Зміст

1 Банахові простори **7**
1.1 Простори неперервно диференційованих функцій 7
1.2 Простори Лебега 8
1.3 Простір функцій з компактними носіями 8
1.4 Простір лінійних обмежених операторів 9
1.5 Спряжений простір 9
1.6 Простори узагальнених функцій 10
1.7 Абстрактна задача про операторне рівняння 10
1.7.1 Коректно поставлена задача 11
1.7.2 Критерій існування обмеженого оберненого оператора 11
1.7.3 Задача про найкраще наближення 11
1.8 Дискретизація операторних задач 12
1.8.1 Схема дискретизації операторних задач 12
1.8.2 Апроксимативність схем дискретизації 13
1.8.3 Стійкість схем дискретизації 13
1.8.4 Збіжність схем дискретизації 13
1.9 Висновки і заключні зауваження 13

2 Гільбертові простори **15**
2.1 Орієнтири 15
2.2 Гільбертові простори узагальнених функцій 16
2.3 Обчислювальні аспекти:
критерій лінійної незалежності 17
2.4 Структура спряженого простору 18
2.4.1 Теорема Рісса 18
2.4.2 Перший приклад задачі про варіаційне рівняння 19
2.5 Класичні варіаційні задачі 19
2.5.1 Задача про про найкраще наближення 19
2.5.2 Задача мінімізації квадратичного функціоналу 20
2.5.3 Задача про варіаційне рівняння 21
2.5.4 Ортогональна проекція 21
2.6 Задача про варіаційну нерівність 21
2.7 Задача мінімізації норми лишку 22
2.8 Висновки і заключні зауваження 23
2.9 Формули інтегрування частинами 23

3 Оператори в гільбертових просторах **25**
3.1 Білінійні форми . . . 25
3.2 V-еліптичні білінійні форми . . . 27
3.3 Абстрактна задача про варіаційне рівняння . . . 28
3.4 Ітераційні методи для варіаційних задач . . . 29
3.5 Абстрактна задача мінімізації квадратичного функціоналу . . . 31
3.6 Абстрактна задача про сідлову точку . . . 32
3.7 Абстрактна задача про проекційне рівняння . . . 35

4 Крайові та варіаційні задачі для еліптичних рівнянь **39**
4.1 Крайові задачі для еліптичних рівнянь . . . 39
4.2 Варіаційні формулювання крайових задач . . . 40
4.3 Крайова задача Діріхле для рівняння Гельмгольца . . . 40
4.3.1 Формулювання крайової задачі . . . 41
4.3.2 Побудова варіаційної задачі Діріхле . . . 41
4.3.3 Неперервність лінійного функціоналу . . . 42
4.3.4 Неперервність білінійної форми . . . 43
4.3.5 V-еліптичність білінійної форми . . . 44
4.3.6 Коректність варіаційної задачі . . . 44
4.4 Крайова задача Діріхле для рівняння Пуассона . . . 45
4.4.1 Формулювання крайової задачі . . . 45
4.4.2 Побудова варіаційної задачі . . . 45
4.4.3 Нерівність Пуанкаре-Фрідріхса . . . 45
4.4.4 Коректність варіаційного формулювання задачі . . . 46
4.5 Крайова задача Неймана для рівняння Гельмгольца . . . 47
4.5.1 Формулювання крайової задачі . . . 47
4.5.2 Варіаційне формулювання задачі Неймана . . . 47
4.5.3 Властивості складових варіаційного рівняння . . . 48
4.5.4 Коректність варіаційної задачі Неймана . . . 48
4.6 Крайова задача для рівняння адвекції-дифузії . . . 49
4.7 Змішана варіаційна задача . . . 49
4.8 Двоїста варіаційна задача . . . 49
4.9 Висновки і заключні зауваження . . . 49

5 Інтерполювання на трикутниках **51**
5.1 Барицентричні координати на трикутнику . . . 51
5.2 Інтерполяційні поліноми з простору $P_1(K)$ . . . 53
5.3 Апріорні оцінки похибки інтерполювання елементами з простору $P_1(K)$ . . . 53
5.3.1 Оцінки похибки інтерполювання та її градієнта в нормі простору $C(K)$ . . . 53
5.3.2 Оцінки похибки інтерполювання та її градієнта в нормі простору $H^m(K),\ m = 0, 1$ . . . 56
5.4 Інтерполяційні поліноми з простору $P_2(K)$ . . . 56
5.4.1 Вузли інтерполювання та інтерполяційний базис в $P_2(K)$ . . . 57
5.4.2 Квадратичний інтерполяційний поліном Лагранжа на трикутнику . 57
5.4.3 Криволінійні скінченні елементи . . . 57

5.5 Інтерполяційні поліноми з простору $P_3(K)$ . . . 57
5.5.1 Інтерполяційний поліном Лагранжа . . . 57
5.5.2 Інтерполяційний поліном Ерміта-Зламала . . . 58
5.6 Апріорні оцінки похибки інтерполювання на трикутнику . . . 59

6 Крайові та варіаційні задачі для еліптичних рівнянь **61**
6.1 Крайові задачі для еліптичних рівнянь . . . 61
6.2 Абстрактні варіаційні задачі . . . 62
6.2.1 Задача про варіаційне рівняння . . . 62
6.2.2 Задача мінімізаціїї квадратичного функціоналу . . . 63
6.2.3 Задача про сідлову точку . . . 64

7 Класичні методи дискретизації еліптичних задач **67**
7.1 Метод Гальоркіна . . . 67
7.1.1 Абстрактна схема методу Гальоркіна . . . 68
7.1.2 Властивості схеми Гальоркіна . . . 68
7.1.3 Збіжність схеми Гальоркіна . . . 68
7.2 Метод Рітца . . . 68
7.2.1 Система дискретних рівнянь методу Рітца . . . 68
7.2.2 Апроксимації Рітца - найкращі наближення . . . 69
7.2.3 Монотонна збіжність апроксимацій Рітца . . . 69
7.2.4 Збіжність апроксимацій Рітца . . . 69
7.3 Метод найменших квадратів . . . 69
7.3.1 Вступ . . . 69
7.3.2 Постановка задачі: ітераційний процес реконструкції апроксимацій Гальоркіна . . . 70
7.3.3 Характеризація процесу реконструювання: найменші квадрати . . . 71
7.3.4 Характеризація процесу реконструювання: стійкість еволюції . . . 72
7.3.5 Характеризація процесу реконструювання: збіжність послідовних наближень . . . 74
7.3.6 Характеризація процесу реконструювання: оптимальний вибір параметрів реконструювання . . . 75

8 Метод скінченних елементів **77**
8.1 Дискретні рівняння та їх чутливість до збурень . . . 77
8.2 Апріорні оцінки швидкості збіжності . . . 77
8.3 Обчислювальні аспекти методу скінченних елементів . . . 77
8.3.1 Структура системи алгебричних рівнянь . . . 77
8.3.2 Формування систем алгебричних рівнянь . . . 78
8.3.3 Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь . . . 78
8.3.4 Елементи програмної реалізації схем МСЕ . . . 78

9 Адаптивні схеми МСЕ **79**
9.1 Формулювання задачі hp-оптимізації схеми МСЕ . . . 79
9.2 Стандартний етап дискретизації Гальоркіна . . . 80
9.3 Декомпозиція Гальоркіна . . . 81
9.4 Аналіз функціоналу джерел похибки дискретизації . . . 82
9.5 Варіаційна задача для похибки дискретизації . . . 83

10 Стабілізовані схеми МСЕ **85**

I Аналіз варіаційних задач механіки та фізики **87**

11 Крайова задача еластостатики **89**
11.1 Постановка крайової задачі в термінах зміщень . . . 89
11.2 Формулювання варіаційної задачі . . . 90
11.3 Коректність варіаційної задачі . . . 91
11.4 Обчислювальні схеми для задач еластостатики . . . 92

12 Крайова задача п'єзоелектрики
і змішані схеми МСЕ **93**
12.1 Основні позначення та фундаментальні
рівняння теорії п'єзоелектрики . . . 93
12.2 Крайові умови в задачах п'єзоелектрики . . . 95
12.3 Формулювання крайової задачі п'єзоелектрики . . . 96
12.4 Формулювання варіаційної задачі п'єзоелектрики . . . 97
12.5 Коректність змішаної варіаційної задачі п'єзоелектрики . . . 98
12.6 Еквівалентне варіаційне формулювання:
задача про сідлову точку . . . 99
12.7 Дискретизація Гальоркіна . . . 100
12.8 Регуляризація варіаційної задачі п'єзоелектрики . . . 102

13 Задача Стокса **103**
13.1 Варіаційне формулювання . . . 103
13.2 Еквівалентна задача про сідлову точку . . . 104
13.3 Редукція варіаційної задачі:
підпростір соленоїдальних швидкостей . . . 106
13.4 Коректність змішаної варіаційної задачі :
умова Ладиженської-Бабушки-Брецці . . . 107
13.5 Регуляризація варіаційної задачі:
штрафування умови нестисливості . . . 108

14 Крайова задача про вимушені
усталені акустичні коливання ідеальної рідини **111**

15 Сингулярно збурені крайові задачі
мігрування домішок **113**

16 Схеми МСЕ для квазілінійних крайових задач **115**

17 Апроксимація параболічних задач **117**
17.1 Постановка варіаційної задачі теплопровідності 117
17.1.1 Початково-крайова задача 117
17.1.2 Варіаційна задача 118
17.1.3 Властивості білінійних форм 119
17.2 Напівдискретні апроксимації Гальоркіна 119
17.2.1 Простори апроксимацій 119
17.2.2 Напівдискретизована задача 120
17.2.3 Енергетичне рівняння 121
17.2.4 Апріорні оцінки(I) 121
17.2.5 Апріорні оцінки(II) 121
17.2.6 Обчислювальні аспекти МСЕ 121
17.3 Коректність варіаційної задачі теплопровідності 121
17.4 Швидкість збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна 121
17.4.1 Інтерполяційні властивості просторів апроксимацій 121
17.4.2 Оператори ортогонального проектування 121
17.4.3 Декомпозиція похибки 121
17.4.4 Апріорні оцінки швидкості збіжності 121
17.5 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі 121
17.5.1 Кусково лінійні апроксимації в часі 121

18 Апроксимація гіперболічних задач **123**
18.1 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі 123
18.1.1 Кусково квадратичні апроксимації в часі 123
18.1.2 Проекційні рівняння 124
18.1.3 Однокрокова рекурентна схема 126
18.1.4 Дискретизація однокрокової рекурентної схеми 126
18.1.5 Стійкість однокрокової рекурентної схеми 127

19 Вправи **129**
19.1 Абстрактні варіаційні задачі 129
19.1.1 129
19.1.2 129
19.1.3 130
19.1.4 130
19.1.5 130
19.1.6 131
19.1.7 131
19.1.8 132
19.1.9 132
19.1.10 132
19.2 Кусково визначені апроксимації
функцій декількох змінних 133
19.2.1 133
19.2.2 133
19.2.3 134
19.2.4 134
19.2.5 134

19.2.6 . . . 134
19.3 Застосування методу скінченних елементів . . . 134
19.3.1 Природна модель теорії пластин . . . 134

20 Література **139**

Розділ 1

Банахові простори

1.1 Простори неперервно диференційованих функцій

Нехай Ω - обмежена відкрита множина точок $x = (x_1, \ \dots \ , x_d)$ з евклідового простору $\mathbb{R}^d$. Нижче ми будемо припускати, що *межа* Γ *області* Ω *неперервна за Ліпшицем*; таке припущення, зокрема, гарантує, що

$$\begin{cases} \textit{майже у всіх точках} \ \ x = (x_1, \ \dots \ , x_d) \\ \textit{межі } \Gamma \textit{ області } \Omega \\ \textit{можна єдиним чином побудувати} \\ \textit{одиничний вектор зовнішньої нормалі} \\ \qquad n = (n_1, \ \dots \ , n_d), \quad n_i := \cos(n, x_i). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Позначимо через $C(\Omega)$ простір неперервних дійсних функцій, визначених на області Ω.

Якщо $\bar{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ - замикання області Ω, то символ $C(\bar{\Omega})$ буде використовуватися для простору дійсних неперервних (і, отже, обмежених) функцій, які визначені на замиканні $\bar{\Omega}$. Такі функції $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ є неперервними на Ω і неперервно продовжуються до $\bar{\Omega}$.

Символом $C^k(\Omega)$ будемо позначати простір функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}$, які є неперервними на області Ω разом із своїми всеможливими частковими похідними

$$\begin{cases} D^\alpha v := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ \dots \ \partial_d^{\alpha_d} v \\ \qquad \equiv \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ \dots \ \partial x_d^{\alpha_d}} \ , \\ \qquad\qquad |\alpha| := \alpha_1 + \ \dots \ + \alpha_d, \quad \alpha_i \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

до $k-$го порядку включно. Простір $C^k(\bar{\Omega})$ складається із неперервних функцій на $\bar{\Omega}$, чиї похідні до $k-$го порядку включно є також неперервними на $\bar{\Omega}$, тобто

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{ v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \ : \ D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \quad \forall |\alpha| \leq k \}.$$

Якщо в цьому просторі ввести норму згідно правила

$$v \in C^k(\bar{\Omega}) \to \|v\|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=k} \ \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)|,$$

то такий лінійний нормований простір функцій буде *повним*, тобто, *банаховим простором.*

Нарешті розглянемо простір $C^\infty(\bar{\Omega})$, який складається із функцій з неперервними похідними всіх порядків в області Ω і які можна неперервно продовжити на $\bar{\Omega}$.

1.2 Простори Лебега

Іншим важливии прикладом лінійних просторів є низка просторів Лебега

$$L^p(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \int\limits_{\Omega} |v(x)|^p \, dx < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

(класів) функцій, $p-$ті степені яких інтегровані за Лебегом. Наділені нормами

$$\|v\|_{p,\Omega} := \left\{ \int\limits_{\Omega} |v(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

ці простори стають банаховими для кожного $p \in [1, \infty)$.

Для $p = \infty$ простір

$$L^\infty(\Omega) := \{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty \}$$

також є банаховим відносно норми

$$\|v\|_{\infty,\Omega} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

Теорема 1.2.1. про нерівність Гьольдера

Нехай числа $p, q \in [1, +\infty]$ пов'язані рівністю

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1.2.3}$$

і при цьому для випадку $p = 1$ приймемо, що $q = +\infty$.

Тоді має місце нерівність

$$\|vw\|_{1,\Omega} \le \|v\|_{p,\Omega} \, \|w\|_{q,\Omega} \qquad \forall v \in L^p(\Omega) \quad \forall w \in L^q(\Omega). \tag{1.2.4}$$

Доведення. див., наприклад Остудін, Шинкаренко [???, с.26-29]. □

1.3 Простір функцій з компактними носіями

Для довільної функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ розглянемо множину M таку, що

$$M := \{ x \in \Omega : v(x) \ne 0 \}.$$

Замикання множини M будемо називати *носієм функції* v і позначатимемо

$$supp\ v := \bar{M} \equiv \overline{\{ x \in \Omega : v(x) \ne 0 \}}.$$

Далі простір

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{ v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \ supp\ v \subset \Omega \}$$

будемо називати *простором функцій з компактними носіями в* Ω.

1.4 Простір лінійних обмежених операторів

Нехай $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ - банахові простори з нормами $\|.\|_{\mathcal{B}}$ і $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ відповідно. Позначимо через $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ множину лінійних обмежених операторів, які відображають $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. Нагадаємо, що кожен оператор $A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ із $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ володіє такими властивостями:

$$\begin{array}{lllr} (I) & A(u+v) = Au + Av \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{B} & \textit{(адитивність)}\ ; & \\ (II) & A(\alpha v) = \alpha A v \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, v \in \mathcal{B} & \textit{(однорідність)}\ ; & \\ (III) & \textit{знайдеться стала } \ M > 0 \textit{ така, що} & & \\ & \qquad \|Av\|_{\mathcal{C}} \le M \|v\|_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in \mathcal{B} & \textit{(обмеженість)}\ . & \end{array} \tag{1.4.5}$$

Неважко переконатись, що множина $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ є лінійним простором, наділяючи який нормою

$$\|A\| := \sup_{0 \ne v \in \mathcal{B}} \frac{\|Av\|_{\mathcal{C}}}{\|v\|_{\mathcal{B}}}, \tag{1.4.6}$$

ми робимо його *банаховим* і при цьому обмеженість його елементів приводить до нерівності

$$\|Av\|_{\mathcal{C}} \le \|A\| \|v\|_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in \mathcal{B} \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C}). \tag{1.4.7}$$

Говорять, що оператор $A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ є *неперервним на елементі* $v \in \mathcal{B}$ тоді і лише тоді, коли для будь-якої послідовності $\{v_n\} \subset \mathcal{B}$, яка збігається до елемента $v \in \mathcal{B}$, послідовність образів $\{Av_n\} \subset \mathcal{C}$ збігається до елемента $Av \in \mathcal{C}$.

Відзначимо тут, що для простору $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ *поняття обмеженості лінійного оператора еквівалентне поняттю його неперервності*. Дійсно, якщо $v_n \to v$ в просторі $\mathcal{B}$, то внаслідок лінійності та обмеженості оператора A знаходимо оцінку

$$\|Av_n - Av\|_{\mathcal{C}} = \|A(v_n - v)\|_{\mathcal{C}} \le \|A\| \|v_n - v\|_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in \mathcal{B},$$

що й засвідчує неперервність оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$. Доведення зворотнього твердження можна знайти в Остудіна, Шинкаренка [???, с.45-47].

1.5 Спряжений простір

Банахів простір

$$\mathcal{B}' := \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$$

прийнято називати *спряженим* (або *двоїстим*) *простором* до банахового простору $\mathcal{B}$. З огляду на важливість цього простору операторів його елементи носять спеціальну назву *лінійних обмежених функціоналів*. Правило дії та норму кожного такого функціоналу $l : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ позначатимемо теж специфічним чином

$$v \in \mathcal{B} \to < l, v > \in \mathbb{R}$$

та

$$\|l\|_* := \sup_{0 \ne v \in \mathcal{B}} \frac{|< l, v >|}{\|v\|_{\mathcal{B}}}, \tag{1.5.8}$$

відповідно.

З іншого боку, білінійне відображення $<\cdot\,,\cdot>: \mathcal{B}'\times\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ іноді називають *відношенням двоїстості* або *паруванням* просторів $\mathcal{B}$ та спряженого до нього $\mathcal{B}'$. Зокрема, відношення двоїстості є прикладом неперервного відображення, аргументи якого є елементами різних просторів і при цьому

$$|<l,v>| \le \|l\|_*\|v\|_{\mathcal{B}} \quad \forall l\in\mathcal{B}' \quad \forall v\in\mathcal{B}. \tag{1.5.9}$$

1.6 Простори узагальнених функцій

Позначимо через $\mathcal{D}'(\Omega)$ простір лінійних неперервних функціоналів

$$v\in\mathcal{D}(\Omega)\to<f,v>\in\mathbb{R},$$

де $<\cdot\,,\cdot>: \mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{R}$ визначає відношення двоїстості між просторами $\mathcal{D}(\Omega)$ та $\mathcal{D}'(\Omega)$. В цьому випадку кажуть, що функціонал $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ описує *узагальнену функцію.*

На просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\Omega)$ можна ввести поняття *узагальненої похідної* $\partial^{\alpha} f$ порядку α від функції $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ згідно правила

$$<\partial^{\alpha} f,v>:=(-1)^{|\alpha|}<f,\partial^{\alpha} v> \qquad \forall v\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Якщо при цьому функція f допускає диференціювання в звичайному розумінні, то її узагальнені похідні співпадають із класичними,

$$\partial^{\alpha} f\equiv D^{\alpha} v.$$

З огляду на структуру просторів Лебега можна ввести низку банахових просторів узагальнених функцій

$$W^{m,p}(\Omega):=\big\{v:\Omega\to\mathbb{R}:\ \partial^{\alpha} v\in L^p(\Omega)\ \ \forall\,|\alpha|\le m\,\big\},\quad 1\le p\le\infty,\quad \forall\, m\in\mathbb{N}$$

з нормами

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}\equiv\|v\|_{m,p,\Omega}:=\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^{\alpha} v\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, v\in W^{m,p}(\Omega).$$

Простори $W^{m,p}(\Omega)$ називаються *просторами функцій Соболєва.* Для спеціального випадку $p=2$ простори Соболєва стають *гільбертовими просторами*, див. нижче п. ????, і внаслідок важливості цієї властивості носять окреме позначення $H^m(\Omega)$, іншими словами,

$$H^m(\Omega):=W^{m,2}(\Omega).$$

Простори узагальнених функцій Соболєва слугують наріжним каменем у варіаційних формулюваннях задач математичної фізики та методів їхнього розв'язування.

1.7 Абстрактна задача про операторне рівняння

Нижче ми будемо розглядати класичні задачі математичної фізики, які інколи зручно подавати у вигляді абстрактного операторного рівняння

$$\begin{cases} \textit{задано банахові простори } \mathcal{B} \textit{ та } \mathcal{C}, \\ \qquad \textit{лінійний оператор } A : \mathcal{B} \to \mathcal{C} \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } f \in \mathcal{C}; \\ \textit{знайти } u \in \mathcal{B} \textit{ такий, що} \\ \qquad Au = f. \end{cases} \tag{1.7.10}$$

1.7.1 Коректно поставлена задача

Ми будемо говорити, що *операторна задача (1.7.10) коректно поставлена* тоді і лише тоді, якщо *її оператор має обмежений обернений* $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. Іншими словами, коректно поставлена задача (1.7.10) *має единий розв'язок* $u \in \mathcal{B}$, який визначається згідно правила

$$u = A^{-1} f,$$

і при цьому

$$\|u\|_{\mathcal{B}} \le \|A^{-1}\| \|f\|_{\mathcal{C}}. \tag{1.7.11}$$

Остання оцінка (поряд із обмеженістю знайденого розв'язку $u \in \mathcal{B}$) виражає його *неперервну залежність від вихідних даних задачі (1.7.10).*

1.7.2 Критерій існування обмеженого оберненого оператора

З огляду на пріоритетну роль в цьому курсі коректно поставлених задач математичної фізики, фундаментального значення набуває

Теорема 1.7.1. Банаха
про ознаку обмеженого оберненого оператора

Для того, щоб лінійний оператор $A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *мав обмежений обернений* $A^{-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, *необхідно і досить, щоб знайшлась* $\alpha = const > 0$ *така, що задовольняє нерівність*

$$\|Av\|_{\mathcal{C}} \ge \alpha \|v\|_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in \mathcal{B}. \tag{1.7.12}$$

Доведення. можна знайти, наприклад, в Остудіна, Шинкаренка [???, с.105-107]. □

1.7.3 Задача про найкраще наближення

В тих випадках операторних задач, коли умови теореми Банаха важко перевірити або вони апріорі не виконуються, часто вдаються до заміни (1.7.10) наступною *задачею про найкраще наближення*

$$\begin{cases} \textit{задано банахові простори } \mathcal{B} \textit{ та } \mathcal{C}, \\ \qquad \textit{лінійний оператор } A : \mathcal{B} \to \mathcal{C} \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } f \in \mathcal{C}; \\ \textit{знайти } u \in \mathcal{B} \textit{ такий, що} \\ \qquad \|Au - f\|_{\mathcal{C}} \le \|Av - f\|_{\mathcal{C}} \quad \forall v \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{1.7.13}$$

Така задача завжди має принаймі один розв'язок $u \in \mathcal{B}$, який не обов'язково є розв'язком вихідної операторної задачі (1.7.10). Тим не менше такий підхід інтенсивно експлуатується в контексті методів обчислювальної математики.

1.8 Дискретизація операторних задач

Даний курс присвячений побудові числових методів розв'язування коректно поставлених задач (1.7.10). Останні застосовуються у випадках, коли не вдається відшукати (явно або точно) обернений оператор $A^{-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Згрубше кажучи, основна мета числових методів математичної фізики - запропонувати конструктивні способи явного або неявного знаходження апроксимацій оберненого оператора. При цьому звичайно передбачається, що побудовані алгоритми необхідних обчислень ефективно і надійно реалізуються за допомогою комп'ютерних програм.

1.8.1 Схема дискретизації операторних задач

Більш точно, у переважній більшості випадків загальна схема апроксимації задачі (1.7.10) полягає у побудові послідовності так званих *дискретних задач*

$$\begin{cases} \textit{задано значення параметра дискретизації} \;\; h = const > 0, \\ \qquad \textit{скінченновимірні простори апроксимацій} \;\; \mathcal{B}_h \;\textit{та}\; \mathcal{C}_h, \\ \qquad \textit{лінійний оператор} \;\; A_h : \mathcal{B}_h \to \mathcal{C}_h \;\textit{та} \\ \qquad \textit{деякий елемент} \;\; f_h \in \mathcal{C}_h; \\ \textit{знайти} \;\; u_h \in \mathcal{B}_h \;\; \textit{такий, що} \\ \qquad A_h u_h = f_h, \end{cases} \tag{1.8.14}$$

за умови, що послідовність вибраних значень *параметра дискретизації* h прямує до нуля. При цьому передбачається , що послідовність знайдених розв'язків $\{u_h\}$ в певному сенсі "збігається"до розв'язку u задачі (1.7.10). Оскільки простори апроксимацій $\mathcal{B}_h$ та $\mathcal{C}_h$ вибираються скінченновимірними (а, отже, ізоморфними евклідовим просторам $\mathbb{R}^N$ відповідної розмірності), природно, що рівняння задачі (1.8.14) є нічим іншим, як *системою лінійних алгебричних рівнянь.* Таким чином, побудова рівнянь дискретної задачі приводиться врешті-решт до обчислення коефіцієнтів матриць $\{A_h\}$ та векторів $\{f_h\}$ відповідно. У зв'язку з цим будь-який спосіб трансформування операторної задачі (1.7.10) до послідовності алгебричних задач (1.8.14) називають *схемою дискретизації операторної задачі.*

Зрозуміло, що дискретизація операторної задачі передбачає введення лінійних операторів $P_h : \mathcal{B}_h \to \mathcal{B}$, кожен з яких знайденому u_h в $\mathcal{B}_h$ ставить у відповідність єдиний елемент $P_h u_h \in \mathcal{B}$. При цьому ми будемо говорити, що послідовність наближень $\{u_h\}$ *збігається до розв'язку* u, якщо

$$e_h := \|u - P_h u_h\|_{\mathcal{B}} \to 0 \quad \textit{разом із } h \to 0,$$

а величину e_h будемо називати *похибкою апроксимації задачі* (1.7.10). Якщо нам вдається показати,що існує стала $C > 0$, значення якої не залежить від параметра дискретизації h, така, що

$$e_h = Ch^p,$$

то ми будемо посилатись на показник $p \geq 1$ як на *показник швидкості збіжності* схеми дискретизації операторної задачі.

Аналіз властивостей похибок апроксимації і побудова їхніх апріорних та апостеріорних оцінок,як ми побачимо далі, є ключовими темами цього курсу числових методів.

Відзначимо тут, що значення параметра дискретизації $h > 0$ завжди пов'язане із розмірностями N просторів апроксимацій залежностями

$$N = N(h) := dim\,\mathcal{B}_h \equiv dim\,\mathcal{C}_h \to +\infty, \quad \textit{якщо } h \to 0.$$

З огляду на проблеми математичної фізики, наведений нарис можливих схем дискретизації передбачає величезне спрощення пошуку наближених розв'язків - він завжди завершується формулюванням і розв'язуванням проблем лінійної алгебри, можливо, великої, але скінченної розмірності.

1.8.2 Апроксимативність схем дискретизації

1.8.3 Стійкість схем дискретизації

1.8.4 Збіжність схем дискретизації

1.9 Висновки і заключні зауваження

Розділ 2

Гільбертові простори

2.1 Орієнтири

Дійсний лінійний нормований простір $\mathcal{H}$ називають *евклідовим*, якщо на ньому визначено двомісний функціонал $(\cdot\,,\cdot\,) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ з такими властивостями:

$$\begin{aligned}
&\textit{(i)} \quad (v,v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H};\\
&\textit{(ii)} \quad (v,v) = 0 \ \ \textit{тоді і лише тоді, коли} \ \ = 0_{\mathcal{H}};\\
&\textit{(iii)} \quad (v,w) = (w,v) \quad \forall v,w \in \mathcal{H};\\
&\textit{(iv)} \quad (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w) \quad \forall u,v,w \in \mathcal{H} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Цей функціонал $(\cdot\,,\cdot\,) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ називають *скалярним добутком на просторі* $\mathcal{H}$.

Теорема 2.1.1. про структуру евклідового простору
Будь-який евклідів простір $\mathcal{H}$ характеризується
(I) нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$|(v,w)|^2 \leq (v,v)(w,w) \quad \forall v,w \in \mathcal{H}. \tag{2.1.2}$$

(II) нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, яка визначається скалярним добутком згідно правила

$$\|v\|_{\mathcal{H}} := (v,v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.1.3}$$

Якщо евклідів простір $\mathcal{H}$ виявляється повним відносно визначеної в (2.1.3) норми $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, то його називають *гільбертовим простором* . В термінах норми нерівність Коші-Буняковського-Шварца (2.1.2) набуває вигляду

$$|(v,w)| \leq \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v,w \in \mathcal{H}. \tag{2.1.4}$$

Отже, гільбертові простори є частковим класом банахових просторів, норма в яких асоціюється зі скалярним добутком. Власне ця оснащеність скалярним добутком приводить до визначних властивостей гільбертових просторів, які стають потужним інструментом аналізу та застосувань в математичній фізиці.

2.2 Гільбертові простори узагальнених функцій

З огляду на широке коло можливих застосувань неперервно диференційованих функцій, простір $C^k(\bar{\Omega})$ можна наділити скалярним добутком

$$(u, v)_k := \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u D^\alpha v \, dx \quad \forall u, v \in C^k(\bar{\Omega}) \tag{2.2.5}$$

та асоційованою з ним нормою

$$\|v\|_{k,2,\Omega} := \sqrt{(v, v)_k} \quad \forall v \in C^k(\bar{\Omega}). \tag{2.2.6}$$

Лінійний простір $C^k(\bar{\Omega})$ з нормою (2.2.6) *неповний*; іншими словами, в цьому просторі можна знайти фундаментальну послідовність$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що

$$\|v_n - v_m\|_{k,2,\Omega} \to 0 \quad \textit{разом із} \quad n, m \to \infty,$$

але поряд із цим в просторі $C^k(\bar{\Omega})$ не можна знайти жодної функції $v = v(x)$ з властивістю

$$\|v_n - v\|_{k,2,\Omega} = \{\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le k} [D^\alpha (v_n - v)]^2 \, dx\}^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \textit{разом із} \quad n \to \infty. \tag{2.2.7}$$

Причиною неповноти простору $C^k(\bar{\Omega})$ відносно норми (2.2.6) є та обставина, що інтеграли в (2.2.7) будуть існувати і для функцій $v = v(x)$, похідні яких до $k-$го порядку включно не обов'язково повинні бути неперервними, - досить, щоб ці похідні були функціями, які інтегруються з квадратом на області Ω разом із своїми всеможливими частковими похідними до $k-$го порядку включно.Таким чином, в підінтегральних виразах з (2.2.6) потрібно замінити класичні похідні D^α узагальненими ∂^α.

Тепер, щоб зробити простір $C^k(\bar{\Omega})$ повним відносно норми (2.2.6), достатньо знайти його *замикання* в цій нормі: приєднати до нього границі всіх його фундаментальних послідовностей. Таким чином побудований банахів простір

$$H^k(\Omega) := \{ v :\to \mathbb{R} \ : \ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \le k \} \tag{2.2.8}$$

називають *простором Соболєва $k-$го порядку*, а саму процедуру замикання позначають так

$$\overline{C^k(\Omega)}^{H^k(\Omega)}.$$

Оскільки простір Соболєва $H^k(\Omega)$ ще й наділено скалярним добутком (2.2.5), який породжує норму (2.2.6),то він є *гільбертовим простором.*

Лемма 2.2.1. про щільні підпростори в $H^k(\Omega)$

Якщо область Ω має ліпшицеву межу Γ, то простір нескінченне число разів диференційованих функцій $C^\infty(\bar{\Omega})$ є щільним в просторі Соболєва $H^k(\Omega)$.

Внаслідок цього твердження та належностей

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$$

простори $C^m(\bar{\Omega}), m \ge k$, будуть щільними підпросторами в $H^k(\Omega)$.

2.3 Обчислювальні аспекти: критерій лінійної незалежності

Парадигма обчислювальної математики полягає у вирішенні (в цей чи інший спосіб) своїх найскладніших проблем внутрі скінченновимірних просторів. За цими намірами криється потенціальна можливість величезного спрощення пошуку необхідних функцій: як тільки зафіксовано базис згаданого скінченновимірного простору апроксимацій, то невідомими стають лише числові коефіцієнти розвинення розв'язку за цим базисом. Отже, в найскладніших випадках слід очікувати редукції вихідної задачі, скажімо, математичної фізики до розв'язування систем алгебричних рівнянь відносно цих коефіцієнтів.[1] Природно, що якість знайденого наближення врешті-решт визначається властивостями вибраного нами базису.

Базисом $n-$вимірного підпростору V_n, $dim\, V_n = n < +\infty$, гільбертового простору називається будь-яка послідовність$\{\phi_i\}_{i=1}^n \subset V_n$, елементи якої є лінійно незалежними між собою. Ефективні обчислювальні засоби контролю лінійної залежності(або незалежності) сукупності елементів в лінійних нормованих просторах відсутні. В структурі гільбертових просторів - ситуація інакша.

Теорема 2.3.1. про критерій лінійної незалежності
елементів гільбертового простору

Будь-яка послідовність елементів $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ гільбертового простору $\mathcal{H}$ є лінійно незалежною в цьому просторі тоді й лише тоді, коли матриця G з коефіцієнтами

$$G_{ij} := (\phi_i, \phi_j) \quad i, j = 1, \;\dots\;, n \tag{2.3.9}$$

є додатно визначеною.[2]

Доведення. Нагадаємо, що матриця G називається *додатно визначеною*, якщо

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{знайдеться} \;\; g = const > 0 \;\textit{така, що} \\ \qquad\qquad \sum\limits_{i,j=1}^{n} G_{ij}\xi_i\xi_j \geq g \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{2.3.10}$$

З огляду на визначення (2.3.9) одержимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n} (\phi_i, \phi_j)\xi_i\xi_j \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \xi_i\phi_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j\phi_j) \\ &= \| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\phi_i \|_{\mathcal{H}}^2 \qquad \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

[1] Будь-який процес приведення задачі математичні фізики до алгебричних задач ми будемо називати далі *дискретизацією вихідної задачі*, а одержані при цьому алгебричні рівняння - *дискретними рівняннями.* Далі ми побачимо, що примітивізм таких дискретних моделей фізичних явищ чисто ілюзорний - в багатьох випадках за цим криється нетривіальна математична і фізична сутність.

[2] Матриця G, коефіцієнти якої обчислюються згідно правила (2.3.9), називається *матрицею Грама для послідовності $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ відносно скалярного добутку $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ простору $\mathcal{H}$.*

Оскільки $v := \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \phi_i$ є елементом скінченновимірного підпростору $V_n \subset \mathcal{H},\ dim\, V_n = n$, то будь-які норми на ньому еквівалентні, наприклад, нормі

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} := \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall x = \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

На додаток до цього вектор коефіцієнтів $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ однозначно характеризує цей елемент $v \in V_n$; тому дійсно знайдеться стала $g_0 > 0$, така, що

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \phi_i\|_{\mathcal{H}} \geq g_0 \|\xi\|_{\mathbb{R}^n} = g_0 \{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Одержана оцінка разом із (2.3.11) приводить до висновку, що матриця G додатно визначена зі сталою $g := g_0^2$. $\square$

2.4 Структура спряженого простору

2.4.1 Теорема Рісса

Поданий нижче результат показує, що скалярний добуток гільбертового простору дозволяє повністю описати природу спряженого до нього простору та відношення їх двоїстості.

Теорема 2.4.1. Рісса
про структуру лінійного обмеженого функціоналу,
визначеного на гільбертовому просторі

Для будь-якого функціоналу $l \in \mathcal{H}'$ знайдеться єдиний елемент $u \in \mathcal{H}$ такий, що

$$< l, v >= (u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \tag{2.4.12}$$

і при цьому

$$\|l\|_* = \|u\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.4.13}$$

Доведення. можна знайти, наприклад, в Остудіна, Шинкаренка[???, с.116-118]. $\square$

Теорема Рісса стверджує, зокрема, про відповідність між гільбертовим простором $\mathcal{H}$ та спряженим до нього $\mathcal{H}'$, яку можна описати певним оператором $\mathcal{R} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$, що діє згідно правила

$$u := \mathcal{R} l$$

для кожної пари $\{l, u\} \in \mathcal{H}' \times \mathcal{H}$, пов'язаної рівністю (2.4.12). Неважко переконатись, що таким чином визначений оператор $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, бієктивний і має норму

$$\|R\| = 1,$$

що говорить про *ізометричний ізоморфізм пари просторів $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}'$.*

2.4.2 Перший приклад задачі про варіаційне рівняння

З огляду на згаданий вище ізоморфізм простір лінійних обмежених функціоналів $\mathcal{H}'$,при бажанні, завжди можна ототжнити з гільбертовим простором $\mathcal{H}$. Для цього достатно розв'язати наступну задачу:

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } \ \mathcal{H} \ \textit{та} \\ \qquad\qquad \textit{деякий функціонал } \ l \in \mathcal{H}'; \\ \textit{знайти } \ u \in \mathcal{H} \ \ \textit{такий, що} \\ \qquad\qquad (u, v) =< l, v > \qquad \forall v \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.4.14}$$

Відзначимо, що стосовно щойно сформульованої задачі (2.4.12) теорема Рісса виступає класичною теоремою існування та єдиності розв'язку, який неперервно залежить від даних задачі. Іншими словами, теорема Рісса встановлює, що задача (2.4.12) *коректно поставлена*. Поряд з цим ні сама теорема, ні її доведення не подає жодного натяку на спосіб її розв'язання.

Зауваження 2.4.1. *Задача (2.4.12) відноситься до класу так званих варіаційних задач, які далі будуть основним об'єктом аналізу цього курсу стосовно коректності їхніх формулювань і числових методів розв'язування.*

2.5 Класичні варіаційні задачі

Варіаційні формулювання задач математичної фізики можуть набувати різноманітного вигляду. Нижче ми наводимо декілька прикладів еквівалентних формулювань однієї задачі апроксимації в гільбертовому просторі і показуємо, що наявність скалярного добутку дозволяє дати вичерпні відповіді на питання стосовно їхньої розв'язуваності.

2.5.1 Задача про про найкраще наближення

Наочне уявлення про найбільш характерні особливості цього класу задач подає *задача про найкраще наближення*:

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } \ \mathcal{H}, \\ \qquad\qquad \textit{замкнений підпростір } \ V \subset \mathcal{H} \ \textit{та} \\ \qquad\qquad \textit{деякий елемент } \ u_* \in \mathcal{H}; \\ \textit{знайти } \ u \in V \ \ \textit{такий, що} \\ \qquad\qquad \|u_* - u\|_{\mathcal{H}} \le \|u_* - v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.5.15}$$

З точки зору геометрії нормованих просторів задача (2.5.15) має на меті віднайти серед елементів множини V такий, що зможе *мінімізувати віддаль між заданим елементом u_* з простору $\mathcal{H}$ та його множиною V*. Більш точно, потрібно

$$\begin{cases} \textit{знайти } \ u \in V \ \ \textit{такий, що} \\ \qquad\qquad \|u_* - u\|_{\mathcal{H}} = dist\,(u_*, V) := \inf\limits_{v \in V} \|u_* - v\|_{\mathcal{H}}. \end{cases} \tag{2.5.16}$$

Відповідь на запитання стосовно однозначної розв'язуваності задачі про найкраще наближення (2.5.15) надає наступна

Теорема 2.5.1. (основна теорема гільбертових просторів)

Нехай V - замкнена опукла множина [3] *гільбертового простору $\mathcal{H}$ і u_* - заданий елемент в просторі $\mathcal{H}$.*

Тоді знайдеться єдиний елемент $u \in V$ такий, що

$$\|u_* - u\|_{\mathcal{H}} = \inf_{v \in V} \|u_* - v\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.5.17}$$

Доведення. можна знайти, наприклад, в Остудіна, Шинкаренка[???, с.105-107]. □

Зауваження 2.5.1. *Оскільки кожен скінченновимірний простір $V \subset \mathcal{H}$ є замкненим, то, з огляду на тільки що сформульовану теорему, задача про найкраще наближення (2.5.15) завжди володіє єдиним розв'язком $u \in V$, якщо*

$$dim\ V < +\infty.$$

Відзначимо, що на цей момент формулювання задачі (2.5.15) ніяк не враховує структури гільбертового простору $\mathcal{H}$.

2.5.2 Задача мінімізації квадратичного функціоналу

З іншої сторони, згадуючи, що норма в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ породжена скалярним добутком,маємо

$$\begin{aligned} \|u_* - v\|^2_{\mathcal{H}} &= (u_* - v, u_* - v) \\ &= (u_*, u_*) + (v, v) - 2(u_*, v) \\ &= \|u_*\|^2_{\mathcal{H}} + J(v) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

де $J(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ є квадратичним функціоналом вигляду

$$J(v) := (v, v) - 2(u_*, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.5.19}$$

В цьому контексті розв'язок задачі про найкраще наближення (2.5.15) одночасно є й розв'язком *задачі мінімізації квадратичного функціоналу*

$$\begin{cases} \text{задано гільбертів простір } \mathcal{H}, \\ \qquad \text{лінійний підпростір } V \subset \mathcal{H} \text{ та} \\ \qquad \text{деякий елемент } u_* \in \mathcal{H}; \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що} \\ \qquad J(u) \le J(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.5.20}$$

[3] Множина V лінійного простору X називається *опуклою* тоді й лише тоді, коли

$$\alpha u + (1 - \alpha) v \in V \quad \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

2.5.3 Задача про варіаційне рівняння

Припустимо тепер,що елемент $u \in V$ є розв'язком задачі мінімізації (2.5.20); тоді буде вірною нерівність

$$\begin{aligned} J(u) \le J(u+\varepsilon v) &= (u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - 2(u_*, u+\varepsilon v) \\ &= J(u) + \varepsilon^2 \|v\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\qquad + 2\varepsilon(u-u_*, v) \quad \forall v \in V \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Звідси, оскільки $u \in V$ є точкою мінімума функціонала $J(v)$, то нескладна алгебра приводить до рівняння

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{2\varepsilon} = (u-u_*, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.5.22}$$

Таким чином, ми приходимо до висновку, що розв'язок $u \in V$ задачі мінімізації (2.5.20) одночасно є розв'язком *задачі про варіаційне рівняння*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{задано гільбертів простір } \mathcal{H}, \\ \qquad \textit{лінійний підпростір } V \subset \mathcal{H} \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } u_* \in \mathcal{H}; \\ \textit{знайти } u \in V \textit{ такий, що} \\ \qquad (u, v) = (u_*, v) \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2.5.23}$$

2.5.4 Ортогональна проекція

Нарешті, остаточну характеристику задачі про варіаційне рівняння (2.5.23) надає

Теорема 2.5.2. про ортогональну проекцію

Нехай задано деякий елемент u_* гільбертового простору $\mathcal{H}$ та його замкнений підпростір $V \subset \mathcal{H}$.

Тоді знайдеться єдиний елемент $u \in V$ такий, що

$$(u_* - u, v) = 0 \quad \forall v \in V, \tag{2.5.24}$$

і при цьому вірна теорема Піфагора

$$\|u_*\|^2_{\mathcal{H}} = \|u_* - u\|^2_{\mathcal{H}} + \|u\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{2.5.25}$$

Доведення. можна знайти, наприклад, в Остудіна, Шинкаренка[???, с.111-112]. □

2.6 Задача про варіаційну нерівність

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{задано гільбертів простір } \mathcal{H}, \\ \qquad \textit{замкнену опуклу множина } V \subset \mathcal{H} \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } u_* \in \mathcal{H}; \\ \textit{знайти } u \in V \textit{ такий, що} \\ \qquad (u_* - u, v - u) \le 0 \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2.6.26}$$

Теорема 2.6.1. про варіаційну нерівність

Задача про варіаційну нерівність (2.6.26) має єдиний розв'язок $u \in V$*; більше цього,*

$$(I) \quad \|u_* - u\|_{\mathcal{H}} = \inf_{v \in V} \|u_* - v\|_{\mathcal{H}}; \tag{2.6.27}$$

$$(II) \quad \|u_* - u\|^2_{\mathcal{H}} - \|u_*\|^2_{\mathcal{H}} = J(u) \leq J(v) := (v, v) - 2(u_*, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.6.28}$$

Доведення. можна знайти, наприклад, в Остудіна, Шинкаренка[???, с.105-107]. □

2.7 Задача мінімізації норми лишку

Іноді задачу про найкраще наближення можна зустріти в іншій редакції:

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } \mathcal{H}, \\ \qquad \textit{лінійний оператор } A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}' \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } f \in \mathcal{H}'; \\ \textit{знайти } u \in \mathcal{H} \textit{ такий, що} \\ \qquad \|Au - f\|_{\mathcal{H}'} \leq \|Av - f\|_{\mathcal{H}'} \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.7.29}$$

Часто таке формулювання навіяне необхідністю розв'язування *задачі про операторне рівняння*:

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } \mathcal{H}, \\ \qquad \textit{лінійний оператор } A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}' \textit{ та} \\ \qquad \textit{деякий елемент } f \in \mathcal{H}'; \\ \textit{знайти } u \in \mathcal{H} \textit{ такий, що} \\ \qquad Au = f. \end{cases} \tag{2.7.30}$$

Зрозуміло, що кожен розв'язок $u \in \mathcal{H}$ операторного рівняння з (2.7.30) (якщо він існує!) одночасно є й розв'язком задачі (2.7.29). Обернене твердження, взагалі кажучи, буде невірним. Дійсно, задача (2.7.30) може не мати жодного розв'язку, то в цей же час задача (2.7.30), яку слід розглядати як *задачу мінімізації норми лишку*

$$\rho(v) := f - Av$$

на спряженому просторі H', завжди має хоча б один розв'язок $u_* \in \mathcal{H}$ з огляду на повноту H'. При цьому, взагалі кажучи,

$$\|\rho(u_*)\|_{\mathcal{H}'} \neq 0.$$

Незважаючи на привабливість ідеї заміни розв'язування операторної задачі (2.7.30) задачею мінімізації лишку (2.7.29), лише нещодавно в контексті методу скінченних елементів було досягнуто успіхів стосовно її ефективної реалізації.

2.8 Висновки і заключні зауваження

2.9 Формули інтегрування частинами

Класична формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx = -\int\limits_{\Omega} w\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{\Gamma} vwn_j\,d\gamma \quad \forall\ v, w \in H^1(\Omega) \tag{2.9.31}$$

є стандартним і незамінним інструментом переформулювання крайових задач у відповідні їм варіаційні задачі. Тут ми наведемо декілька прикладів такого використання.

(!)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} v\Delta w\,dx &\equiv \int\limits_{\Omega} v\nabla.\,\nabla w\,dx \\ &= -\int\limits_{\Omega} \nabla v.\,\nabla w\,dx + \int\limits_{\Gamma} vn.\,\nabla w\,d\gamma \quad \forall\ v, w \in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.9.32}$$

(!!)

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega} v\nabla.\,w\,dx \\ &= -\int\limits_{\Omega} w.\,\nabla v\,dx + \int\limits_{\Gamma} vn.\,w\,d\gamma \quad \forall\ v \in H^1(\Omega) \quad \forall\ w \in H(div, \Omega).\end{aligned} \tag{2.9.33}$$

Вправа 2.9.1. *Припустимо, що область Ω є обмеженим замкненим полігоном в $\mathbb{R}^2$ з вершинами (x_i, y_i), $i = 1, \ \dots\ , N$, і приймемо, що $x_{N+1} := x_1$, $y_{N+1} := y_1$.*

Використовуючи формулу інтегрування частинами (2.9.33), покажіть, що

$$\begin{aligned}|\Omega| &:= \int\limits_{\Omega} dx\,dy \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i).\end{aligned} \tag{2.9.34}$$

Розділ 3

Оператори в гільбертових просторах

3.1 Білінійні форми

Відображення $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ називають *білінійною формою на гільбертовому просторі* V тоді і лише тоді, якщо вона характеризується властивостями лінійності стосовно кожного із своїх аргументів

$$\begin{cases} a(\sum\limits_i \alpha_i u_i, v) = \sum\limits_i \alpha_i a(u_i, v), \\ a(v, \sum\limits_i \alpha_i u_i) = \sum\limits_i \alpha_i a(v, u_i) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u_i, v \in V. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Білінійну форму $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ будемо називати
(I) *симетричною*, якщо (її значення не залежить від переставлення значень аргументів)

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \forall u_i, v \in V;$$

(II) *кососиметричною*, якщо (зміна місць аргументів змінює знак форми на протилежний)

$$a(v, w) = -a(w, v) \quad \forall u_i, v \in V.$$

Білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ називається *обмеженою на гільбертовому просторі* V, якщо знайдеться така додатна стала M , що

$$|a(v, w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \tag{3.1.2}$$

і при цьому

$$\|a\| := \sup_{v,w \in V} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} \tag{3.1.3}$$

називатимемо *нормою білінійної форми* $a(\cdot\,,\cdot\,)$.

Білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ називається *неперервною на гільбертовому просторі* V тоді і лише тоді, якщо для будь-яких $v, w \in V$ та будь-яких послідовностей $\{v_n\}, \{w_m\} \subset V$ таких, що

$$v_n \to v, \quad w_m \to w,$$

будуть збіжними числові послідовності

$$\begin{cases} a(v_n, u) \to a(v, u), \\ a(u, w_m) \to a(u, w_m) \quad \forall u \in V. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Як і увипадку лінійних операторів, необхідною і достатною умовою неперервності білінійної форми на гільбертовому просторі є її обмеженість. Цей факт приводить до думки, що властивості білінійних форм близькі до властивостей лінійних операторів. Більш точно, вірна

Теорема 3.1.1. про структуру обмеженої білінійної форми

Нехай V - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot\,)$ і $\mathcal{L}(V,V')$ - простір лінійних обмежених операторів, які відображають V на спряжений до нього простір V'.

Тоді для будь-якої обмеженої білінійної форми $a(\cdot\,,\cdot\,) : V\times V \to \mathbb{R}$ знайдеться єдиний оператор $A \in \mathcal{L}(V,V')$ такий, що

$$a(v,w) = (Av,w) \quad \forall v,w \in V. \tag{3.1.5}$$

Доведення. Зафіксуємо елемент $v\in V$ і розглянемо відображення $a(v,\cdot\,) : V\to\mathbb{R}$. Введенням позначення

$$< l,w >:= a(v,w) \quad \forall w\in V$$

ми визначаємо лінійний неперервний функціонал на просторі V. Дійсно, лінійність функціоналу l очевидна. Оцінка

$$|< l,w >| = |a(v,w)| \le \|a\|\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall w\in V$$

приводить до висновку, що

$$\|l\|_* \le \|a\|\|v\|_V,$$

тобто $l\in V'$.

Далі, за теоремою Рісса знайдеться єдиний елемент $z\in V$ такий, що

$$< l,w >= (z,w) \quad \forall w\in V$$

і, отже,

$$a(v,w) = (z,w) \quad \forall w\in V.$$

Останнє із цих рівнянь визначає певний взаємозв'язок між елементами $v\in V$ і $z\in V$, що описується деякий оператор $A : V\to V'$, який діє згідно правила

$$z = Av \quad \forall v\in V. \tag{3.1.6}$$

Легко побачити, що щойно введений оператор A лінійний. Більше цього,

$$|(Av,w)| = |a(v,w)| \le \|a\|\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,w\in V.$$

Покладаючи в знайденій оцінці $w = Av$, обчислюємо, що

$$\|Av\|_V \le \|a\|\|v\|_V \quad \forall v\in V.$$

Отже, виначений нами в (3.1.6) оператор A неперервний і тому $A\in\mathcal{L}(V,V')$. $\square$

3.2 V-еліптичні білінійні форми

Білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ називається *V-еліптичною* (або, в іншій термінології, *коерцитивною на просторі V)* тоді і лише тоді, якщо знайдеться додатна стала α така, що задовольняє нерівність

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \tag{3.2.7}$$

Важливість щойно введеного поняття ілюструє безпосередній

Наслідок 3.2.1. про еквівалентні норми

Кожна симетрична неперервнаі V-еліптична білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ є новим скалярним добутком на гільбертовому просторі V, який породжує норму

$$|v|_V := \sqrt{a(v,v)} \quad \forall v \in V,$$

еквівалентну вихідній нормі $\|\cdot\|_V$ простору V,

$$\sqrt{\alpha}\,\|v\|_V \leq |v|_V \leq \sqrt{\|a\|}\;\|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{3.2.8}$$

Доведення. Перша половина твердження випливає безпосередньо із аксіом скалярного добутку.

Далі, скористаємось $V-$еліптичністю та неперервністю білінійної форми. В результаті знайдемо нерівності

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq |v|_V^2 = a(v,v) \leq \|a\|\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

з яких стає очевидною еквівалентність розглядуваних тут норм. □

Наступний результат характеризує V-еліптичність форми із дещо іншого боку - з точки зору асоційованого з нею оператора.

Теорема 3.2.1. про V-еліптичну білінійну форму

Нехай білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ є неперервною і V-еліптичною та $A \in \mathcal{L}(V,V')$ - асоційований з нею оператор, тобто

$$a(v,w) = (Av,w) \quad \forall v,w \in V.$$

Тоді оператор A має обмежений обернений оператор

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(V',V).$$

Доведення. Дійсно, підставляючи в (3.1.5) елемент $w = v$, на основі V-еліптичності та нерівності Коші-Буняковського-Шварца знаходимо, що

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) = (Av,v) \leq \|Av\|_V\|v\|_V.$$

Звідси після скорочення на спільний множник одержимо оцінку

$$\alpha\|v\|_V \leq \|Av\|_V \quad \forall v \in V,$$

яка свідчить, що ми знаходимось в умовах ознаки Банаха про існування обмеженого оберненого оператора. □

3.3 Абстрактна задача про варіаційне рівняння

Задачі математичної фізики часто зустрічаються у вигляді варіаційного формулювання

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } V, \\ \qquad \textit{білінійну форму } a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R} \textit{ та} \\ \qquad \textit{лінійний функціонал } l: V \to \mathbb{R}; \\ \textit{знайти } u \in V \textit{ такий, що} \\ \qquad a(u,v) = < l, v > \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Наступна теорема подає достатні умови коректності варіаційної задачі (3.3.9).

Теорема 3.3.1. Лакса-Мільграма-Вишика
про варіаційне рівняння

Нехай дані варіаційної задачі (3.3.9) задовольняють наступні гіпотези:
(I) білінійна форма $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ *неперервна, іншими словами, знайдеться стала* $M > 0$ *така, що*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v, w \in V; \tag{3.3.10}$$

(II) білінійна форма $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ *є* V*-еліптичною, тобто, знайдеться стала* $\alpha > 0$ *така, що*

$$|a(v,v)| \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V; \tag{3.3.11}$$

(III) лінійний функціонал $l: V \to \mathbb{R}$ *неперервний , іншими словами,* $l \in V'$.
Тоді існує єдиний розв'язок $u \in V$ *рівняння із (3.3.9) і при цьому*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|l\|_*. \tag{3.3.12}$$

Доведення. З доведенням цього важливого результату можна ознайомитись у всіх курсах, які присвячені аналізу варіаційних задач, див.,наприклад, Шинкаренко[???].Його основна ідея - показати, що варіаційне рівняння задачі (3.3.9) еквівалентне певному операторному рівнянню, і встановити однозначну розв'язуваність останнього.

(I) Ми розпочнемо з використання теореми Рісса про структуру фукціоналу l як елемента спряженого простору V'; згідно цієї теореми (див.) знайдеться єдиний елемент $f \in V$ такий, що

$$< l, w > = (f, w) \quad \forall w \in V;$$

Ця відповідність встановлює існування ізометричного ізоморфізму $R: V' \to V$, який діє згідно правила

$$l \in V' \to Rl := f \in V \quad \forall l \in V'.$$

Далі, з огляду на теорему про неперервну білінійну форму знайдеться лінійний оператор $A: V \to V$ такий, що

$$a(v,w) = (Av, w) \quad \forall v, w \in V. \tag{3.3.13}$$

Із врахуванням цих фактів рівняння варіаційної задачі (3.3.9) набуде вигляду

$$(Au, w) = (f, w) = (Rl, w) \quad \forall w \in V \tag{3.3.14}$$

або

$$(Au - Rl, w) = 0 \quad \forall w \in V.$$

З огляду на одержану умову ортогональності елемента $(Au - Rl) \in V$ до всього простору V, приходимо до висновку, що кожен розв'язок $u \in V$ варіаційної задачі (3.3.9) є одночасно розв'язком задачі про операторне рівняння

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{задано оператори} \;\; A \in \mathcal{L}(V,V), \quad R \in \mathcal{L}(V',V) \\ \qquad\qquad \textit{та функціонал} \;\; l \in V'; \\ \textit{знайти} \;\; u \in V \;\; \textit{такий, що} \\ \qquad Au = Rl. \end{array}\right. \tag{3.3.15}$$

(II) Лишається показати, що задача (3.3.15) коректно поставлена. З цією метою визначимо оператор $B_\rho : V \to V$ таким чином, щоб

$$v \to B_\rho(v) := v - \rho(Av - Rl) \quad \forall v \in V \tag{3.3.16}$$

з параметром $\rho = const > 0$. Значення останнього виберемо так, щоб оператор $B_\rho : V \to V$ здійснював стискаюче відображення. Справді, оцінки

$$\begin{aligned} \|B_\rho(v) - B_\rho(w)\|_V^2 &= \|(v-w) - \rho A(v-w)\|_V^2 \\ &= ((v-w) - \rho A(v-w), (v-w) - \rho A(v-w)) \\ &= \|v-w\|_V^2 - 2\rho a(v-w, v-w) + \rho^2 \|A(v-w)\|_V^2 \\ &\le \{1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2\} \|v-w\|_V^2 \quad \forall v, w \in V \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

показують, що оператор $B_\rho : V \to V$ із (3.3.16) реалізує стискаюче відображення в просторі V, якщо вибір значень параметра ρ задовольняє умову

$$0 < \rho < \alpha M^{-2}. \tag{3.3.18}$$

Як твердить теорема Банаха про стискаюче відображення (див.), за цієї умови оператор $B_\rho : V \to V$ має єдину нерухому точку u таку, що

$$u = B_\rho(u) = u - \rho(Au - Rl).$$

Після очевидних спрощень зауважимо, що одержане рівняння еквівалентне рівнянню задачі (3.3.15) для всіх допустимих значень ρ.

(III) Нарешті переконаємось у наявності неперервної залежності розв'язку u варіаційної задачі (3.3.9) від її даних. Дійсно, підставляючи $v = u$ в рівняння задачі (3.3.9), скористаємось $V-$еліптичністю її білінійної форми та неперервністю лінійного функціоналу. В результаті знайдемо нерівності

$$\alpha \|u\|_V^2 \le a(u,u) =< l, u > \le \|l\|_* \|u\|_V.$$

Скоротивши тепер спільний множник, приходимо до оцінки (3.3.12). □

3.4 Ітераційні методи для варіаційних задач

Наведений вище спосіб доведення існування і єдиності розв'язку задачі з посиланням на теорему Банаха про стискаюче відображення важливий своїм конструктивним характером, оскільки він негайно приводить до ітераційної процедури

$$u_{n+1} := B_\rho(u_n), \quad n = 0, 1 \, \ldots \, . \tag{3.4.19}$$

Незалежно від вибору значення початкового наближення $u_0 \in V$, породжена ним послідовність наближених розв'язків $\{u_n\}$ збігається до розв'язку u задачі (3.3.15) або, що еквівалентне, до розв'язку варіаційної задачі (3.3.9).

Знову повертаючись до до варіаційного формулювання, ітераційній процедурі послідовних наближень (3.4.19) можна надати деталізованого вигляду:

$$\begin{cases} \text{задано початкове наближення } \ u_0 \in V \\ \qquad\qquad \text{та параметр } \ \rho = const > 0; \\ \text{знайти } \ u_{n+1} \in V \quad \text{такий, що} \\ \qquad\qquad (w, v) = \rho\{< l, v > -a(u_n, v)\} \qquad \forall v \in V, \\ \qquad\qquad u_{n+1} := u_n + w, \qquad\qquad n = 0, 1, \ \dots . \end{cases} \tag{3.4.20}$$

Останнє подання не лише дозволяє ефективно реалізувати процедуру послідовних наближень, але й висвітлює такий її обчислювальний аспект: ми будемо одержувати ненульові доданки $w \in V$ для уточнення знайденого раніше наближення доти, поки будемо мати справу з ненульовими значеннями функціонала лишку

$$< \mathcal{R}(u_n), v > := < l, v > -a(u_n, v) \qquad \forall v \in V.$$

Нарешті, наперед задаючи допустимий рівень похибки наближень $\epsilon = const > 0$, ми можемо зупинити ітераційний процес (3.4.20) на тому кроці, коли, скажімо, вперше виконається умова

$$\|w\|_V \leq \epsilon.$$

Теорема 3.4.1. про збіжність ітераційного процесу
до розв'язку варіаційного рівняння

Нехай дані варіаційної задачі (3.3.9) задовольняють гіпотези теореми Лакса-Мільграма-Вишика і при цьому значення параметра ρ ітераційного проесу (3.4.20) вибрано згідно умови

$$0 < \rho < 2\|a\|^{-1}. \tag{3.4.21}$$

Тоді послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, обчислена за допомогою ітераційного процесу (3.4.20), збігається до розв'язку $u \in V$ рівняння із (3.3.9) незалежно від вибору початкового наближення $u_0 \in V$ і при цьому

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|l\|_*. \tag{3.4.22}$$

Доведення. Перепишемо рівняння із (3.4.20) у вигляді

$$(u_{n+1}, v) = (u_n, v) + \rho\{< l, v > -a(u_n, v)\} \qquad \forall v \in V, \quad n = 0, 1, \ \dots \tag{3.4.23}$$

і оцінимо поводження похибки двох послідовних наближень

$$e_n := u_n - u_{n-1}.$$

Віднімаючи два послідовних рівняння (3.4.23), знаходимо, що

$$(e_{n+1}, v) = (e_n, v) - \rho a(e_n, v)\} \qquad \forall v \in V, \quad n = 0, 1, \ \dots , \tag{3.4.24}$$

і, скориставшись поданням

$$e_n = \frac{1}{2}(e_{n+1} + e_n) - \frac{1}{2}(e_{n+1} - e_n),$$

надамо йому вигляду

$$(e_{n+1} - e_n, v) - \frac{1}{2}\rho a(e_{n+1} - e_n, v) = -\frac{1}{2}\rho a(e_{n+1} + e_n, v) \qquad \forall v \in V, \quad n = 0, 1, \ \dots\ , \quad (3.4.25)$$

Покладемо в одержаному рівняння $v = e_{n+1} + e_n$; в результаті нескладної алгебри одержимо, що

$$\{\, \|e_{n+1}\|_V^2 - \frac{1}{2}\rho|e_{n+1}|_V^2 \,\} - \{\, \|e_n + 1\|_V^2 - \frac{1}{2}\rho|e_n|_V^2 \,\} = -\frac{1}{2}\rho|e_{n+1} + e_n|_V^2 \quad n = 0, 1, \ \dots\ , \ (3.4.26)$$

де

$$|w|_V := a^{\frac{1}{2}}(w, w) \qquad \forall w \in V$$

визначає норму, еквівалентну до норми $\| \,.\, \|_V$.

З огляду на те, що

$$|w|_V^2 = a(w, w) \le \|a\| \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V$$

□

3.5 Абстрактна задача мінімізації квадратичного функціоналу

В багатьох застосуваннях фізичні міркування природно приводять до наступного класу задач мінімізації:

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертів простір } V, \\ \qquad \textit{білінійну форму } a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}, \\ \qquad \textit{лінійний функціонал } l : V \to \mathbb{R} \\ \qquad \textit{та квадратичний функціонал} \\ \qquad\quad J(v) := a(v, v) - 2 < l, v > \quad \forall v \in V; \\ \textit{знайти } u \in V \textit{ такий, що} \\ \qquad J(u) \le J(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \qquad (3.5.27)$$

Теорема 3.5.1. Міхліна
про мінімум квадратичного функціоналу

Нехай дані задачі (3.5.27) задовольняють гіпотези теореми Лакса-Мільграма-Вишика і на додаток до цього білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ симетрична, іншими словами,

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in V.$$

Тоді задача мімімізації квадратичного функціоналу (3.5.27) еквівалентна задачі про варіаційне рівняння (3.3.9); іншими словами, задача (3.5.27) має єдиний обмежений розв'язок $u \in V$, який одночасно є й розв'язком задачі (3.3.9). Більше цього,

$$\min_{v \in V} J(v) = \inf_{v \in V} J(v) = -a(u, u) = -|v|_V^2. \qquad (3.5.28)$$

Доведення. (I) Нехай $u \in V$ є розв'язком варіаційної задачі (3.3.9); покажемо, що цей елемент u буде й розв'язком задачі (3.5.27). Дійсно,

$$\begin{aligned} J(v) = J(u+v-u) &= a(u+v-u, u+v-u) - 2 < l, u+v-u > \\ &= a(u,u) - 2 < l, u > + a(v-u, v-u) \\ &\qquad + 2\{a(u, v-u) - < l, v-u >\} \\ &= J(u) + a(v-u, v-u) \\ &\qquad + 2\{a(u, v-u) - < l, v-u >\} \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

Оскільки задовольняє варіаційному рівнянню задачі (3.3.9), то вираз у фігурних дужках із (3.5.29) є нулем. Далі, приймаючи до уваги V-еліптичність форми $a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, із (3.5.29) знаходимо, що

$$J(u) \le J(v) \quad \forall v \in V.$$

(II) Навпаки, нехай $u \in V$ є розв'язком задачі мінімізації (3.5.27); тоді,

$$\begin{aligned} J(u) \le J(u+\epsilon v) &= a(u+\epsilon v, u+\epsilon v) - 2 < l, u+\epsilon v > \\ &= J(u) + \epsilon^2 a(v,v) \\ &\qquad + 2\epsilon\{a(u,v) - < l, v >\} \quad \forall v \in V \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.5.30}$$

Звідси,

$$\begin{aligned} \frac{J(u+\epsilon v) - J(u)}{\epsilon} &= 2\{a(u,v) - < l, v >\} \\ &\qquad + \epsilon a(v,v) \ge 0 \quad \forall v \in V \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.5.31}$$

і, переходячи до границі з $\epsilon \to 0$, обчислюємо, що

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u+\epsilon v) - J(u)}{2\epsilon} = \{a(u,v) - < l, v >\} \ge 0 \quad \forall v \in V. \tag{3.5.32}$$

Нарешті, підставляючи в (3.5.32) елемент $-v$ на місце v, переконуємося, що одержана нерівність разом із (3.5.32) приводять до рівняння варіаційної задачі (3.3.9). □

3.6 Абстрактна задача про сідлову точку

Тут ми розглянемо ще один спеціальний клас варіаційних задач про відшукання екстремальних точок квадратичного функціоналу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{задано гільбертові простори } V \textit{ і } Q, \\ \qquad \textit{білінійні форми } a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}, \quad c(\cdot\,,\cdot) : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \qquad \textit{та } b(\cdot\,,\cdot) : Q \times V \to \mathbb{R}, \\ \qquad \textit{лінійні функціонали } l : V \to \mathbb{R} \textit{ і } r : Q \to \mathbb{R} \\ \qquad \textit{та квадратичний функціонал} \\ \qquad\quad \mathcal{L}(v,q) := a(v,v) - c(q,q) \\ \qquad\qquad\qquad - 2\{< l, v > - < r, q > - b(q,v)\} \quad \forall v \in V \quad \forall q \in Q; \\ \textit{знайти пару } \{u,p\} \in V \times Q \textit{ таку, що} \\ \qquad \mathcal{L}(u,q) \le \mathcal{L}(u,p) \le \mathcal{L}(v,p) \qquad \forall \{v,q\} \in V \times Q. \end{array} \right. \tag{3.6.33}$$

Часто квадратичний функціонал $\mathcal{L}(\cdot\,,\cdot\,) : V \times Q \to \mathbb{R}$ називають *лагранжианом*, а саму задачу (3.6.33) - *задачею про сідлову точку лагранжиану.* Якщо пара $\{u, p\} \in V \times Q$ є розв'язком задачі (3.6.33), то походження назви цієї задачі пояснює рівність

$$\mathcal{L}(u, p) = \inf_{v \in V} \sup_{q \in Q} \mathcal{L}(v, q).$$

Поряд із задачею про сідлову точку сформулюємо наступну задачу про систему варіаційних рівнянь (відому під назвою *змішаної варіаційної задачі*):

$$\begin{cases} \text{задано гільбертові простори } V \text{ та } Q; \\ \text{знайти пару } \{u, p\} \in V \times Q \text{ таку, що} \\ \qquad \text{задовольняє систему рівнянь} \\ \qquad a(u, v) + b(p, v) =< l, v > \quad \forall v \in V, \\ \qquad c(p, q) - b(q, u) =< r, q > \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{3.6.34}$$

Взаємозв'язок між щойно наведеними варіаційними задачами встановлює

Теорема 3.6.1. про сідлову точку квадратичного функціоналу

Нехай виконуються наступні гіпотези:
(I) білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна і V-еліптична;
(II) білінійна форма $c(\cdot\,,\cdot\,) : Q \times Q \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна і Q -еліптична;
(III) білінійна форма $b(\cdot\,,\cdot\,) : Q \times V \to \mathbb{R}$ неперервна;
(IV) лінійні функціонали $l \in V', \lambda \in Q'$.
Тоді змішана варіаційна задача (3.6.34) еквівалентна задачі про сідлову точку (3.6.33).

Доведення. Для спрощення позначень введемо гільбертів простір $\Phi := V \times Q$ з нормою

$$\|\phi\|_\Phi := \{\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \phi := \{v, q\} \in \Phi.$$

Покажемо спочатку, що розв'язок $\psi := \{u, p\} \in \Phi$ змішаної варіаційної задачі (3.6.34) (якщо він існує!) одночасно розв'язує задачу про сідлову точку (3.6.33).

Зауважимо, що означення лагранжиану задачі (3.6.34) дозволяє записувати його значення у вигляді (розвинення за степенями параметра ϵ)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u + \epsilon v, p + \epsilon q) = \mathcal{L}(u, p) & \\ & + 2\epsilon\{a(u, v) + b(q, v) - < l, v >\} \\ & - 2\epsilon\{-b(q, u) + c(p, q) - < r, q >\} \\ & + \epsilon^2\{a(v, v) - c(q, q) + 2b(q, v)\} \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \forall \phi := \{v, q\} \in \Phi \end{aligned} \tag{3.6.35}$$

або з огляду на систему рівнянь задачі (3.6.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u + \epsilon v, p + \epsilon q) = \mathcal{L}(u, p) & \\ & + \epsilon^2\{a(v, v) - c(q, q) + 2b(q, v)\} \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \forall \phi = \{v, q\} \in \Phi. \end{aligned} \tag{3.6.36}$$

Приймаючи тепер $q = 0$ (а це допустимо!), обчислюємо, що

$$\mathcal{L}(u + \epsilon v, p) = \mathcal{L}(u, p) + \epsilon^2 a(v, v) \;\; \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V. \tag{3.6.37}$$

На основі одержаної рівності та $V-$еліптичності білінійної форми $a(\cdot\,,\cdot\,)$ приходимо до оцінки

$$\mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(u+\epsilon v,p) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V,$$

яка, по-суті, є дещо іншим записом правої із нерівностей задачі (3.6.33).

Подібним чином, за вибору $v = 0$ в (3.6.35) переконуємося також в істинності лівої із нерівностей задачі (3.6.33).

Лишається переконатися, що кожен розв'язок задачі про сідлову точку задовольняє систему рівнянь змішаної варіаційної задачі. Дійсно, якщо пара $\psi = \{u,p\}$ - це будь-який розв'язок задачі (3.6.33), то, скажімо, її ліва нерівність

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \quad \forall q \in Q$$

свідчить, що квадратичний функціонал $\mathcal{L}(u,\cdot\,) : Q \to \mathbb{R}$ досягає свого найбільшого значення на елементі $p \in Q$; отже,

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\{\mathcal{L}(u,p+\epsilon q) - \mathcal{L}(u,p)\} \quad \forall q \in Q.$$

Підставляючи в цю умову екстремуму розвинення (3.6.35) з $v = 0$, після невеличкої алгебри надамо їй вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} 0 = \lim_{\epsilon \to 0} & \frac{\mathcal{L}(u,p+\epsilon q) - \mathcal{L}(u,p)}{\epsilon} \\ & = c(p,q) - b(q,u) - < r, q > \qquad \forall q \in Q. \end{aligned} \right. \tag{3.6.38}$$

Подібними міркуваннями з $v = 0$ можна переконатись, що розв'язок $\psi = \{u,p\} \in \Phi$ задачі про сідлову точку (3.6.33) задовольняє і друге з системи рівнянь змішаної варіаційної задачі (3.6.34). □

Щойно наведена теорема показує, що ми маємо справу з двома різними формулюваннями однієї варіаційної задач. В той же час вона нічого не говорить відносно існування чи єдиності її розвязку.

Достатні умови коректності задачі (3.6.34) встановлює наступна

Теорема 3.6.2. про коректність змішаної варіаційної задачі

Нехай виконуються гіпотези попередньої теореми і $\Phi := V \times Q$ - гільбертів простір з нормою

$$\|\phi\|_\Phi := \{\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \phi := \{v,q\} \in \Phi.$$

Тоді змішана варіаційна задача (3.6.34) коректно поставлена, іншими словами, знайдеться единий елемент $\psi = \{u,p\} \in \Phi$ такий, що задовольняє систему рівнянь із (3.6.34), і крім цього

$$\|\psi\|_\Phi \leq C\{\|l\|_* + \|r\|_*\} \quad C = const > 0.$$

Доведення. Зараз ми побачимо, що за даних гіпотез досить переконатись у виконанні умов теореми Лакса-Мільграма-Вишика.

З цією метою на просторі $\Phi = V \times Q$ введемо білінійну форму $\mathcal{B}(\cdot\,,\cdot\,) : \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}$ та лінійний функціонал $\lambda \in \Phi'$ згідно правил

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\psi,\phi) &:= a(u,v) + c(p,q) \\ &\quad + b(p,v) - b(q,u) \qquad \forall \psi = \{u,p\}, \phi = \{v,q\} \in \Phi \end{aligned} \tag{3.6.39}$$

та
$$< \lambda, \phi > := < l, v > + < r, q > \qquad \forall \phi := \{v, q\} \in \Phi$$
відповідно. Тепер ми можемо подати змішану варіаційну задачу (3.6.34) у записі
$$\begin{cases} \text{знайти } \ \psi \in \Phi \ \text{ такий, що} \\ \qquad \mathcal{B}(\psi, \phi) = < \lambda, \phi > \qquad \forall \phi \in \Phi. \end{cases} \tag{3.6.40}$$

Неважко пересвідчитись, що білінійна форма $\mathcal{B}(\cdot\,,\cdot\,) : \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}$ неперервна і $\Phi-$еліптична. Дійсно, використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца,приходимо до оцінок
$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\psi, \phi)| &\leq |a(u, v)| + |c(p, q)| + |b(p, v)| + |b(q, u)| \\ &\leq \|a\|\|u\|_V\|v\|_V + \|c\|\|p\|_Q\|q\|_Q + \|b\|\|p\|_Q\|v\|_V + \|b\|\|q\|_Q\|u\|_V \\ &\leq M\{\|u\|_V\|v\|_V + \|p\|_Q\|q\|_Q + \|p\|_Q\|v\|_V + \|q\|_Q\|u\|_V\} \\ &\leq 2M\{\|u\|_V^2 + \|p\|_Q^2\}^{\frac{1}{2}}\{\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2M\|\psi\|_\Phi\|\phi\|_\Phi \qquad \forall \psi = \{u, p\}, \phi = \{v, q\} \in \Phi \end{aligned} \tag{3.6.41}$$
зі сталою $M := \max\{\|a\|, \|b\|, \|c\|\}$. Звідси
$$\|\mathcal{B}\| \leq 2 \max\{\|a\|, \|b\|, \|c\|\}$$
і, отже, $\mathcal{B}(\cdot\,,\cdot\,)$ неперервна на просторі Φ. Далі, нерівності
$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\phi, \phi) &= a(v, v) + c(q, q) \\ &\geq a_0\|v\|_V^2 + c_0\|q\|_Q^2 \\ &\geq \beta\|\phi\|_\Phi^2 \qquad \beta = \min\{a_0, c_0\} \qquad \forall \phi \in \Phi \end{aligned} \tag{3.6.42}$$
засвідчують $\Phi-$еліптичність форми $\mathcal{B}(\cdot\,,\cdot\,)$.

Нарешті,ланцюжок
$$\begin{aligned} | < \lambda, \phi > | &\leq | < l, v > | + | < r, q > | \\ &\leq \|l\|_*\|v\|_V + \|r\|_*\|q\|_Q \\ &\leq \{\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2\}^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_\Phi \qquad \forall \phi \in \Phi \end{aligned} \tag{3.6.43}$$
встановлює обмеженість лінійного функціоналу λ на просторі Φ і при цьому
$$\|\lambda\|_* \leq \{\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

□

3.7 Абстрактна задача про проекційне рівняння

Нехай V та $\mathcal{H}$ - дійсні гільбертові простори зі скалярними добутками $(\cdot\,,\cdot\,)_V$,$(\cdot\,,\cdot\,)_\mathcal{H}$ та нормами $\|\cdot\|_V$,$\|\cdot\|_\mathcal{H}$ відповідно. Розглянемо задачу
$$\begin{cases} \text{задано гільбертові простори } \ \mathcal{H} \text{ та } V, \\ \qquad \text{білінійну форму } \ b(\cdot\,,\cdot\,) : V \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \text{ та} \\ \qquad \text{лінійний функціонал } \ l : \mathcal{H} \to \mathbb{R}; \\ \text{знайти } \ u \in V \ \text{ такий, що} \\ \qquad b(u, v) = < l, v > \quad \forall v \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{3.7.44}$$

За умови, що $V \equiv \mathcal{H}$, задача (3.7.44) вироджується до абстрактної варіаційної задачі (3.3.9), яку ми аналізували раніше. В більш загальному випадку, коли $V \neq \mathcal{H}$, ми будемо називати (3.7.44) *проекційною задачею* і зрозуміло, що аналіз її розвязуваності вимагає узагальнення аргументації теоремиЛакса-Мільграма-Вишика.

Теорема 3.7.1. Нечаса
про коректність проекційної задачі

Нехай дані проекційної задачі (3.7.44) задовольняють наступні гіпотези:
(I) білінійна форма $b(\cdot\,,\cdot\,) : V \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ неперервна, іншими словами, знайдеться стала $M > 0$ така, що

$$|b(v, w)| \leq M\|v\|_V \|w\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \quad \forall w \in \mathcal{H}; \tag{3.7.45}$$

(II) знайдеться стала $\gamma > 0$ така, що

$$\sup_{0 \neq w \in \mathcal{H}} \frac{|b(v, w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \geq \gamma\|v\|_V \quad \forall v \in V; \tag{3.7.46}$$

(III)

$$\sup_{v \in \mathcal{H}} b(v, w) > 0 \quad \forall\ 0 \neq w \in \mathcal{H}. \tag{3.7.47}$$

Тоді для кожного $l \in \mathcal{H}'$ існує єдиний розв'язок $u \in V$ рівняння із (3.7.44) і при цьому

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\|l\|_*. \tag{3.7.48}$$

Доведення. З огляду на теорему про неперервну білінійну форму знайдеться лінійний оператор $A : V \to \mathcal{H}$ такий, що

$$b(v, w) = (Av, w) \quad \forall v \in V \ \ \forall w \in \mathcal{H}. \tag{3.7.49}$$

Приймаючи в цій рівності $w = Av$ і користуючись неперервністю $b(\cdot\,,\cdot\,)$, знаходимо, що

$$\|Av\|^2_{\mathcal{H}} = b(v, Av) \leq M\|v\|_V \|Av\|_{\mathcal{H}}$$

або

$$\|Av\|_{\mathcal{H}} \leq M\|v\|_V \quad \forall v \in V,$$

звідки й випливає належність $A \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$.

Тепер, використовуючи теорему Рісса про лінійний обмежений функціонал в гільбертовому просторі, знайдемо єдиний елемент $f \in \mathcal{H}$ такий, що

$$< l, w >= (f, w) \quad \forall w \in \mathcal{H};$$

тоді із врахуванням (3.7.48) рівняння проекційної задачі (3.7.44) набуде вигляду

$$(Au, w) = (f, w) \quad \forall w \in \mathcal{H} \tag{3.7.50}$$

або, що еквівалентне,

$$Au = f \quad \text{в } \mathcal{H}. \tag{3.7.51}$$

Таким чином, коректність проекційної задачі (3.7.44) приводиться до встановлення існування оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, V)$.

Зразу ж відзначимо, що з гіпотези (3.7.46) та подання (3.7.48) випливає

$$\|Av\|_{\mathcal{H}} = \sup_{0\neq w\in\mathcal{H}} \frac{|(Av,w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{0\neq w\in\mathcal{H}} \frac{|b(v,w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \geq \gamma\|v\|_V \quad \forall v\in V, \tag{3.7.52}$$

тобто, оператор A обмежений знизу і, отже, за теоремою Банаха про обернений оператор $A^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H},V)$.

Лишається показати,що оператор A визначений на всьому просторі V. З цією метою покажемо спочатку, що його область значень $\mathcal{R}(A)$ є замкненою множиною в просторі V. Дійсно, нехай послідовність Au_n фундаментальна в $\mathcal{H}$; тоді з огляду на обмеженість знизу

$$0 = \lim_{m,n\to\infty} \|Au_n - Au_m\|_{\mathcal{H}} = \lim_{m,n\to\infty} \|A(u_n - u_m)\|_{\mathcal{H}} \geq \gamma\|u_n - u_m\|_V,$$

тому послідовність u_n фундаментальна в просторі V і внаслідок його повноти знайдеться елемент $u\in V$ такий, що $u_n\to u$. Тепер, з огляду на неперервність оператора A, маємо

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = Au$$

і, отже, границя u довільної фундаментальної послідовності u_n з області значень $\mathcal{R}(A)$ теж належить цій множині. Тому $\mathcal{R}(A)$ - замкнений підпростір в просторі $\mathcal{H}$.

Нарешті, припустимо, що $\mathcal{H}\neq\mathcal{R}(A)$. Тоді внаслідок замкненості $\mathcal{R}(A)$ знайдеться ненульовий елемент $z\in\mathcal{R}(A)^\perp$ такий, що

$$(w,z) = 0 \quad \forall w\in\mathcal{R}(A)$$

або

$$(Av,z) = b(v,z) = 0 \quad \forall v\in V,$$

що суперечить припущенню (3.7.47). Таким чином, $z=0$ і, отже, оператор A є сюр'єктивним.

Повертаючись тепер до операторного рівняння (3.7.51), приходимо до висновку, що воно має єдиний розв'язок, який обчислюється згідно правила

$$u = A^{-1}f$$

і, оскільки

$$\|l\|_* = \sup_{0\neq w\in\mathcal{H}} \frac{|<l,w>|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{0\neq w\in\mathcal{H}} \frac{|(Au,w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \geq \gamma\|u\|_V,$$

то

$$\|u\|_V = \|A^{-1}f\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\gamma}\|l\|_*.$$

□

Розділ 4

Крайові та варіаційні задачі для еліптичних рівнянь

4.1 Крайові задачі для еліптичних рівнянь

Лінійний еліптичний диференціальний оператор
другого порядку, еліптичне рівняння.
Крайові умови Діріхле, Неймана та Робена.
Еліптична крайова задача.

Нехай область Ω є зв'язною обмеженою множиною точок $x = \{x_i\}_{i=1}^d$ евклідового простору $\mathbb{R}^d$ (в застосуваннях $d = 1, 2$ або 3) з неперервною за Ліпшицем межею Γ, і вектор $n = \{n_i(x)\}_{i=1}^d$ визначає одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі області Ω, $n_i := cos(n, x_i)$.

Розглянемо крайову задачу для еліптичного рівняння другого порядку наступного вигляду:

$$\left\{\begin{aligned} &\textit{задано матрицю} \quad \mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d,\ \textit{вектор} \quad \beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^d \\ &\textit{та скалярні функції}\ \ \sigma = \sigma(x),\ f = f(x),\ \kappa = \kappa(x),\ g = g(x); \\ &\textit{знайти функцію}\ \ u = u(x)\ \textit{таку, що} \\ &Lu := -\frac{\partial}{\partial x_i}\{\mu_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u\} \\ &\qquad + \beta_j\frac{\partial}{\partial x_j}u + \sigma u = f \qquad \textit{в} \quad \Omega, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad u = 0 \qquad \textit{на} \quad \Gamma_D \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_D) \geq 0, \\ &\qquad - n_i\mu_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u - \kappa u = g \qquad \textit{на} \quad \Gamma_N := \Gamma \backslash \Gamma_D. \end{aligned}\right. \tag{4.1.1}$$

Далі ми будемо припускати, що матриця $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$ коефіцієнтів при старших похідних диференціального рівняння володіє наступними властивостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji}, \\ \mu_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi_i\xi_i \quad \mu_0 = const > 0 \quad \forall \xi = \{\xi\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d \\ \quad \text{майже скрізь в} \;\; \Omega. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Тут і далі за індексами, які повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d. Вживаючи класичні позначення векторного аналізу, крайовій задачі (15.0.1) можна надати більш короткого запису

$$\begin{cases} \text{знайти функцію} \;\; u = u(x) \;\text{таку, що} \\ Lu := -\nabla.\{\mu\nabla u\} + \beta.\nabla u + \sigma u = f \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_D \subset \Gamma, \;\; mes(\Gamma_D) \geq 0, \\ \qquad - n.\mu\nabla u - \kappa u = g \qquad \text{на} \quad \Gamma_N := \Gamma \backslash \Gamma_D. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

4.2 Варіаційні формулювання крайових задач

Тут ми розглянемо стандартну техніку, яка демонструє, що крайовій задачі завжди можна поставити у відповідність ту чи іншу варіаційну задачу. Джерелом таких трансформацій слугують добре відомі з аналізу формули інтегрування частинами та належний вибір гільбертового простору, який здатний достатно повно описати структуру розглядуваної задачі. Паралельно цьому, успішне виконання цієї процедури дозволяє проаналізувати коректність одержаних варіаційних формулювань і регулярність їхніх розв'язків в залежності від даних задачі. Нарешті ми акцентуємо увагу на такому факті, що в загальному випадку варіаційні формулювання ослабляють умови гладкості на дані вихідних задач, розширюючи тим самим можливу область їхніх застосувань.

Вжитий нами підхід спочатку детально ілюструється трьома класичними модельними задачами, які відомі читачеві з курсу еліптичних рівнянь математичної фізики. Більш складні застосування можна знайти в частині III цього курсу.

4.3 Крайова задача Діріхле для рівняння Гельмгольца

Варіаційне рівняння та простір допустимих функцій.
Нерівності Гьольдера та Коші-Буняковського-Шварца.
Достатні умови регулярності даних задачі.
Обмеженість лінійного функціоналу задачі.
Обмеженість та V-еліптичність білінійної форми.
Коректність варіаційної задачі.

4.3.1 Формулювання крайової задачі

Першою із нашого списку методичних прикладів буде крайова задача вигляду:

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } \ u = u(x) \ \textit{ таку, що} \\ Lu := -\Delta u + \sigma u = f \qquad \textit{в} \quad \Omega, \\ \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad \textit{на} \quad \Gamma_D \equiv \Gamma. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Це частковий випадок крайової задачі (15.0.1) з

$$\mu_{ij} := \delta_{ij}, \quad \beta_i := 0.$$

4.3.2 Побудова варіаційної задачі Діріхле

Домножимо рівняння крайової задачі (4.3.4) на поки що довільну функцію $v = v(x)$ і результат проінтегруємо по області Ω; після інтегрування частинами доданків з похідними другого порядку ми прийдемо до наступного рівняння

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega [-\Delta u + \sigma u - f] v \, dx \\ &= \int_\Omega [\frac{\partial}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_j} v + \sigma uv - fv] \, dx - \int_\Gamma v n_j \frac{\partial}{\partial x_j} u \, d\gamma \\ &= \int_\Omega [\nabla u . \nabla v + \sigma uv - fv] \, dx - \int_\Gamma vn . \nabla u \, d\gamma. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Тепер ми вияснимо, за яких умов регулярності на підінтегральні функції будуть існувати інтеграли в (4.3.5). З огляду на нерівність Коші-Буняковського-Шварца вигляду

$$\int_\Omega fv \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \ f, v \in L^2(\Omega), \tag{4.3.6}$$

приходимо до висновку, що достатньою умовою регулярності функцій u та v є їхня належність до простору $H^1(\Omega)$. Таким чином, шуканий простір допустимих функцій V є підпростором простору Соболєва $H^1(\Omega)$,

$$V \subset H^1(\Omega).$$

Щоб остаточно встановити структуру простору допустимих функцій, зауважимо, що як розв'язок задачі u, так і довільна допустима функція v повинні задовольняти одним і тим же додатковим умовам, якщо такі існують. У випадку розглядуваної крайової задачі (4.3.4) такою додатковою умовою виступає крайова умова Діріхле: їй задовольняє розв'язок u, тому допустимі функції v зобов'язані її виконувати. Таким чином,

$$V := \{ v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \ \ \textit{на} \ \ \Gamma \}. \tag{4.3.7}$$

У зв'язку з таким визначенням простору допустимих функцій V рівняння (4.3.5) набуває остаточного вигляду

$$\int_\Omega [\nabla u . \nabla v + \sigma uv] \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall \ v \in V. \tag{4.3.8}$$

Звідси приходимо до висновку стосовно структури варіаційного формулювання крайової задачі (4.3.4).

Пропозиція 4.3.1. про варіаційне формулювання задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца

Крайова задача (4.3.4) допускає варіаційне формулювання

$$\begin{cases} \text{задано } \ \sigma \in L^\infty(\Omega) \ \ \text{та } f \in L^2(\Omega); \\ \text{знайти } \ u \in V \quad \text{такий, що} \\ \quad a(u,v) = < l, v > \qquad \forall\ v \in V, \end{cases} \tag{4.3.9}$$

з такими структурними елементами

$$\begin{cases} \quad V := \{v \in H^1(\Omega):\ v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}, \\ a(u,v) := \int\limits_\Omega [\nabla u.\, \nabla v + \sigma uv]\, dx, \\ < l, v > := \int\limits_\Omega fv\, dx \qquad \forall\ u, v \in V. \end{cases} \tag{4.3.10}$$

На цьому етапі бажано відповісти на запитання: за яких умов на дані побудована нами варіаційна задача (4.3.9) коректно поставлена? З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика нам достатно переконатись, за яких умов виконуються її гіпотези.

Перш ніж перейти до цього аналізу, ми конкретизуємо геометричну структуру простору допустимих функцій V, а саме, ми наділимо його нормою (простору $H^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \|w\|_V &:= \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \{\int\limits_\Omega [w^2 + |\nabla w|^2]\, dx\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ w \in V. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

4.3.3 Неперервність лінійного функціоналу

Ми розпочнемо з аналізу функціоналу $l : V \to \mathbb{R}$, визначеного в (4.3.10). Зрозуміло, що його можна розглядати як скалярний добуток в просторі $H := L^2(\Omega)$ заданої функції f та довільної функції $v \in V \subset H$. Ясно також, що коли права частина f рівняння Гельмгольца належить цьому простору H, то

$$\|f\|_H := \|f\|_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

і внаслідок нерівності (4.3.6) та підпорядкованості норми з простору H нормі простору V приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} | < l, v > |^2 = |\int\limits_\Omega fv\, dx|^2 &\le \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \int\limits_\Omega v^2\, dx \\ &\le \|f\|^2_H \int\limits_\Omega [v^2 + |\nabla v|^2]\, dx = \|f\|^2_H \|v\|^2_V \qquad \forall\ v \in V. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Звідси приходимо до висновку, що

$$\begin{cases} \text{лінійний функціонал } l : V \to \mathbb{R} \text{ варіаційної задачі(4.3.9)} \\ \text{є обмеженим на просторі } V, \text{ тобто, } \ l \in V', \\ \text{і при цьому його норма} \\ \qquad\qquad \|l\|_* \le \|f\|_H. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

4.3.4 Неперервність білінійної форми

Лише з педагогічних міркувань ми подамо білінійну форму $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ із (4.3.10) у вигляді наступної декомпозиції

$$a(v, w) = a_0(v, w) + a_1(v, w) \qquad \forall\ v, w \in V,$$

де

$$\left\{ \begin{aligned} & a_0(v, w) := \int_\Omega \sigma v w\, dx, \\ & a_1(v, w) := \int_\Omega \nabla v . \nabla w\, dx \quad\ \forall\ v, w \in V. \end{aligned} \right. \tag{4.3.14}$$

Спочатку ми покажемо, що обидві форми є неперервними або, що еквівалентно, обмеженими на просторі допустимих функцій V. Дійсно, наприклад, послідовне застосування нерівності Коші-Буняковського-Шварца приводить до оцінок

$$\begin{aligned} |a_1(v, w)| &= |\int_\Omega \nabla v . \nabla w\, dx| \le \int_\Omega |\nabla v . \nabla w|\, dx \le \int_\Omega |\nabla v||\nabla w|\, dx \\ &\le \{\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx\}^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|_H \|\nabla w\|_H \\ &\le \{\int_\Omega [v^2 + |\nabla v|^2]\, dx\ \ \int_\Omega [w^2 + |\nabla w|^2]\, dx\}^{\frac{1}{2}} = \|v\|_V \|w\|_V \quad\ \forall\ v, w \in V. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Отже,

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{білінійна форма } a_1(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R} \textit{ із (4.3.14)} \\ \textit{є обмеженою на просторі } V \textit{ і при цьому її норма} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \|a_1\| \le 1. \end{array} \right. \tag{4.3.16}$$

Щоб встановити подібний результат для білінійної форми $a_0(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to R$, нам знадобиться нерівність Гьольдера наступного вигляду (див., напр. Остудін, Шинкаренко [???]):

$$\|vw\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |vw|\, dx \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall\ v \in L^\infty(\Omega)\ \ \forall\ w \in L^1(\Omega), \tag{4.3.17}$$

де

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} :=\ \operatorname{ess}\ \sup_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

Тепер послідовно використовуючи (4.3.17) та нерівність Коші-Буняковського-Шварца, знаходимо, що

$$\begin{aligned} |a_0(v, w)| &= |\int_\Omega \sigma v w\, dx| \le \int_\Omega |\sigma v w|\, dx = \|\sigma v w\|_{L^1(\Omega)} \\ &\le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |vw|\, dx \\ &\le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_H \|w\|_H \\ &\le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_V \|w\|_V \quad\ \forall\ v, w \in V. \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Таким чином,

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{якщо коефіцієнт } \sigma \in L^\infty(\Omega), \textit{ то} \\ \textit{білінійна форма } a_0(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R} \textit{ із (4.3.14)} \\ \textit{є обмеженою на просторі } V \textit{ і при цьому її норма} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \|a_0\| \le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{4.3.19}$$

Нарешті, використовуючи нерівність трикутника та оцінки (4.3.15) і (4.3.18), обчислимо, що

$$\begin{aligned}|a(v,w)| &\le |a_0(v,w)| + |a_1(v,w)| \\ &\le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_H\|w\|_H + \|\nabla v\|_H\|\nabla w\|_H \\ &\le max\{1,\ \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\}\ \|v\|_V\|w\|_V \quad \forall\ v,w\in V.\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

4.3.5 V-еліптичність білінійної форми

Зовсім просто одержати оцінку такого гатунку

$$\begin{aligned}a(v,v) &:= \int_\Omega [\,|\nabla v|^2 + \sigma v^2\,]\,dx \\ &\ge \min\{1,\ \sigma_0\}\ \|v\|_V^2 \qquad \forall\ v\in V,\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

де

$$\sigma_0 := \inf_{x\in\Omega}\sigma(x).$$

Звідси приходимо до висновку, що

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{якщо коефіцієнт } \sigma \textit{ оператора Гельмгольца такий, що} \\ \qquad\qquad \sigma_0 := \inf\limits_{x\in\Omega}\sigma(x) > 0, \\ \textit{то білінійна форма } a_0(\cdot\,,\cdot\,) : V\times V \to \mathbb{R} \textit{ із (4.3.14)} \\ \textit{є } V\textit{-еліптичною і при цьому вірна оцінка} \\ \qquad\qquad a(v,v) \ge \alpha\|v\|_V^2 \qquad \forall\ v\in V \\ \textit{зі сталою} \\ \qquad\qquad \alpha := \min\{1,\ \sigma_0\} > 0. \end{array}\right. \tag{4.3.22}$$

4.3.6 Коректність варіаційної задачі

Тепер ми підсумуємо одержані нами результати у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.3.1. про коректність варіаційного формулювання задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца

Нехай щодо даних крайової задачі (4.3.4) виконуються наступні гіпотези:

(I) коефіцієнт $\sigma = \sigma(x)$ рівняння Гельмгольца такий, що

$$\sigma \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sigma(x) \ge \sigma_0 > 0 \qquad \forall x\in\Omega;$$

(II) права частина $f = f(x)$ рівняння Гельмгольца така, що

$$f \in H := L^2(\Omega).$$

Тоді відповідна варіаційна задача (4.3.9) зі структурними складниками (4.3.10) має єдиний розв'язок $u\in V$ і при цьому

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\min\{1,\ \sigma_0\}}\|f\|_H. \tag{4.3.23}$$

Доведення. За допущень (I) та (II) будуть вірними висновки (4.3.13),(4.3.22) та оцінка (4.3.20), які засвідчують, що дані варіаційної задачі (4.3.9) задовольняють умовам теореми Лакса-Мільграма-Вишика. Це й доводить правильність висновку цієї теореми. □

4.4 Крайова задача Діріхле для рівняння Пуассона

Варіаційне рівняння та простір допустимих функцій.
Нерівність Пуанкаре-Фрідріхса.
V-еліптичність білінійної форми.
Коректність варіаційної задачі.

4.4.1 Формулювання крайової задачі

Зараз ми детально розглянемо частковий випадок крайової задачі (4.3.4) з коефіцієнтом

$$\sigma = \sigma(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

За цієї умови потрібно

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти функцію } \ u = u(x) \ \text{ таку, що} \\ Lu := -\Delta u = f \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\quad u = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_D \equiv \Gamma. \end{array} \right. \tag{4.4.24}$$

4.4.2 Побудова варіаційної задачі

Цілком зрозуміло, що побудова варіаційного формулювання задачі (4.4.24) нічим не різниться від процедури, яку ми здійснили вище для задачі Діріхле з рівнянням Гельмгольца. Тому ми обмежуємось лише константацією наступного факту.

Пропозиція 4.4.1. про варіаційне формулювання задачі Діріхле
для рівняння Пуассона

Крайова задача (4.4.24) допускає варіаційне формулювання

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \ f \in L^2(\Omega); \\ \text{знайти } \ u \in V \quad \text{такий, що} \\ \quad a(u,v) =< l, v > \qquad \forall\, v \in V, \end{array} \right. \tag{4.4.25}$$

з такими структурними компонентами

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad V := H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) := \int\limits_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx, \\ < l, v > := \int\limits_\Omega f v \, dx \qquad \forall\, u, v \in V. \end{array} \right. \tag{4.4.26}$$

4.4.3 Нерівність Пуанкаре-Фрідріхса

Перш ніж розпочати аналіз розв'язуваності варіаційної задачі (4.4.24), ми звернемось до наступного фундаментального результату.

Теорема 4.4.1. про нерівність Пуанкаре-Фрідріхса.

Нехай Ω є зв'язною обмеженою областю в $\mathbb{R}^d$ і позначимо через

$$|v|_{1,\Omega} := \Big\{ \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \Big\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.4.27}$$

напівнорму з простору Соболєва $H^1(\Omega)$.

Тоді знайдеться стала $C = const > 0$, значення якої залежить лише від області Ω, така, що

$$|v|_{1,\Omega} \geq C\|v\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{4.4.28}$$

Наслідок 4.4.1. про еквівалентність норм в просторі $H^1_0(\Omega)$.

Напівнорма $|\cdot|_{1,\Omega} : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ визначає на просторі $V := H^1_0(\Omega)$ норму, яка еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_V := \|\cdot\|_{1,\Omega}$. Більше цього,

$$\sqrt{\alpha_0}\|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega} \quad \alpha_0 = const > 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{4.4.29}$$

Доведення. Права з оцінок (4.4.29) є безпосереднім переформулюванням висновку (4.3.16), якщо прийняти до уваги (4.3.14) і зауважити, що

$$|v|^2_{1,\Omega} = a_1(v,v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{4.4.30}$$

З іншого боку, з огляду на нерівність Пуанкаре-Фрідріхса

$$\begin{aligned} |v|^2_{1,\Omega} &= \tfrac{1}{2}\{|v|^2_{1,\Omega}| + |v|^2_{1,\Omega}|\} \\ &\geq \tfrac{1}{2}\{|v|^2_{1,\Omega}| + C^2|v|^2_{0,\Omega}|\} \\ &\geq \tfrac{1}{2}\min\{1,C^2\}\{|v|^2_{1,\Omega}| + |v|^2_{0,\Omega}|\} = \tfrac{1}{2}\min\{1,C^2\}\|v\|^2_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{4.4.31}$$

Звідси приходимо до оцінки (4.4.29) з

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\min\{1, C^2\}.$$

□

Зауваження 4.4.1. *В монографії Сьярле [???] можна знайти значно загальніший результат стосовно $V-$еліптичності білінійної форми $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ із (4.4.26)*

4.4.4 Коректність варіаційного формулювання задачі

Теорема 4.4.2. про коректність варіаційного формулювання задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Нехай щодо даних крайової задачі (4.4.24) виконуються наступні гіпотези:
(I) звязна область Ω обмежена в просторі $\mathbb{R}^d$ і має неперервну за Ліпшицем межу Γ;
(II) права частина $f = f(x)$ рівняння Пуассона така, що

$$f \in H := L^2(\Omega).$$

Тоді відповідна варіаційна задача (4.4.25) зі структурними компонентами (4.4.26) має єдиний розв'язок $u \in V$ і при цьому

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha_0}\|f\|_H. \tag{4.4.32}$$

Доведення. □

4.5 Крайова задача Неймана для рівняння Гельмгольца

Варіаційне рівняння та простір допустимих функцій.
Обмеженість лінійного функціоналу задачі.
Теорема про слід функції.
Коректність варіаційного формулювання задачі Неймана.
Головні та природні крайові умови для еліптичних рівнянь.

4.5.1 Формулювання крайової задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію} \;\; u = u(x) \; \textit{таку, що} \\ Lu := -\Delta u + \sigma u = f \qquad \textit{в} \quad \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} := -n.\nabla u = g \qquad \textit{на} \quad \Gamma_N \equiv \Gamma \end{cases} \tag{4.5.33}$$

4.5.2 Варіаційне формулювання задачі Неймана

Пропозиція 4.5.1. про варіаційне формулювання задачі Неймана для рівняння Гельмгольца

Крайова задача (4.5.33) допускає варіаційне формулювання

$$\begin{cases} \textit{задано} \;\; \sigma \in L^\infty(\Omega) \;,\; f \in L^2(\Omega) \;\; \textit{та} \; g \in L^2(\Gamma); \\ \textit{знайти} \;\; u \in V \quad \textit{такий, що} \\ \qquad a(u,v) = < l, v > \qquad \forall \; v \in V, \end{cases} \tag{4.5.34}$$

з такими структурними компонентами

$$\begin{cases} \qquad V := H^1(\Omega), \\ a(u,v) := \int\limits_\Omega [\nabla u.\nabla v + \sigma uv]\, dx, \\ < l, v > := \int\limits_\Omega fv\, dx + \int\limits_\Gamma gv\, d\gamma \qquad \forall \; u, v \in V. \end{cases} \tag{4.5.35}$$

Доведення. Переформулювання крайової задачі (4.5.33) у варіаційну різниться від раніше розглянутих прикладів лише трактуванням крайової умови Неймана. Дійсно, знову звертаючись до рівняння (4.3.5), зауважуємо, що тепер ми маємо можливість врахувати дану крайову умову в поверхневому інтегралі цього рівняння. В результаті одержимо наступне варіаційне рівняння

$$\int\limits_\Omega [\nabla u.\nabla v + \sigma uv]\, dx = \int\limits_\Omega fv\, dx + \int\limits_\Gamma gv\, d\gamma \qquad \forall \; v \in H^1(\Omega), \tag{4.5.36}$$

звідки й випливає задекларована в (4.5.35) структура варіаційної задачі. □

4.5.3 Властивості складових варіаційного рівняння

Властивості білінійної форми даної задачі вже аналізувались нами раніше, див. висновки (4.3.16), (4.3.19) та (4.3.22). Вони засвідчують, що форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ - неперервна і $V-$еліптична. Тому, щоб переконатись в коректності варіаційного формулювання задачі Неймана для рівняння Гельмгольца, достатно встановити лінійність та обмеженість функціоналу $l : V \to \mathbb{R}$.

Властивості лінійного функціоналу

Ми розпочнемо зі звичайних оцінок з використанням нерівності Коші-Буняковського-Шварца:

$$\begin{aligned} |< l, v >| &= |\int\limits_{\Omega} fv\,dx + \int\limits_{\Gamma} gv\,d\gamma| \\ &= |(f,v)_{L^2(\Omega)} + (g,v)_{L^2(\Gamma)}| \\ &\leq |(f,v)_{L^2(\Omega)}| + |(g,v)_{L^2(\Gamma)}| \\ &\leq \|f\|_H \|v\|_V + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \qquad \forall\ v \in V. \end{aligned} \tag{4.5.37}$$

Із огляду на структуру останньої нерівності нам залишилось знайти належну оцінку множнику $\|v\|_{L^2(\Gamma)}$. Для цього нам знадобиться

Теорема 4.5.1. про слід функції із $H^1(\Omega)$
на межі області Ω

Нехай в просторі $\mathbb{R}^d$ задано обмежену звязну область Ω, яка має неперервну за Ліпшицем межу Γ.

Тоді знайдеться стала $C = const > 0$ така, що

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\ v \in H^1(\Omega). \tag{4.5.38}$$

Доведення. див. наприклад [???]. □

4.5.4 Коректність варіаційної задачі Неймана

Теорема 4.5.2. про коректність варіаційного формулювання
задачі Неймана для рівняння Гельмгольца.

Нехай щодо даних крайової задачі (4.5.33) виконуються наступні гіпотези:
(I) звязна область Ω обмежена в просторі $\mathbb{R}^d$ і має неперервну за Ліпшицем межу Γ;
(II) права частина $f = f(x)$ рівняння Пуассона така, що

$$f \in H := L^2(\Omega).$$

(III) права частина $g = g(x)$ крайової умови Неймана така, що

$$g \in H := L^2(\Gamma).$$

Тоді відповідна варіаційна задача (4.5.34) зі структурними компонентами (4.5.35) має єдиний розв'язок $u \in V$ і при цьому

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha_0}\{\|f\|_H + \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\}. \tag{4.5.39}$$

Доведення. □

Вправа 4.5.1.

$$\begin{aligned}|\Omega| &:= \int\limits_{\Omega} dx\,dy \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i).\end{aligned} \tag{4.5.40}$$

4.6 Крайова задача для рівняння адвекції-дифузії

4.7 Змішана варіаційна задача

4.8 Двоїста варіаційна задача

4.9 Висновки і заключні зауваження

Розділ 5

Інтерполювання на трикутниках

Особливістю побудови інтерполяційних поліномів на трикутниках є унікальна можливість такого вибору системи вузлів інтерполювання, яка забезпечує вживання зручної процедури відшукання повного полінома від двох незалежних змінних x та y наперед заданого порядку $m \geq 0$.

Справді, поліном m-го порядку

$$p_m(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + ... + a_{1m-1}xy^{m-1} + a_{0m}y^m$$

має $N = (m + 1)(m + 2)/2$ коефіцієнтів a_{ij}. Якщо власне цим поліномом ми намагаємось інтерполювати функцію $f(x, y)$ на деякому трикутнику $K \subset R^2$, то систему із N вузлів інтерполювання можна вибрати наступним чином.

Розділимо кожну із сторін $S_i,\ i = 1, 2, 3$, трикутника K на m рівних частин і з'єднаємо одержані точки поділу відрізками, паралельними сторонам, так, щоб утворилось N^2 подібних трикутників, див. рис.???. Вершини усіх цих трикутників і виберемо за вузли інтерполювання.[1]

Позначимо через $P_m(K)$ простір всеможливих поліномів m-го порядку, визначених на трикутнику K.Очевидно. що розмірність цього простору

$$dim\ P_m(K) = N = (m + 1)(m + 2)/2$$

і система одночленів

$$x^k y^n, \quad k, n = 0, ..., m, \quad k + n \leq m,$$

утворює один із його базисів. На жаль, цей базис незручний для застосувань в контексті інтерполювання. Як ми побачимо нижче, ідеальним інструментом для опису *"інтерполяційних базисів"* буде слугувати система *барицентричних координат на трикутнику.* Ця система *локальних координат на трикутнику* уніфікує описи інтерполяційних базисів незалежно від геометричних розмірів та форми і навіть наявності викривлених сторін трикутника.

5.1 Барицентричні координати на трикутнику

[1] Наділимо точки поділу кожної сторони трикутника номерами від 0 до m. Тоді з'являється природна (і зручна для застосувань) нумерація вузлів інтерполювання за допомогою трійки індексів $(i, j, k),\ i, j, k = 0, ...m,\ i + j + k = m$.

Нехай трикутник K утворено вершинами $A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, які занумеровано в порядку їхнього обходу проти годинникової стрілки. Сторону трикутника, яка лежить навпроти вершини A_i , будемо позначати символом S_i .

Введемо до розгляду на цьому трикутнику набір сталих

$$\begin{cases} a_i := x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i := y_j - y_m, \\ c_i := -(x_j - x_m), \quad i, j, m = 1, 2, 3, \ i \to j \to m \to i, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

та лінійних функцій

$$L_i(x, y) := \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2|K|} \qquad \forall (x, y) \in K, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.1.2}$$

Сукупність функцій $\{L_i(x, y)\}_{i=1}^{3}$ будемо називати системою *барицентричних координат* на трикутнику K.

Вправа 5.1.1. *Перевірте правильність тотожностей*

$$\begin{cases} 1 = \sum\limits_{i=1}^{3} L_i, \\ x = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i L_i, \\ y = \sum\limits_{i=1}^{3} y_i L_i \qquad \forall A = (x, y) \in K. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Вправа 5.1.2. *В площині змінних (α, β) розглянемо трикутник K_0 з вершинами $A_1^0 := (1, 0)$, $A_2^0 := (0, 1)$ та $A_3^0 := (0, 0)$.*

Переконайтесь, що

(!) система барицентричних координат цього трикутника визначається поліномами

$$\begin{cases} L_1 := \alpha, \\ L_2 := \beta, \\ L_3 := 1 - \alpha - \beta; \end{cases} \tag{5.1.4}$$

(!!) афінне перетворення

$$\begin{cases} x(\alpha, \beta) := \sum\limits_{i=1}^{3} x(A_i) L_i(\alpha, \beta), \\ y(\alpha, \beta) := \sum\limits_{i=1}^{3} y(A_i) L_i(\alpha, \beta) \qquad \forall (\alpha, \beta) \in K_0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

визначає бієктивне відображення трикутника K_0 на довільний трикутник K з вершинами $A_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, що дозволяє інтерпретувати змінні (α, β)як нові (локальні) координати на трикутнику K;

(!!!) якобіан переходу J від координат (x, y) до координат (α, β) на трикутнику K обчислюється згідно правила

$$J = 2|K| = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}, \tag{5.1.6}$$

де $|K|$ - площа трикутника K.

5.2 Інтерполяційні поліноми з простору $P_1(K)$

• Лема про інтерполяційний базис.

Лемма 5.2.1. про інтерполяційний базис в $P_1(K)$

Система барицентричних координат $\{L_i\}_{i=1}^3$ утворює інтерполяційний базис Лагранжа з вузлами $\{A_i\}_{i=1}^3$ в просторі поліномів $P_1(K)$. Іншими словами, система функцій $\{L_i\}_{i=1}^3$ лінійно незалежна в просторі (K) і при цьому

$$L_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{5.2.1}$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Доведення. □

Вправа 5.2.1. *Доведіть, що система барицентричних координат $\{L_i\}_{i=1}^3$ лінійно незалежна в просторі $L^2(K)$.*
Орієнтир: Обчисліть матрицю Грама G з коефіцієнтами

$$G_{ij} := \int_K L_i L_j \, dxdy \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{5.2.2}$$

• Інтерполяційний поліном Лагранжа.

5.3 Апріорні оцінки похибки інтерполювання елементами з простору $P_1(K)$

5.3.1 Оцінки похибки інтерполювання та її градієнта в нормі простору $C(K)$

Теорема 5.3.1. про апріорні оцінки похибки інтерполювання на трикутнику в просторі $C(K)$.

Нехай трикутник K утворюють вершини $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, та

$$f_K(x, y) := \sum_{i=1}^{3} f(A_i) L_i(x, y) \in P_1(K) \tag{5.3.1}$$

є інтерполяційним поліномом Лагранжа першого порядку для заданої функції $f \in C^2(K)$.

Тоді похибка інтерполювання

$$e(x, y) := f(x, y) - f_K(x, y) \quad \forall (x, y) \in K \tag{5.3.2}$$

допускає наступні апріорні оцінки

$$\|e\|_{\infty,K} \le h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \tag{5.3.3}$$

та

$$\|\nabla e\|_{\infty,K} \le \sqrt{2} \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \ . \tag{5.3.4}$$

Доведення. Позначимо через $A = (x, y)$ довільну точку трикутника K і розгорнемо значення функції f за формулою Тейлора в околі цієї точки; тоді, наприклад,

$$f(A_i) = f(A) + (x_i - x)\frac{\partial}{\partial x}f(A) + (y_i - y)\frac{\partial}{\partial y}f(A) + R_i(A) \tag{5.3.5}$$

Тут функція

$$\begin{aligned} R_i(A) &= R_i(x, y) \\ &:= \tfrac{1}{2}(x_i - x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(A_i^*) + (x_i - x)(y_i - y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(A_i^*) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(y_i - y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(A_i^*) \qquad \forall A = (x, y) \in K \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

визначає залишковий член формули Тейлора і точка $A_i^* = (x_i^*, y_i^*)$ лежить на відрізку, кінцями якого служать точки $A_i = (x_i, y_i)$ та $A = (x, y)$.

Вправа 5.3.1. *Доведіть, що*

$$\sum_{i=1}^{3}[(x_i - x)\frac{\partial}{\partial x}f(A) + (y_i - y)\frac{\partial}{\partial y}f(A)]L_i(A) = 0 \quad \forall A = (x, y) \in K \ \square \tag{5.3.7}$$

Підставимо тепер розвинення (5.3.5) в інтерполяційний поліном (5.3.1) і скористаємось тотожністю (5.3.7) та

$$\sum_{i=1}^{3} L_i(A) = 1 \quad \forall A = (x, y) \in K.$$

В результаті нескладної алгебри одержимо, що

$$f_K(A) = f(A) + \sum_{i=1}^{3} R_i(A)L_i(A) \quad \forall A = (x, y) \in K \tag{5.3.8}$$

або

$$e(A) = -\sum_{i=1}^{3} R_i(A)L_i(A) \quad \forall A = (x, y) \in K. \tag{5.3.9}$$

Нарешті, з огляду на (5.3.7) безпосередніми обчисленнями переконуємось, що

$$\nabla e(A) = -\sum_{i=1}^{3} R_i(A)\nabla L_i(A) \quad \forall A = (x, y) \in K. \tag{5.3.10}$$

Тепер неважко знайти оцінки залишковим членам формули Тейлора. Дійсно,

$$\begin{aligned} |R_i(x, y)| &= |\tfrac{1}{2}(x_i - x)^2 \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(A_i^*) + (x_i - x)(y_i - y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(A_i^*) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(y_i - y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(A_i^*)| \\ &\le \{\tfrac{1}{2}|x_i - x|^2 + |x_i - x||y_i - y| \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}|y_i - y|^2\} \max_{|\alpha|=2} |D^\alpha f(A_i^*)| \\ &\le \{|x_i - x|^2 + |y_i - y|^2\} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \\ &\le h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \qquad \forall A = (x, y) \in K. \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Далі, наприклад, з використанням (5.3.9) та (5.3.11) одержимо, що

$$|e(x,y)| \le \sum_{i=1}^{3} |R_i(x,y)| L_i(x,y) \le h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \tag{5.3.12}$$

і, подібним чином, за допомогою (5.3.10) та нерівності Коші

$$\begin{aligned} |\nabla e(x,y)|^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i(x,y) \frac{b_i}{2|K|} \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i(x,y) \frac{c_i}{2|K|} \right\}^2 \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i^2(x,y) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i^2 + c_i^2}{(2|K|)^2} \right\} \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i^2(x,y) \right\} \left\{ \frac{1}{2|K|} \sum_{i=1}^{3} |S_i| \right\}^2 \\ &\le 2 \left\{ \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \right\}^2 \qquad \forall (x,y) \in K. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Звідси знаходимо бажані оцінки (5.3.3) та (5.3.4). □

Вправа 5.3.2. *Покажіть, що*

$$\varphi(x,y) := \sum_{i=1}^{3} \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} \le 2h_k^2 \quad \forall (x,y) \in K. \tag{5.3.14}$$

Орієнтир*: Знайдіть точки екстремуму функції $\varphi(x,y)$ K* □

Побудовані в щойно доведеній теоремі оцінки похибок інтерполювання (5.3.3) та (5.3.4) дозволяють зробити важливі висновки. Спочатку відзначимо, що величини похибок $f - f_K$ та $\nabla(f - f_K)$ залежать від других похідних функції f. Найбільша із цих похідних визначає "крутизну" поверхні, яка подається графіком функції $f(x,y)$. Таким чином, похибка $f - f_K$ є відхиленням цієї поверхні від площини, яка описується лінійною функцією $f_K(x,y)$, і становить величину порядку $O(h_K^2)$.

На додаток до цього оцінка (5.3.4) градієнта похибки $\nabla(f - f_K)$ показує, що його величина обернено пропорційно залежить від радіуса ρ_K вписаного в трикутник K кола. З огляду на те, що

$$\rho_K \simeq h_K,$$

приходимо до висновку, що, загалом, часткові похідні першого порядку від інтерполянта апроксимують відповідні похідні функції f на порядок гірше від значень цієї функції. Іншими словами, *кожне диференціювання інтерполяційного полінома на порядок понижує точність апроксимації відповідної характеристики інтерпольованої функції.*

Більше цього, в дуже витягнутих трикутниках $h_K \to 0$, тому на таких трикутниках градієнт похибки інтерполювання може досягати як завгодно великих значень. Щоб уникнути наведеного недоліку інтерполювання, ми далі будемо припускати, що розглядувана нами триангуляція $\mathcal{T}_h$ задовольняє наступній *умові регулярності*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{існує додатна стала} \quad \beta = const > 0, \\ \text{значення якої не залежить від триангуляції } \mathcal{T}_h, \\ \text{така, що} \\ \qquad\qquad \dfrac{\rho_K}{h_K} \ge \beta \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right. \tag{5.3.15}$$

Ця умова означає, що трикутники $K \in \mathcal{T}_h$ не можуть бути як завгодно тонкими або, що еквівалентно, кути цих трикутників не можуть бути як завгодно малими. Отже стала $\beta > 0$ є мірою найменшого допустимого кута в довільному трикутнику K триангуляції $\mathcal{T}_h$.

5.3.2 Оцінки похибки інтерполювання та її градієнта в нормі простору $H^m(K),\ m = 0, 1$

Теорема 5.3.2. про апріорні оцінки похибки інтерполювання на трикутнику в просторах $H^m(K), m = 0, 1$.

Нехай трикутник K утворюють вершини $A_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3,$ та

$$f_K(x, y) := \sum_{i=1}^{3} f(A_i) L_i(x, y) \in P_1(K) \tag{5.3.16}$$

є інтерполяційним поліномом Лагранжа першого порядку для заданої функції $f \in H^2(K)$.

Тоді похибка інтерполювання

$$e(x, y) := f(x, y) - f_K(x, y) \quad \forall (x, y) \in K \tag{5.3.17}$$

допускає наступні апріорні оцінки

$$\|e\|_{0,K} \le h_K^2 |f|_{2,K} \tag{5.3.18}$$

та

$$|e|_{1,K} \equiv \|\nabla e\|_{0,K} \le h_K^2 |f|_{2,K}\ . \tag{5.3.19}$$

Доведення. Беручи за основу подання похибки інтерполювання виразом (5.3.9), знайдемо, що

$$\begin{aligned}
\|e\|_{0,K}^2 := \int_K e^2(x, y)\, dxdy &= \int_K \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i(x, y) L_i(x, y) \right\}^2 dxdy \\
&\le \int_K \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i^2(x, y) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{3} L_i^2(x, y) \right\} dxdy \\
&\le \int_K \left\{ \sum_{i=1}^{3} R_i^2(x, y) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{3} L_i(x, y) \right\}^2 dxdy \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_K R_i^2(x, y)\, dxdy
\end{aligned}$$

та з використанням (5.3.11)

□

5.4 Інтерполяційні поліноми з простору $P_2(K)$

5.4.1 Вузли інтерполювання та інтерполяційний базис в $P_2(K)$

Лемма 5.4.1. про інтерполяційний базис в $P_2(K)$

Нехай вузлами інтерполювання на трикутнику K слугують його вершини $\{A_i\}_{i=1}^3$ та середини його сторін $\{B_i\}_{i=1}^3$.[2]

Тоді сукупність поліномів

$$\begin{aligned} &v_i := (2L_i - 1)L_i, \\ &s_i := 4L_iL_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad i \to j \to m \to i. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

формує інтерполяційний базис простору $P_2(K)$ з властивостями

$$\begin{aligned} &v_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad v_i(B_j) = 0, \\ &s_i(A_j) = 0, \qquad s_i(B_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Доведення. □

5.4.2 Квадратичний інтерполяційний поліном Лагранжа на трикутнику

$$f_K := \sum_{i=1}^{3} \{f(A_i)v_i + f(B_i)s_i\} \in P_2(K) \tag{5.4.3}$$

• Оцінки похибки інтерполювання.

5.4.3 Криволінійні скінченні елементи

$$\begin{cases} x|_K := \sum\limits_{i=1}^{3} \{x(A_i)v_i + x(B_i)s_i\}, \\ y|_K := \sum\limits_{i=1}^{3} \{y(A_i)v_i + y(B_i)s_i\} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

Неявно задана апроксимація на трикутнику з криволінійними сторонами.

5.5 Інтерполяційні поліноми з простору $P_3(K)$

5.5.1 Інтерполяційний поліном Лагранжа

Лемма 5.5.1. про інтерполяційний базис Лагранжа в $P_3(K)$

Нехай вузлами інтерполювання на трикутнику K слугують його вершини $\{A_i\}_{i=1}^3$, а також точки рівномірного поділу його сторін $\{B_i\}_{i=1}^3$, $\{C_i\}_{i=1}^3$ та центр ваги D_0.

[2] Щоб не вводити вузлів інтерполювання $\{B_i\}$ на межі трикутника K, як альтернативний вибір можна розглянути внутрішній вузол, скажімо, центр ваги трикутника D_0 з потрійним призначенням: він повинен слугувати вузлом інтерполювання як значення функції, так і її градієнта. Таким чином ми прийдемо до інтерполяційних поліномів Ерміта.

Тоді сукупність поліномів

$$
\begin{aligned}
&v_i := \tfrac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2),\\
&w_i := \tfrac{9}{2}L_i(3L_i-1)L_j,\\
&z_i := \tfrac{9}{2}L_i(3L_j-1)L_j, \quad i=1,2,3, \quad i\to j\to m\to i,\\
&b_K := 27L_1L_2L_3
\end{aligned}
\tag{5.5.1}
$$

формує інтерполяційний базис простору $P_3(K)$ з властивостями

$$
\begin{aligned}
&v_i(A_j)=\delta_{ij}, \quad v_i(B_j)=0, \quad v_i(C_j)=0, \quad v_i(D_0)=0,\\
&w_i(A_j)=0, \quad w_i(B_j)=\delta_{ij}, \quad w_i(C_j)=0, \quad w_i(D_0)=0,\\
&z_i(A_j)=0, \quad z_i(B_j)=0, \quad z_i(C_j)=\delta_{ij}, \quad z_i(D_0)=0,\\
&b_K(A_j)=0, \quad b_K(B_j)=0, \quad b_K(C_j)=0, \quad b_K(D_0)=1, \qquad i,j=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{5.5.2}
$$

Внутрішній вузол інтерполювання та
відповідна йому базисна бабл-функція.

Оцінки похибки інтерполювання.

5.5.2 Інтерполяційний поліном Ерміта-Зламала

особливості його системи вузлів інтерполювання,
функції інтерполяційного базису.

Лемма 5.5.2. про інтерполяційний базис Ерміта-Зламала в $P_3(K)$

Поліноми

$$
\begin{aligned}
&b_K := 27L_1L_2L_3,\\
&v_i := (3-2L_i)L_i^2 - 7b_K,\\
&p_i := (c_mL_j - c_jL_m)L_i^2 - (c_j-c_m)b_K,\\
&q_i := -(b_mL_j - b_jL_m)L_i^2 - (b_j-b_m)b_K, \quad i=1,2,3,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i\to j\to m\to i.
\end{aligned}
\tag{5.5.3}
$$

утворюють базис простору поліномів $P_3(K)$ такий, що

$$
\begin{aligned}
&b_K(D_0)=1,\ b_K(A_j)=0,\ \nabla b_K(A_j)=0,\\
&v_i(D_0)=0,\ v_i(A_j)=\delta_{ij},\ \nabla v_i(A_j)=0,\\
&p_i(D_0)=0,\ p_i(A_j)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial x}p_i(A_j)=\delta_{ij},\ \ \frac{\partial}{\partial y}p_i(A_j)=0,\\
&q_i(D_0)=0,\ q_i(A_j)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial x}q_i(A_j)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial y}q_i(A_j)=\delta_{ij},\\
&i,j=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{5.5.4}
$$

- Єдиність визначення полінома Ерміта-Зламала.

Теорема 5.5.1. про єдиність полінома Ерміта-Зламала

Довільний поліном $f \in P_3(K)$ єдиним чином визначається сукупністю своїх значень

$$\begin{aligned} &f(D_0), \\ &f(A_i), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(A_i), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(A_i), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

які дозволяють подати його в записі

$$\begin{aligned} f(x, y) := &\sum_{i=1}^{3} \{ f(A_i) v_i(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(A_i) p_i(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f(A_i) q_i(x, y) \} \\ &+ f(D_0) b_K(x, y) \qquad \forall (x, y) \in K \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Доведення. □

5.6 Апріорні оцінки похибки інтерполювання на трикутнику

Теорема 5.6.1. про оцінки похибок інтерполювання Лагранжа на трикутнику

Нехай трикутник K є довільним елементом регулярної триангуляції $\mathcal{T}_h = \{K\}$. Припустимо, що функція $u \in H^{n+1}(K)$ і нехай u_K буде інтерполяційним поліномом Лагранжа порядку n із системою вузлів $A_i \in \bar{K}$, $i = 1, \ldots, n$, тобто

$$u_K(A_i) := u(A_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тоді знайдеться додатня стала C, значення якої не залежить від від u, h_K і K, така, що

$$\| u - u_K \|_{m,K} \le C h^{n+1-m} \| u \|_{n+1,K}, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Розділ 6

Крайові та варіаційні задачі для еліптичних рівнянь

6.1 Крайові задачі для еліптичних рівнянь

Лінійний еліптичний диференціальний оператор
другого порядку, еліптичне рівняння.
Крайові умови Діріхле, Неймана та Робена.
Еліптична крайова задача.

Нехай область Ω є зв'язною обмеженою множиною точок $x = \{x_i\}_{i=1}^d$ евклідового простору $\mathbb{R}^d$ (в застосуваннях $d = 1, 2$ або 3) з неперервною за Ліпшицем межею Γ, і вектор $n = \{n_i(x)\}_{i=1}^d$ визначає одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі області Ω, $n_i := cos(n, x_i)$.

Розглянемо крайову задачу для еліптичного рівняння другого порядку наступного вигляду:

$$\begin{cases} \text{задано матрицю} \quad \mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d, \ \text{вектор} \quad \beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^d \\ \text{та скалярні функції} \ \sigma = \sigma(x), \ f = f(x), \ \kappa = \kappa(x), \ g = g(x); \\ \text{знайти функцію} \ u = u(x) \ \text{таку, що} \\ Lu := -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\{\mu_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}u\} \\ \qquad + \beta_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}u + \sigma u = f \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_D \subset \Gamma, \ mes(\Gamma_D) \geq 0, \\ \quad - n_i \mu_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_j}u - \kappa u = g \qquad \text{на} \quad \Gamma_N := \Gamma \backslash \Gamma_D. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Далі ми будемо припускати, що матриця $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$ коефіцієнтів при старших похідних диференціального рівняння володіє наступними властивостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji}, \\ \mu_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi_i\xi_i \quad \mu_0 = const > 0 \quad \forall \xi = \{\xi\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d \\ \quad \text{майже скрізь в} \ \ \Omega. \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Тут і далі за індексами, які повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d. Вживаючи класичні позначення векторного аналізу, крайовій задачі (15.0.1) можна надати більш короткого запису

$$\begin{cases} \text{знайти функцію} \ \ u = u(x) \ \text{таку, що} \\ Lu := -\nabla . \{\mu\nabla u\} + \beta . \nabla u + \sigma u = f \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_D \subset \Gamma, \ mes(\Gamma_D) \geq 0, \\ \qquad - n . \mu\nabla u - \kappa u = g \qquad \text{на} \quad \Gamma_N := \Gamma \backslash \Gamma_D. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

6.2 Абстрактні варіаційні задачі

6.2.1 Задача про варіаційне рівняння

Простір допустимих функцій, варіаційне рівняння
білінійна форма та її властивості:
неперервність (обмеженість) та V-еліптичність.
Абстрактна варіаційна задача.
Теорема Лакса-Мільграма-Вишика про достатні умови
коректності абстрактної варіаційної задачі.
Енергетична норма, її еквівалентність нормі
простору допустимих функцій.

Крайові задачі для еліптичних рівнянь допускають наступне варіаційне формулювання

$$\begin{cases} \text{задано гільбертів простір} \ \ V, \\ \qquad \text{білінійну форму} \ \ a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R} \ \text{та} \\ \qquad \text{лінійний функціонал} \ \ l : V \to \mathbb{R}; \\ \text{знайти} \ \ u \in V \ \ \text{такий, що} \\ \qquad a(u, v) =< l, v > \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Наступна теорема подає достатні умови коректності варіаційної задачі (6.2.4).

Теорема 6.2.1. Лакса-Мільграма-Вишика про варіаційне рівняння

Нехай виконуються наступні гіпотези:
(I) білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ неперервна, іншими словами, знайдеться стала $M > 0$ така, що

$$|a(v, w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v, w \in V; \tag{6.2.5}$$

(II) білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ є V-еліптичною, тобто, знайдеться стала $\alpha > 0$ така, що

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V; \tag{6.2.6}$$

(III) лінійний функціонал неперервний на Q, іншими словами, $l \in V'$.

Тоді існує единий розв'язок $u \in V$ рівняння із (6.2.4) і при цьому

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|l\|_*. \tag{6.2.7}$$

Доведення. З доведенням цього важливого результату можна ознайомитись у всіх курсах, які присвячені аналізу варіаційних задач, див.,наприклад, Шинкаренко[???].

Тут ми обмежимось лише встановленням неперервної залежності розв'язку u варіаційної задачі від її даних. Дійсно, підставляючи $v = u$ в рівняння задачі (6.2.4), скористаємось $V-$еліптичністю її білінійної форми та неперервністю лінійного функціоналу. В результаті знайдемо нерівності

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) =< l, u >\leq \|l\|_*\|u\|_V.$$

Скоротивши тепер спільний множник, приходимо до оцінки (6.2.7). □

6.2.2 Задача мінімізаціїї квадратичного функціоналу

Симетрична білінійна форма.
Формулювання задачі мінімізації,
її еквівалентність абстрактній варіаційній задачі. Коректність задачі мінімізації.

Зараз ми розглянемо частковий випадок варіаційної задачі (6.2.4), коли її білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ є симетричною, іншими словами

$$a(w,v) = a(v,w) \quad \forall v,w \in V. \tag{6.2.8}$$

Спочатку нагадаємо важливий результат.

Теорема 6.2.2. про енергетичну норму ,
породжену білінійною формою *Нехай білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ володіє властивостями симетрії, неперервності та V -еліптичності.*

Тоді будуть вірними наступні твердження.

(I) Білінійна форма $a(\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ визначає на просторі V скалярний добуток, який породжує енергетичну норму

$$|v|_V = a^{\frac{1}{2}}(v,v) \quad \forall v \in V. \tag{6.2.9}$$

(II) Енергетична норма $|\cdot|_V$ еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_V$ простору V, причому

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq |v|_V^2 \leq \|a\|\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \tag{6.2.10}$$

Вправа 6.2.1. *Доведіть теорему про енергетичну норму.*

Вправа 6.2.2. *Скористайтесь теоремою Рісса про структуру лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі (див., наприклад, Остудін, Шинкаренко [???]) і доведіть теорему Лакса-Мільграма-Вишика за додаткового припущення (6.2.8).*

Тепер ми покажемо, що симетрія білінійної форми варіаційної задачі (6.2.4) дозволяє розглядати її з дещо інших позицій, пов'язаних в механіці і фізиці із законами збереження енергії, імпульсу тощо.

Теорема 6.2.3. Міхліна про мінімум квадратичного функціоналу

Нехай на додаток до умов теореми Лакса-Мільграма-Вишика білінійна форма $a(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$ *володіє властивістю симетрії(6.2.8).*

Тоді варіаційна задача (6.2.4) еквівалентна наступній задачі мімімізації квадратичного функціоналу

$$\begin{cases} \textit{задано квадратичний функціонал} \\ \qquad F(v) := a(v,v) - 2 < l, v > \quad \forall v \in V, \\ \textit{знайти } \ u\in V \quad \textit{такий, що} \\ \qquad F(u) \le F(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{6.2.11}$$

і при цьому

$$\min_{v\in V} F(v) = \inf_{v\in V} F(v) = -a(u,u) = -|v|_V^2. \tag{6.2.12}$$

Вправа 6.2.3. *Скориставшись нерівністю*

$$F(u) \le F(u+\varepsilon v) \quad \forall \varepsilon\in\mathbb{R} \quad \forall v\in V,$$

(I) доведіть теорему Міхліна;
(II) покажіть, що

$$F(v) = |v-u|_V^2 - |u|_V^2 \quad \forall v\in V.$$

Доведення.

6.2.3 Задача про сідлову точку

Тут ми розглянемо ще один спеціальний клас варіаційних задач (відомий під назвою *змішаних варіаційних задач*):

$$\begin{cases} \textit{задано гільбертові простори } \ V \ \textit{та} \ Q; \\ \textit{знайти пару } \ \{u,p\}\in V\times Q \ \textit{ таку, що} \\ \qquad \textit{задовольняє систему рівнянь} \\ \qquad a(u,v) + b(p,v) =< l, v > \quad \forall v\in V, \\ \qquad c(p,q) - b(q,u) =< \lambda, q > \quad \forall q\in Q. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

Теорема 6.2.4. про сідлову точку квадратичного функціоналу

Нехай виконуються наступні гіпотези:
(I) білінійна форма $a(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$ *симетрична, неперервна і V-еліптична;*
(II) білінійна форма $(\cdot,\cdot): Q\times Q\to\mathbb{R}$ *симетрична, неперервна і Q -еліптична;*
(III) білінійна форма $b(\cdot,\cdot): Q\times V\to\mathbb{R}$ *неперервна;*
(IV) лінійні функціонали $l\in V', \lambda\in Q'$.

Тоді варіаційна задача (6.2.13) еквівалентна наступній задачі про сідлову точку квадратичного функціоналу

$$\begin{cases} \textit{задано квадратичний функціонал} \\ \qquad \mathcal{L}(v,q) := a(v,v) - c(q,q) \\ \qquad\qquad - 2\{< l, v > + < \lambda, q > - b(q,v)\} \quad \forall v\in V \quad \forall q\in Q, \\ \textit{знайти пару } \ \{u,p\}\in V\times Q \quad \textit{таку, що} \\ \qquad \mathcal{L}(u,q) \le \mathcal{L}(u,p) \le \mathcal{L}(v,p) \quad \forall \{v,q\}\in V\times Q. \end{cases} \tag{6.2.14}$$

Походження назви задачі (6.2.14) пояснює рівність

$$\mathcal{L}(u,p) = \inf_{v \in V} \sup_{q \in Q} \mathcal{L}(v,q).$$

Вправа 6.2.4. *Доведіть теорему про сідлову точку.*

Доведення. Покажемо спочатку, що розв'язок задачі про сідлову точку (6.2.14) (якщо він існує!) одночасно розв'язує систему рівнянь задачі (6.2.13).

Дійсно, якщо пара $\{u,p\}$ - це розв'язок задачі (6.2.14), то ліва нерівність

$$\mathcal{L}(u,q) \le \mathcal{L}(u,p) \quad \forall q \in Q$$

після очевидних спрощень на основі подання (6.2.13) приводить до нерівності

$$b(p-q,u) \le 0 \quad \forall q \in Q$$

або, що еквівалентно,

$$b(q,u) \le 0 \quad \forall q \in Q.$$

Замінивши в останній нерівності q на $-q$, знаходимо

$$b(q,u) \ge 0 \quad \forall q \in Q,$$

що разом із попередньою оцінкою приводить нас до другого з рівнянь задачі (6.2.13).

Далі, права із нерівностей задачі (6.2.14) після заміни

$$v := u + \epsilon w \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \ \ \forall w \in V$$

та нескладних обчислень приводить до нерівності

$$0 \le 2\epsilon\{a(u,w) - b(p,w) - < l, w >\} + \epsilon^2 a(w,w) \quad \forall \epsilon \quad \forall w \in V, \tag{6.2.15}$$

звідки випливає (див. аргументацію в доведенні теореми Міхліна), що розглядувана пара $\{u,p\}$ задовольняє і перше із рівнянь задачі (6.2.13).

$\square$

Література

Г.А. Шинкаренко. *Проекційно-сіткові схеми розв'язування початково-крайових задач.* -Київ: НМКВО, 1991. -88 с.

Я.Г. Савула. *Метод скінченних елементів.* -Київ: НМКВО, 1993. -98 с.

Б.А. Остудін, Г.А. Шинкаренко. *Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці.* -Львів: Світ поліграфії,1998. -200 с.

Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко. *Метод скінченних елементів.* -Львів: Вища школа, 1976. -80 с.

Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.Н. Вовк. *Некоторые приложения метода конечных элементов.* -Львів: Вища школа, 1981. - 86 с.

И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. *Решение вариационных неравенств в механике.* -Москва: Мир, 1986. -270 с.

Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. *Приближенные методы математической физики.* -Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. -700 с.

А. Джордж, Дж. Лю. *Численное решение больших разреженных систем уравнений.* -Москва: Мир, 1984. -333 с.

Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. *Неравенства в механике и физике.* -Москва: Наука, 1980. -383 с.

О. Зенкевич. *Метод конечных элементов в технике.* -Москва: Мир, 1975. -541 с.

Н.Н. Калиткин. *Численные методы.* -Москва: Наука, 1978. -512 с.

Л. Коллатц. *Функциональный ананлиз и вычислительная математика.* -Москва: Мир, 1969. -448 с.

Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* -Москва: Мир, 1971. -371 с.

О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики.* -Москва: Наука, 1973. -407 с.

В.Г. Литвинов. *Движение нелинейно-вязкой жидкости.* -Москва: Наука, 1982. -376 с.

В.Г. Литвинов. *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.* -Москва: Наука, 1987. -360 с.

Г.И. Марчук. *Методы вычислительной математики.*-Москва: Наука, 1989. -608 с.

Г.И. Марчук, В.И. Агошков. *Введение в проекционно-сеточные методы.* -Москва: Наука, 1981. -416 с.

Э. Митчелл, Т. Уэйт. *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными.* -Москва: Мир, 1981. -216 с.

С.Г. Михлин. *Вариационные методы в математической физике.* -Москва: Наука, 1970. -454 с.

С.Г. Михлин. *Численная реализация вариационных методов.* -Москва: Наука, 1966. -432 с.

И.Н. Молчанов, Л.Д. Николенко. *Основы метода конечных элементов.*-Киев: Наукова думка, 1989. -272 с.

Ж.-П. Обэн. *Приближенное решение эллиптических краевых задач.* -Москва: Мир, 1977. -383 с.

Б. Парлетт. *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы.* -Москва:Мир, 1983. -384 с.

Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов. *Нелинейная прикладная термомеханика.* -Киев: НМЦ ВО МОНУ, 2000. -280 с.

К. Ректорис. *Вариационные методы в математической физике и технике.* -Москва: Мир, 1985. -590 с.

Р. Рихтмайер, К. Мортон. *Разностные методы решения краевых задач.* -Москва: Мир, 1972. -420 с.

А.А. Самарский. *Введение в численные методы.* -Москва: Наука, 1982. -272 с.

А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Численные методы.* -Москва: Наука, 1989. -432 с.

А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров. *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.* -Москва: Высшая школа, 1987. -296 с.

Л. Сегерлинд. *Применение метода конечных элементов.*-Москва: Мир, 1979. -392 с.

Г. Стренг,Дж. Фикс. *Теория метода конечных элементов.*-Москва: Мир, 1977. -350 с.

Ф. Сьярле. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* -Москва: Мир, 1980. -512 с.

И.И. Федик, В.С. Колесов, В.Н. Михайлов. *Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах.*-Москва: Энергоатомиздат, 1985. -280 с.

К. Флетчер. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2.*-Москва: Мир, 1991. -552 с.

В.В. Шайдуров. *Многосеточные методы конечных элементов*-Москва: Наука, 1989. -288 с.

Г.А. Шинкаренко. Постановка та розв'язуваність початково-крайових задач електров'язкопружності. *Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. 35 (1990) 10-16.*

M. Ainsworth, J.T. Oden. *A Posteriory Error Estimation in Finite Element Analysis,* John Wiley, New Jork, 2000. -240 p.

S.C. Brenner, R.L. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods,* Springer, Berlin, 1994. -294 p.

F. Brezzi, M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods,* Springer, New York, 1991. -350 p.

R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.1. Physical Origins and Classical Methods,* Springer, Berlin, 2000. -719 p.

R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.2. Functional and Variational Methods,* Springer, Berlin, 1988. -561 p.

K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C.Johnson. *Computational Differential Equations,* Cambridge University Press, Cambridge, 1996. -538 p.

Finite Elements. Theory and Application. D.L. Dwoyer, M.Y. Hussaini, R.G. Voigt; eds., Springer, New York, 1988. -302 p.

P.-L. George, H. Borouchaki. *Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements,* Hermes, Paris, 1998. -414 p.

V. Girault, P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations,* Springer, Berlin, 1986. -200 p.

R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems,* Springer, New York, 1984. - 493 p.

T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Statics and Dynamics Finite Element Analysis,* Prentice Hall, Englwood Cliffs, New Jersey, 1987. - 803 p.

F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering,* Springer, Berlin, 1998. -222 p.
C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method,* Cambridge University Press, Cambridge, 1994. -278 p.
H.J.-P. Morand, R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction: Applied Numerical Methods*, Wiley, Chichester, 1995. -212 p.
J. Necas, I. Hlavacek. *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction,* Elsevier, Amsterdam, 1981. -342 p.
A. Quarteroni, F. Valli.*Numerical Approximation of Partial Differential Equations ,* Springer, Berlin, 1994. -540 p.
A. Quarteroni, R. Sacco, F. Salery. *Numerical Mathematics,* Springer, Berlin, 2000. -650 p.
Ch. Schwab. *p− and hp−Finite Element Methods. Thery and Applications in Solid and Fluid Mechanics,* Clarendon Press, Oxford, 1998. -380 p.
R.E. Showalter. *Hilbert Spase Methods for Partial Differential Equations,* Electronic Jornal of Differential Equations, Monograph 01, 1994. -214 p.
B.A. Szabo, I.Babuska. *Finite Element Analysis,* Wiley, New York, 1991. - p.
R. Verfurth. *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques,* Wiley-Tubner, Chichester, 1996. -128 p.
O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics,* Buutterworth-Heinemann, Oxford, 2000. -333 p.