P_{li}}{\partial x} + S_l \end{aligned} \quad (14)$$

$$S_k = -\rho_k \alpha_k G \sin \beta + F_{kw} \pm F_i \quad (15)$$

که در روابط فوق برای فاز  $k = g$  فاز گاز است و  $k = l$  فاز مایع است،  $\rho_k$  چگالی فاز  $k$ ،  $\alpha_k$  کسر حجمی فاز  $k$ ،  $u_k$  سرعت فاز  $k$ ،  $P_{ki}$  فشار فاز  $k$  در فصل مشترک است. در معادله (15)، عبارت های چشممه که شامل نیروی های گرانشی، نیروی اصطکاک هر فاز با دیوارها  $F_{kw}$  علامت دیوار (وله است) و  $F_i$  نیروی اصطکاک فازها در فصل مشترک می باشد. ضریب نیروی اصطکاک فازها در فصل مشترک ( $F_i$ )، در معادله مومنتوم فاز گاز مثبت و در معادله مومنتوم فاز مایع منفی می باشد. در معادلات مومنتوم فوق ترم  $P_g - P_{gi}$  را با  $\Delta P_{gi}$  نشان می دهند و به آن ترم تصمیح فشار برای فاز گاز گفته می شود و نیز ترم  $P_l - P_{li}$  را با  $\Delta P_{li}$  نشان می دهند و به آن ترم تصمیح فشار برای فاز مایع گفته می شود. ترم های فشار در معادلات مومنتوم فوق را می توان براساس نوع بسط مشتق بر متغیرها، به دو صورت زیر نوشت.

فرم یک [25]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} ((P_k - P_{ki}) \alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_k P_{ki})}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

فرم دو [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} ((P_k - P_{ki}) \alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial(P_k - P_{ki})}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} + \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین طبق بررسی های صورت گرفته، ترم های فشار مدل دو سیالی به دو صورت ذیل در مقالات گزارش شده است:

$$-\frac{\partial}{\partial x} ((P_k - P_{ki}) \alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} = \quad (18)$$

$$-\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \quad (19)$$

$$-\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \quad (20)$$

حال با اعمال فرضیات مختلف برای ترم فشار، صورت های مختلف مدل دو سیالی به دست می آیند.

الگوریتم جدید برای حل مدل دو سیالی جهت تحلیل ناپایداری کلوبین- هلمهولتز ارائه کردند که فرضیات آن ها برای ترم فشار فازها همانند کارنیرو و نیکله [16] بود. عیسی و همکارانش [18] از مدل دو سیالی برای شبیه سازی دقیق جریان اسلامگ در خطوط لوله نفت و گاز استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هر فاز و فشار فعل مشترک را به طور مجزا محاسبه و برای ترم تصمیح فشار از مدل هیدرودینامیکی استفاده کردند. آمبرس و همکارانش [20] یک روش از گدنفی برای مدل هفت معادله ای یا دو سیالی دو فشاری جریان دوفازی تراکم پذیر ارائه کردند. آن ها دو فاز را تراکم پذیر و فرض فشار هیدرودینامیکی را همانند پایلر و همکارانش [8] در نظر گرفتند. عیسی و امامزاده [21] از مدل دو سیالی یک بعدی برای شبیه سازی عددی جریان حلقوی در داخل لوله های افقی و عمودی استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هیدرولاستاتیکی برای فازهای مایع و مخلوط استفاده کردند. زنگ و همکارانش [22] مقایسه ای از طرح هایی از خانواده AUSM ضمنی و صریح برای جریان های چند فازی قابل تراکم با فرض عبارت تصمیح فشار هیدرودینامیکی انجام دادند. مونکجورد و هامر [23] مدل دو سیالی را برای شبیه سازی جریان گذرا مخلوط غنی از دی اکسید کربن در لوله را بررسی کردند و همانند پایلر و همکارانش [8] فرض فشار هیدرودینامیکی را در نظر گرفتند. در نهایت وانگ و همکارانش [24] شبیه سازی عددی جریان دوفازی متوسط گیری سطحی را با استفاده از یک الگوریتم می تنبی بر فشار با فرض برابری فازها با هم و فشار فعل مشترک فازها با هم و با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیکی ارائه شده توسط پایلر و همکاران [8] ارائه کردند.

از مروری بر مقالات فوق معلوم شده است که در مدل سازی جریان های دو فازی گاز- مایع با استفاده از مدل دو سیالی، از دو مدل برای بیان ترم تصمیح فشار استفاده شده است: مدل هیدرولاستاتیکی و مدل هیدرودینامیکی که به کارگیری هر کدام از این مدل ها روی طبیعت ریاضی مدل های دو سیالی و الگوریتم حل عددی و دقت جواب ها تاثیر مستقیم دارد. با توجه به بررسی های صورت گرفته، در هیچ مرجعی مقایسه اثربخشی که هر یک از این دو مدل بر جواب های بدست آمده از مدل دو سیالی مورد بررسی قرار نگرفته است، که بررسی اثر مدل هیدرودینامیکی و مدل هیدرولاستاتیکی برای ترم تصمیح فشار موجود در مدل دو سیالی در مدل سازی جریان های دو فازی گاز- مایع نوآوری مقاله حاضر می باشد.

## 2- معادلات حاکم

اساس مدل دو سیالی، وجود دو سری معادلات بقاء برای بالанс جرم، مومنتوم و انرژی برای هر فاز می باشد. فرم متوسط گیری شده مدل دو سیالی با انتگرال گیری سطحی از خواص سیال روی سطح مقطع جریان به دست می آید. انتقال مومنتوم و انرژی بین دیوارها و سیالات توسط ترم های چشممه در معادلات ظاهر می شوند و این ترم های چشممه در مدل های سیالات توسط می آیند [4]. علاوه بر این، تقابل دینامیکی بین فازها در فصل مشترک توسط نیروهای فعل مشترکی که توسط ترم چشممه در معادلات بقاء ظاهر می شوند، محاسبه می گردد.

در تحقیق حاضر، جریان ایزو ترم فرض شده است. معادلات بقاء جرم و مومنتوم برای فازهای گاز و مایع به صورت ذیل می باشد:

معادله بقای مومنتوم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P) = (P - P_c) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + S_l \quad (29)$$

$$P_c = \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial R_l} \quad (30)$$

در مدل دو سیالی ارائه شده، فرض شده فشار فاز گاز با فشار فاز گاز در فصل مشترک باهم برابرند ( $P_g = P_{gi}$ ) و نیز فرض شده فشار فاز مایع در فصل مشترک برابر فشار فاز گاز در فصل مشترک می باشد ( $P_{gi} = P_{li}$ ). فشار در فاز مایع به صورت هیدرواستاتیکی در راستای قائم تغییر می کند.

**2-4- مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک**

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (31)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (32)$$

معادله بقای مومنتوم گاز:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P) \\ = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + S_g \end{aligned} \quad (33)$$

معادله بقای مومنتوم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P) = P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + S_l \quad (34)$$

در مدل دو سیالی ارائه شده، فشار فاز گاز با فشار فاز مایع برابر است ( $P_g = P_l = P$ ) و فشار فازها در فصل مشترک نیز با هم برابرند ( $P_{gi} = P_{li} = P_i$ )

برای بسته شدن سیستم معادلات روابط دیگری نیز لازم است. اولین رابطه قید هندسی است که بیان می کند مجموع کسر حجمی های دو فاز، رابطه واحد است:

$$\alpha_l + \alpha_g = 1 \quad (35)$$

علاوه بر معادلات بالا، برای بسته شدن سیستم معادلات، زیر مدل های ترمودینامیکی نیز لازم است. برای فاز  $k$  ام، معادله حالت زیر برای بیان رابطه بین چگالی و فشار در نظر گرفته شده است [9]:

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{P_k - P_{k,0}}{C_k^2} \quad (36)$$

مقادیر مرجع برای چگالی و فشار هستند.  $C_i$  سرعت صوت در هر فاز می باشد و طبق نظریه اوجه و فلاتن به صورت زیر در نظر گرفته می شود [9]:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \rho_k} = C_k^2 \quad (37)$$

فرض  $i$  ثابت به صورت ضمنی بیان می کند که جریان ایزونتropیک است.

فشار و چگالی مرجع برای مایع و گاز به صورت زیر فرض می شود [9]:

$$P_{l,0} = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad \rho_{l,0} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$P_{g,0} = 0 \quad \rho_{g,0} = 0$$

مقادیر زیر برای سرعت صوت مایع و گاز در نظر گرفته می شود [9]:

$$C_l^2 = 10^6 \text{ (m/s)}^2 \quad C_g^2 = 10^5 \text{ (m/s)}^2$$

در این تحقیق قصد بر این است تا تاثیر مدل هیدرواستاتیک و مدل هیدرودینامیک برای ترم تصمیح فشار موجود در مدل دو سیالی با استفاده از یک مطالعه عددی بررسی گردد و دو مدل ارائه شده برای ترم های فشار مورد استفاده در مدل دو سیالی مورد مقایسه قرار گیرند. برای این منظور مدل دو

## 2-1- حالت اول (فرض فشار هیدرو استاتیک)

عیسی و کمپف با در نظر گرفتن معادله (19) و فرض فشار هیدرواستاتیک برای فاز مایع و محاسبه فشار متوسط فاز مایع با انتگرال گیری نسبت به سطح مقطع لوله روابط ذیل را برای ترم فشار مدل دو سیالی ارائه کردند [21,10].

$$-\frac{\partial}{\partial x} ((P_g - P_{gi}) \alpha_g) - \alpha_g \frac{\partial P_{gi}}{\partial x} = -\alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} \quad (21)$$

که در کار فوق فرض شده فشار فاز گاز با فشار فاز گاز در فصل مشترک باهم برابرند ( $P_g = P_{gi} = P$ ).

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} ((P_l - P_{li}) \alpha_l) - \alpha_l \frac{\partial P_{li}}{\partial x} \\ & = -\alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial x} \end{aligned} \quad (22)$$

که فرض شده فشار فاز مایع در فصل مشترک برابر فشار فاز گاز در فصل مشترک می باشد ( $P_{gi} = P_{li} = P$ ) و فشار در فاز مایع به صورت هیدرواستاتیکی در راستای قائم تغییر می کند.

## 2-2- حالت دوم (فرض فشار هیدرو دینامیکی)

پایلر و همکاران [8] و اوج و فلاتن [9] از معادله (18) برای ترم های فشار استفاده کردند و فرض کردند که فشار فاز گاز با فشار فاز مایع برابر است ( $P_g = P_l = P$ ) و فشار فازها در فصل مشترک نیز با هم برابرند ( $P_{gi} = P_{li} = P_i$ ) و رابطه ذیل را برای تصمیح فشار را ارائه کردند:

$$\Delta P_{ki} = P_k - P_{ki} = \delta \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 \quad (23)$$

که در رابطه فوق  $\delta = 1.2$  است [9].

همچنین در برخی مراجع [1] معادله (20) برای ترم های فشار معادله مومنتوم استفاده شده است و رابطه ذیل برای ترم تصمیح فشار ارائه گردید و با نماد  $P_c$  علامت گذاری شده است:

$$P_c = \Delta P_{ki} = \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_l} \quad (24)$$

که با قرار دادن رابطه فوق در معادله (20) رابطه ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned} & -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} \\ & = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

که رابطه فوق همان معادله (22) می باشد یعنی همان فرض فشار هیدرواستاتیک. بنابراین بررسی های فوق نشان می دهدند در مقالات برای ترم های فشار در معادله مومنتوم دو نوع رابطه ارائه شده است:

-1- مدل هیدرواستاتیک (معادله 22)

-2- مدل هیدرو دینامیک (معادله 23)

در نتیجه فرم نهایی مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک و هیدرودینامیک به ترتیب به صورت ذیل می باشند:

## 2-3- مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (26)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (27)$$

معادله بقای مومنتوم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P) = P \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + S_g \quad (28)$$

نوشت.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + S \quad (39)$$

$Q$  بردار متغیرهای پایستار است.  $F$  بردار فلاکس پایستار. دو بردار  $S$  و  $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$  بردارهای انتقال فصل مشترک می باشند. بردارهای مدل دو سیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک و هیدرودینامیک به صورت ذیل می باشد. در جدول 1 بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک و در جدول 2 بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک ارائه شده است.

برای سیستم غیرپایستار (39) فرم معادله جداسازی شده به صورت زیر درمی آید:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n) + \Delta t \left( H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \right) + \frac{1}{\Delta t} S_j \quad (40)$$

در معادله (40)، بالا نویس  $n$  و  $n+1$  به ترتیب بیانگر گام زمانی قدیم و جدید می باشند. ز نشانگر سلول است. برای محاسبه ترم فلاکس عددی از، روش لакс-فردریچز استفاده شده است.

#### 4-1-4 روش عددی لакс-فردریچز

در این روش ترم فلاکس به صورت زیر محاسبه می شود [27]:

$$F_{j+1/2}^{nLF} = \frac{1}{2} (F_{j+1}^n + F_j^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (41)$$

فلاکس عددی در سلول زام بصورت  $F(Q_j^n) = F(Q_{j+1}^n)$  تعریف می شود که با توجه به عبارت فلاکس فیزیکی که توسط مدل بیان می شود به دست می آید. معادلات مدل دو سیالی تک فشار دارای ترم های غیرپایستار  $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$  می باشند که باید به صورت مناسبی جداسازی شود. عدم جداسازی مناسب این ترم سبب ایجاد ناپایداری در جوابها می شود. برای جداسازی ترم غیرپایستار  $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$  رابطه ذیل ارائه شده است:

$$H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = H \alpha_g \alpha_l \frac{\partial BG}{\partial x} \quad (42)$$

$$H \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = H \alpha_l \alpha_g \frac{\partial BL}{\partial x} \quad (43)$$

ترم مشتق  $\partial BG / \partial x$  و  $\partial BL / \partial x$  با استفاده از طرح مرکزی جداسازی شده است.

جدول 1 تفکیک بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک

بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک
$Q = (\rho_g \alpha_g, \rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l)$
$F = (\rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l, \rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P, \rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P)$
$H = (0, 0, P, P - P_c)$
$S = (0, 0, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{gw}, F_l, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{kw} - F_l)$

جدول 2 تفکیک بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک

بردارهای مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک
$Q = (\rho_g \alpha_g, \rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l)$
$F = (\rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l, \rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P, \rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P)$
$H = (0, 0, P_l, P_l)$
$S = (0, 0, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{gw} + F_l, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{kw} - F_l)$

سیالی یک با استفاده از مدل هیدرودینامیکی و با دیگر با استفاده از مدل هیدرو استاتیکی با به کارگیری حل عددی در چهار مسأله نمونه معروف اعمال شده و جوابها مورد مقایسه قرار خواهند گرفت. به خاطر بودن ناپیوستگی در میدان حل در فصل مشترک دو فاز مسأله حاصل یک مسأله ریمنی می باشد و از حل گرهای ریمنی برای حل عددی استفاده گردیده است.

#### 3-آغاز هیپربولیکی مدل دو سیالی تک فشار

مدل های جریان های دو فازی نسبت به حقیقی یا موهومی بودن ریشه های معادله مشخصه شان بهشدت حساس می باشند. اگر ریشه های معادله مشخصه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل موهومی باشند یک مسأله مقدار اولیه بدرفتار تشکیل می شود که نتیجه آن به وجود آمدن ناپایداری های غیرمحدود است و درنهایت جواب همگرا به دست نمی آید و ریشه های معادله مقادیر مشخصه معادلات حقیقی باشند یک مسأله خوش رفتار تشکیل شده و ناپایداری های غیرمحدود حذف می شوند [26]. حد پایداری مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک، همان حد ناپایداری کلوین هلمهلتز می باشد که به صورت زیر به دست آمده است [1].

$$(u_g - u_l)^2 \leq \sqrt{\left( \alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g \right) \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l \rho_g} G \cos \beta \frac{A}{\frac{\partial A_l}{\partial h}}} \quad (38)$$

يعني حد ناپایداری کلوین هلمهلتز با حد خوش رفتاری مدل دو سیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرو استاتیک يکسان است. از طرفی می توان نشان داد که اگر اختلاف سرعت دو فاز از این مقدار بیشتر شود، فصل مشترک دو فاز از نظر فیزیکی نیز ناپایدار می شود، يعني حد فیزیکی ناپایداری فصل مشترک با حد خوش رفتاری مدل دو سیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرو استاتیک برابر است. اگر اختلاف سرعت دو فاز از این حد بیشتر شود، ریشه های معادله مشخصه مدل موهومی شده و مدل بدرفتار می شود. این بدرفتار باعث می شود که نتایج مدل دو سیالی فیزیک واقعی جریان را نشان ندهد

#### 4- روش حل عددی معادلات

الگوریتم های حل عددی بر حسب رفتار ترم فشار به دو دسته تقسیم می شوند. دسته اول الگوریتم های بر مبنای فشار می باشند و از میان آن ها می توان به الگوریتم تصمیح فشار بر مبنای الگوریتم سیمپل و روش حل عددی حجم محدود [17,10] اشاره کرد. این دسته از الگوریتم ها از یک شبکه جابه جا شده برای محاسبه ترم فشار و سرعت استفاده می کنند و نیاز است تا معادلات بقاء به صورت تکراری و در یک شبکه بسیار ریز حل شوند. این مسائل سبب می شوند محاسبات کامپیوتری بسیار زمان بر شوند. دسته دوم الگوریتم ها بر مبنای حلگرهای ریمن می باشند که از میان آن ها می توان به روش گدونه ای با فلاکس تقریبی [9] اشاره کرد. این دسته روش ها از تعمیم متد های حل جریان شاک به مسایل جریان دوفازی به وجود آمده اند و از توانمندی این روش ها در تسخیر شاک، برای پیش بینی ناپیوستگی های موجود در فصل مشترک جریان های دوفازی استفاده شده است. همچنان به دلیل موفق بودن روش های تسخیر شاک در پیش بینی گرادیان های شدید، دقت جواب هایی که توسط حلگرهای ریمن در پیش بینی ناپیوستگی های موجود در میدان حل اختیار قرار می گیرد از الگوریتم های بر مبنای فشار و روش حجم محدود بیشتر می باشد. بدلا از ذکر شده در این مقاله از دسته دوم الگوریتم ها يعني از حلگرهای ریمن از نوع گودونفی استفاده شده است.

معادلات مدل دو سیالی تک فشار را می توان به صورت غیرپایستار زیر

فرض‌های ارائه شده برای ترم تصویح فشار مقایسه شده‌اند. در "شکل‌های 3" میزان وابستگی جواب‌ها به سلول محاسباتی برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز در زمان 0.6 ثانیه برای  $CFL = 0.5$  نشان داده است.

در "شکل 3" جواب مستقل از سلول محاسباتی با استفاده از ترم تصویح فشار هیدرودینامیک برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز نشان داده است و مشخص گردید در سلول محاسباتی 6400 جواب‌ها مستقل از سلول محاسباتی شده است. می‌توان مشاهده کرد که در سلول 6400 نتایج تطابق خوبی با حل تحلیلی دارند. اکنون به بررسی اثر ترم تصویح فشار هیدرودینامیک و ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک بر روی تغییرات پروفیل فشار، کسر حجمی فاز گاز و سرعت فاز گاز و سرعت فاز مایع برای سلول

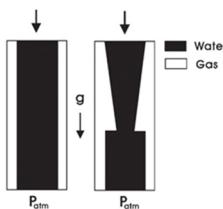


Fig. 2 Schematic of the water faucet case

شکل 2 شماتیک مسئله شیر آب

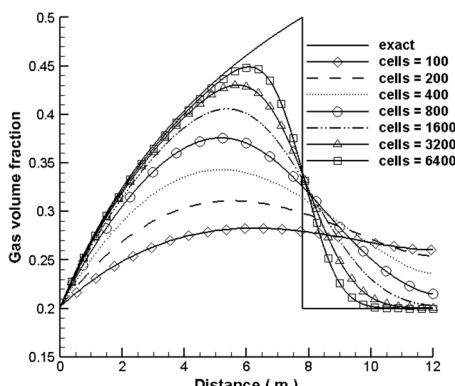


Fig. 3 Water faucet case, independent results of computational cells of gas volume fraction profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 3 مسئله شیر آب، جواب‌های مستقل از سلول محاسباتی پروفیل کسر حجمی فار گاز برای ترم تصویح فشار هیدرودینامیک

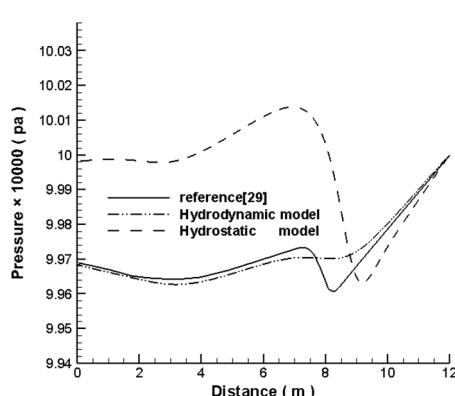


Fig. 4 Water faucet case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 4 مسئله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصویح فشار برای پروفیل فشار

$$H\alpha_g \alpha_l \frac{\partial BG}{\partial x} = H\alpha_g \alpha_l \frac{BG_{j+1} - BG_{j-1}}{2\Delta x} \quad (44)$$

$$H\alpha_l \alpha_g \frac{\partial BL}{\partial x} = H\alpha_g \alpha_l \frac{BL_{j+1} - BL_{j-1}}{2\Delta x} \quad (45)$$

که

$$BG = \log \left( \frac{\alpha_g}{\alpha_l} \right) \quad (46)$$

$$BL = \log \left( \frac{\alpha_l}{\alpha_g} \right) \quad (47)$$

#### 4-2- محاسبه گام زمانی

برای محاسبه گام زمانی، ابتدا  $\Delta x$  اندازه گام مکانی مشخص می‌شود سپس با استفاده از رابطه زیر،  $\Delta t$  یا اندازه گام زمانی محاسبه می‌شود [1]:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}^n} \quad (48)$$

در تحقیق حاضر عدد کورانت-فردریچ-لوی بین مقدار 2.0 تا 7.0 در نظر گرفته شده است.  $\lambda_{\max}^n$  بیشترین مقدار سرعت موج در میدان حل در زمان  $n$  می‌باشد. با توجه به این که بیشترین مقدار سرعت موج در هر گام زمانی می‌تواند دارای مقادیر متفاوتی باشد، بنابراین محاسبات عددی با گام زمانی متغیر ادامه پیدا می‌کند تا به زمان محاسباتی موردنظر برسد. بیشترین مقدار سرعت موج برای مدل دو سیالی تک فشار، برابر است با بیشترین مقدار مشخصه معادلات حاکم در میدان حل. مقدار مشخصه مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک توسط اوساما [1] ارائه شده است و مقدار مشخصه مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصویح فشار هیدرودینامیک توسط اوج و فلاتن [9] ارائه شده است. برای یک سیستم با  $k$  معادله دیفرانسیل و  $M$  سلول محاسباتی، بیشترین مقدار مشخصه معادلات حاکم در میدان حل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda_{\max}^n = \max_j \left\{ \max_k |\lambda_j^k| \right\} \quad \text{for } j = 1, \dots, M \quad k = 1, Neq \quad (49)$$

#### 5- اعتباریابی مدل‌ها و روش عددی

در این قسمت جهت مشاهده اثر ترم تصویح فشار بر دقت جواب‌ها، چهار مسئله نمونه، شیر آب، جدایش آب و هو، لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و لوله شاک تامی با استفاده از مدل دو سیالی موردنظر تحلیل قرار گرفته که به ترتیب دو مسئله نمونه اول کانال قائم و دو مسئله نمونه دوم کانال افقی هستند.

#### 5-1- مسئله شیر آب

این سیستم شامل یک لوله عمودی، به ارتفاع 12 متر و قطر 1 متر می‌باشد. در لحظه اولیه سرعت آب 10 متر بر ثانیه و سرعت هوا صفر، کسر حجمی آب 8.0 و دمای سیستم 50 درجه سانتی‌گراد پر شده است. فشار در انتهای کانال 100000 پاسکال می‌باشد. شرایط ورودی معادل شرایط اولیه می‌باشد و برای خروجی لوله شرط مرزی کاملاً توسعه یافته برقرار می‌باشد. در اطراف آب، هوا با دانسیته 1.16 کیلوگرم بر متر مکعب است [28]. شماتیک مسئله شیر آب در "شکل 2" نشان داده شده است.

حل تحلیلی این مسئله اوج و فلاتن [29] ارائه شده است. در نتایج عددی به بررسی اثر ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک [10] و ترم تصویح فشار هیدرودینامیک [9] پرداخته شده است. ابتدا جواب‌های مستقل از شبکه محاسباتی پروفیل کسر حجمی فاز گاز برای دو فرض ارائه شده برای ترم تصویح فشار به دست آمدند. و در گام بعدی پارامترهای جریان توسط

سیالی ارائه شده با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک برای مسئله شیر آب، با توجه به قائم بودن کanal، زاویه  $\cos \beta$  در معادله (29) صفر می‌شود و اثر ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک در معادلات مدل دو سیالی حذف گردد و در واقع فرض برابری فشارها در نظر گرفته شده است، یعنی  $P = P_{il} = P_l = P_g$  این فرض سبب می‌شود که ریشه‌های معادله مشخصه، بی‌قید و شرط مختلط شوند و در این صورت استفاده از این مدل محل اشکال است. در "شکل 5" پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک رشد بیشتری نسبت به پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیکی دارد. با رشد بیشتر پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک، سطح مقطع عبور فاز گاز در داخل کanal افزایش می‌پاید، در نتیجه کاهش پروفیل سرعت فاز گاز در "شکل 6" نشان داده شده است.

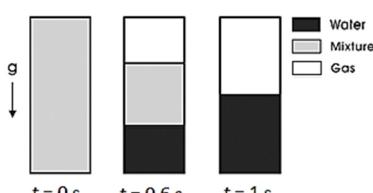
نتایج بدست آمده با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک، در "شکل 7" انحراف پروفیل سرعت فاز مایع نسبت به حل تحلیلی مسئله شیر آب و در "شکل 5" تطابق بیشتر پروفیل کسر حجمی فاز گاز با حل تحلیلی مسئله شیر آب را نشان داده است. علت این تناقض به این دلیل است، با توجه به این‌که حد ناپایداری کلوین هلمهلتز و حد خوش رفتاری مدل دوسيالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک برابر است [1]. بنابراین با توجه به قائم بودن کanal زاویه  $\cos \beta$  در معادله (29) صفر می‌شود، و در نتیجه سمت چپ شرط حد ناپایداری کلوین هلمهلتز معادله (38) صفر می‌شود و سرعت نسبی فازها باید کوچکتر یا مساوی صفر شود ( $u_g - u_l \leq 0$ ). اما با توجه به سرعت اولیه دو فاز برای مسئله شیر آب این شرط برقرار نمی‌شود. بنابراین مسئله نمونه شیر آب یک مسئله مقدار اولیه بدرفتار می‌باشد که اعتبارسنجی نتایج به دست آمده با مقایسه حل تحلیلی مسئله امکان‌پذیر می‌باشد.

## 5-2-مسئله جدایش آب و هوا

این سیستم شامل یک لوله عمودی به طول 5.7 متر که در لحظه اولیه توسط مایع و گاز ساکن با فشار یکنواخت پر شده است. هر دو انتهای لوله بسته می‌باشد و سرعت هر دو فاز در نقاط انتهایی صفر فرض می‌شود. در لحظه اولیه در لوله فشار یکنواخت 100000 پاسگال و کسر حجمی مایع  $\alpha_L = 0.5$  می‌باشد [30]. در "شکل 8" شماتیک مسئله جدایش آب و هوا نشان داده شده است.

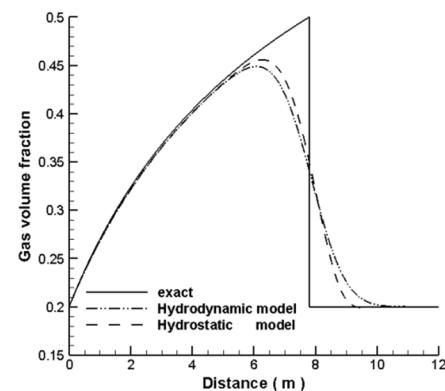
حل تحلیلی این مسئله اوج و فلاتن [29] ارائه شده است. طبق حل تحلیلی ارجاع داده شده بعد از زمان 0.87 ثانیه انتظار می‌رود دو فاز کاملاً از هم جدا شده و فاز مایع در قسمت پایین لوله و فاز گاز بر روی فاز مایع قرار گیرد و در نتیجه کسر حجمی مایع و سایر متغیرها به سمت حالت ایستایی می‌کنند [29].

مسئله جدایش آب و هوا به دو دلیل یک مسئله چالش برانگیز است:



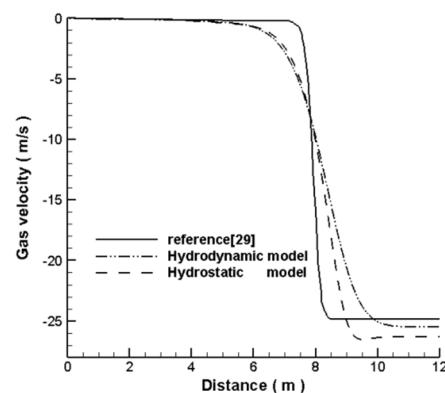
شکل 8 Schematic of water and air separation case

شکل 8 شماتیک مسئله جدایش آب و هوا



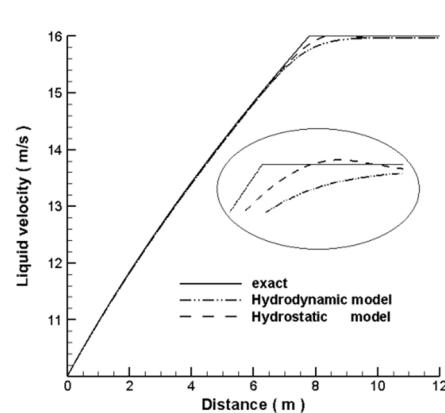
شکل 5 مسئله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز

گاز



شکل 6 مسئله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل سرعت فاز گاز

شده



شکل 7 مسئله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع

شده

محاسباتی با تعداد 6400 گره در زمان 0.6 ثانیه و برای  $CFL = 0.5$  مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج بدست آمده برای پروفیل فشار در "شکل 4" نشان می‌دهد در مسئله نمونه شیر آب که یک کanal قائم می‌باشد، ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک تطابق بهتری با حل تحلیلی مسئله شیر آب دارد. در مدل دو

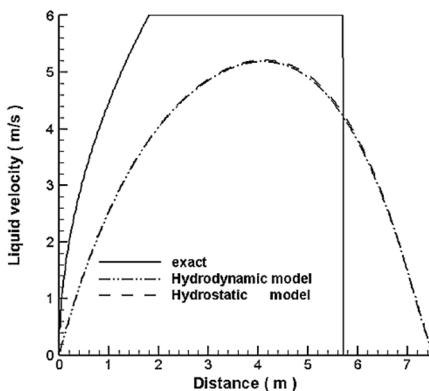


Fig. 11 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for liquid velocity profile

شکل 11 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصویح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع

نتایج به دست آمده در "شکل 9" برای پروفیل فشار نشان می‌دهد در مسأله نمونه جدایش آب و هوا در زمان 0.6 ثانیه دو فاز مایع و گاز در حال جدایش می‌باشند اما جدایش کامل دو فاز مایع و گاز صورت نگرفته است. در مدل دوسیالی جدایش آب و هوا با توجه به قائم بودن کاتال زاویه  $\cos\beta$  در معادله (29) صفر می‌شود و اثر ترم تصویح فشار هیدرواستاتیک در معادلات مدل دوسیالی دیده نمی‌شود، در واقع اثر وزن فاز مایع که در انتهای کاتال قرار دارد را در نظر نمی‌گیرد و می‌توان اختلاف اثر ترم تصویح فشار هیدرودینامیک و ترم تصویح فشار هیدرو استاتیک در مدل دوسیالی برای پروفیل فشار، در انتهای کاتال مشاهده کرد.

در "شکل 10" پروفیل کسر حجمی فاز گاز برای دو ترم تصویح فشار هیدرودینامیک و هیدرو استاتیک برای مسأله نمونه جدایش آب و هوا نشان داده شده است، که دارای اختلاف بسیار کم در انتهای کاتال می‌باشند. این اختلاف نتایج ناشی از در نظر گرفته نشدن اثر وزن فاز مایع در انتهای کاتال در مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصویح فشار هیدرو استاتیک می‌باشد. با توجه به پروفیل کسر حجمی فاز گاز نشان داده شده در "شکل 10" برای دو ترم تصویح فشار، ملاحظه می‌شود گرادیان‌های شدید با دقت پیش‌بینی نشده‌اند. دلیل این عدم تطابق خطای برش عددی لاس فریدریچز می‌باشد. روش عددی لاس فریدریچز یک روش مرتبه اول است، بنابراین خطای برش آن مرتبه دوم می‌باشد و این خطای برش مرتبه دوم سبب ایجاد یک دیفیوژن عددی می‌شود که این دیفیوژن عددی سبب پخش نایوسنگی در میدان حل می‌شود و نمی‌تواند گوشش‌های تیز حل تحلیلی مسأله جدایش آب و هوا را پوشش دهد.

در "شکل 11" تغییرات پروفیل سرعت فاز مایع برای دو فرض ترم تصویح فشار نتایج یکسان را نشان می‌دهند. با توجه به این که اثر ترم تصویح فشار هیدرواستاتیکی در معادلات مدل دو سیالی دیده نمی‌شود اما نتایج عددی تقریباً یکسان را مشاهده می‌شود، زیرا که در زمان 0.6 ثانیه جدایش کامل صورت نگرفته و دو فاز تقریباً همگن می‌باشند.

### 3-5- مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ

این مسأله یک مسئله مقدار اولیه ریمنی می‌باشد که شامل یک کاتال به طول 100 متر است که در مکان 50 متری توسط دیافراگمی به دو قسمت تقسیم می‌شود و دو انتهای کاتال بسته می‌باشد. مشخصات این مسأله و

1- حضور گرادیان‌های شدید

2- میل کسر حجمی به 0 و 1

در این مدل بدون در نظر گرفتن ترم تنفس، سرعت گاز در انتهای لوله که گاز در حال کم شدن است، خیلی زیاد شده و به چندین هزار متر بر ثانیه می‌رسد و مشکلات ناپایداری ایجاد می‌کند. برای رفع این مشکل اوجه، منکجورد و پیلیر ترم تنفس فصل مشترک را به صورت ترم چشمی در معادلات مومنتوم اعمال کردند مقادیر پارامترهای آن با تبعیت از محققین ذکر شده است.  $\Phi$  پارامتر اصطکاکی است و یک مقدار مثبت می‌باشد و به صورت زیر محاسبه می‌شود [9].

$$F_g^d = -\Phi \alpha_l \alpha_g \rho_g (u_g - u_l) \quad (50)$$

$$\Phi = C e^{-\omega \alpha_g} \quad (51)$$

که  $C = 5 * 10^4$  1/s و  $\omega = 50$  است.  $F_g^d = -F_l^d$  نوشته می‌شود. اکنون به بررسی اثر ترم تصویح فشار هیدرودینامیک و ترم تصویح فشار هیدرو استاتیک بر روی تغییرات پروفیل فشار، کسر حجمی فاز گاز و سرعت فاز مایع و گاز برای سلول محاسباتی با تعداد 380 گره در زمان 0.6 ثانیه و برای  $CFL = 0.5$  پرداخته می‌شود.

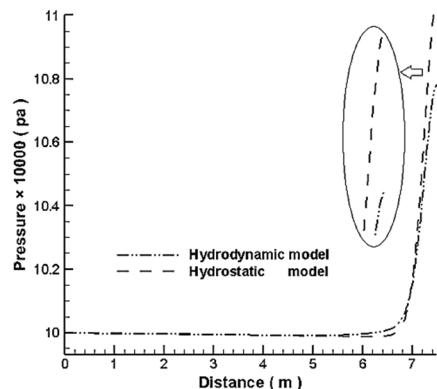


Fig. 9 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 9 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصویح فشار برای پروفیل فشار

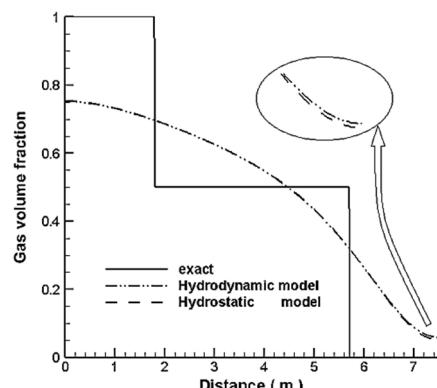
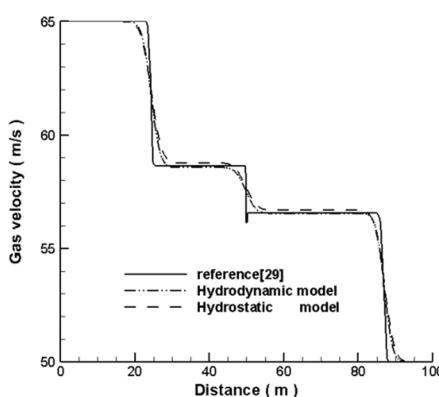


Fig. 10 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas volume fraction profile

شکل 10 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصویح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز



**Fig. 14** Large relative velocity of shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas velocity profile

شکل 14 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل سرعت فاز گاز

شده است. مشخص شده بهزای سلول محاسباتی 1600 جوابها مستقل از شبکه محاسباتی شده است.

پروفیل تغییرات فشار در "شکل 13" نشان می‌دهد در مسأله نمونه سرعت نسبی بزرگ، ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک با دقت بالاتری پروفیل تغییرات فشار را در ناحیه ناپیوستگی نسبت به ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک پیش‌بینی می‌کند. مسأله نمونه سرعت نسبی بزرگ، یک کanal افقی می‌باشد که زاویه آن با سطح افق صفر می‌باشد و بنابراین  $\cos \beta$  در معادله (29) برابر یک می‌شود، در نتیجه اثر ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک در معادلات مدل دو سیالی دیده می‌شود. در این مسأله نمونه، در لحظه اولیه بین دو طرف دیافراگم گرادیان فشار وجود ندارد. بنابراین اثر وزن فاز مایع در ایجاد اختلاف فشار در دو طرف دیافراگم تاثیر مهمی دارد. نتایج نشان می‌دهند مدل دو سیالی ارائه شده با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک مدل مناسب تری برای پیش‌بینی پروفیل تغییرات فشار در کanal افقی بدون حضور گرادیان‌های شدید فشار می‌باشد.

در "شکل‌های 14" پروفیل سرعت فاز گاز بررسی شده است، نتایج عددی به دست آمده برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن دو ترم تصمیح فشار تقریباً یکسان می‌باشد. در واقع ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک تغییرات پروفیل فشار در ناحیه ناپیوستگی را دقیق‌تر پیش‌بینی کرده است و در حقیقت تاثیر بارز ترم تصمیح فشار در پیش‌بینی پارامتر فشار مسأله می‌باشد.

#### 4-5- مسأله لوله شاک تامی

این سیستم شامل یک لوله به طول 100 متر است که در مکان 50 متری توسط دیافراگمی به دو قسم تقسیم می‌شود و دو انتهای کanal بسته می‌باشد. مشخصات این مسأله و شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول 4 ارائه شده است [32].

در این مسأله در لحظه اولیه  $u_L = u_G$  است و مقدار  $\Delta P$  مطابق با معادله (23) صفر می‌شود، که باعث می‌شود سیستم معادلات بدرفتار شود، بدین منظور مقدار  $\Delta P$  برای مسأله نمونه لوله شاک تامی به شکل زیر پیشنهاد شده است [33].

$$\Delta P = P - P_i = \delta \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 + (1 - \beta)P \quad (52)$$

شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول 3 ارائه شده است [31].

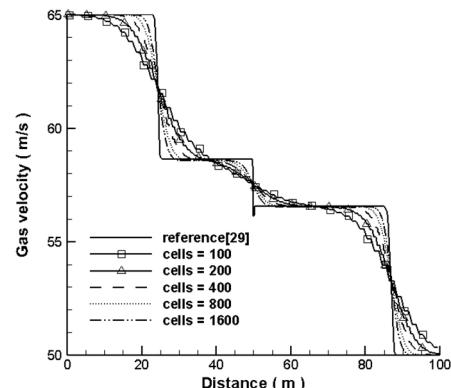
در "شکل 12" میزان وابستگی جواب‌ها به سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز در زمان 0.10 ثانیه برای  $CFL = 0.5$  نشان داده شده است.

در "شکل 12" جواب‌های مستقل از سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیکی نشان داده

**جدول 3** شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ

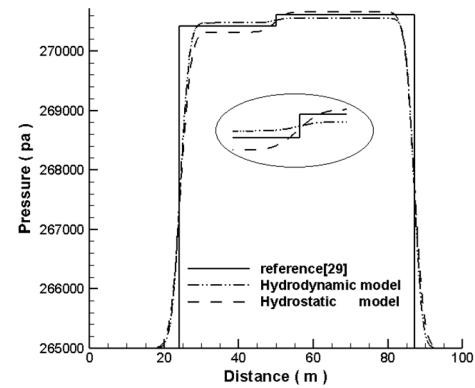
**Table 3** initial conditions of the left and right of diaphragm in large relative velocity of shock tube case

	رسان	چپ	کمیت
0.3	0.29	کسر حجمی گاز	
1(m/s)	1(m/s)	سرعت مایع	
50(m/s)	65(m/s)	سرعت گاز	
265(kpa)	265(kpa)	فشار	
1000(kg/m³)	1000(kg/m³)	چگالی مایع	
2.65(kg/m³)	2.65(kg/m³)	چگالی گاز	



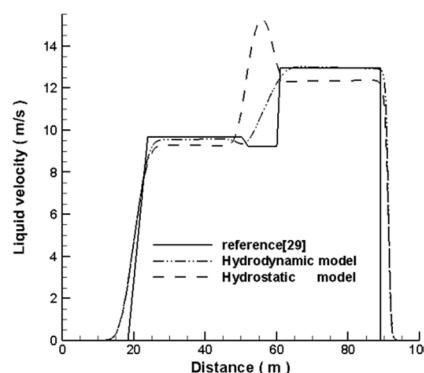
**Fig. 12** Large relative velocity of shock tube case, independent results of computational cells of gas velocity profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 12 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، جواب‌های مستقل از سلول محاسباتی پروفیل سرعت فاز گاز برای ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک



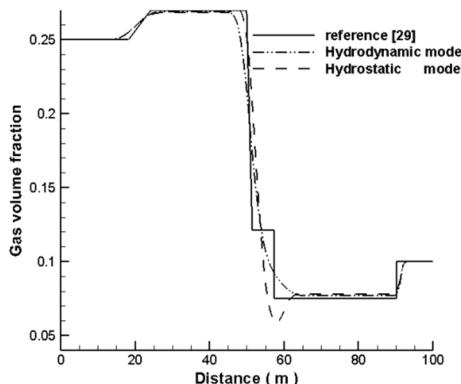
**Fig. 13** Large relative velocity of shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 13 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل فشار



**Fig. 17** Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for liquid velocity profile

شکل 17 مسئله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع



**Fig. 18** Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas volume fraction profile

شکل 18 مسئله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز

شده است. مشخص شده بهزای سلول محاسباتی 1600 جوابها مستقل از شبکه محاسباتی شده است.

در "شکل 16" پروفیل تغییرات فشار برای دو ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک و هیدرودینامیک نشان داده است. در "شکل 16" با در نظر گرفتن دو ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک و هیدرودینامیک، در ناحیه دیافراگم نتایج عددی متفاوتی برای پروفیل تغییرات فشار نشان داده شده است.

در "شکل 17 و 18" به ترتیب پروفیل سرعت فاز مایع و پروفیل کسر حجمی فاز گاز بررسی شده است، نتایج عددی به دست آمده برای پروفیل سرعت فاز گاز، پروفیل سرعت فاز مایع و پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک، در محدوده دیافراگم پرش‌های بیش از حدی را نشان می‌دهند که با حل تحلیلی مطابقت ندارند و جوابها غیرفیزیکی می‌باشند.

در مسئله نمونه لوله شاک تامی در مقایسه با مسئله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، در لحظه اولیه گردایان شدید فشار در دو طرف دیافراگم وجود دارد، بنابراین اثر تغییرات فشار ناشی از وزن فاز مایع در مقایسه با گردایان شدید فشار در دو طرف دیافراگم ناچیز است. نتایج نشان می‌دهند در

جدول 4 شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم مسئله لوله شاک تامی [32]

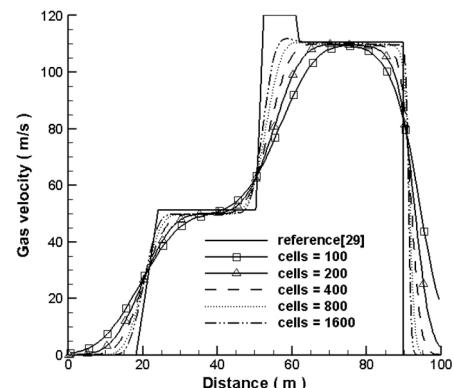
**Table 4** initial conditions of the left and right of diaphragm in Toumi's shock tube case

راست	چپ	کمیت
0.1	0.25	کسر حجمی گاز
0	0	سرعت مایع
0	0	سرعت گاز
10(mpa)	20(mpa)	فشار
1000(kg/m³)	1000(kg/m³)	چگالی مایع
100(kg/m³)	200(kg/m³)	چگالی گاز

که در آن  $\beta = 0.999999$  در نظر گرفته می‌شود تا دیفیوژن کمی وارد سیستم شود.  $\delta = 2$  برای این مسئله استفاده می‌شود [33].

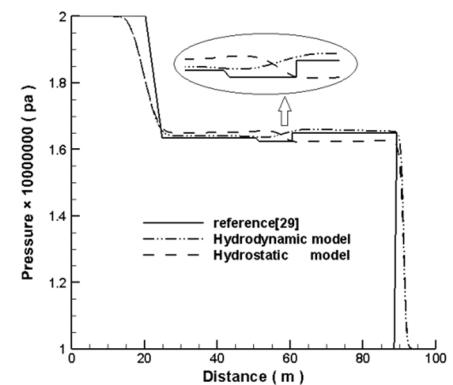
در "شکل 15" جواب‌ها به سلول‌های محاسباتی مختلف برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک نشان داده است. زمان محاسبه تغییرات پروفیل سرعت فاز گاز و مقدار به ترتیب 0.08 ثانیه و 0.2 در نظر گرفته شده است.

در "شکل 15" جواب‌های مستقل از سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک نشان داده



**Fig. 15** Toumi's shock tube case, independent results of computational cells of gas velocity profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 15 مسئله لوله شاک تامی، جواب‌های مستقل از سلول محاسباتی پروفیل سرعت فاز گاز برای ترم تصمیح فشار هیدرودینامیک



**Fig. 16** Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 16 مسئله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصمیح فشار برای پروفیل فشار

- 6, pp. 891-916, 2003.
- [9] S. Evje, T. Flåtten, Hybrid flux-splitting schemes for a common two-fluid model, *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, No. 1, pp. 175-210, 2003.
- [10] R. Issa, M. Kempf, Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 1, pp. 69-95, 2003.
- [11] M. Bonizzi, R. Issa, A model for simulating gas bubble entrainment in two-phase horizontal slug flow, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 11, pp. 1685-1717, 2003.
- [12] M. Bonizzi, R. Issa, On the simulation of three-phase slug flow in nearly horizontal pipes using the multi-fluid model, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 11, pp. 1719-1747, 2003.
- [13] J. Carneiro, A. Ortega, A. Nieckele, Influence of the interfacial pressure jump condition on the simulation of horizontal two-phase slug flows using the two-fluid model, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 123-132, 2005.
- [14] G. Hanyang, G. Liejin, Stability of stratified flow and slugging in horizontal gas-liquid flow, *Progress in Natural Science*, Vol. 15, No. 11, pp. 1026-1034, 2005.
- [15] J. García-Cascales, J. Corberán-Salvador, Extension of a high-resolution scheme to 1D liquid-gas flow, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 50, No. 9, pp. 1063-1084, 2006.
- [16] J. Carneiro, A. Nieckele, Investigation of slug flow characteristics in inclined pipelines, *Computational Methods in Multiphase Flow IV*, Vol. 56, No. 4, pp. 185-194, 2007.
- [17] M. Ansari, V. Shokri, New algorithm for the numerical simulation of two-phase stratified gas-liquid flow and its application for analyzing the Kelvin-Helmholtz instability criterion with respect to wavelength effect, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 237, No. 24, pp. 2302-2310, 2007.
- [18] R. Issa, J. Castagna, A. Sheikh, Accurate simulation of intermittent/slug flow in oil and gas pipelines, *15th International Conditioning on Multiphase Production Technology*, Cannes, France, June 15-17, 2011.
- [19] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Numerical modeling of two phase slug flow in horizontal and inclined channels using hyperbolic two fluid model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 34-47, 2012.
- [20] A. Ambroso, C. Chalons, P.-A. Raviart, A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow, *Computers & Fluids*, Vol. 54, No. 54, pp. 67-91, 2012.
- [21] M. Emamzadeh, R. I. Issa, One-dimensional model for numerical simulation of annular flow in horizontal and vertical pipes, *Multiphase Science and Technology*, Vol. 25, No. 1, 2013.
- [22] Q. Zeng, N. Aydemir, F. Lien, T. Xu, Comparison of implicit and explicit AUSM-family schemes for compressible multiphase flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 77, No. 1, pp. 43-61, 2015.
- [23] S. T. Munkejord, M. Hammer, Depressurization of CO 2-rich mixtures in pipes: Two-phase flow modelling and comparison with experiments, *International Journal of Greenhouse Gas Control*, Vol. 37, pp. 398-411, 2015.
- [24] Z. Wang, J. Gong, C. Wu, Numerical Simulation of One-Dimensional Two-Phase Flow Using a Pressure-Based Algorithm, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 68, No. 4, pp. 369-387, 2015.
- [25] M. Montini, *Closure relations of the one-dimensional two-fluid model for the simulation of slug flows*, PhD Thesis, Imperial College London, London, 2011.
- [26] V. H. Ransom, D. L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 53, No. 1, pp. 124-151, 1984.
- [27] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction*: Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] V. Ransom, Numerical Benchmark Test No. 2.3: Expulsion Of Steam By Sub-Cooled Water, *Multiphase science and technology*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 124-150, 1987.
- [29] S. Evje, T. Flåtten, Hybrid central-upwind schemes for numerical resolution of two-phase flows, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 2, pp. 253-273, 2005.
- [30] F. Coquel, K. El Amine, E. Godlewski, B. Perthame, P. Rascle, A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, No. 2, pp. 272-288, 1997.
- [31] J. Cortes, A. Debussche, I. Toumi, A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 147, No. 2, pp. 463-484, 1998.
- [32] I. Toumi, An upwind numerical method for two-fluid two-phase flow models, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, No. 2, pp. 147-168, 1996.
- [33] S. T. Munkejord, *Analysis of the two-fluid model and the drift-flux model for numerical calculation of two-phase flow*, PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2006.

شرايطی که گرادیان شدید فشار بر مسائل جريان دوفازی حاكم می باشد، ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک فیزیک واقعی جريان را نشان نمی دهد. بنابراین می توان نتیجه گرفت در شرايطی که گرادیان شدید فشار بر مسائل جريان دوفازی حاكم باشد، ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک مدل مناسب تری نسبت به ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک، برای مدل سازی عددی جريان های دوفازی با استفاده از مدل دو سیالی می باشد.

## 6- جمع بندی

با در نظر گرفتن ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک برای هندسه قائم، این ترم حذف می شود، مدل دو سیالی در این هندسه هیپرboleک نمی شود. بنابراین ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک نمی تواند به صورت یک ترم پایدار کننده عمل کند. فرض ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک به واسطه وجود زاویه  $\cos \beta$ . در کانال های قائم با توجه به این که  $\cos 0 = 0$ ، ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک در معادلات مدل دو سیالی دیده نمی شود و عدم تاثیر ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک را می توان در نتایج بدست آمده برای کانال قائم مشاهده کرد.

فرض ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک در کانال های افقی و در شرايطی که فشار نزدیک فشار اتمسفریک باشد نتایج بهتری برای پارامترهای جريان نسبت به فرض ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک ارائه می دهد. فرض ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک مستقل هندسه (قائم یا افقی) می باشد و می توان اثر این ترم تصمیح فشار را در معادلات مدل دو سیالی مشاهده کرد و زمانی که فشار فازها بسیار بالاتر از فشار اتمسفر باشد (مثل مسئله نمونه لوله شاک تامی) ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک جواب های دقیق تری نسبت به ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک ارائه می کند و نتایج عددی حاصل از فرض ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک مطابقت مناسبی با حل تحلیلی مسائل دارد. درنهایت، می توان بیان کرد استفاده از ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک در سیستم معادلات دو سیالی، در محدود وسیع تری نسبت به ترم تصمیح فشار هیدرواستاتیک هایپرboleک است.

## 7- مراجع

- C. Omgbia-Essama, *Numerical modelling of transient gas-liquid flows (application to stratified & slug flow regimes)*, PhD Thesis, Cranfield University, Cranfield, 2004.
- T. Hibiki, M. Ishii, One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 25, pp. 4935-4948, 2003.
- M. Ishii, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, pp. 419-430, Paris: Eyrolles, 1975.
- M. Ishii, K. Mishima, Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations, *Nuclear Engineering and design*, Vol. 82, No. 2, pp. 107-126, 1984.
- G. B. Wallis, *One-Dimensional two-Phase Flow*, pp. 55-63, New York: McGraw-Hill, 1969.
- P. Woodburn, R. Issa, Well-posedness of one-dimensional transient, two-fluid models of two-phase flows, *Third International Conditioning of Multiphase Flow*, Lyon, France, June 8-12, 1998.
- J. Masella, Q. Tran, D. Ferre, C. Pauchon, Transient simulation of two-phase flows in pipes, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 24, No. 5, pp. 739-755, 1998.
- H. Paillere, C. Corre, J. G. Cascales, On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models, *Computers & Fluids*, Vol. 32, No.