МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Перегудова Ольга Алексеевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ НЕАВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРИНЦИПАХ СРАВНЕНИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИИ

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2009

Работа выполнена на кафедре информационной безопасности и теории управления (механики и теории управления) факультета математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета

Научный консультант – доктор физико-математических наук,
профессор Андреев Александр Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Голубев Юрий Филиппович

доктор физико-математических наук,
профессор Маликов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор Тхай Валентин Николаевич

Ведущая организация – Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Защита диссертации состоится "30" октября 2009 года в $16^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико–математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико–математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан "____" __________ 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ
к.ф.-м.н., доцент В.А. Прошкин

Общая характеристика диссертационной работы

Актуальность темы

Бурное развитие науки и техники в середине двадцатого века вызвало интенсивную разработку новых разделов теоретической механики, в том числе, теории управления движением механических систем и её приложений. Основой этого раздела механики явились результаты исследований отечественных учёных, прежде всего, научных школ Н.Н. Красовского, А.Ю. Ишлинского, Д.Е. Охоцимского, В.В. Румянцева, Ф.Л. Черноусько, В.М. Матросова, Е.С. Пятницкого.

Усложнение структуры управляемых механических систем, разработка математических основ управления мехатронными системами, алгоритмов управления мобильными роботами требуют изучения новых классов задач в нелинейной и нестационарной постановке. Вывод новых методов решения задач управления сложными многосвязными механическими системами с учётом ограничения на управляющие воздействия, неизвестных параметров систем и возмущений, требования о приведении системы в терминальное состояние за конечное время является актуальным предметом многочисленных научных исследований в настоящее время.

Широкое применение в решении задач синтеза управления механическими системами с неизвестными параметрами получил развитый в работах Ф.Л. Черноусько, Е.С. Пятницкого и их учеников принцип декомпозиции, состоящий в приведении управления всей механической системой к управлению отдельными её подсистемами таким образом, что перекрёстные динамические связи между подсистемами за конечное время перестают влиять на процесс движения. При этом актуальна проблема построения новых законов управления на основе принципа декомпозиции с получением явных оценок области начальных возмущений, а также с учётом различных неопределённых факторов в структуре управления и параметрах самой системы.

Широкой базой решения задач об исследовании устойчивости и управлении движениями механических систем является прямой метод Ляпунова. И обратно, развитие этого метода в работах Н.Г. Четаева, Н.Н. Красовского, В.В. Румянцева, В.М. Матросова и других учёных в значительной степени связано с постановкой и решением задач об устойчивости и управлении движением. Большой раздел прямого метода Ляпунова составляют результаты, полученные в работах В.М. Матросова, Р.З. Абдуллина, Л.Ю. Анапольского, С.Н. Васильева, А.А. Воронова, А.С. Землякова, Р.И. Козлова, А.И. Маликова, К. Кордуняну, В. Лакшмикантама и других учёных на основе принципа сравнения. В настоящее время эти результаты эффективно применяются для выявления различных динамических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений. В их основе лежит принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова, состоящий в следующем. Если для исходной системы дифференциальных уравнений существует вектор-функция Ляпунова, удовлетворяющая определённым условиям, то различные динамические свойства этой системы следуют из аналогичных свойств системы сравнения. Однако возможности метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в задачах о стабилизации и управлении движениями механических систем далеко не исчерпаны. В этом плане важную роль приобретают исследования по развитию этого метода в направлении смягчения условий классических теорем и разработке новых способов построения вектор-функций Ляпунова и систем сравнения.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка нового направления в исследовании устойчивости и управления движениями механических систем на основе развития метода сравнения и применения принципа декомпозиции.

Задачами исследования являются:

1) Обоснование новых способов решения задач об устойчивости и стабилизации движений механических систем посредством вывода соответствующих новых теорем об устойчивости для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

2) Вывод новых способов решения задач о стабилизации и управлении движением механических систем на основе синтеза разрывных (кусочно-непрерывных и релейных) управлений с учётом различного рода возмущений, динамики приводов, при неполной информации о параметрах системы, при наличии запаздывания в структуре обратной связи.

3) Решение конкретных задач прикладного характера: о стабилизации программных движений и отслеживании траекторий многозвенных манипуляторов, колёсных мобильных роботов, в том числе на основе синтеза разрывных управлений с учётом различных неопределённых факторов в параметрах системы и в управлении.

Методы проведенного исследования. Достоверность результатов

Основным методом проведённого исследования является метод функций Ляпунова. Вывод новых общих теорем об устойчивости и стабилизации основан на применении принципа сравнения и качественной теории диффереciальных и функционально-дифференциальных уравнений в части построения топологической динамики этих уравнений. Вывод новых способов решения задач о стабилизации и управлении движением механических систем основан на применении полученных теорем и принципа декомпозиции.

Результаты диссертации строго математически обоснованы. Достоверность разработанных в диссертации новых способов решения задач об устойчивости и управлении движением механических систем подтверждена проведённым численным моделированием в исследованных задачах.

Основные результаты. Научная новизна

Все результаты диссертационной работы являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1) Разработан подход в исследовании устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений, позволяющий расширить классы систем сравнения и функций Ляпунова, используемых в теоремах сравнения для устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости.

Получены новые теоремы сравнения для асимптотической устойчивости и неустойчивости решений неавтономных систем обыкновенно-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, позволяющие использовать системы сравнения, решения которых устойчивы (не асимптотически).

Получены новые теоремы сравнения для устойчивости решений указанных систем дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных скалярных и векторных функций Ляпунова.

2) Разработан новый способ исследования устойчивости невозмущённого движения механических систем с конечным числом степеней свободы, основанный на построении вектор-функции Ляпунова и системы сравнения с применением операторных и логарифмических матричных норм.

Применением этого способа к задачам устойчивости движений механических систем с одной и с двумя степенями свободы получены новые эффективные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости, позволяющие исследовать на устойчивость механические системы, параметры которых могут произвольным образом изменяться в заданных диапазонах.

3) Получены новые способы решения задач о стабилизации программных движений механических систем общего вида с конечным числом степеней свободы при помощи различных управлений: непрерывных, кусочно-непрерывных, релейных.

Получены новые теоремы о стабилизации программных движений механических систем с неизвестными массо-инерционными характеристиками, при наличии неизвестного запаздывания в управлении, с учётом динамики исполнительных механизмов, с явными оценками области начальных возмущений без наложения ограничений на скорость изменения параметров рассматриваемых систем.

4) Разработан способ решения задач об отслеживании траекторий механических систем общего вида с конечным числом степеней свободы с помощью релейной запаздывающей обратной связи. Этот способ позволил существенно расширить класс отслеживаемых траекторий и исследуемых механических систем по сравнению с применявшимся ранее методом "замороженных" коэффициентов.

5) Получены новые решения задач стабилизации программного движения и отслеживания траекторий мобильных роботов различной конструкции: типа двускатной тележки, типа "монотип"; с роликонесущими колёсами, в том числе, в условиях неполной информации о массо-инерционных параметрах системы и наличия неопределённого запаздывания в управлении.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов

Диссертация носит теоретический характер. Её значимость заключается в разработке нового направления в решении задач устойчивости и управления движением механических систем, включающего в себя:

– теоремы сравнения для исследования устойчивости движений неавтономных механических систем, являющиеся развитием классических теорем сравнения;

– эффективные способы и алгоритмы исследования устойчивости и стабилизации движений механических систем, описываемых нелинейными неавтономными дифференциальными уравнениями.

– методику применения этих способов и алгоритмов в актуальных задачах управления движением манипуляторов, колёсных мобильных роботов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, используются при чтении спецкурсов: "Математические основы конструирования систем управления", "Устойчивость и управление движением", при написании курсовых и дипломных работ на факультете математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета. Эти результаты активно используются в научно-исследовательской работе сотрудников Ульяновского государственного университета.

Апробация результатов диссертации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, съездах и семинарах:

— IX Международный Семинар имени Е.С. Пятницкого « Устойчивость и колебания нелинейных систем управления » , Москва, Россия, 31 мая – 2 июня 2006 года;

— IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 года;

— VIII Крымская Международная Математическая школа « Метод функций Ляпунова и его приложения » , Крым, Алушта, 10–17 сентября 2006 года;

— Международный конгресс « Нелинейный динамический анализ-2007 » , Санкт-Петербург, Россия, 4–8 июня 2007 года;

— VIII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике, осенняя сессия, Сочи-Адлер, 29 сентября – 7 октября 2007 года;

— X Международный Семинар им. Е.С. Пятницкого « Устойчивость и колебания нелинейных систем управления » , Москва, Россия, 3–6 июня 2008 года;

— Выездной семинар « Аналитическая механика и устойчивость движения » кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, под руководством член-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна, Ульяновск, 17–19 июня 2008 года;

— Международная научная конференция по механике « Пятые Поляховские чтения » , Россия, Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 года;

— Седьмая Международная конференция « Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов » , Россия, Ульяновск, 2–5 февраля 2009 года;

— Семинар « Аналитическая механика и устойчивость движения » кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, под руководством член-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна и проф. Я.В. Татаринова, Москва, 18 марта 2009 года;

— Семинар « Динамика относительного движения » кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, под руководством член-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. Ю.Ф. Голубева, Москва, 27 апреля 2009 года;

— Семинар лаборатории динамики нелинейных процессов управления Института проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, под руководством проф. В.Н. Тхая, Москва, 4 июня 2009 года;

— Семинар отдела механики Учреждения Российской академии наук Вычислительного центра имени А.А. Дородницына РАН, под руководством проф. С.Я. Степанова, Москва, 4 июня 2009 года;

— Симбирская молодёжная научная школа по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, посвящённая памяти академика Валентина Витальевича Румянцева, Ульяновск, 8–12 июня 2009 года;

— Семинары кафедры механики и теории управления (с октября 2008 г. кафедры информационной безопасности и теории управления) Ульяновского государственного университета, проводимые под руководством проф. А.С. Андреева, Ульяновск, 2001 – 2009 годы.

Связь работы с крупными научными темами

Исследования проводились в рамках программ: "Государственная поддержка ведущих научных школ" (проект НШ-6667.2006.1 "Развитие общих методов аналитической механики и устойчивости движения механических систем"), "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/6194 "Развитие математической и прикладной теории устойчивости, стабилизации и управления") и проектов Российского фонда фундаментальных исследований:

– "Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости и стабилизации неустановившихся движений" (проект № 02-01-00877);

– "Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости и стабилизации движений механических систем" (проект № 05-01-00765);

– "Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости, стабилизации и управлении движениями и процессами" (проект № 08-01-00741).

Опубликованность результатов и личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, список которых приведён в конце автореферата. Все результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены лично диссертантом.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 189 наименований. Работа содержит 28 рисунков. Общий объём диссертации составляет 268 страниц.

Основное содержание работы

Во **Введении** представлена общая характеристика проблемы. Проводится краткий обзор классических результатов по методу сравнения в задачах об устойчивости движения, о применении принципа декомпозиции в задачах синтеза управления механическими системами. Обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цель и задачи исследования, научная новизна и значимость полученных результатов.

В **первой главе**, состоящей из пяти разделов, исследуется задача об устойчивости невозмущённого движения, отвечающего нулевому решению $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = (X^1(t, \mathbf{x}), \ldots, X^n(t, \mathbf{x}))^{\mathrm{T}}$ (индекс "Т" означает транспонирование), вещественные функции $X^i(t, \mathbf{x})$ $(i = 1, \ldots, n)$ определены и непрерывны в области

$$\Gamma = R^+ \times S_\nu = \{(t, \mathbf{x}) \in R \times R^n : \quad t \geqslant 0, \quad |\mathbf{x}| < \nu\}$$

($\nu = \mathrm{const} > 0$ или $\nu = +\infty$, символ $|\cdot|$ означает некоторую векторную норму в R^n). Пусть относительно правой части системы (1) имеет место следующее предположение.

Предположение 1 *Вектор-функция* $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ *удовлетворяет в области* Γ *условию Липшица по* $\mathbf{x}$ *равномерно относительно* t, *т.е. для любого* ν_0, $0 < \nu_0 < \nu$, *найдётся число* $L = L(\nu_0) > 0$, *такое, что для всех точек* $(t, \mathbf{x}^2), (t, \mathbf{x}^1) \in R^+ \times \bar{S}_{\nu_0}$ $(\bar{S}_{\nu_0} = \{\mathbf{x} \in R^n : |\mathbf{x}| \le \nu_0\})$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}^2) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}^1)| \le L|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1|.$$

При этом предположении семейство сдвигов $\{\mathbf{X}_\tau(t,\mathbf{x}) = \mathbf{X}(t+\tau,\mathbf{x}), \quad \tau \in R^+\}$ будет предкомпактно в некотором компактном метрическом пространстве F_X, и для системы (1) может быть построено целое семейство предельных систем[1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}^* \in F_X, \quad \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\lim_{j\to\infty}\int\limits_0^t \mathbf{X}(t_j+\tau,\mathbf{x})d\tau, \tag{2}$$

каждая из которых определяется некоторой последовательностью $t_j \to +\infty$.

Вводятся следующие классы векторных функций. Пусть $\mathbb{K}_1$ — класс векторных функций $\mathbf{V} = (V^1, V^2, \ldots, V^k)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{V} : \Gamma \to R^k$ ограниченных, равномерно непрерывных на каждом множестве $R \times K$, где $K \subset S_\nu$ — компакт. Пусть также $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_3$ — аналогичные классы векторных функций $\mathbf{U} : R \times R^k \to R^k$ и $\mathbf{W} : R \times S_\nu \times R^k \to R^k$ ограниченных и равномерно непрерывных по $(t,\mathbf{u}) \in R \times K_2$ и $(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \in R \times K_1 \times K_2$ для любых компактных множеств $K_1 \subset S_\nu$ и $K_2 \subset R^k$.

Для каждой функции $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$ семейство сдвигов

$$\{\mathbf{V}_\tau(t,\mathbf{x}) = \mathbf{V}(t+\tau,\mathbf{x}), \tau \in R^+\}$$

будет предкомпактно в некотором функциональном метризуемом пространстве F_V непрерывных функций $\mathbf{V} : \Gamma \to R^k$ с открыто-компактной топологией. Отсюда следует, что для любой последовательности $t_l \to +\infty$ найдутся подпоследовательность $t_{l_j} \to +\infty$ и функция $\mathbf{V}^* \in F_v$, такие, что последовательность сдвигов $\{\mathbf{V}_j(t,\mathbf{x}) = \mathbf{V}(t_{l_j} + t,\mathbf{x})\}$ будет сходиться к предельной функции $\mathbf{V}^*(t,\mathbf{x})$ в пространстве F_V, а именно: сходимость будет равномерной по $(t,\mathbf{x}) \in [-\beta,\beta] \times K$ для каждого числа $\beta > 0$ и каждого компактного множества $K \subset S_\nu$. Тем самым, для функции $\mathbf{V}$ можно определить семейство предельных функций $\{\mathbf{V}^*\}$.

Аналогично, для функций $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$ и $\mathbf{W} \in \mathbb{K}_3$ можно построить соответственно семейства $\{\mathbf{U}^*\}$ и $\{\mathbf{W}^*\}$ предельных функций.

Пусть для системы (1) существует непрерывно-дифференцируемая функция $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, производная которой в силу этой системы представима в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{V}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{U}(t,\mathbf{V}(t,\mathbf{x})) + \mathbf{W}(t,\mathbf{x},\mathbf{V}(t,\mathbf{x})),\\ \mathbf{U}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}(t,\mathbf{0},\mathbf{V}(t,\mathbf{0})) \equiv \mathbf{0},\end{gathered} \tag{3}$$

где функция $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t,\mathbf{u})$ принадлежит классу $\mathbb{K}_2$, $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $\mathbf{u} \in R^k$, $\partial\mathbf{U}/\partial\mathbf{u} \in \mathbb{K}_2$, функция $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$ принадлежит классу $\mathbb{K}_3$, $\mathbf{W} \in \mathbb{K}_3$, и имеет место неравенство $\mathbf{W}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \leqslant \mathbf{0}$ для любых $(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \in R \times S_\nu \times R^k$.

Из представления (3) следует, что функция $\mathbf{V}(t,\mathbf{x})$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(t,\mathbf{u}) \tag{4}$$

---

[1]а) *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Different. Equat. — 1977. — Vol. 23, № 2. — P. 216–223.

б) *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. — 1984. — Т. 48. — Вып. 2. — С. 225–232.

— системой сравнения.

Если $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (3), при этом $\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{V}_0$, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0)$ есть решение (4), определённое на интервале $[t_0, t_0+\beta)$, $\beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0+\beta)$ на решении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) выполняется неравенство

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0).$$

Из условия $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$ следует, что система (4) предкомпактна и для неё можно определить семейство предельных систем сравнения

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}^*(t, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{U}^* \in F_U. \tag{5}$$

Из условий относительно правой части $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ системы (4) следует, что решения этой системы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)$ непрерывно дифференцируемы по $(t_0, \mathbf{u}_0) \in R^+ \times R^k$. Из свойства неубывания зависимости $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)$ по $\mathbf{u}_0$ следует, что матрица

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0) = \frac{\partial \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\mathbf{\Phi}(t_0, t_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I} \in R^{n\times n}$ — единичная матрица) фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(t, t_0, \mathbf{u}_0)\mathbf{y}, \quad \mathbf{H} = \left.\frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{u}_0)}.$$

Предположим, что для любого компакта $K \in R^k$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K) > 0$, такие, что матрица $\mathbf{\Phi}$ для любых $(t, t_0, \mathbf{u}_0) \in R^+ \times R^+ \times K$ удовлетворяет условиям

$$\|\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0)\| \leqslant M(K), \quad \det \mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0) \geqslant \alpha(K). \tag{6}$$

С использованием формулы В.М. Алексеева нелинейной вариации параметров доказана следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ решения системы (1).

Теорема 1 *Предположим, что:*

1) существует вектор-функция Ляпунова $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, *удовлетворяющая дифференциальному равенству (3);*

2) решения системы сравнения (4) удовлетворяют условию (6);

3) решение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ *системы (1) ограничено некоторым компактом* $K \subset \Gamma$ *для всех* $t \geqslant t_0$;

4) решение $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0)$ *системы сравнения (4), где* $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0)$, *ограничено при всех* $t \geqslant t_0$.

Тогда для любой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ *найдётся набор предельных функций* $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$, *такой, что решение* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{p})$ *системы (2) с начальным условием* $\mathbf{x}^*(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ *удовлетворяет соотношениям*

$\mathbf{x}^*(t,\mathbf{p}) \in \omega^+(t_0,\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}^*(t,\mathbf{p}) \in \{\mathbf{V}^*(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t)\}\bigcap\{\mathbf{W}^*(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}\}$ *для всех* $t \in R$, *где* $\mathbf{u}^*(t)$ *есть решение предельной системы сравнения (5) с начальным условием* $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{V}^*(0,\mathbf{p})$.

Эта теорема является развитием принципа инвариантности Ж.П. Ла-Салля для автономной системы[2] и принципа квазиинвариантности для неавтономной системы на основе скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной, развитого в работах А.С. Андреева.

На основе полученной теоремы 1 выведены достаточные условия асимптотической устойчивости невозмущённого движения неавтономных систем с применением знакоопределенных вектор-функций Ляпунова. Доказана следующая теорема, являющаяся развитием классической теоремы сравнения для асимптотической устойчивости[3], позволяющая делать вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы в случае, когда нулевое решение системы сравнения устойчиво (не асимптотически).

Теорема 2 *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, *такая, что: соответствующая скалярная функция* $\bar{V}(t,\mathbf{x})$, *определяемая в виде*

$$\bar{V}(t,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} V^i(t,\mathbf{x}) \text{ или } \bar{V}(t,\mathbf{x}) = \max\nolimits_{i=1,\dots,n} V^i(t,\mathbf{x}),$$

является определённо-положительной; выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, а также:

3) нулевое решение $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *системы сравнения (4) устойчиво (равномерно устойчиво);*

4) для любой предельной совокупности $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$ *и каждого ограниченного решения* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t) \neq \mathbf{0}$ *предельной системы сравнения (5) множество* $\{\mathbf{V}^*(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t)\}\bigcap\{\mathbf{W}^*(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}\}$ *не содержит решений предельной системы (2).*

Тогда нулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы (1) эквиасимптотически устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).*

Оказывается, теорема 1 позволяет смягчить требования к системе сравнения и в задаче о неустойчивости. А именно: для наличия неустойчивости невозмущённого движения исходной системы не обязательно, чтобы система сравнения была неустойчивой. В настоящей главе доказана соответствующая теорема, являющаяся развитием классической теоремы для неустойчивости с вектор-функцией Ляпунова.

[2] *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.

[3] *Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С. и др.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987. — 312 с.

На этой основе непосредственно получены различные признаки неустойчивости линейной механической системы с одной степенью свободы и переменными коэффициентами

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где функции $f(t)$ и $g(t)$ ограничены и непрерывно дифференцируемы. В частности, получено следующее условие неустойчивости: найдутся положительные числа α и ε, такие, что для всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$g(t) + \alpha(f(t) + \alpha) \geqslant \varepsilon, \quad \alpha + f(t) + \frac{\dot{g}(t) + \alpha \dot{f}(t)}{2(g(t) + \alpha(f(t) + \alpha))} \leqslant 0.$$

Далее в главе проводится развитие полученных теорем в направлении применения знакопостоянных вектор-функций Ляпунова в исследовании устойчивости невозмущённого движения системы (1). Ослабляются требования не только к системе сравнения, но и к самой вектор-функции Ляпунова. А именно: доказаны теоремы сравнения об устойчивости и асимптотической устойчивости для случая, когда система сравнения устойчива, а функция $\bar{V}(t, \mathbf{x})$ из теоремы 2 знакопостоянная неотрицательная.

Во **второй главе**, состоящей из четырёх разделов, на основе функций Ляпунова исследуется задача об устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) запаздывающего типа с конечным запаздыванием

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_t), \tag{7}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $t \in R^+$, функция $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi})$, $\mathbf{X} : R^+ \times C_H \to R^n$, определена, вполне непрерывна в области $R^+ \times C_H$. $C_H = \{\boldsymbol{\varphi} \in C : \|\boldsymbol{\varphi}\| < H\}$, C — банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \max\{|\boldsymbol{\varphi}(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0\}$, $h > 0$, $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t+s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$.

Получены результаты об устойчивости нулевого решения системы (7) на основе совместного использования метода сравнения и метода предельных уравнений. Для этого вводится следующее предположение относительно правой части системы (7).

Предположение 2 *Для каждого компактного множества* $K \subset C_H$ *функция* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi})$ *ограничена, равномерно непрерывна по* $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times K$, *то есть, для любого* $K \subset C_H$ *существует число* $M = M(K)$, *и для произвольного малого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, *такое, что для любых* $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times K$, $(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1), (t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \in K : \|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\| < \delta$, *выполняются неравенства*

$$|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi})| \leqslant M, \qquad |\mathbf{X}(t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{X}(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1)| < \varepsilon.$$

При этом предположении системе (7) можно сопоставить семейство предельных уравнений[4]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}_t), \tag{8}$$

[4] *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. — 328 с.

где $\mathbf{X}^* \in F_X$, $\mathbf{X}^* : R \times C_H \to R^n$, — функция, предельная к X.

Пусть для системы (7) существует функция Ляпунова

$$V = V(t, \mathbf{x}), \qquad V : R^+ \times S_H \to R,$$

непрерывно дифференцируемая в области $R^+ \times S_H$. Производная по времени от $V(t, \mathbf{x})$ в силу системы (7) определяется по формуле

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{\partial V(t, \boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(0)} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}).$$

Предполагается, что функционал $\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi})$ можно представить в виде

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) = U(t, V(t, \boldsymbol{\varphi}(0))) + W(t, \boldsymbol{\varphi}), \tag{9}$$

где функционал $W = W(t, \boldsymbol{\varphi})$ удовлетворяет неравенству $W \leqslant 0$ на множестве

$$\Omega_t[V, u] = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_H : V(t+s, \boldsymbol{\varphi}(s)) \leqslant u(t+s, t, V(t, \boldsymbol{\varphi}(0))), -h \leqslant s \leqslant 0\}.$$

Здесь $u(t, \alpha, u_0)$ — решение уравнения

$$\dot{u} = U(t, u), \tag{10}$$

проходящее через точку $(\alpha, u_0) \in R^+ \times R$.

Уравнению (10) можно сопоставить семейство предельных уравнений

$$\dot{u} = U^*(t, u), \tag{11}$$

где U^* — некоторая функция, предельная к U.

Пусть выполняются следующие условия:

1) уравнение (10) удовлетворяет условиям единственности решений в области $R^+ \times R$;

2) существует непрерывная и ограниченная при всех $t \geqslant 0$, $u_0 \in R$ функция

$$\Phi(t, 0, u_0) = \frac{\partial u(t, 0, u_0)}{\partial u_0}, \quad d_1 \leqslant \Phi(t, 0, u_0) \leqslant d_2,$$

где $d_1, d_2 > 0$ — положительные постоянные.

Определим вспомогательную функцию $w(t, \mathbf{x})$ при всех $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in S_H$ из равенства

$$V(t, \mathbf{x}) = u(t, 0, w(t, \mathbf{x})). \tag{12}$$

Это возможно согласно методу нелинейной вариации параметров[5], так как $u(t, 0, u_0)$ — единственное решение уравнения сравнения (10), существующее при всех $t \geqslant 0$.

По построению функция $w(t, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема на множестве $R^+ \times S_H$. Следовательно, для $w(t, \mathbf{x})$ так же, как и для функции $V(t, \mathbf{x})$,

[5] *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. — Киев: Наукова думка, 1991. — 248 с.

можно построить семейство предельных функций $\{w^*(t,\mathbf{x})\}$. При этом для всех $(t,\mathbf{x}) \in R \times S_H$ справедливо соотношение

$$V^*(t,\mathbf{x}) = u^*(t, w^*(t,\mathbf{x})).$$

Для каждого числа $c \in R$ и любого $t \in R$ определим множества

$$N(t,c) = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_H : \sup_{-h \leqslant s \leqslant 0} w^*(t+s, \boldsymbol{\varphi}(s)) = c\},$$

$$M(t,c) = \{\boldsymbol{\varphi} \in N(t,c) : w^*(t, \boldsymbol{\varphi}(0)) = c\}.$$

Проведённые построения позволили доказать следующую теорему о локализации положительного предельного множества $\omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi}_0)$ ограниченного решения неавтономной системы ФДУ.

Теорема 3 *Предположим, что решение* $\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi}_0)$ *системы (7) ограничено некоторым компактом* $K \subset S_H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$ *и существует функция Ляпунова* $V = V(t,\mathbf{x})$, $V \in \mathbb{K}_1$, *такая, что справедливо дифференциальное равенство (9).*

Тогда найдётся число $c \in R$, *такое, что для любой предельной точки* $\boldsymbol{\psi} \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi}_0)$ *существуют набор предельных функций* $(\mathbf{X}^*, V^*, w^*, U^*, W^*)$ *и решение* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t,0,\boldsymbol{\psi})$ *предельного уравнения (8), такие, что* $\mathbf{x}^*_t(0,\boldsymbol{\psi}) \in N(t,c)$, *при этом для каждого* $\tau \in R$ *существует* $\theta \in [\tau - h, \tau]$, *при котором* $\mathbf{x}^*_\theta(0,\boldsymbol{\psi}) \in M(\theta,c)$ *и одновременно* $\mathbf{x}^*_\theta(0,\boldsymbol{\psi}) \in \{\boldsymbol{\varphi} \in C_H : W^*(\theta,\boldsymbol{\varphi}) = 0\}$.

На этой основе доказана следующая теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (7).

Теорема 4 *Предположим, что существует определённо-положительная функция Ляпунова* $V = V(t,\mathbf{x})$, $V \in \mathbb{K}_1$, *такая, что:*

1) функционал $\dot V(t,\boldsymbol{\varphi})$ *удовлетворяет дифференциальному равенству (9);*

2) тривиальное решение $u = 0$ *уравнения сравнения (10) устойчиво;*

3) для любой предельной совокупности $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*, V^*)$ *и любого числа* $c \geqslant 0$ *не существует ненулевого решения* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t,0,\boldsymbol{\psi})$ *уравнения (8), такого, что* $\mathbf{x}^*_t(0,\boldsymbol{\psi}) \in N(t,c)$ *для всех* $t \in R$, *и для каждого* $\tau \in R$ *существует значение* $\theta \in [\tau - h, \tau]$, *такое, что* $\mathbf{x}^*_\theta(0,\boldsymbol{\psi}) \in M(\theta,c)$ *и одновременно* $W^*(\theta, \mathbf{x}^*_\theta(0,\boldsymbol{\psi})) = 0$.

Тогда нулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы (7) асимптотически устойчиво.*

Если при этом нулевое решение $u = 0$ *уравнения сравнения (10) равномерно устойчиво, то нулевое решение* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы (7) равномерно асимптотически устойчиво.*

Теоремы 3 и 4 являются развитием известных теорем об устойчивости ФДУ с конечным запаздыванием на основе функции Ляпунова[6].

---

[6]a) *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. — 1956. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 500–512.

b) *Красовский Н.Н.* Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. — 1956. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 513–518.

c) *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. — 328 с.

Применение теоремы 4 к задачам механики продемонстрировано на ряде примеров, в частности, в задаче о стабилизации программного вращения твёрдого тела, закреплённого в центре масс, вокруг средней главной центральной оси инерции в предположении, что стабилизирующие моменты определяются с некоторым неизвестным ограниченным запаздыванием. В этой задаче получено условие стабилизации, которое при отсутствии запаздывания и в случае стационарного вращения переходит в необходимое и достаточное условие критерия Рауса–Гурвица.

Далее в главе исследован вопрос об использовании знакопостоянных функций Ляпунова в решении задач об устойчивости и асимптотической устойчивости решений системы (7). Получены соответствующие результаты, которые позволяют расширить класс применяемых функций Ляпунова.

Далее все исследования по устойчивости и стабилизации движений механических систем проводятся на основе теорем сравнения и их развития, представленного в главах 1 и 2 диссертации.

В **третьей главе**, состоящей из пяти разделов, рассматриваются задачи об устойчивости и стабилизации неустановившихся движений голономных механических систем в общей постановке.

Построением системы сравнения получены достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости невозмущённого движения системы, уравнения возмущённого движения которой могут быть представлены в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t, \mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $t \in R^+$, $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ — матрицы размерности $n \times n$ с равномерно непрерывными, ограниченными элементами, матрица $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ невырождена, $\det \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \geqslant b_0 = \mathrm{const} > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $\forall \mathbf{x} \in R^n$.

Используется следующее понятие логарифмической матричной нормы, введённое в работах С.М. Лозинского[7] и Дж. Далквиста[8].

Определение 1 *Логарифмической нормой* $\operatorname{lgn} \|\mathbf{A}\|$ *матрицы* $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ *называется величина*

$$\operatorname{lgn} \|\mathbf{A}\| = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [\|\mathbf{I} + h\mathbf{A}\| - 1].$$

Здесь символом $\|\cdot\|$ обозначена операторная матричная норма, соответствующая выбранной векторной норме.

Введём обозначение $D_r = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R^n \times R^n : |\mathbf{x}| < r, |\mathbf{y}| < r\}$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5 *Для экспоненциальной устойчивости невозмущённого движения* $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ *системы (13) достаточно, чтобы существовали постоянные* $k > 1$,

[7] *Лозинский С.М.* Оценка погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. — 1958. — № 5. — С. 52–90.

[8] *Dahlquist G.* Stability and Error Bounds in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations // Almqvist & Wiksells, Uppsala. — 1958; Transactions on the Royal Institute of Technology, Stockholm. — 1959. — № 130.

$r>0$, $L>0$, матрица $\mathbf{C}\in R^{n\times n}$, $\det\mathbf{C}\neq 0$, и непрерывная функция $\varepsilon: R^{+}\to R$, такие, что для любого $t_0\geqslant 0$ и для всех $t\geqslant t_0$ выполнялись неравенства

$$\operatorname{lgn}\|-\mathbf{C}\|<0,\qquad k>-\|\mathbf{C}\|/(\operatorname{lgn}\|-\mathbf{C}\|),$$

$$\sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_r}\{\|-\mathbf{C}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{C}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}(t,\mathbf{x})\|+\operatorname{lgn}\|\mathbf{C}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{C}\|/k\}\leqslant\varepsilon(t)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t}\max\{\varepsilon(s);\operatorname{lgn}\|-\mathbf{C}\|+\|\mathbf{C}\|/k\}\,ds\leqslant L. \tag{14}$$

Теорема 6 *Пусть $|\cdot|$ — сферическая норма, матрица $\mathbf{C}$ имеет вид $\mathbf{C}=c\mathbf{I}$ ($c=\text{const}>0$) и для всех $t\geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$c+\sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_r}\operatorname{lgn}\|-\mathbf{A}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\|\leqslant-\delta=\text{const}<0. \tag{15}$$

Тогда для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения $\mathbf{x}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$ системы (13) достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы 5 при $k=1$.

По теореме 6 равномерная асимптотическая устойчивость невозмущённого движения $\mathbf{x}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$ системы (13) имеет место в случае, когда система сравнения устойчива, но не асимптотически.

На основе приведённых теорем получены различные условия равномерной асимптотической устойчивости невозмущённого движения механической системы с одной степенью свободы и нестационарными параметрами

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})\dot{x}+g(t,x)=0,\quad g(t,0)\equiv 0, \tag{16}$$

где функции $f(t,x,\dot{x})\dot{x}$ и $g(t,x)$ ограничены и равномерно непрерывны в $R^{+}\times K_1\times K_2$ и $R^{+}\times K_1$ соответственно ($K_1\subset R$ и $K_2\subset R$ — компактные множества). Функции, предельные к $f(t,x,\dot{x})$ и $g(t,x)$, обозначим соответственно $f^{*}(t,x,\dot{x})$ и $g^{*}(t,x)$.

В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 7 *Пусть выполнено какое-либо из следующих условий:*

1. *справедливы условия*

$$\left\{\begin{array}{ll} 0<f_1\leqslant f(t,x,y)\leqslant f_2<+\infty, & \forall t\geqslant 0,\quad \forall x,y\in R,\\ 0<g_1x^2\leqslant xg(t,x)\leqslant g_2x^2, & \forall t\geqslant 0,\quad x\neq 0,\\ 2g_2\leqslant f_1^2; & \end{array}\right. \tag{17}$$

2. существуют постоянные $K > 0$ *и* $\alpha > 0$, *такие, что для любого* $t_0 \geqslant 0$

$$\int_{t_0}^{t} \gamma(t)dt \leqslant K, \qquad \forall t \geqslant t_0,$$

где функция $\gamma(t)$ *определяется в виде*

$$\gamma(t) = \max\{2\alpha - f(t, x(t), \dot{x}(t)); -\alpha + |-\alpha + f(t, x(t), \dot{x}(t)) - g(t, x(t))/(\alpha x(t))|\}$$

и, кроме того, для всех $x \neq 0$, $y \in R$, $t \in R$ *выполняются неравенства*

$$\frac{g^*(t,x)}{x} \neq 2\alpha f^*(t,x,y) - 4\alpha^2, \quad \frac{g^*(t,x)}{x} \neq 2\alpha^2. \tag{18}$$

Тогда нулевое положение равновесия $x = \dot{x} = 0$ *системы (16) будет равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Условия теоремы 7 дополняют результаты Д.Р. Меркина[9] и др. Рассмотрено применение теоремы 7 в задачах о стабилизации программных нестационарных вращений центрифуги, физического маятника.

Далее на основе результатов, полученных в первой главе, дано решение задачи о неустойчивости движения механической системы путём построения минорирующего уравнения сравнения.

Решены задачи о стабилизации программных движений голономных механических систем, линеаризованные уравнения в отклонениях которых имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\mathbf{x} = \mathbf{C}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \tag{19}$$

где матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ имеют ограниченные непрерывные элементы, $\mathbf{u} \in R^n$ — вектор управления.

Выведены достаточные условия стабилизации программных движений механических систем при помощи пропорционального и пропорционально-дифференциального регуляторов. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 8 *Пусть существуют невырожденная матрица* $\mathbf{D} \in R^{n\times n}$ *и постоянная* $k \in R$, *такие, что*

$$\operatorname{lgn}\|-\mathbf{D}\| < 0, \qquad k > -\|\mathbf{D}\|/(\operatorname{lgn}\|-\mathbf{D}\|),$$

$$\int_0^\infty \max\{0, \|-\mathbf{D} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}(s)\mathbf{D} - \mathbf{B}(s) + \mathbf{C}(s)\mathbf{K})\| + \operatorname{lgn}\|\mathbf{D} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}(s)\mathbf{D}\|/k\}ds < +\infty.$$

Тогда управление $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ *обеспечивает экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (19).*

---

[9] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2003. — 304 с.

С использованием теоремы 8 решены задачи о стабилизации программных движений перевёрнутого двойного маятника, двузвенного манипулятора на подвижном основании.

На основе результатов второй главы получены условия стабилизации положений равновесия и программных движений голономных механических систем с учётом запаздывания в цепи обратной связи, когда управление в системе (19) определяется в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}(t - h(t)),$$

где $\mathbf{K} \in R^{n\times n}$ — постоянная матрица, $h(t)$ — ограниченная непрерывная функция запаздывания.

Получены также условия стабилизации движения управляемой механической системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})\dot{x} - g(t, x)x = u, \tag{20}$$

где управление u определяется по принципу обратной связи с переменным запаздыванием в виде

$$u = -k(t)x(t - h(t)). \tag{21}$$

Предполагается, что непрерывные функции $f(t, x, \dot{x})$, $g(t, x)$, $k(t)$ и $h(t)$ при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} 0 < f_1 \leqslant f(t, x, y) \leqslant f_2 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall x, y \in R, \\ 0 \leqslant g_1 \leqslant g(t, x) \leqslant g_2 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall x \in R, \\ 0 < k_1 \leqslant k(t) \leqslant k_2 = \mathrm{const} > 0, \quad 0 \leqslant h(t) \leqslant h_1 = \mathrm{const} > 0. \end{gathered}$$

На основе функции Ляпунова вида кубической нормы вектора получено следующее условие равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы (20) при управлении (21).

Пусть существует число $\alpha > 0$, при котором справедливы следующие неравенства

$$g_2 \leqslant k_1(1 - 2\alpha h_1), \quad -2\alpha^2 + (2f_1 - 2h_1k_2)\alpha + g_1 - k_2 \geqslant 0, \tag{22}$$

тогда управление (21) является стабилизирующим до равномерной асимптотической устойчивости.

Отметим, что при отсутствии запаздывания условие (22) совпадает с условием 1 теоремы 7.

В **четвёртой главе** рассматривается задача о стабилизации движений механических систем с заданной структурой сил, зависящих явно от времени, за счёт наложения сил иной структуры. К решению этой задачи применяется подход, развитый в предыдущих главах.

Задача об устойчивости движения механической системы в зависимости от структуры действующих сил является одной из основных в теории устойчивости движения. Изучение этой задачи часто сводится к исследованию системы

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{23}$$

где $\mathbf{q} \in R^n$ — вектор обобщённых координат, $\dot{\mathbf{q}}$ — вектор обобщённых скоростей, $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ — симметричная, положительно-определённая матрица инерционных характеристик системы, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} > 0$, симметричные матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ описывают соответственно действие диссипативно-ускоряющих и потенциальных сил, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, а кососимметричные матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ характеризуют действие гироскопических и неконсервативных позиционных сил соответственно, $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{P} = -\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — функция, содержащая $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ в степени выше первой, $\mathbf{Q}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Для неавтономных механических систем задача об устойчивости движения в зависимости от действующих сил исследовалась в работах В.М. Матросова, А.С. Андреева, В.Н. Кошлякова, А.А. Косова и других учёных.

Исследована задача о стабилизации нулевого положения равновесия

$$\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{24}$$

потенциальной системы

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{25}$$

с непрерывной ограниченной матрицей $\mathbf{C}(t) \in R^{n\times n}$ за счёт присоединения диссипативно-ускоряющих $\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}$, неконсервативных $\mathbf{P}(t)\mathbf{q}$ и гироскопических $\mathbf{G}(t)\dot{\mathbf{q}}$ сил.

Доказана следующая теорема.

Теорема 9 *При нечётном числе координат нулевое положение равновесия системы (25) можно стабилизировать до равномерной асимптотической устойчивости за счёт присоединения диссипативно-ускоряющих, гироскопических и неконсервативных сил в том случае, когда существуют постоянные* $\varepsilon > 0$ *и* L, *такие, что хотя бы для одного диагонального элемента* $c_{ii}(t)$ *матрицы* $\mathbf{C}(t)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t} c_{ii}(t)dt \geqslant \varepsilon(t - t_0) - L, \qquad \forall t \geqslant t_0. \tag{26}$$

Далее в главе выведены достаточные условия стабилизации движения механической системы с заданными гироскопическими силами и произвольными нелинейными силами, уравнения возмущённого движения которой имеют вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(t)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{27}$$

где $\mathbf{q} \in R^n$ — вектор обобщённых координат, кососимметричная матрица $\mathbf{G}(t) \in R^{n\times n}$ с непрерывными ограниченными элементами описывает гироскопические силы, действующие на систему, $|\det \mathbf{G}(t)| \geqslant g_0 = \mathrm{const} > 0$, $\forall t \geqslant 0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 10 *В случае чётного числа координат* $n = 2k$ *невозмущённое движение* $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системы (27) может быть стабилизировано до равномерной асимптотической устойчивости независимо от вида нелинейных сил присоединением диссипативных сил с диагональной матрицей* $b(t)\mathbf{I}$ *(* $b(t)$ *— непрерывная ограниченная функция,* $\mathbf{I} \in R^{n\times n}$ *— единичная матрица) и неконсервативных позиционных сил с матрицей* $\mathbf{P}(t)$*, таких, что для всех* $t \geqslant 0$ *справедливы неравенства*

$$
\begin{array}{l}
b(t) \geqslant b_0 = \text{const} > 0, \quad \mathbf{G}(t) = \mu\mathbf{P}(t), \quad \mu = \text{const} > 0, \quad b_0\mu > 1 \\
|\det \mathbf{P}(t)| \geqslant p_0 = \text{const} > 0.
\end{array}
$$

Соответствующие теоремы доказаны для задачи стабилизации движения механических систем с заданными неконсервативными позиционными силами при произвольных нелинейных силах.

Решена задача о стабилизации движения механических систем с заданными потенциальными и неконсервативными позиционными силами

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\text{diag}\{c_1(t), \ldots, c_n(t)\} + \mathbf{P}(t))\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{28}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 11 *Пусть* $c_i(t) \geqslant 0, \quad (i = 1, \ldots, n)$ *и*

$$\det(\text{diag}\{c_1(t), \ldots, c_n(t)\} + \mathbf{P}(t)) \geqslant \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *будет стабилизировано до равномерной асимптотической устойчивости, если к системе (28) присоединить диссипативные силы с матрицей* $b(t)\mathbf{I}$ *и гироскопические силы с матрицей* $\mathbf{G}(t) = \mu(t)\mathbf{P}(t), \quad \mu(t) \geq \mu_0 = \text{const} > 0,$ *такие, что для всех* $t \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{2}{\mu(t)} - 2b(t) + \frac{2\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \leqslant \min\{-\mu(t)c_i(t); -\delta\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Применением теоремы 11 решены задачи: о стабилизации вращательного движения осесимметричного спутника на эллиптической орбите и силового гироскопического горизонта на неподвижном основании.

Исследована задача об асимптотической устойчивости неконсервативных систем с двумя степенями свободы, находящихся под действием параметрических возмущений

$$\left\{\begin{array}{l}
A_1\ddot{x} + b_1\dot{x} + H\dot{y} + c_1x + py = X, \\
A_2\ddot{y} + b_2\dot{y} - H\dot{x} + c_2y - px = Y,
\end{array}\right. \tag{29}$$

где $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ — обобщённые коэффициенты инерции, $-H\dot{y}$ и $H\dot{x}$ — гироскопические силы, H — параметр, $-c_1x$ и $-c_2y$ — потенциальные силы, $-py$ и px — силы радиальной коррекции, $-b_1\dot{x}$ и $-b_2\dot{y}$ — диссипативные силы, X и Y — члены, содержащие $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ в степени выше первой. При этом коэффициенты пропорциональности диссипативных и потенциальных сил изменяются во времени, $b_i = b_i(t)$, $c_i = c_i(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant c_i^{min} \leqslant c_i \leqslant c_i^{max} = \text{const} > 0, \quad 0 < b_i^{min} \leqslant b_i \leqslant b_i^{max} = \text{const} > 0,$$

где c_i^{min}, c_i^{max}, b_i^{min}, b_i^{max} ($i = 1, 2$) — некоторые известные постоянные.

Получены следующие условия асимптотической устойчивости невозмущённого движения системы (29).

$$\begin{cases} b_i^{min} \geqslant \dfrac{A_i p}{H} + \dfrac{H c_i^{max}}{2p}, \quad i = 1, 2; \quad \dfrac{b_1^{min}}{A_1} + \dfrac{b_2^{min}}{A_2} \geqslant \dfrac{2p}{H} + \dfrac{H}{p} \max\left\{ \dfrac{c_1^{max}}{A_1}, \dfrac{c_2^{max}}{A_2} \right\}; \\ \dfrac{b_j^{max}}{A_j} - \dfrac{b_k^{min}}{A_k} \leqslant \dfrac{H c_j^{min}}{p A_j}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k. \end{cases} \tag{30}$$

Если выполняются равенства

$$A_1 = A_2 = A, \quad , b_1^{min} = b_2^{min} = b_{min}, \quad b_1^{max} = b_2^{max} = b_{max},$$

$$c_1^{min} = c_2^{min} = c_{min}, \quad c_1^{max} = c_2^{max} = c_{max},$$

то условия (30) принимают более компактный вид

$$b_{min} \geqslant \frac{Ap}{H} + \frac{c_{max} H}{2p}, \quad b_{max} - b_{min} \leqslant \frac{c_{min} H}{p}.$$

Условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (29) в случае, когда коэффициент неконсервативных сил зависит от времени

$$0 < p_1 \leqslant p(t) \leqslant p_2, \quad p_1, p_2 = \text{const},$$

получены в виде: для всех $i, j = 1, 2;$ $i \neq j$, выполняются неравенства

$$\left(\frac{H c_i}{p_0 A_i} \right)^2 + \left(\frac{b_j}{A_j} - \frac{p_0}{H} - \frac{H c_j}{p_0 A_j} \right)^2 + \frac{2}{A_1 A_2} \left(\frac{H \tilde{p}}{p_0} \right)^2 \leqslant 2 \left(\frac{b_i}{A_i} - \frac{p_0}{H} \right) \frac{H c_i}{p_i A_i}. \tag{31}$$

Здесь

$$p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \tilde{p} = \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

Отметим, что условия (30) и (31) не содержат производных функций, входящих в уравнения (29), и позволяют делать вывод об асимптотической устойчивости, если известны только лишь границы диапазона изменения этих функций.

В заключении главы решены задачи об устойчивом функционировании гировертикали с радиальной коррекцией и др.

Пятая глава посвящена проблеме синтеза управления движением механических систем общего вида при учёте, что их функционирование происходит в условиях изменяющихся целей управления, параметров системы, неполной информации о геометрических и массоинерционных характеристиках систем, наличия некоторого неопределённого запаздывания в структуре обратной связи, действия неконтролируемых возмущений.

В **первом разделе** решена задача стабилизации программного движения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0(t)$ механических систем с n степенями свободы, описываемых уравнением вида

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}, \qquad t \geqslant 0, \tag{32}$$

путем построения как релейного, так и кусочно-непрерывного управления.

Релейное управление для системы (32) найдено в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\,\mathrm{sign}\left[\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_0(t))\right], \tag{33}$$

где $\mathbf{K} \in R^{n\times n}$ — некоторая постоянная матрица, $\|\mathbf{K}\| \leqslant k_0 = \mathrm{const}$; $\mathbf{C} \in R^{n\times n}$ — некоторая постоянная матрица, такая, что $\det \mathbf{C} \neq 0$ и для соответствующей логарифмической нормы матрицы $(-\mathbf{C})$ выполняется неравенство

$$\mathrm{lgn}\,\| -\mathbf{C}\| < 0. \tag{34}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0(t)$ — отклонение от программного движения. С помощью замены переменных

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{x}} \tag{35}$$

система (32) преобразована к виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}\mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = (-\mathbf{C} + \mathbf{L}_1(t))\,\mathbf{x}_1 + (\mathbf{C} + \mathbf{L}_2(t))\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}_2(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}_0(t) + \\ +\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_1^{-1}(t,\mathbf{x_1})\mathbf{K}\,\mathrm{sign}\,\mathbf{x}_2, \end{cases} \tag{36}$$

где матрицы $\mathbf{L}_1(t)$, $\mathbf{L}_2(t)$ имеют выражения

$$\mathbf{L}_1(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{G}(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_{\mathbf{x}_1=0,\mathbf{x}_2=0}, \quad \mathbf{L}_2(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{G}(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2}\right|_{\mathbf{x}_1=0,\mathbf{x}_2=0}; \tag{37}$$

$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_1^{-1}(t,\mathbf{x_1})\mathbf{f}_1(t,\mathbf{x}_1,-\mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}\mathbf{x}_2).$$

вектор $\mathbf{G}_2(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ представляет собой остаточный член разложения функции $\mathbf{G}(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$; $\mathbf{G}_0(t) = \mathbf{G}(t,\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Пусть символ $\mathbf{1}$ обозначает вектор $(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}} \in R^n$. Доказана следующая теорема.

Теорема 12 *Пусть существуют положительные постоянные* a *и* b, *такие, что для некоторого числа* $\delta > 0$ *и для любых векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$, *удовлетворяющих условиям* $|\mathbf{x}_1| < \delta$, $|\mathbf{x}_2| < \delta/c$ ($c = -\|\mathbf{C}\|/(\mathrm{lgn}\,\| -\mathbf{C}\|)$), *имеют место неравенства*

$$\begin{cases} \mathrm{lgn}\,\|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_1^{-1}(t,\mathbf{x_1})\mathbf{K}\||\mathbf{1}| \leqslant -a, \quad |\mathbf{G}_2(t,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)| \leqslant b\delta^2, \quad t \geqslant 0, \\ \max_{t\geqslant 0}\left\{[\max\{0, \mathrm{lgn}\,\|\mathbf{C} + \mathbf{L}_2(t)\|\} + c\| -\mathbf{C} + \mathbf{L}_1(t)\|]\,\delta + c|\mathbf{G}_0(t)|\right\} + cb\delta^2 < a. \end{cases}$$

Тогда управление $\mathbf{u}$ *вида (33) решает задачу об экспоненциальной стабилизации программного движения* $\mathbf{q}_0(t)$ *системы (32) с областью притяжения*

$$\Gamma_\delta = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in R^n \times R^n : |\mathbf{x}| < \delta, |\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{x}}| < \delta/c\}. \tag{38}$$

Далее в разделе решается задача о стабилизации программного движения $\mathbf{q}_0(t)$ системы (32) при помощи кусочно-линейного управления вида

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \alpha\mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{x}}), \tag{39}$$

где $\mathbf{K} \in R^{n\times n}$ — постоянная матрица, α — скалярная кусочно-постоянная функция времени, изменяющаяся по следующему алгоритму.

Пусть t_k — наименьший момент времени, такой, что функция $\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}$ на фазовой траектории системы станет равной $\delta/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда функция α скачком изменяется в этот момент по закону

$$\alpha(t_k) = \alpha_k = 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 13 *Пусть существуют положительные постоянные* a *и* b, *такие, что для некоторого числа* $\delta > 0$ *и для любых векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$, *удовлетворяющих условиям* $|\mathbf{x}_1| < \delta$, $|\mathbf{x}_2| < \delta/c$ ($c = -\|\mathbf{C}\|/(\mathrm{lgn}\,\| - \mathbf{C}\|)$), *имеют место неравенства*

$$\begin{cases} \mathrm{lgn}\,\|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_1^{-1}(t, \mathbf{x}_1)\mathbf{K}\| \leqslant -a, \quad |\mathbf{G}_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leqslant b\delta^2, \quad t \geqslant 0 \\ \max_{t\geqslant 0}\{[\max\{0, \mathrm{lgn}\,\|\mathbf{C} + \mathbf{L}_2(t)\|\} + c\| - \mathbf{C} + \mathbf{L}_1(t)\|]\,\delta + c|\mathbf{G}_0(t)|\} + cb\delta^2 < a. \end{cases}$$

Тогда управление $\mathbf{u}$ *вида (39) решает задачу об экспоненциальной стабилизации программного движения* $\mathbf{q}_0(t)$ *системы (32) с областью притяжения (38).*

Основное отличие теорем 12 и 13 от известных результатов, полученных на основе скалярной функции Ляпунова энергетического типа, состоит в нахождении явной оценки области начальных возмущений и отсутствии ограничений на производные матрицы кинетической энергии.

Во **втором разделе** дано решение задачи стабилизации программного движения механических систем с матрицей инерции $\mathbf{H}(t, \mathbf{q})$ положительно-определённой и имеющей следующее представление

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{H}_0(t, \mathbf{q}) + \mathbf{H}_1(t, \mathbf{q}), \tag{40}$$

где $\mathbf{H}_0(t, \mathbf{q})$ — положительно-определённая и известная матрица, а матрица $\mathbf{H}_1(t, \mathbf{q})$ неизвестна.

Получены теоремы о стабилизации при помощи как релейных, так и кусочно-непрерывных управлений. Даны оценки области начальных возмущений, нормы неизвестной части матрицы инерции.

В **третьем разделе** исследуется задача стабилизации программного движения механических систем с учётом динамики исполнительных механизмов.

Рассматриваемый объект управления описывается уравнениями

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{M}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M}) + \mathbf{u}, \tag{41}$$

здесь первое соотношение описывает динамику самой механической системы, а второе — динамику её приводов, $\mathbf{q} \in R^n$ — вектор обобщённых координат, $\mathbf{H}(t, \mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ — матрица с непрерывными ограниченными элементами, $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^n$ — вектор с непрерывными ограниченными элементами, $\mathbf{M} \in R^n$ — вектор управляющих сил, действующих на механическую систему со стороны управляющих устройств, $\mathbf{u} \in R^n$ — вектор входных сигналов, поступающих на управляющие устройства, $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M}) \in R^n$ — вектор с непрерывными элементами.

Выведены условия стабилизации программного движения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0(t)$ системы (41) при помощи релейных управлений вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\,\mathrm{sign}(\mathbf{x} + (\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{G}^{-1})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\ddot{\mathbf{x}}),$$

где $\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in R^{n \times n}$ — некоторые невырожденные матрицы.

Полученные результаты дополняют известные результаты[10] тем, что указывается явная оценка области начальных возмущений.

Эффективность построенного закона управления продемонстрирована в решении задачи о стабилизации программного движения двузвенного манипулятора на неподвижном основании с учётом динамики роторов электродвигателей, установленных в шарнирах.

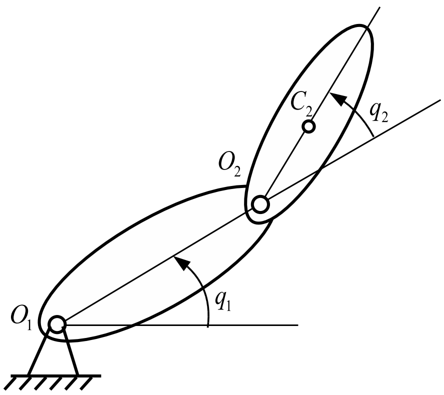

Рис. 1. Двузвенный манипулятор на неподвижном основании

[10] *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 9. — С. 67–82.

Определён закон изменения стабилизирующих напряжений, подаваемых на вход электродвигателей, вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_0(q_2(t))\mathbf{K}\,\mathrm{sign}(q_1(t) - q_{10}(t) + (\dot{q}_1(t) - \dot{q}_{10}(t))/2 + \ddot{q}_1(t) - \ddot{q}_{10}(t)),$$

где $\mathbf{H}_0(q_2(t)) \in R^{2\times 2}$ — матрица инерции, $\mathbf{K} \in R^{2\times 2}$ — постоянная матрица, $q_{10}(t)$ и $q_{20}(t)$ — программное движение манипулятора.

В **четвёртом разделе** исследована задача слежения для механических систем с учётом запаздывания в структуре управления в следующей постановке.

Пусть уравнения управляемого движения механической системы имеют вид

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}(t - h(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{42}$$

где $\mathbf{q} \in R^n$ — вектор обобщённых координат, $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ — вектор обобщённых скоростей, $\mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \in R^{n\times n}$ — невырожденная матрица с ограниченными равномерно непрерывными на каждом множестве $R^+ \times K$ ($K \subset R^n$ — компактное множество) элементами, $\mathbf{B}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^n$ — вектор с ограниченными равномерно непрерывными на каждом множестве $R^+ \times K_1 \times K_2$ ($K_1 \subset R^n$ и $K_2 \subset R^n$ — компактные множества) элементами, $\mathbf{u} \in R^n$ — вектор управляющих воздействий, $h(t)$ — ограниченная непрерывная функция запаздывания в управлении, $0 \leqslant h(t) \leqslant h_0 = \mathrm{const} > 0$.

Введём в пространстве R^n прямоугольную векторную норму

$$|\mathbf{x}| = \max\{\alpha_1|x_1|, \alpha_2|x_2|, \ldots, \alpha_n|x_n|\}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \tag{43}$$

где α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые положительные постоянные.

Пусть $\mathbf{q}^*(t) : R \to R^n$ — отслеживаемая траектория объекта (42). Следящая система может быть записана в виде, аналогичном (42).

Пусть $\mathbf{C} \in R^{n\times n}$ — некоторая невырожденная постоянная матрица, $\det \mathbf{C} \neq 0$, и такая, что для логарифмической нормы матрицы $(-\mathbf{C})$, соответствующей выбранной прямоугольной векторной норме (43), выполняется неравенство

$$\mathrm{lgn}\,\| - \mathbf{C}\| < 0.$$

Управление для системы (42) ищется в виде

$$\mathbf{u}(t - h(t)) = \mathbf{K}\,\mathrm{sign}\left[\mathbf{q}(t - h(t)) - \mathbf{q}^*(t - h(t)) + \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{q}}(t - h(t)) - \dot{\mathbf{q}}^*(t - h(t)))\right], \tag{44}$$

где $\mathbf{K} \in R^{n\times n}$ — некоторая матрица, подлежащая определению.

Задача слежения состоит в отыскании управления $\mathbf{u}(t - h(t))$ вида (44) и ограничений на параметры системы (42), при которых для некоторого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной функции $\boldsymbol{\varphi}(s)$, $-h_0 \leqslant s \leqslant 0$, удовлетворяющей условию

$$\max\{\max_{-h_0\leqslant s\leqslant 0} |\boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{q}^*(s)|, \max_{-h_0\leqslant s\leqslant 0} |\boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{q}^*(s) + \mathbf{C}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}(s) - \dot{\mathbf{q}}^*(s))|\} < \delta, \tag{45}$$

для решения $\mathbf{q}(t)$ системы (42) с начальным условием

$$\mathbf{q}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s), \quad -h_0 \leqslant s \leqslant 0,$$

будет справедливо неравенство

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0.$$

Число ε при этом называется ошибкой слежения.

Введём отклонения:

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*(t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*(t).$$

Тогда в отклонениях уравнение (42) примет вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^*(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^*(t)\mathbf{x} = \mathbf{A}_1(t,\mathbf{x})\mathbf{u}(t - h(t)) + \mathbf{F}^*(t) + \mathbf{G}^*(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}),$$

где матрицы $\mathbf{A}_1(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{A}^*(t)$, $\mathbf{B}^*(t)$ и векторы $\mathbf{F}^*(t)$ и $\mathbf{G}^*(t,\mathbf{x},\mathbf{x})$ представлены соответственно выражениями:

$$\mathbf{A}_1(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(t,\mathbf{x} + \mathbf{q}^*(t)), \quad \mathbf{F}^*(t) = \mathbf{L}(t,\mathbf{q}^*(t),\dot{\mathbf{q}}^*(t)) - \ddot{\mathbf{q}}^*(t),$$

$$\mathbf{A}^*(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{L}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*(t),\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}^*(t)}, \quad \mathbf{B}^*(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{L}(t,\mathbf{q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*(t),\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}^*(t)},$$

$$\mathbf{G}^*(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = O(|\mathbf{x}|^2 + |\dot{\mathbf{x}}|^2),$$

а вектор-функция $\mathbf{L}(t,\mathbf{q},\mathbf{q})$ определяется по формуле

$$\mathbf{L}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{A}^{-1}(t,\mathbf{q})\mathbf{B}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 14 *Пусть найдутся положительные постоянные* ε, a, b *и* N, *такие, что:*

1) матрицы $\mathbf{A}^*(t)$, $\mathbf{B}^*(t)$, $\mathbf{A}_1(t,\mathbf{x})$ *и векторы* $\mathbf{F}^*(t)$ *и* $\mathbf{G}^*(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ *удовлетворяют условию: для всех* $t \geqslant 0$ *и для любых векторов* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$, *таких, что* $|\mathbf{x}| < \varepsilon, |\mathbf{y}| < \varepsilon$, *справедливы следующие неравенства*

$$\operatorname{lgn} \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*(t)\mathbf{C}\| \leqslant b, \quad |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^*(t,\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant N(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2),$$

$$\| - \mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*(t)\mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^*(t)\|\varepsilon + |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}^*(t)| + 2N\varepsilon^2 + \|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1(t,\mathbf{x})\mathbf{K}\| \leqslant a,$$

$$\begin{aligned}(c \operatorname{lgn} \|\mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*(t)\mathbf{C}\| + \| - \mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*(t)\mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^*(t)\|)\varepsilon + |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}^*(t)| + \\ + 2N\varepsilon^2 + \operatorname{lgn} \|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1(t,\mathbf{x})\mathbf{K})\| \leqslant 0,\end{aligned}$$

где $c = -\operatorname{lgn} \| - \mathbf{C}\| / \|\mathbf{C}\|$;

2) начальная функция $\boldsymbol{\varphi} : [-h_0, 0] \to R^n$ *удовлетворяет неравенству (45), где число* δ *таково, что* $0 < \delta < c\varepsilon$;

3) максимальная величина запаздывания h_0 *удовлетворяет ограничению*

$$h_0 < \frac{1}{b} \ln \frac{cb\varepsilon + a}{a}.$$

Тогда решение системы (42) отслеживает траекторию $\mathbf{q}^*(t)$ *посредством управления (44) с погрешностью слежения, не превышающей* ε.

Теорема 14 устанавливает максимально допустимое запаздывание в системе и величину начальных возмущений δ . Теорема 14 значительно дополняет известный результат[11] решения задачи слежения для медленных траекторий механических систем на основе метода "замороженных" коэффициентов. Эффективность теоремы 14 состоит, в частности, в том, что она позволяет решать задачи слежения для механических систем, описываемых нестационарными уравнениями (матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{B}$ в уравнении (42) предполагаются зависящими явно от времени). Кроме того, проверка условий теоремы 14 сводится к довольно простым операциям вычисления логарифмических и операторных матричных норм, соответствующих прямоугольной векторной норме, и не требует вычисления и оценки собственных значений нестационарных матриц, что эффективно при проведении вычислительных расчётов.

Применение теоремы 14 показано в решении задачи слежения для двузвенного манипулятора на подвижном основании.

В **шестой главе** представлены результаты решения задач управления движением колёсных мобильных роботов различной конструкции.

В **первом разделе** дано решение задачи управления движением колёсного робота с конструкцией двускатной тележки на основе разрывных управлений.

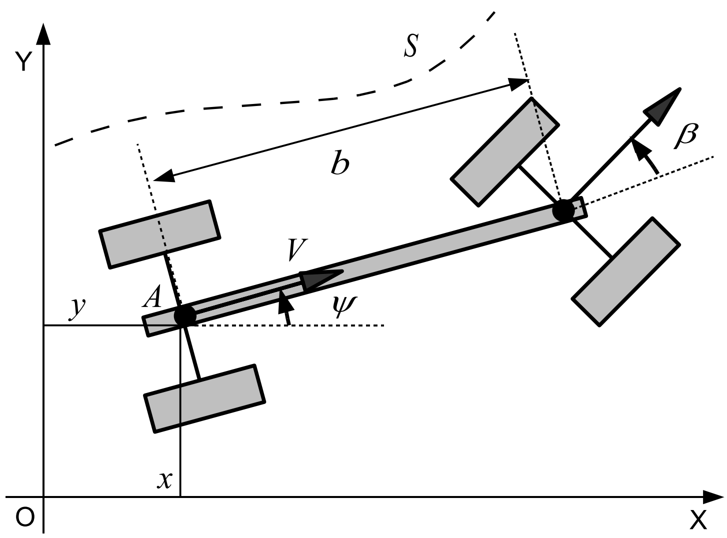

Рис. 2. Мобильный робот типа двускатной тележки

Здесь x, y, ψ и β — обобщённые координаты, при этом x и y — координаты точки A платформы, ψ — курсовой угол тележки, β — угол поворота оси передней колёсной пары относительно платформы, V — скорость точки A платформы, b — расстояние между передней и задней осями платформы.

[11] *Ефремов М.С., Поляков А.Е., Стрыгин В.В.* Новый алгоритм слежения для некоторых механических систем // ПММ. — 2005. — Т. 69. — Вып. 1. — С. 30–41.

Уравнения движения в форме Аппеля в квазискоростях имеют вид

$$\begin{cases} (m + m_0 \operatorname{tg}^2 \beta)\dot{V} + \dfrac{I_2 \operatorname{tg} \beta}{b}\ddot{\beta} + \dfrac{m_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} V \dot{\beta} = Q_V, \\ \\ \dfrac{I_2 \operatorname{tg} \beta}{b}\dot{V} + I_2 \ddot{\beta} + \dfrac{I_2}{b \cos^2 \beta} V \dot{\beta} = Q_\beta, \end{cases} \tag{46}$$

где I_2, m и m_0 — массо-инерционные характеристики, Q_V и Q_β — управляющие силы. Кинематические уравнения записываются следующим образом

$$\dot{x} = V \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \frac{V}{b} \operatorname{tg} \beta. \tag{47}$$

Цель управления такой механической системой состоит в следующем. Выбором управляющих сил Q_V и Q_β вывести систему на заданную гладкую траекторию S ($A \in S$) и стабилизировать движение вдоль этой траектории с заданной скоростью $V = V^*(t)$ точки A. Здесь $V^*(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция времени.

Достижение этой цели представлено решением двух задач.

Первая задача. Выведение за конечное время динамической части системы (46) на движение

$$V = V^*(t), \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}^*(t) - \alpha(\beta - \beta^*(t)), \tag{48}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$ и $\beta^*(t)$ — некоторая заданная функция времени. Отклонение координаты β от $\beta^*(t)$ экспоненциально стремится к нулю. Выбор функции $\beta^*(t)$ даёт решение следующей задачи.

Вторая задача. Выведение системы на заданную траекторию S и обеспечение экспоненциальной устойчивости движения колёсного робота вдоль этой траектории.

Вектор управляющих сил $\mathbf{Q} = (Q_V, Q_\beta)^{\mathrm{T}}$ найден в классе релейных управлений

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}(\operatorname{sign}(V - V^*(t)), \operatorname{sign}(\beta - \beta^*(t) + (\dot{\beta} - \dot{\beta}^*(t))/\alpha))^{\mathrm{T}}, \tag{49}$$

где $\mathbf{K} \in R^{2\times 2}$ — постоянная матрица.

Решена также задача построения кусочно-непрерывного управления

$$\mathbf{Q} = a\mathbf{K}(V - V^*(t), \beta - \beta^*(t) + (\dot{\beta} - \dot{\beta}^*(t))/\alpha)^{\mathrm{T}}, \tag{50}$$

обеспечивающего достижение поставленной цели управления. Здесь a — кусочно-постоянная функция времени, $\mathbf{K} \in R^{2\times 2}$ — постоянная матрица.

Новизна полученного результата состоит в решении задачи управления колёсным роботом для нестационарного закона движения $V = V^*(t)$ вдоль заданной траектории.

Во **втором разделе** представлено решение задачи слежения для колёсного робота с конструкцией двускатной тележки при помощи релейного запаздывающего управления. Получены ограничения на максимальную величину запаздывания и явные оценки области начальных возмущений.

В **третьем разделе** решена задача стабилизации движения колёсного робота типа "монотип" с ведущими задними колёсами и передним рояльным колесом с учётом динамики электроприводов.

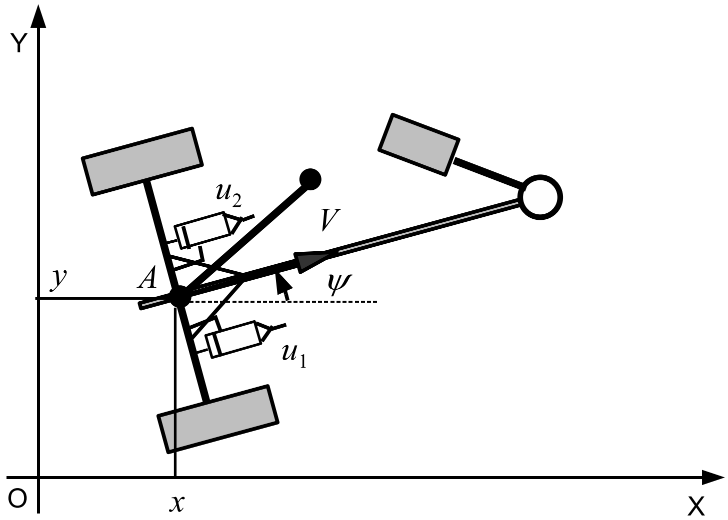

Рис. 3. Мобильный робот типа "Монотип" с электродвигателями

Электромеханические уравнения динамики такого мобильного робота в пренебрежении влияния инерционности рояльного колеса и его вилки на динамику робота могут быть записаны в виде[12]

$$\begin{cases} m\dot{V} - m_1 a\Omega^2 - \dfrac{nc}{r}(i_1 + i_2) = 0, \quad J\dot{\Omega} + m_1 aV\Omega - \dfrac{ncl}{r}(i_1 - i_2) = 0, \\ L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_1 + \dfrac{nc}{r}(V + l\Omega) = U_1, \quad L\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 + \dfrac{nc}{r}(V - l\Omega) = U_2, \end{cases} \tag{51}$$

где V — скорость точки A; $\Omega = \dot{\psi}$ — угловая скорость платформы; i_1 и i_2 — токи во внешних цепях электродвигателей; r — радиус задних колес; m_1 — масса платформы; L — обобщённая индуктивность цепи электродвигателя; c — коэффициент электромеханического взаимодействия; R — омическое сопротивление цепи ротора; n — передаточное число редуктора; $a = AC$; C — центр масс робота;

$$m = m_1 + 2m_k + 2\frac{J_y}{r^2}, \quad J = J_1 + 2J_{kz} + (m - m_1)l^2 + m_1 a^2,$$

здесь m_k — суммарная масса ведущего колеса и ротора электродвигателя, J_1 — момент инерции платформы, относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс C; J_{kz} — момент инерции ведущего колеса относительно вертикальной оси; J_y — приведённый момент инерции колеса.

[12] *Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г.* Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов // Успехи механики. — 2003. — Т. 2, № 1. — С. 3–46.

Получены релейные законы управляющих напряжений U_1 и U_2, которые стабилизируют заданное нестационарное движение

$$V = V^*(t), \qquad \psi = \psi^*(t). \tag{52}$$

В **четвёртом разделе** решены задачи стабилизации программного движения и слежения для мобильного робота роликонесущими колесами.

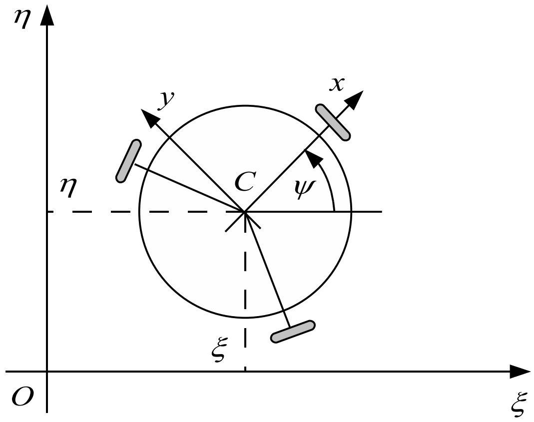

Рис. 4. Мобильный робот с тремя роликонесущими колесами

Робот состоит из четырёх тел: платформы и трёх колёс вида "omnidirectional". Платформа перемещается по горизонтальной поверхности. Центр масс робота расположен в точке C платформы. Углы между осями колёс составляют 120^o. На колёсах робота закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости соответствующего колеса. Рассмотрена модель такого колеса, в которой не учитывается динамика роликов и предполагается, что все ролики лежат в одной плоскости и представляют собой опоясывающий колесо тор с сечением бесконечно малого радиуса.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы в предположении, что движение робота происходит без проскальзывания под действием моментов, развиваемых тремя независимыми электродвигателями постоянного тока, имеют вид[13]

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(t, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \tag{53}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\psi}) = \begin{pmatrix} h\dot{\xi} + m_d\dot{\psi}\dot{\eta} \\ h\dot{\eta} - m_d\dot{\psi}\dot{\xi} \\ 2a^2h\dot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}(\psi) = \begin{pmatrix} \sin\psi & \sin\left(\psi + \dfrac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\psi + \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos\psi & -\cos\left(\psi + \dfrac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\psi + \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = (\xi, \eta, \psi)^{\mathrm{T}}.$$

[13] *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 6. — С. 142–149.

Здесь ξ и η — координаты центра C платформы робота в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$; ψ — угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемый от оси ξ; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$, u_1, u_2 и u_3 — управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока; a — расстояние от центра C платформы до центра каждого колеса;

$$m = m_0 + 3m_1\left(1 + \frac{r_1^2}{2r^2}\right), \quad m_s = m_0 + 3m_1, \quad m_d = m - m_s,$$
$$I_s = m_0\rho_0^2 + 3m_1\left[\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2r_1^2}{r^2}\right)\right], \quad h = \frac{3c_\nu}{2r^2},$$

m_0, m_1 — массы платформы и колеса робота соответственно; ρ_0, ρ_1 — соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс; r — радиус колеса, r_1 — радиус инерции колеса относительно оси вращения; c_ν — коэффициент момента противоэлектродвижущей силы.

Пусть $\mathbf{q}_0(t) = (\xi_0(t), \eta_0(t), \psi_0(t))^{\mathrm{T}}$ — программное движение робота.

В настоящем разделе был получен релейный закон управления

$$\mathbf{u} = -\alpha\mathbf{P}^{-1}(\psi_0(t))\mathbf{H}\,\mathrm{sign}\left(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0(t) + \beta(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0(t))\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{54}$$

Этот закон управления позволил за конечное время t_1 вывести систему в режим декомпозиции

$$\begin{aligned} &\dot\xi = \dot\xi_0(t) - \gamma(\xi - \xi_0(t)), \quad \dot\eta = \dot\eta_0(t) - \gamma(\eta - \eta_0(t)), \\ &\dot\psi = \dot\psi_0(t) - \gamma(\psi - \psi_0(t)), \quad t \geq t_1, \quad \beta\gamma = 1, \end{aligned} \tag{55}$$

обеспечивающий экпоненциальную стабилизацию программного движения робота.

Далее в разделе построен кусочно-непрерывный закон управления

$$\mathbf{u} = -\alpha(t)\mathbf{P}^{-1}(\psi_0(t))\mathbf{H}\left(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0(t) + \beta(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0(t))\right), \quad \beta = \mathrm{const} > 0,$$

где $\alpha(t) > 0$ — кусочно-постоянная функция времени. Этот закон так же, как (54), за конечное время выводит систему в режим декомпозиции (55), при этом энергетические затраты на управление существенно снижаются.

Кроме того, была решена задача слежения для такой системы с учётом запаздывания в структуре обратной связи и неизвестной матрицы инерции

$$\mathbf{H} = \mathrm{diag}(m + \Delta m, m + \Delta m, I_s + \Delta I_s), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \Delta\mathbf{H}.$$

Найден закон управления

$$\mathbf{u} = -\alpha\mathbf{P}^{-1}(\psi_0(t - h(t)))\mathbf{H}_0\,\mathrm{sign}\left(\mathbf{q}(t-h(t)) - \mathbf{q}_0(t-h(t)) + \beta(\dot{\mathbf{q}}(t-h(t)) - \dot{\mathbf{q}}_0(t-h(t)))\right),$$

($\alpha > 0$, $\beta > 0$) и получены оценки максимальной величины запаздывания и нормы неизвестной части $\Delta\mathbf{H}$ матрицы инерции.

В **Заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту профессору Александру Сергеевичу Андрееву за внимание к работе, полезные обсуждения и многолетнюю поддержку.

Основные публикации автора по теме диссертации

(Из официального перечня ВАК)

1. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Доклады Академии наук. — 2005. — Т. 400, № 5. —С. 621–624.

2. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70. — Вып. 6. — С. 965–976.

3. *Перегудова О.А.* Уравнения сравнения в задачах об устойчивости движения // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 9. — С. 56–63.

4. *Перегудова О.А.* Логарифмические матричные нормы в задачах устойчивости движения // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72. — Вып. 3. — С. 410–420.

5. *Перегудова О.А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости фунционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 12. — С. 1638–1647.

6. *Перегудова О.А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73. — Вып. 2. — С. 176–188.

7. *Перегудова О.А.* К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 5. — С. 95–105.

(Прочие)

8. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* О стабилизируемости движений механических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11. — Вып. 4. — С. 747–748.

9. *Перегудова О.А.* О применении формулы В.М. Алексеева вариации параметров в методе векторных функций Ляпунова // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. — 2001. — Вып. 1(10). — С. 61–66.

10. *Перегудова О.А.* Методы сравнения в задачах устойчивости и стабилизации. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2004. — 60 с.

11. *Перегудова О.А.* К вопросу о построении уравнений сравнения для систем с запаздыванием // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. — 2005. — Вып. 1(15). — С. 75–83.

12. *Перегудова О.А.* Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. — 83 с.

13. *Перегудова О.А.* Функции Ляпунова вида векторных норм в задачах устойчивости // Ученые записки УлГУ. Сер. фундаментальные проблемы математики и механики. — 2006. — Вып. 1(16). — С. 43–51.

14. *Перегудова О.А.* О стабилизации положений равновесия механических систем с запаздыванием в цепи обратной связи // Труды IX Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением". — Т. 2. Аналитическая механика и устойчивость движения. — 2007. — С. 165–171.

15. *Перегудова О.А.* О стабилизации движений механических систем с запаздыванием в управлении // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14. — Вып. 4. — С. 737–738.

16. *Перегудова О.А.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Международный сборник "Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах". — 2007. — Т. 13, № 2(28). — С. 97–108.

17. *Перегудова О.А.* К задаче построения кусочно линейного управления реономными механическими системами // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15. — Вып. 4. — С. 673.

18. *Перегудова О.А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15. — Вып. 6. — С. 1117–1118.

19. *Перегудова О.А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, — 2009. — 253 с.

20. *Перегудова О.А., Моторина Д.Ю.* К задаче стабилизации движений механических систем при учете динамики приводов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15. — Вып. 6. — С. 1118.

21. *Перегудова О.А., Моторина Д.Ю.* Моделирование управления движением колёсного мобильного робота // Труды Седьмой Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". 2–5 февраля 2009 года, г. Ульяновск / под ред. д.т.н., проф. Ю.В. Полянскова, д.ф.-м.н., проф. В.Л. Леонтьева. — Ульяновск: УлГУ, 2009. — С. 209–210.

22. *Перегудова О.А., Филаткина Е.В.* Развитие метода сравнения в задаче о неустойчивости движения // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. — 2008. — Вып. 2. — С. 88–98.