

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики



---

МІЖНАРОДНА СТУДЕНТСЬКА НАУКОВА  
КОНФЕРЕНЦІЯ З ПРИКЛАДНОЇ  
МАТЕМАТИКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ  
НАУК

---

СНКПМКН–2017



## *Оргкомітет*

### **Голова оргкомітету**

**Іван Дияк** – декан факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка

### **Члени оргкомітету**

**Віталій Горлач** – заступник декана факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка

**Богдан Зубаль** – студент факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка

**Оксана Костельна** – студентка факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка

**Максим Зінко** – студент факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка

## *Науковий комітет*

**Іван Дияк** – декан факультету прикладної математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

**Михайло Баргіш** – завідувач кафедри теорії оптимальних процесів факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

**Микола Притула** – завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

**Георгій Шинкаренко** – завідувач кафедри інформаційних систем факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

**Роман Хапко** – завідувач кафедри обчислювальної математики факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

**Григорій Цегелик** – завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

**Сергій Ярошко** – завідувач кафедри програмування факультету прикладної математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

**Ярема Савула** – завідувач кафедри прикладної математики факультету прикладної математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор

## Зміст

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА СИСТЕМИ .....	8
РОЗРОБКА ТА РЕАЛІЗАЦІЯ НАВІГАЦІЙНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСТОСУВАНЬ .....	9
ЗАСТОСУВАННЯ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДО ЗАДАЧІ СЕГМЕНТАЦІЇ ТА МАРКУВАННЯ ГРАФІЧНОГО ОБРАЗУ .....	11
ОЦІНКА РИЗИКІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ШТУЧНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ .....	13
ВЕБ-ОРІЄНТОВАНИЙ ДОДАТОК ПОШУКУ ТРАНСПОРТУ «YOURWAY» .....	16
РОЗРОБКА СЕРВЕРНОЇ ЧАСТИНИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ УНІВЕРСИТЕТУ .....	18
ОГЛЯД ЗАСОБІВ РЕФЛЕКСІЇ СЕРЕДОВИЩА ПРОГРАМУВАННЯ PHP та ПЛАТФОРМИ .NET .....	20
ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПЕРСОН НА ГРАФІЧНОМУ ЗОБРАЖЕННІ МЕТОДОМ ВІОЛІ-ДЖОНСА З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРУ КАЛЬМАНА .....	22
РОЗРОБКА СЦЕНАРІЇВ ОНЛАЙН НАВЧАННЯ .....	26
ТУРИСТИЧНИЙ БЛОГ «TOURIST STORIES» .....	29
ПРОЕКТУВАННЯ ТА РОЗРОБКА КРОСПЛАТФОРМНИХ НАСТІЛЬНИХ ПРОГРАМ ЗА ДОПОМОГОЮ АТОМ SHELL .....	31
ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМУ КОХОНЕНА ДЛЯ СЕГМЕНТАЦІЇ ГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В РІЗНИХ КОЛЬОРОВИХ ПРОСТОРАХ .....	33

ПОБУДОВА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ СТАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ВАЛІДАЦІЇ КОДУ В РЕЖИМІ РЕАЛЬНОГО ЧАСУ .....	35
СТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОЇ СИСТЕМИ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ .....	38
МЕТОД ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ У СЕНСОРНИХ МЕРЕЖАХ .....	41
ЗОБРАЖЕННЯ В QR КОДАХ .....	43
НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ. РОЗПІЗНАВАННЯ ОБЛИЧ.....	46
МОВА ПРОГРАМУВАННЯ v (НЮ).....	49
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ШИФРУВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ .....	51
ПРОЕКТУВАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ 3D ОБ'ЄКТІВ.....	53
СТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ “INFORMATICS” .....	56
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ .....	58
ТРИКРОКОВИЙ МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ..	59
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ.....	61
ВИКОРИСТАННЯ ОЦІНОК АПОСТЕРІОРНИХ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ АДАПТИВНОГО ЗГУЩЕННЯ СІТКИ ДЛЯ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ .....	64
УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ХОВАНСЬКОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....	66

МОДИФІКАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНЕЦЕВОГО МЕТОДУ ШЛЯХОМ ПРИМІНЕННЯ АПОСТЕРІОРНОГО ОЦІНЩИКА НА НЕРЕГУЛЯРНІЙ СІТЦІ .....	68
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ МАГНІТНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ .....	70
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ У ДВОЗВ'ЯЗНІЙ ТОРОЇДАЛЬНІЙ ОБЛАСТІ .....	73
ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО- ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ .....	76
МЕТОД БЛОЧНОГО ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ .....	78
ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ .....	80
ІНТЕРВАЛЬНІ МЕТОДИ НЬЮТОНІВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ .....	82
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ .....	84
ІТЕРАЦІЙНІ ІНТЕРВАЛЬНІ МЕТОДИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ І РОЗКАЛДУ ЇЇ НА ТРИКУТНІ МАТРИЦІ .....	87
A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR FOR DIFFUSION- ADVECTION-REACTION PROBLEM .....	90
МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ З МЕТОДОМ НАЙШВИДШОГО СПУСКУ. ПРОГРАМНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ МЕТОДІВ. ....	93

NUMERICAL SOLUTIONS FOR THE NARLOFE –ARROW MODEL OF OPTIMAL INVESTMENT. ....	96
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОЧАТКОВО- КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ НЕЯВНОЇ СХЕМИ.....	98
NUMERICAL SOLUTION FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CHATTERING REGIME.....	100
ГЕТЕРОГЕННА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ .....	102
АПАРАТ МАЖОРАНТ І МІНОРАНТ ТА ЇХНІХ ДІАГРАМ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО .....	105
МЕТОД БЛОЧНОГО ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	108
СПОСІБ ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР’Є ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ЧИСЛОВОГО ОБЕРНЕННЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.....	110
ІНТЕРВАЛЬНИЙ МЕТОД ТИПУ РУНГЕ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ .....	113
МОДЕЛЮВАННЯ.....	115
MATHEMATICAL INVESTIGATION OF ELASTODYNAMIC EQUATIONS .....	116
NUMERICAL SOLUTION OF BLACK-SCHOLES INITIAL- BOUNDARY VALUE PROBLEM.....	119
МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТРАНСПОРТУ.....	121
ЛОГІСТИЧНА ВІКОВА ЗАЛЕЖНІСТЬ РОЗВИТКУ ПОПУЛЯЦІЇ.....	123

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ РАКОВИХ ПУХЛИН З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ .....	126
ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ.....	129
МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ .....	131
APPLICATION OF (G'/G) – EXPANSION METHOD TO ONE NONLINEAR EVOLUTION SYSTEM.....	134
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ.....	137
МУЛЬТИАГЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ІНСТРУМЕНТ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАХВОРЮВАНОСТІ ПРИРОДНООСЕРЕДКОВИМИ ХВОРОБАМИ .....	140
MATHEMATICAL MODEL FOR SEISMIC WAVE PROPAGATION IN A HETEROGENEOUS MEDIA .....	142
ВИДІЛЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ: КАРТА НОРМАЛЕЙ .....	144
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РІВНЯ ЖИТТЯ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ.....	146



# ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА СИСТЕМИ



## РОЗРОБКА ТА РЕАЛІЗАЦІЯ НАВІГАЦІЙНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСТОСУВАНЬ

*Бекер Ігор Васильович*, Україна  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[igorbeker94@gmail.com](mailto:igorbeker94@gmail.com)

У будівництвах різного типу часто зустрічаються проблеми навігаційного роду, для вирішення яких потрібне візуальне представлення проекту. Для цього використовується розробка тривимірного представлення на основі готових креслень. Такий процес може бути надто затратним та довготривалим. Отже, є нагальна потреба у побудові швидшого, зручнішого та простішого розв'язку.

Розглядаємо процес побудови тривимірного представлення проекту, на основі готових креслень, застосовуючи контурний аналіз зображення, алгоритм заливки та ігровий рушій Unity3D.

КА(контурний аналіз) дозволяє описувати, зберігати, порівнювати і знаходити об'єкти, представляти їх у вигляді зовнішніх обрисів - контурів (Рис.1) [1].

В даній роботі ми використовуємо КА для знаходження елементів креслення, що мають відповідні позначення. Властивості КА дозволяють нам знайти коефіцієнти розміру, місцезнаходження та повороту об'єктів.

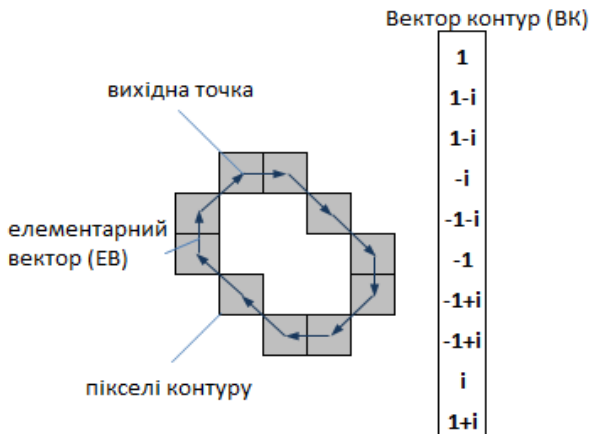


Рис.1. Вектор-контур.

Для розробки ПЗ для КА використовуємо .NET інтерфейс для бібліотеки OpenCV [2].

Такі об'єкти, як стіни, вуличні дороги та інші схожі елементи креслення, не підлягають КА, тому що їхній обрис є унікальним. Об'єкти такого типу зазвичай мають такі спільні властивості, як одноколірність та суцільність. Для їхнього аналізу використовують алгоритм заливки [3]. Ядро цього алгоритму в тому, що він визначає область, “поєднану” з певним елементом в багатовимірному масиві.

Для відображення три вимірних моделей, побудованих на основі аналізу креслення, використаємо ігровий рушій Unity3D, функціонал якого, дозволяє побудову моделей, можливість навігації, знаходження найкоротших шляхів.

1. *Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Янишин В.* Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. — Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992.— 248 с.
2. *Gary Bradski, Adrian Kaehle.* Learning OpenCV. 2008. – 575 с.
3. *Torbert, Shane.* [Applied Computer Science](#) (2nd ed.). — Springer 2016. – 158 с.

## ЗАСТОСУВАННЯ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДО ЗАДАЧІ СЕГМЕНТАЦІЇ ТА МАРКУВАННЯ ГРАФІЧНОГО ОБРАЗУ

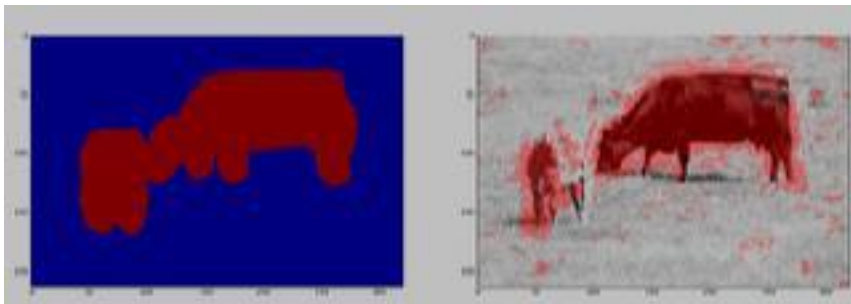
*Гоцій Роман Васильович, Україна*  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[gotsijroman@gmail.com](mailto:gotsijroman@gmail.com)

У цій роботі досліджено застосовність нейронних мереж до задачі сегментації графічних зображень а також до задачі маркування зображень, а саме, досліджено застосовність мереж, що ґрунтуються на принципах роботи зорової кори мозку живих істот: PCNN та ICM.

Для цього було проаналізовано теорію роботи зорової кори головного мозку, та досліджено її математичні моделі. Також досліджено обчислювальні моделі, та розроблено програмне забезпечення що її симулює.

У роботі досліджено вплив різних параметрів мережі на результат сегментування. Деякі з параметрів впливають на результат сегментації значним чином, а вплив деяких незначний.

Виявлено, що для оптимального результату сегментації не потрібно багато ітерацій нейронної мережі.



*Рисунок 1. Результати роботи застосунку для маркування сцени (зліва – експертна сегментація, справа – сегментація системою)*

Також було розроблено, імплементовано та протестовано алгоритм маркування зображень на основі досліджуваних моделей. (рисунок 1).

Зважаючи на отримані результати можна зробити висновок, що мережі такого типу застосовні для розв'язування задачі маркування образів. Було розроблено алгоритм маркування який враховує 3 кольорові компоненти зображення (червоний, зелений, синій). Було досліджено що даний алгоритм дає кращі результати маркування.

Підсумовуючи, можна сказати що симуляція зорової кори мозку є дуже перспективним напрямком в галузі обробки графічних зображень. Окрім розв'язання різних реальних задач обробки зображень, вивчення цих моделей дозволяє краще зрозуміти як влаштований найпотужніший біологічний комп'ютер – мозок, що використовує абсолютно інший підхід до обчислень ніж сучасні комп'ютери. І цей підхід, як відомо, з задачами обробки зображень (в тому числі і сегментації) показує себе набагато краще.

1. *E. Domany, J.L. van Hemmen, K. Schulten: Models of Neural Networks - Springer, New York, 1994, 95–119.*
2. *Gray C.M., König P., Engel A.K., Singer W. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit intercolumnar synchronization which reflects global stimulus properties //Nature, 1989, 388, 334–337*
3. *Eckhorn R., Bauer R., Jordan W., Brosch M., Kruse W., Munk M., Reitboeck H. J. Coherent oscillations: a mechanism of feature linking in the visual cortex // Biol.Cybern., 1988, 60, 121–130.*
4. *T. Lindblad, J.M. Kinser Image Processing Using Pulse-Coupled Neural Networks – Springer, Berlin, 2005, 45–46*
5. *Ленько В.С., Щербина Ю.М. Застосування методів штучного інтелекту до сегментації графічних образів, Магістерська робота, Львів, 2001*
6. *Казанович Я. Б. Сегментация зображений с помощью динамических нейронных сетей, //Лекции по нейроинформатике, Москва, 2009, 38-50*
7. *Саймон Хайкин Нейронные сети. Полный курс. Второе издание. Київ, 2006, 852*

## ОЦІНКА РИЗИКІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ШТУЧНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

*Грек Ольга Миколаївна, Україна*  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет Інфокомунікацій  
[olha.hrek@nure.ua](mailto:olha.hrek@nure.ua)

Через постійне зростання складності та різноманітності сучасних інформаційно-комунікаційних систем стає необхідним дослідження нових технологій та механізмів інформаційної безпеки. Одним із перспективних напрямків є дослідження застосування апарата технології штучних нейронних мереж для вирішення задач інформаційної безпеки.

Ключова властивість нейронних мереж – їхня здатність до навчання. Нейронна мережа дозволяє оцінити ступінь відповідності аналізованих даних еталонній моделі, а також може вирішувати завдання класифікації.

Існують напрямки в забезпеченні інформаційної безпеки, для яких використовуються результати досліджень у сфері нейронних мереж. Особливу увагу звертають на аналіз та оцінку ризиків.

Ризик інформаційної безпеки – потенціальна можливість використання вразливостей активу чи групи активів конкретною загрозою для заподіяння збитку організацією. Існує велика кількість методик оцінки ризиків інформаційної безпеки, такі як, методика аналізу ризиків компанії Microsoft, методика оцінки ризиків Digital Security і т.д.

Аналіз методологій аналізу ризиків показує, що у всіх із них використовується не математична ймовірність настання події «реалізація загрози», а приблизна частота реалізації загрози за заданий проміжок часу. Для оцінки ймовірностей використовують експертну оцінку [1].

При проведенні аналізу ризиків інформаційної безпеки відповідно до багатьох підходів, що використовуються, не передбачається оцінка точності експертних оцінок, не передбачається можливість уточнення оцінок після експлуатації системи. Крім того, між початком дослідження системи і створенням підсумкового звіту, як правило, проходить суттєвий проміжок часу. Це значно зменшує достовірність деяких оцінок.

Концепція неперервного аудиту вирішує ці та інші проблеми. Для реалізації неперервної оцінки ризиків необхідно створити систему динамічного ітеративного аналізу. Пропонується архітектура системи ітеративної динамічної оцінки ризиків на основі нейронних мереж.

Найбільш важлива перевага нейронних мереж при виявленні загроз – їх здатність вивчати характеристики навмисних атак і ідентифікувати елементи, не схожі на ті, що спостерігалися у мережі до цього [2].

Ефективність вирішення задачі класифікації залежить від вибору архітектури нейронної мережі та її навчання. Вибір оптимальної архітектури зводиться до знаходження такої мережі, яка вирішує задачу із мінімальною помилкою, яка визначається за формулою (1):

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (t_j - o_j)^2$$

де  $p$  – кількість нейронів у вихідному шарі;

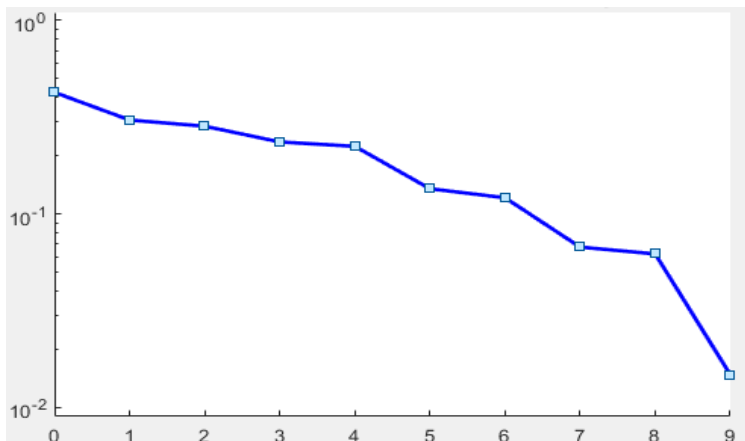
$t_j$  – цільове значення  $j$ -го виходу;

$o_j$  – спостережуване значення  $j$ -го виходу.

У підсумку розроблена система, на вхід до якої надходять дані від системи виявлення вторгнень, антивірусних програм, брандмауерів про потенційно небезпечну активність та загальний рівень мережевої активності, а також експертні оцінки кількісних показників функціонування системи інформаційної безпеки. Модуль нейронної мережі при цьому вирішує питання класифікації вхідних векторів.

У якості ядра системи в даній роботі використовуються мережі з навчанням із учителем на основі багат шарового перцептрону із прямим розповсюдженням сигналу та зворотнім розповсюдженням помилки.

Архітектуру штучної нейронної мережі та графік зміни величини помилки, зображений на рисунку, було побудовано за допомогою вбудованих засобів Matlab.



*Рис.1 Графік зміни величини помилки*

Так, була побудована нейронна мережа для вирішення задачі класифікації вхідних векторів на два класи – «небезпечна активність» і «безпечна активність». Ця класифікація може бути проведена окремо для кожної загрози. Таким чином, для вирішення задач аналізу ризиків інформаційної безпеки при ідентифікації  $N$  актуальних ризиків можна побудувати  $N$  тришарових нейронних мереж, котрі забезпечують у результаті навчання оцінку ймовірності реалізації загрози.

1. Варфоломєєв А. А. «Управління інформаційними ризиками: навч. посібник» [Текст]/ А. А. Варфоломєєв – М.: РУДН, 2008. – 158 с.

2. Каллан Р. «Основні концепції нейронних мереж» [Текст]/ Р. Каллан – М.: Видавничий дім «Вільямс», 2001. – 287 с.



## ВЕБ-ОРІЄНТОВАНИЙ ДОДАТОК ПОШУКУ ТРАНСПОРТУ «YOURWAY»

*Добуляк Денис Геннадійович, Україна*  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет Комп'ютерних наук  
[denys.dobuliak@nure.ua](mailto:denys.dobuliak@nure.ua)

У наш час велика кількість людей подорожує. Плануючи свою подорож, у першу чергу, люди стикаються зі складністю вибору напрямку поїздки. Незабаром, обравши напрямок, перед людиною встає запитання про варіант та місце проживання. Далі виникає не менш важливе питання, як доїхати до обраного місця. Є декілька можливих варіантів: їхати автобусом, поїздом або летіти літаком, або виникає необхідність скористатися відразу декількома видами транспорту. Сучасний мандрівник все частіше обирає спосіб пересування і купує квитки на поїздку через інтернет-ресурси.

Більшість існуючих веб-додатків, що надають інформацію про маршрут транспорту, дають можливість знайти відповідний транспорт лише одного виду, тобто не дають повноцінну інформацію про можливі варіанти використання того чи іншого транспорту. Також підбір способу пересування на різних веб-сайтах займає багато часу у користувача, тому цікавою і затребуваною є розробка такого веб-додатку, за допомогою якого можна отримати актуальну інформацію не тільки про маршрути усіх основних видів транспорту, але і скласти їх комбінацію для реалізації необхідного маршруту. Така система допомагає заощадити користувачеві час на збір всієї необхідної для нього інформації і забезпечує зручність формування кращого маршруту з одночасною прив'язкою до транспорту.

Вихідними даними для розробки веб-додатку є актуальна інформація в режимі онлайн про доступні квитки з існуючих інтернет-ресурсів: вартість проїзду, маршрут, час відправлення та прибуття і т.д. Основною функцією веб-додатку є пошук транспорту для реалізації заданого маршруту з урахуванням інформації про:

- пункт відправлення;
- пункт прибуття;
- дату відправлення;
- дату повернення;
- вид транспорту.

Результати пошуку можуть бути відсортовані за вартістю проїзду, за

часом відправлення і т.д. і надаються користувачу в зручному для нього вигляді.

Розроблювана інформаційна система має клієнт-серверну архітектуру.

Для розробки серверної частини доцільно використовувати мову програмування С# в зв'язці з платформою ASP.NET MVC 4. Мова С# є кросплатформною і об'єктно-орієнтованою, що підходить для реалізації нашої інформаційної системи [2, 4].

Для розробки клієнтської частини використовується мова розмітки HTML, так як вона є стандартною мовою розмітки документів в Інтернеті, а також технології CSS, JavaScript [1, 3, 5].

В якості СУБД доцільно використовувати Microsoft SQL Server, тому що вона є реляційною системою управління базами даних. Всі дані всередині її зберігаються у вигляді логічно пов'язаних між собою таблиць, доступ до яких здійснюється за допомогою мови T-SQL. У той час, як більшість інших СУБД стоять приголомшливих грошей, СУБД Microsoft SQL Server поширюється вільно. Дана СУБД використовується для роботи з базами даних розміром від персональних до великих баз даних масштабу підприємства, а також характеризується великою швидкістю, стійкістю до збоїв і легкістю використання[6].

Розроблена система має повноцінний набір функцій необхідних для користувача: пошук різних видів транспорту по заданому маршруту, порівняння цін на вартість проїзду, часу в дорозі, а також покупка квитків на обраний транспорт. Це дозволяє користувачеві суттєво скоротити час на пошук оптимального способу пересування.

1. *Фрімен Ерік*. Вивчаємо HTML, XHTML [Текст]/ *Фрімен Ерік, Фрімен Елізабет*. – М.: Пітер, 2010. – 656 с.
2. *Ендрю Троелсен*. Мова програмування С# 5.0 та платформа .NET 4.5 [Текст]/ *Ендрю Троелсен*. // 6-е видання – М.: Віл'ямс, 2013. – 1312 с.
3. *Девід Сойер Макфарланд*. Нова велика книга CSS. [Текст]/ *Девід Сойер Макфарланд*. - М.: Пітер, 2016. - 720 с.
4. ITVDN [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://itvdn.com>
5. JavaScript [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://learn.javascript.ru>
6. *Петкович Д.* Microsoft SQL Server 2008. Керівництво для початківців. [Текст]/ *Петкович Д.*- Спб.: БХВ-Петербург, 2009. — 752 с.

## РОЗРОБКА СЕРВЕРНОЇ ЧАСТИНИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ УНІВЕРСИТЕТУ

*Заневич Олег Богданович*, Україна  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[Oleh.Zanevych@gmail.com](mailto:Oleh.Zanevych@gmail.com)

Безперервний розвиток техніки зумовлює процеси інформатизації майже у всіх сферах людської діяльності. Виникають потреби в розробці інформаційних систем, які повинні забезпечувати швидку і якісну обробку інформації, надійність її збереження, володіти властивістю гнучкої інтеграції з іншими системами з метою легкої та гнучкої передачі даних на будь-які пристрої. Із зростанням вимог до побудови таких систем підвищується тривалість і складність процесу їхньої розробки.

Однією з глобальних проблем вузів України є розробка локальної інформаційної системи, яка б зберігала інформацію про викладачів, студентів, робочі навчальні плани, розклад занять та усі інші пов'язані з ними сутності і надавала можливість для швидкого пошуку потрібних даних за усіма можливими критеріями.

Обравши при проектуванні REST підхід, я реалізував RESTful Web Service, який надає API методи для роботи для роботи з такими сутностями як:

- Корпуси університету;
- Карти корпусів;
- Навчальні підрозділи (факультети, коледжі);
- Кафедри;
- Спеціальності;
- Навчальні курси;
- Робочі навчальні плани;
- Викладачі;
- Студенти;
- Академічні групи;
- Викладацькі навантаження;
- Аудиторний фонд;
- Розклад занять;
- Гуртожицькі кімнати;

- Інші університетські місця.

Сильною стороною розробленої системи є її простота і гнучкість використання. Більшість GET методів підтримує велику кількість параметрів, задання яких дозволяє робити вибірку лише конкретних полів, фільтрувати і сортувати результат за будь-якими властивостями. Також є доволі широкі можливості надання прав користувачам на створення та редагування ресурсів (елементів сутностей, наприклад, конкретний навчальний курс). Передбачено 6 рівнів доступу до кожної із вище наведених сутностей, можливість задання відповідальних за конкретний ресурс користувачів чи груп користувачів, та надання ресурсам статусу приватних.

В якості мови програмування була обрана Java, тому що стек технологій JavaEE забезпечує побудову масштабованої, надійної і гнучкої серверної архітектури. Проект реалізований на основі Spring фреймворку та збирається за допомогою Maven. База даних побудована під СУБД PostgreSQL. Для роботи з нею використовується ORM-фреймворк Hibernate. Контролери API методів реалізовані з використанням Spring MVC. Автентифікація і авторизація користувачів здійснюється за допомогою Spring Security. Для автоматичної валідації коду під час збирання проекту використовуються такі Maven плагіни, як Checkstyle і FindBugs. Інтеграційне тестування коректності роботи усіх API методів та продуктивності системи в цілому реалізоване на основі Gatling фреймворку.

Написаний мною Web Service дає можливість вузам України цілісно зберігати дані в одній базі даних та отримувати усю необхідну інформацію на різних пристроях шляхом виклику простих і гнучких API методів. Це дозволить уникнути дублювання даних (якщо таке присутнє, наприклад, коли кожен факультет має свій окремий сайт), та спростить автоматичну синхронізацію даних вузу з ЄДЕБО (Єдиною державною електронною базою з питань освіти).

1. *Leonard Richardson, Mike Amundsen, Sam Ruby RESTful Web APIs* — O'Reilly, 2013
2. *Craig Walls Spring in Action (3rd Edition)* — Manning Publications, 2011
3. *Joseph Ottinger, Jeff Linwood, Dave Minter Beginning Hibernate: For Hibernate 5* — Apress, 2016

## ОГЛЯД ЗАСОБІВ РЕФЛЕКСІЇ СЕРЕДОВИЩА ПРОГРАМУВАННЯ PHARO ТА ПЛАТФОРМИ .NET

*Зацеровний Ростислав Григорович*, Україна  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[zatserkovnyi.rostyslav@gmail.com](mailto:zatserkovnyi.rostyslav@gmail.com)

В інформатиці рефлексією називають процес, під час якого програма відслідковує або модифікує власну поведінку та структуру на етапі виконання. Для того, щоб середовище програмування підтримувало рефлексію, воно має давати програмі можливість отримувати інформацію про внутрішні структури даних і модифікувати ці структури в процесі роботи програми.

Середовище програмування Pharo, що базується на мові програмування Smalltalk, має особливо широкі рефлексивні можливості: всі внутрішні сутності – класи, метакласи, списки методів, стек викликів тощо – є так званими метаоб'єктами. Метаоб'єкти можна як переглянути (програмою або за допомогою візуального інспектора об'єктів), так і змінити на етапі виконання програми. Віртуальна машина Pharo теж є метаоб'єктом, що дає програмісту можливість будувати програмний код з нуля, створюючи нові класи та методи [1].

Можливості рефлексії середовища Pharo унікальні серед об'єктно-орієнтованих мов програмування. Як приклад, популярна платформа програмування .NET має деякі засоби рефлексії, однак ці засоби, порівняно з Pharo, є досить обмеженими. У запропонованій доповіді детально розглянуто засоби рефлексивно-орієнтованого програмування у Pharo та .NET і отримано такі висновки:

- Можливості Pharo та .NET щодо інтроспекції (отримання інформації про внутрішні сутності) є досить схожими. Pharo дозволяє отримати інформацію про класи та методи за допомогою метакласів [1], тоді як у .NET цю ж функціональність реалізують класи бібліотеки System.Reflection [5].
- Як Pharo, так і .NET дозволяють створити нові методи на етапі виконання програми, використовуючи звернення до компілятора [1] або засоби System.Reflection [3] відповідно. З іншого боку, на відміну від Pharo, засобами .NET неможливо редагувати вихідний код програми в процесі її виконання або змінювати наявні класи

чи методи без використання сторонніх засобів (наприклад, утиліти для заміни методів CLR в процесі виконання програми [2]).

- Pharo дозволяє визначити кількісні метрики коду за допомогою вбудованих методів (`allSelectors`, `allSuperclasses`, `linesOfCode` та ін.) У .NET немає аналогічних засобів, але схожі метрики можна отримати за допомогою сторонніх засобів – наприклад, `Code Metrics PowerTool` для середовища `Visual Studio` [4].
- Pharo та середовища розробки програмного забезпечення на основі .NET (`Visual Studio`, `MonoDevelop`) мають схожі засоби для візуалізації внутрішніх сутностей: інспектор змінних, засіб пошуку методів і т. ін. Щоправда, налагоджувач Pharo значно потужніший за аналоги у .NET і дозволяє змінювати або додавати вихідний код під час налагодження програми. В цілому середовища розробки для платформи .NET є звичайними аплікаціями, а не повноцінними середовищами програмування, і не дають можливості програмно керувати елементами свого інтерфейсу.

Надалі заплановано розробку двох аплікацій (написаних, відповідно, на Pharo та .NET), які наочно демонструватимуть різницю між рефлексивними можливостями двох середовищ.

1. *Ducasse S.* Pharo by Example 5.0. / Stéphane Ducasse et. al. – Square Bracket Associates, Switzerland, 2017. – 358 p.
2. *Elmalki Z.* CLR Injection: Runtime Method Replacer [Електронний ресурс] / Ziad Elmalki // CodeProject, 2009. – Режим доступу: <https://www.codeproject.com/Articles/37549/CLR-Injection-Runtime-Method-Replacer> – Назва з екрану.
3. *Iaroshko S.* Dynamic Construction of Functionality of an Application by Reflection Tools [Електронний ресурс] / S. Iaroshko // CodeProject, 2016. – Режим доступу: <https://www.codeproject.com/Articles/1112276/Dynamic-Construction-of-Functionality-of-an-Applic> – Назва з екрану.
4. *Willis C.* Code Metrics PowerTool for Visual Studio 2015 Available on Microsoft Download Center / Charles Willis (MSFT) // MSDN, 2015. – Режим доступу: <https://blogs.msdn.microsoft.com/visualstudioalm/2015/07/23/code-metrics-powertool-for-visual-studio-2015-available-on-microsoft-download-center/> – Назва з екрану.
5. Reflection in the .NET Framework [Електронний ресурс] // MSDN, 2017. – Режим доступу: <https://msdn.microsoft.com/en-us/library/f7ykdhsy.aspx> – Назва з екрану.

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПЕРСОН НА ГРАФІЧНОМУ ЗОБРАЖЕННІ МЕТОДОМ ВІОЛИ-ДЖОНСА З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРУ КАЛЬМАНА

*Іванчишин П.П., Чабанюк Я.М., Україна*

Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[p.ivanchyshyn@gmail.com](mailto:p.ivanchyshyn@gmail.com)

Однією із найбільш поширених сучасних проблем є ідентифікація персон на графічному зображенні. Перед дослідниками постає цілий ряд проблем, для вирішення даної задачі. До таких проблем можна віднести:

1. Розробка/вибір математичної моделі, яка давала би можливість врахувати особливості людського обличчя, освітлення та чіткість зображення та інші чинники.

2. Представлення зображення у чисельному вигляді, щоб можна було використати котрись із розроблених математичних моделей.

3. Розробка/використання системи, здатної до навчання, яка на основі навчальної вибірки зможе робити прогнози із достатньо високою точністю.

Для розв'язання цих, та низки інших проблем було запропоновано використати алгоритм Віоли-Джонса (виявлення облич, але не розпізнавання їх), алгоритми класифікації та фільтр Кальмана, для більш точного прогнозу.

Алгоритм Віоли-Джонса складається із чотирьох кроків:

1. Вибір ознак Хаара.
2. Створення цілісного (інтегрального) зображення.
3. AdaBoost навчання.
4. Каскадні класифікатори.

Ознаки Хаара базуються на тому, що всі людські обличчя мають схожі характеристики. Деякі із спільних ознак для людських облич:

- Область очей є темнішою за верхню область щік.
- Область перенісся є яскравішою за область очей.

Набір характеристик, що формують впізнавані риси обличчя:

Розташування і розмір: очі, рот, перенісся.

Значення: орієнтовані градієнти інтенсивності пікселів.



Рис. 1. Ознака Хаара для виявлення перенісся.



Рис. 2. Ознака Хаара для виявлення очей.

На рисунках 1 та 2 бачимо застосування ознак Хаара для виявлення перенісся і очей на фотографії.

Значення прямокутних ознак рахуються за формулою:

$$\text{Значення} = \Sigma(\text{пч}) - \Sigma(\text{пб}), \text{ де}$$

пч – пікселі у чорному прямокутнику, пб – пікселі у білому прямокутнику.

Створення цілісного зображення, адабоост навчання та каскадні класифікатори використовуються разом із ознаками Хаара для коректного виявлення облич на графічному зображенні.

Окрім виявлення облич на графічному зображенні необхідно також навчити систему аналізувати зображення та вміти робити якісь передбачення. Один із методів, які використовують для вирішення цього роду задачі, має назву машини опорних векторів (SVM - support vector machine). У даному алгоритмі кожен із елементів даних наноситься на n-вимірний простір (де n - кількість наявних ознак) зі значенням кожної ознаки, що є значенням конкретної координати. Після цього відбувається класифікація пошуком гіперплощини, які добре діляться на два класи.



## SUPPORT VECTOR MACHINE

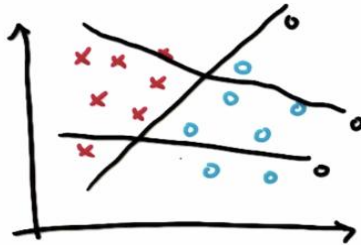


Рис. 3. SVM алгоритм.

На рисунку 3 бачимо що основною ідеєю методу опорних векторів є пошук найближчого (найкращого) поділу вибірки даних ( навчальної вибірки) на два класи (кластери). Для роботи даного алгоритму необхідна початкова навчальна вибірка, яких є достатньо багато у відкритому доступі, що дозволяє початково навчити алгоритм на тестових даних, а далі вже в процесі роботи він буде удосконалюватись на основі нових, реальних даних. Описана процедура робить даний алгоритм доволі точним.

Правильно реалізувавши описані вище алгоритми та підходи, ми отримаємо можливість ідентифікації облич на графічному зображенні. Одним із слабких місць даної моделі є чутливість до не дуже якісних зображень, “білого шуму”, тощо.

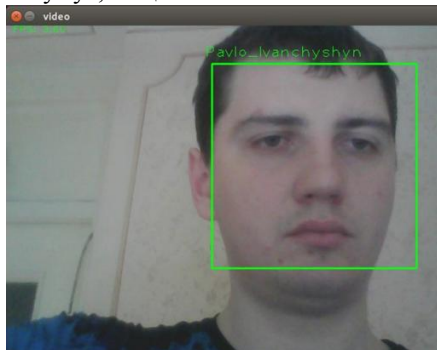


Рис. 4. Ідентифікація персони

На рисунку 4 показано практичну реалізацію запропонованої моделі. Бачимо результат ідентифікації персони на основі натренованої бази.

Для покращення запропонованої моделі використано фільтр Кальмана, який дозволяє в режимі реального часу реагувати на зміни стану системи і порівнювати попередні стани із поточними, що позитивно впливає на результат ідентифікації облич.

1. *Кардаш А.І., Левицька С.М., Дудикевич А.Т.* Задача розпізнавання людських облич методами штучного інтелекту. — Львів, 2013.
2. *Мицько А.С., Парамуд Я.С.* Програмний сервіс розпізнавання облич з використанням 3D сенсора PrimeSense Carmine 1.08.
3. *Писаренко Д.* Eigenface-based facial recognition – February 13, 2003
4. *Федоров Д. М.* Метод забезпечення інваріантності зображення обличчя щодо афінних спотворень. *Наукоємні технології.* – 2013. – № 3. – с. 294-298.
5. *Sunil R.* Understanding Support Vector Machine algorithm from examples. – Analytics Vidhya, October 6, 2015
6. *Viola P.* Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features, / *Viola P. and Jones M.J.* Proceedings IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2001), 2001.
7. *Viola P.* Robust real-time face detection, / *Viola P. and Jones M.J.* International Journal of Computer Vision, vol.57, no. 2, 2004, pp.137-154.

## РОЗРОБКА СЦЕНАРІЇВ ОНЛАЙН НАВЧАННЯ

*Карпінська Яна Ігорівна, Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка,

факультет прикладної математики та інформатики

[yana.karpinska13@gmail.com](mailto:yana.karpinska13@gmail.com)

В даній роботі розглядається можливість проведення онлайн навчання, при цьому без безпосереднього використання комп'ютерів студентами. Адже, на жаль, в даний час не завжди є доступ до достатньої кількості комп'ютерів, щоб провести навчання/тестування для всіх студентів.

Тому було реалізовано можливість перенести проходження курсу навчання в режим оффлайн, але при цьому перевірка і обробка робіт залишається автоматизованою.

Для досягнення цього було реалізовано підхід за допомогою якого викладач має можливість перенести такі частини навчання як тестування - в оффлайн режим. Все, що йому для цього потрібно - це видрукувати тести і бланк відповідей для студента, далі студенти заповнюють бланки і після цього викладач завантажує відскановані бланки у систему.

Для правильної обробки і зчитування відсканованого бланку він має певний стандарт. Зокрема, бланк містить QR-код з закодованим в ньому унікальним ідентифікатором студента, що складає тест, і питань, на які він дає відповіді. Для коректного розпізнавання самих відповідей наявна таблиця, у яку студент вносить свої відповіді. У кутках таблиці розміщені маркери у формі кола, які забезпечують коректне зчитування таблиці навіть якщо відскановане зображення є не рівним або оберненим. За допомогою визначення положення маркерів і проведення уявних ліній між центрами кіл ми завжди отримаємо таблицю, що знаходиться в середині уявного квадрату і завжди можемо коректно обернути цей квадрат. Таким чином, не зважаючи на похибки сканування, таблиця завжди буде вертикально розміщена і ми зможемо розпізнати відповіді студента коректно.

З метою зчитування відповідей студента на тестові запитання, у роботі було реалізовано можливість розпізнавання писаних цифр і обробку їх у системі онлайн навчання.

Для розпізнавання цифр було реалізовано і навчено нейронну мережу, яка ідентифікує цифри написані від рук. Нейронна мережа була навчена з використанням MNIST бази даних, що містить велику кількість вхідних даних.

Для формування моделі мережі використовується алгоритм Softmax-регресії. Softmax регресія має два етапи: спочатку ми визначаємо «докази» того, що наші вхідні дані перебувають в певних класах, а потім перетворюємо ці докази в ймовірності.

Щоб підраховувати «докази» того, що дане зображення є в певному класі, ми рахуємо зважену суму інтенсивностей пікселів. Вага є негативною, якщо піксель, що має високу інтенсивність свідчить «проти» того що зображення знаходиться в цьому класі, і позитивне - якщо свідчить «за».

Для кожних вхідних даних, ми обчислюємо зважену суму інтенсивностей пікселів ( $x$ ), додаєм зміщення, а потім застосуємо Softmax. Далі для навчання нейронної мережі ми визначаємо похибку моделі і намагаємося її мінімізувати, таким чином покращуючи нашу модель. Похибку моделі визначаємо функцією «крос-ентропії»

$$H_{y'}(y) = - \sum_i y_i' \log(y_i),$$

де  $y$  – наше передбачення, і  $y'$  – дійсне значення (вектор побудований за допомогою цифрових міток). Розв'язуємо задачу мінімізації за допомогою алгоритму оптимізації градієнтним спуском.

Після розпізнавання відповідей студента кожна з них асоціюється з відповідним питанням. Таким чином формується модель даних, яка далі обробляється системою онлайн навчання таким самим чином як і тести, що відбуваються в онлайн режимі. Єдина відмінність полягає в тому, що сформована модель не має часових обмежень для проходження тестів. Після того як всі дані обробились системою, детальні результати тесту, з оцінкою за кожне питання, можна побачити на сайті системи.

Отже, в даній роботі було реалізовано можливість проведення тестування в оффлайн режимі, при цьому зберігши етап перевірки тестів автоматизованим. Для цього було реалізовано зчитування відсканованого

бланку, а саме розпізнавання і подальша обробка написаних на ньому від руки цифр. На даний момент підтримується лише розпізнавання цифр, проте це також може бути розширеним на розпізнавання будь-якого написаного тексту.

1. *Machine Learning by Stanford University* - Режим доступу: <https://www.coursera.org/learn/machine-learning/>
2. *Machine Learning in Python* - Режим доступу: <http://scikit-learn.org/>
3. *Tensorflow - an open-source software library for Machine Intelligence* - Режим доступу: <https://www.tensorflow.org/>

**ТУРИСТИЧНИЙ БЛОГ «TOURIST STORIES»**

*Клінкова Ірина Володимирівна, Україна*  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет Комп'ютерних наук  
[iklinkova@yandex.ru](mailto:iklinkova@yandex.ru)

На нашій планеті стільки незвіданого, стільки цікавого, що за все життя людина не зможе побувати у всіх куточках Землі. Кожен, хто хоч раз, хотів десь помандрувати, задавався питаннями: «А куди поїхати в першу чергу?», «Де цікавіше за все?», «Як подорожують інші люди?». У таких випадках може допомогти досвід та поради знайомих, але найчастіше вони бували тільки в декількох цікавих туристичних місцях, тому поради будуть пов'язані лише з ними. Існує варіант вибору місця подорожі за допомогою туристичного агентства, але це може бути дорого або завдяки рекламі туристичного місця очікування можуть не відповідати реальності. Тому необхідно використовувати інший варіант.

Іншим можливим варіантом є туристичний блог, де люди залишають свої історії подорожей. В інтернеті вже є туристичні блоги, але, проаналізувавши існуючі, можна сказати, що в кожного з них є хоча б один з нижче перерахованих недоліків

1. Блог веде тільки одна людина (тобто точка зору про країну, або місто складається з думки одної людини).
2. Історії не розділяються за категоріями. Приклади категорій: країна, місто, активний відпочинок, пасивний відпочинок, сімейний відпочинок. Такий поділ на категорії ускладнює пошук необхідної історії.
3. Нема пошуку по сайту - це ускладнює пошук необхідної історії.
4. Нема рейтингу найбільш популярних країн, міст або пам'яток -це теж ускладнює вибір місця відпочинку.
5. Нема рейтингу найбільш корисних історій та їх оцінки - а це необхідно для того, щоб відокремити цікаві та корисні історії від некорисних.
6. Нав'язливий та застарілий дизайн та незручний інтерфейс.
7. Нема зворотного зв'язку з автором - інколи необхідно щось дізнатись детальніше у автора. Звичайно ж доступ до даних автора повинен здійснюватися тільки після його згоди.
8. Нема можливості продивитись усі історії конкретного автора.

Враховуючи зазначене, поставлена мета розробки такого туристичного блогу, який буде мати максимум переваг та мінімум недоліків. Вихідними даними для розробки є історії подорожей зареєстрованих користувачів, які обробляються за допомогою інтелектуального аналізу тексту [1, 2]. Розглянемо загальний алгоритм аналізу історій на прикладі речення: «Страви були смачними, але офіціант працював повільно». На першому етапі необхідно виділити з тексту важливі для нас слова або словосполучення. В даному випадку це «страви», «смачними», «офіціант», «повільно». Це дозволяє зрозуміти, про що йде мова в реченні. Потім можна згрупувати терміни, наприклад, віднести «страви» і «смачними» до їжі, а «офіціант» - до обслуговування. Таке групування дозволить видавати агреговану статистику. І, нарешті, для оцінки тональності термінів проводиться класифікація, метою якої є вилучення з тексту емоційного змісту. Таким чином, аналіз тональності можна розглядати, як метод кількісного опису якісних даних, реалізований шляхом призначення деяких оцінок настрою. Хоча тональність в загальному випадку суб'єктивна, кількісний аналіз настроїв має багато корисних застосувань.

Виділивши важливі аспектні терміни, для розглянутого прикладу можна вивести статистику або зведення. Структурована інформація несе в собі набагато більше корисних даних, ніж просто оцінка по аспектам.

На основі таких структурованих даних можна побудувати рейтинг найбільш популярних країн, міст і місць визначних пам'яток. А на основі статистичної інформації, такої як кількість «лайків», які були поставлені історії, кількість прочитань (тобто переходів на сторінку з історією), дата написання історії, а також вид відпочинку (активний, пасивний, сімейний) можна побудувати рейтинг найбільш популярних історій, авторів або видів відпочинку.

Завдяки таким рейтингам користувач зможе знайти найбільш популярні місця, які варто відвідати, і самостійно вибрати місце подорожі і скласти його план, не вдаючись до сторонньої допомоги. На сайті передбачено пошук історій, їх сортування за датою додавання, по місту, країні, автору.

1. *Пазельская А.* Метод визначення емоцій у текстах російською мовою. Комп'ютерна лінгвістика та інтелектуальні технології. / Пазельская А, Соловйов А. // Діалог-2011: 36. науч. ст. - М.: Вид-во РДГУ, 2011.- №11 (18). - С.510-523.
2. *Пескова О. В.* Алгоритми класифікації повнотекстових документів. Автоматична обробка текстів на природній мові і комп'ютерна лінгвістика/ Пескова О. В. - М.: МІЕМ (Московський державний інститут електроніки і математики), 2011. - С. 170-212. - ISBN 978-5-94506-294-8

## ПРОЕКТУВАННЯ ТА РОЗРОБКА КРОСПЛАТФОРМНИХ НАСТІЛЬНИХ ПРОГРАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ATOM SHELL

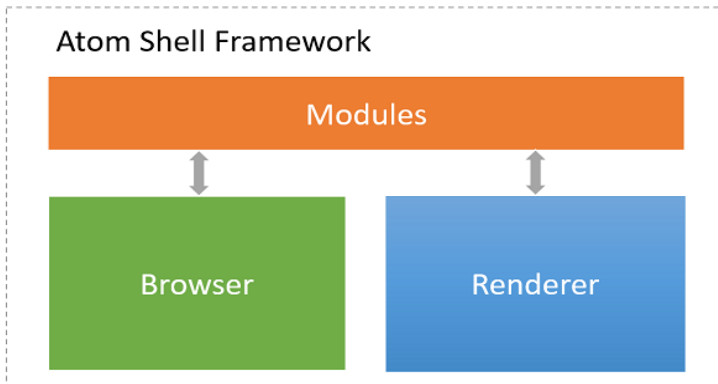
*Кобевко Андріан Тарасович, Україна,  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[anneaptolemkob@gmail.com](mailto:anneaptolemkob@gmail.com)*

Традиційні веб сторінки призначені щоб бути виконаними в веб-браузері з високим контролем і обмеженим доступом до ресурсів операційної системи, таких як файлова система з міркувань безпеки. Ось чому неможливо побудувати веб-додаток, який би взаємодіяв з носіями системи і ресурсів.

База Atom Shell забезпечує можливість створення настільних додатків з доступом до системних ресурсів з використанням популярних веб-технологій HTML, CSS і JavaScript. Фреймворк базується на часі виконання JavaScript io.js (Node.js розширений з кращого підтримкою нових функцій) і веб -браузері Chromium (з відкритим програмним кодом, частина з Google Chrome ).

Atom Shell складається з трьох основних частин:

- Browser-side - несе відповідальність за бізнес логіку і доступ до даних
- Render-side - несе відповідальність за UI(візуалізатор)
- Modules - міст між Browser-side і Render-side, і допомагає контролювати життєвий цикл додатка.





Atom Shell додаток зазвичай містить три типи файлів:

- JavaScript скрипти
- HTML and CSS markups
- Package.json

```
test-app/  
├─ package.json  
├─ main.js  
├─ mystyles.css  
└─ index.html
```

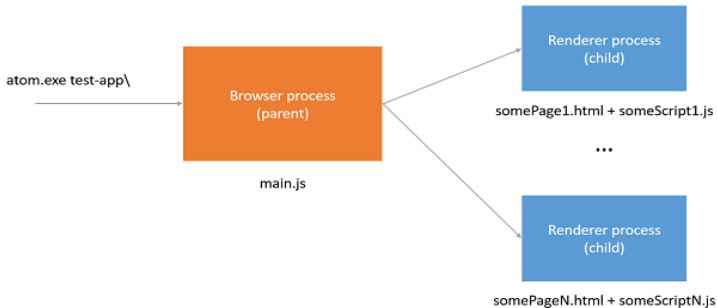
Найважливішим файлом додатку є package.json, який визначає точку входу в додаток.

```
{  
  "name"      : "sample-app",  
  "version"   : "0.1.0",  
  "main"     : "main.js"  
}
```

Для запуску програми необхідно запустити Atom Shell з шляхом на додаток.

```
atom.exe test-app\
```

Коли ви виконуете цю команду, ОС буде створювати для вас новий екземпляр Atom Shell (браузерний процес), що буде завантажувати скрипт, зазначений у package.json. Таким чином скрипт буде контролюватись і ви зможете робити все, що Ви хочете.



## ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМУ КОХОНЕНА ДЛЯ СЕГМЕНТАЦІЇ ГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В РІЗНИХ КОЛЬОРОВИХ ПРОСТОРАХ

*Козачук Сергій Ігорович, Україна*  
 Львівський національний університет імені Івана Франка  
 Факультет прикладної математики та інформатики  
[skozachuk@gmail.com](mailto:skozachuk@gmail.com)

У цій роботі було розглянуто доцільність використання штучних нейронних мереж для сегментації графічних зображень за допомогою алгоритму Кохонена. Створено програмне забезпечення для навчання нейронної мережі для забезпечення автоматизації проведення експериментів. Розглянуто випадки різних кольорових просторів зображень та аналіз сегментації в кожному із них. На основі проведеного аналізу зроблені висновки щодо виділення графічних образів в різних кольорових просторах алгоритмом Кохонена.

На рисунку 1 графічно описаний самоорганізовуючий алгоритм який був використаний для аналізу поставленої задачі. Спочатку отримується вхідний сигнал  $x$  і мережа визначає виграшний нейрон рахуючи евклідові відстані за допомогою рівняння 1. Процес оновлення рівняння 2 це варіація топологічних розташувань нейронів пропорційних до Евклідової відстані від виграшного нейрону до вхідних даних. Набута послідовність  $\alpha$  – це значення від 0 до 1 яке зменшується з часом. На рисунку 1.a тільки виграшний нейрон адаптується до вхідних даних і на рисунку 1.b інші нейрони які лежать по сусідству з виграшним адаптують свої топологічні координати. Нейрони поза сусідством залишаються незмінними. Цей процес повторюється допоки не буде досягнутий певний критерій.

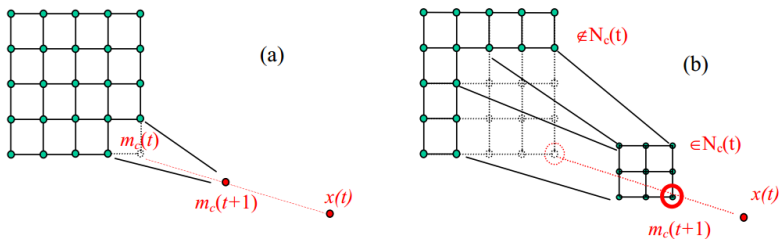


Рисунок 1. Графічний опис самоорганізованого процесу

Початкові данні мережі і набуті послідовності та їхні варіації в залежності від часу досліджуються по різному.

Для розв'язання поставленої мені задачі була використана інтерпретована об'єктно-орієнтовану мову програмування високого рівня Python версії 2.7. Цей вибір був пов'язаний з великою кількістю модулів у стандартному дистрибутиві мови, а також безліччю інших модулів які можна з легкістю підключити. Останнім часом ця мова себе зарекомендувала як дуже хороший та зручний прилад для розв'язання математичних проблем.

Проаналізувавши отримані результати приходимо до висновків що, самоорганізуюча мережа є досить потужним засобом задля виконання таких задач як сегментація зображення. Для цієї роботи мною було наведено багато прикладів використання в медичній сфері, але це аж ніяк не обмежує використання алгоритму, існує ще безліч інших галузей в яких так само виникає проблема розбиття зображень на регіони за певними критеріями. Такий тип результатів дозволяє медикам досліджувати різні органи людського організму задля виявлення дефектів чи хвороб, іноді сегментація медичних зображень навіть дозволяє уникнути хірургічного втручання.

1. *Воронцов К.В.* Машинное обучение: Курс лекцій/Воронцов К.В. – Режим доступу: <http://www.machinelearning.ru>
2. *Нікольський Ю.В.* Системи штучного інтелекту: навчальний посібник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – Львів: «Магнолія-2006», 2013. – 279 с.
3. *Felzenszwalb PF and Huttenlocher DP* (1998). Image Segmentation Using Local Variation, CVPR98 Santa Barbara, California.
4. *Gonzalez RC and Woods RE*, (1992). Digital Image Processing, Addison Wesley, Reading.
5. *Hinshaw W and Lent AH* (1983). An Introduction to NMR Imaging: From the Bloch Equation to the Imaging Equation, Proc. IEEE, vol. 71, pp. 338-350.
6. *Kapur T* (1999). Model based three dimensional Medical Image Segmentation, Ph.D. Thesis, Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology.
7. *Kohonen T* (1988). Self-Organization and Associative Memory, Springer-Verlag, Heidelberg.
8. *Kohonen T* (1991). Self-organizing Maps: Optimization and Approaches, ICANN, Espoo, Finland.
9. *Rueckert D, Burger P, Forbat SM, Mohiaddin RD and Yang GZ* (1997). Automatic Tracking of the Aorta in Cardiovascular MR images Using Deformable Models, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 16, No. 5, pp 581-590.
10. *Saiviroonporn P, Robatino A, Zahajszky J, Kikinis R and Jolesz FA* (1998). Real Time Interactive 3D- Segmentation. Acad. Radiol. 5:49-56

## ПОБУДОВА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ СТАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ВАЛІДАЦІЇ КОДУ В РЕЖИМІ РЕАЛЬНОГО ЧАСУ

*Кусий Андрій Олегович, Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики

[andrew.from.lviv@gmail.com](mailto:andrew.from.lviv@gmail.com)

Останнім часом можна спостерігати надзвичайно стрімкий розвиток хмарних технологій, як великі корпорації, так і компанії середнього розміру активно переносять сервери своїх аплікацій на віддалені машини. Особливо актуальним даний підхід є для серверів баз даних, оскільки він дає ряд значних переваг при розробці та використанні аплікації. До таких переваг можна зарахувати: можливість побудови аплікації розподіленою командою розробників, відсутність потреби у побудові та підтримці власного сервера та можливість динамічного розширення та скорочення кількості залучених ресурсів.

Для роботи з подібними хмарними сховищами, провайдери створюють веб середовища для розробки та тестування програмного забезпечення в режимі реального часу (Azure Online SQL Editor), або надають можливість встановлення віддаленого доступу із настільних аплікацій (Remote Server Connection) Однак, даний підхід має кілька значних недоліків, основними серед яких є низька швидкість і високий рівень навантаження мережі та сервера, спричинений потребою в постійному динамічному аналізі вихідного коду.

Завданням цієї роботи є знайти спосіб, як позбутися вказаних вище недоліків, за допомогою заміни динамічного аналізу вихідного коду - статичним. Розглянемо онлайн середовище для написання запитів мовою SQL. В даний час, всі подібні середовища оснащені засобами для миттєвого аналізу та автодоповнення коду, тому при кожній зміні тексту, відбувається запит до сервера, з метою валідації нового вихідного коду. При динамічній валідації, для того щоб перевірити зміну, сервер змушений скопіювати й виконати запит та повернути результат, разом із метаданими. Тільки після цього веб аплікація відображає користувачу можливі варіанти автодоповнення та коректність останньої внесеної зміни[1].

Якщо середня швидкість набору вихідного коду складає 260 символів за хвилину[2], то буде виконано приблизно 4 запити кожної секунди, з кожного активного сеансу. Кожен з цих запитів слугує

тригером для збору метаданих, компіляції та виконання надісланого вихідного коду, тим самим кожен запит залучає додаткові ресурси сервера. Крім того, варто зазначити, що такий динамічний аналіз працює тільки при відсутності перебоїв в роботі мережі, в іншому ж випадку - веб-аплікація припиняє реагувати на будь-які зміни у вихідному коді.

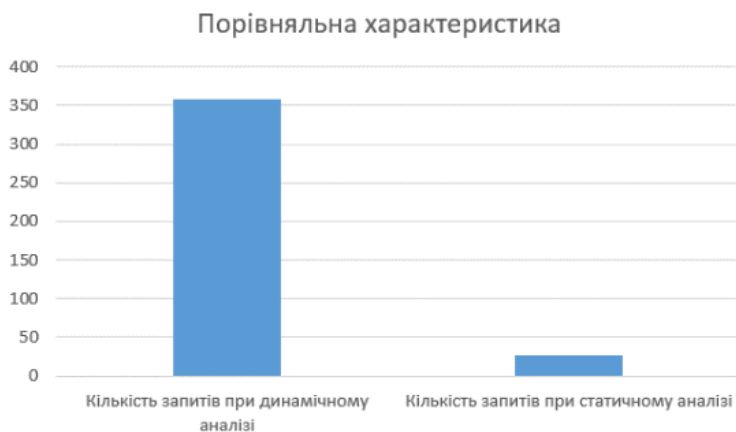
В цьому місці, для вирішення наведених вище проблем, можна використати статичний аналіз коду. Концепція даного підходу, полягає в тому, що аналіз та валідація запиту відбувається на стороні клієнта, без потреби з'єднання із сервером, аж до того моменту, коли потрібно виконати запит та отримати реальні дані із сервера БД. Сам аналіз коду відбувається в кілька послідовних етапів.

Перш за все, вихідний код проходить перевірку Синтаксичним Аналізатором (Parser), будується синтаксичне дерево запиту та виконується його обхід з метою встановлення валідності. При побудові даного дерева використовуються принципи Пріоритетного Рекурсивного Спуску та Алгоритмічна Логіка Флойда-Гоара, описані в [3]. Якщо в момент побудови або обходу дерева були виявлені синтаксичні помилки, то код є невалідним та не проходить подальшого аналізу та виконання.

Після успішного проходження синтаксичного аналізу, вихідний код проходить через Лексичний Аналізатор (Lexer), основним завданням якого є побудова масиву токенів, який би відповідав синтаксичному дереву та містив всю інформацію про вихідний код. Кожен токен містить інформацію про структуру та призначення відповідного елемента вихідного коду, в залежності від його розташування.

Коли синтаксичне дерево та масив токенів збудовані, залишається тільки провести перевірку Семантичним Аналізатором. На етапі семантичного аналізу відбувається перевірка структури та доступності об'єктів бази в сформованому запиті. Для проведення такого аналізу потрібно мати дані про структуру бази, тому при ініціалізації аплікації виконується запит до БД та завантажуються потрібні метадані (структура таблиць, обов'язкові аргументи функцій тощо) які зберігаються в кеші клієнтського застосунку, та періодично оновлюються. Надалі, Семантичний Аналізатор, використовуючи дані із кешу, проводить перевірку коду та пошук семантичних помилок. Ще одним завданням, Семантичного Аналізатора є формування потенційних пропозицій для автодоповнення коду, на основі семантичної структури та метаданих БД. Після успішного проходження семантичного аналізу, при потребі, синтаксичне дерево, разом із вихідним кодом запиту, відправляються на сервер – для виконання та отримання результатів.

Для того, щоб порівняти результати динамічного аналізу та запропонованого підходу, в межах даної роботи, було проведено програмну симуляцію створення SQL запитів різного розміру та складності. В якості онлайн середовища розробки використано SAP HANA SQLScript Editor. Протягом симуляції було створено 50 запитів розміром від 11 до 708 символів із середньою швидкістю набору – 260 символів за хвилину. При статичному аналізі, оновлення метаданих відбувалось кожні 10 секунд. Як можна бачити на рисунку, кількість запитів до сервера при використанні даного підходу в порівнянні з традиційним - у 24 рази менша. Крім того, при наявності 100 активних середовищ розробки, вдалось зменшити рівень завантаженості сервера з 76% до 29%.



*Рисунок 1 – Порівняльна характеристика динамічного та статичного аналізу(кількість запитів).*

Можна зробити висновок, що статичний аналізатор коду, може бути слушним рішенням для підвищення продуктивності роботи із віддаленими серверами БД.

1. *Thomas Ball.* The Concept of Dynamic Analysis, 1st Edition//. Bell Laboratories 1999.
2. *Joanna Horne.* Computerised assessment of handwriting and typing speed // Educational & Child Psychology Vol. 28 No. 2, 2011
3. *Vaughan R. Pratt,* Top down operator precedence, Proceedings of the 1st annual ACM SIGACT-SIGPLAN symposium on Principles of programming languages, p.41-51, October 01-03, 1973, Boston, Massachusetts

## СТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОЇ СИСТЕМИ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ

*Лісовий Артем Сергійович, Україна*  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
ТКВТ  
[artemlisovyi@gmail.com](mailto:artemlisovyi@gmail.com)

На ринку захисту інформації пропонується багато окремих інженерно-технічних, програмно-апаратних, криптографічних засобів захисту інформації. В літературі по захисту інформації можна знайти опис методів і засобів на їх основі, теоретичних моделей захисту. Однак для того, щоб створити на підприємстві умови ефективного захисту інформації, необхідно об'єднати окремі засоби захисту в систему. При цьому треба пам'ятати, що головним елементом цієї системи є людина. При чому людина є ключовим елементом системи і разом з тим самим важко формалізованим і потенційно слабкою її ланкою. Створення системи захисту інформації (СЗІ) не є головним завданням підприємства, як, наприклад, виробництво продукції і отримання прибутку. Тому створювана СЗІ не повинна призводити до відсутності трудощів в роботі підприємства, а створення СЗІ має бути економічно виправданим. Тим не менш, вона повинна забезпечувати захист важливих інформаційних ресурсів підприємства від усіх реальних загроз.

Характерною особливістю подібних систем є насамперед наявність людини в кожній з підсистем і віддаленість (розділеність) людини від об'єкта його діяльності. Це відбувається у зв'язку з тим, що безліч компонентів, що складають об'єкт інформатизації, інтегрально може бути представлено сукупністю трьох груп систем:

- люди (біосоціальних системи)
- техніка (технічні системи та приміщення, в яких вони розташовані)
- програмне забезпечення, яке є інтелектуальним посередником між людиною і технікою (інтелектуальні системи)

Сукупність цих трьох груп утворює соціотехнічну систему. Таке уявлення про соціотехнічні системи є досить широким і може бути поширене на багато об'єктів. Коло наших інтересів обмежується дослідженням безпеки систем, призначених для обробки вхідної інформації і видачі результату, тобто соціотехнічних систем інформаційного типу.

Основною проблемою реалізації систем захисту є: з одного боку, забезпечення надійного захисту, що знаходиться в системі інформації, з

іншого боку, системи захисту не повинні створювати помітних незручностей авторизованим користувачам в ході їх роботи з ресурсами системи. Проблема забезпечення бажаного рівня захисту інформації досить складна, що вимагає для свого рішення не просто здійснення деякою сукупністю наукових, науково-технічних і організаційних заходів і застосування спеціальних засобів і методів, а створення цілісної системи організаційно-технологічних заходів і застосування комплексу спеціальних засобів і методів захисту інформації (ЗІ).

Головна мета створення системи захисту інформації - її надійність. Система захисту інформації - це організована сукупність об'єктів і суб'єктів інформаційного захисту, використовуваних методів і засобів захисту, а також здійснюваних захисних заходів.

Усвідомлення необхідності розробки стратегічних підходів до захисту формувалося в міру усвідомлення важливості, натхнення і проблеми захисту і неможливості ефективного її здійснення простим використанням деякого набору засобів захисту. Під стратегією взагалі розуміється загальна спрямованість в організації відповідної діяльності, що розробляється з урахуванням об'єктивних потреб в даному виді діяльності, потенційно можливих умов її здійснення і можливостей організації.

Завдання стратегії полягає в створенні конкурентної переваги, усунення негативного ефекту нестабільності навколишнього середовища, забезпеченні прибутковості, врівноваженість зовнішніх вимог і внутрішніх можливостей. Через її призму розглядаються всі ділові ситуації, з якими організація стикається в повсякденному житті. Відомий канадський фахівець в області стратегічного управління Г. Мінцберг запропонував визначення стратегії в рамках системи «5-Р». На його думку, вона включає:

- план (Plan),
- прийом, або тактичний хід (Ploy),
- модель поведінки (Pattern of behaviour),
- позицію по відношенню до інших (Position in respect to others),
- перспективу (Perspective).

Єдиних рецептів вироблення стратегій не існує. В одному випадку доцільно стратегічне планування (програмування); в іншому - ситуаційний підхід.

Виходячи з великої різноманітності умов, при яких може виникнути необхідність захисту інформації, загальна цільова установка на вирішення стратегічних питань повинна полягати в розробці безлічі стратегій



захисту, і вибір такого мінімального їх набору, який дозволяв би раціонально забезпечувати необхідний захист у будь-яких умовах.

1. Комплексные системы защиты информации [Електроний ресурс]  
<https://www.dltens.ru/> Режим доступу: URL:  
<https://www.dltens.ru/kszi1.html> – Загл. з екрану

## МЕТОД ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ У СЕНСОРНИХ МЕРЕЖАХ

*Масловський Владислав Юрійович, Будько Олександр Олексійович*

Україна,

Харківський національний університет радіоелектроніки,

факультет комп'ютерної інженерії та управління

[akmyto@gmail.com](mailto:akmyto@gmail.com)

Сучасні сенсорні мережі дозволяють генерувати велику кількість даних. Основною вимогою до таких мереж є постановка задачі забезпечення надійності виконання поставленого завдання в залежності від функціонального призначення мережі [1].

Найбільш розповсюдженим класом сенсорних мереж є безпроводний. Такі мережі складаються з сенсорів, які реалізують функції збору різних даних (температури, освітленості, рівня вібрації тощо). Дані передаються на центральний вузол, з якого дані надходять до обчислювальної структури. Сенсори характеризуються гнучкою архітектурою, низькими витратами при монтажі. Однією з поширених проблем при реалізації безпроводних сенсорних мереж – є ускладнена передача даних з віддалених ділянок мережі. Тому актуальною є проблема збереження цілісності потоків даних в проміжку часу до відновлення повної або часткової функціональності сегментів мережі для отримання максимально точних даних.

В роботі пропонується модернізований метод, заснований на зберіганні даних сенсорів в відрізаних ділянках мережі за рахунок хаотичної передачі даних і пошуку можливого з'єднання [2]. Для того, щоб підвищити надійність мереж зв'язку, слід використовувати механізми нечіткої логіки для віртуалізації сховища даних. В якості шифрування використовуються детерміновані імпульси для формування спеціального сигналу. Також проводиться перевірка цілісності даних і при нестачі пам'яті всередині створеного віртуального сховища буде проводитися заміна шляхом видалення застарілих даних. В результаті такого підходу при підключенні до основної мережі дані будуть передаватися з мінімальними втратами. Розроблений метод забезпечує зберігання даних за рахунок ефективного використання пам'яті всіх сенсорів сегменту мережі.

У подальшому планується проведення моделювання теоретичних напрацювань з метою практичного впровадження. Робота буда виконана в лабораторії Моделювання систем кафедри ЕОМ ХНУРЕ.

1. *Sharma A. et al. Analysis and Simulation of Energy Efficient Optimal Scenarios for Cluster Based Routing Protocol in Wireless Sensor Network //Journal of Network Security Computer Networks.* – 2016. – Т. 2. – №. 1.

2. *Аль-Наггар Я. М. Алгоритм выбора головного узла кластера для всепроникающих сенсорных сетей // Электросвязь.* – 2014. – №. 9. – С. 14-18.

## ЗОБРАЖЕННЯ В QR КОДАХ

*Пилипчак Олег Ярославович, Україна*  
Львівський національний університет ім. І. Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[liole.plo@gmail.com](mailto:liole.plo@gmail.com)

QR код – це поширений тип графічного матричного коду. Він використовується у різних сферах діяльності від маркування продуктів у магазинах та посилань на інтернет-сторінки до оплати проїзду в громадському транспорті. Такі графічні коди виглядають як випадковий набір чорних і білих пікселів та потребують багато простору для їх коректного розпізнання. З одного боку, важливо залишити узор читабельним для обчислювальних пристроїв, а з іншого забезпечити користувачів приємними та інформативними результатами.

Отже, метою цієї роботи є створити QR коди, які будуть в собі нести не тільки зашифровану в них інформацію, а й виглядати схожими до наперед заданого зображення.

Коди з візуальними елементами є актуальною темою, адже, такі компанії, як Facebook (Messenger) та Snap (Snapchat) вже створили власні версії таких кодів. Проте, ці коди не є відкритими, базуються на потребах цих компаній, які не надають засобів їх створення. У цій роботі розглянуто стандартизовані QR коди, які можна буде декодувати у будь-якій програмі.

Спочатку варто зауважити, що завдяки поліноміальному алгоритму Ріда-Соломона для виправлення помилок, який реалізований у цій роботі та є вбудованим у стандарт таких кодів, ми можемо відновити від 7% до 30% пошкоджених даних в залежності від обраного рівня корекції. Це допоможе забезпечити розпізнання та декодування зображення, навіть, якщо наші модифікації сильно змінять деяку частину коду.

Більшість зображень є кольоровими, проте для пристроїв, які оперують QR кодами, важливо чітко розрізнати темні блоки від світлих, тому використовуватимемо монохромні зображення. Це дасть змогу оперувати булевими даними при роботі з ними, аналогічно до роботи зі звичайними кодами. При перетворенні кольорового зображення використаємо алгоритм Флойда-Стейнберга для розподілу похибки кольору. Це дозволить зберегти всі градації у вигляді оптичної ілюзії.

Для найкращого балансу між чіткістю вихідного зображення та якістю його читання різними приладами було прийнято рішення поділити

кожний модуль вхідного коду на 9 підмодулів, тобто квадратів  $3 \times 3$ . Аналізуючи всі 512 ( $2^9$ ) можливих візерунків цих підмодулів, можна визначити імовірність їх прочитання як білого або чорного модуля. Таким чином, можна зробити заміну візерунку з урахуванням запасу корекції помилок.

Текст, що закодовується, задля підтримки більшої кількості форматів, не змінювався. Таким чином, як інформаційні послідовності можна буде використовувати не тільки посилання на сайти, а і звичайний текст, або бінарні дані. Специфікація QR кодів, на останньому етапі його генерування, потребує накладання однієї з 8 запропонованих масок, задля підсилення випадковості візерунку. Це не є нашою метою, тому ми можемо вибрати маску, після накладання якої якнайбільше модулів співпадатиме з вхідним зображенням. Це не порушить його структури, оскільки цю маску ми теж передаємо у функціональних модулях.

Виходячи з цього, збереження функціональних модулів, таких як, накладена маска, інформація про версію та квадрати вирівнювання є важливими для коректного розпізнання зображення, як QR коду, тому замінювати їх на підмодулі зображення не будемо. Також це допоможе користувачам ідентифікувати отримане зображення, як QR код, та зчитати його за допомогою свого пристрою.

Користувачу програми для створення QR кодів зі зображень надана можливість коректувати зображення, визначати, які модулі важливіші, і мають виглядати як вихідний малюнок, а які можна проігнорувати, задля підвищення рівня розпізнавання.

На рисунку 1 зображено приклад закодування посилання на сайт університету у QR код, в який вбудовано зображення його головного корпусу.



Рисунок 1. Приклад коду – сайт університету

Як бачимо, зберігаючи можливість розпізнати цей код та отримати інформацію з нього, ми змогли надати йому зрозумілого вигляду. Інший приклад із гербом факультету та посиланням на його сайт наведений на рис. 2. У цьому прикладі вибрано вищу версію коду, тобто роздільна здатність краща.

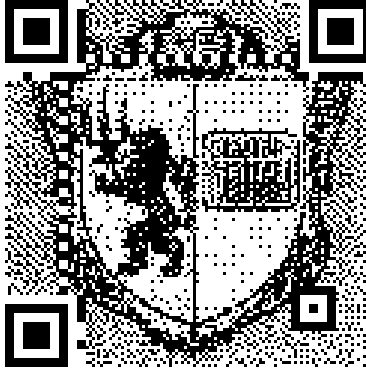


Рисунок 2. Приклад коду – сайт ФПМІ

Використовуючи різні функції удосконалення зображення можна отримати код якнайкращого вигляду. Така технологія може бути використана для інформування користувачів про зміст коду, що зменшить необхідність його описувати, або просто приверне їх увагу.

1. *Hung-Kuo Chu et al.*, 2013, Halftone QR Codes
2. *Cox R.*, 2012, QArt Codes
3. *Reed S., Solomon. G.*, 1960, Polynomial Codes over Certain Finite Fields
4. *Floyd R., Steinberg L.*, 1976, An adaptive algorithm for spatial grey scale

**НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ. РОЗПІЗНАВАННЯ ОБЛИЧ**

*Райтер Орест Костянтинович*, Україна  
Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
*Комарницький Томаш Маркович*, Україна (Італія)  
Львівський національний університет ім. Івана Франка  
(Università Degli Studi dell'Aquila),

факультет прикладної математики та інформатики

[i.am.mr.ursa@gmail.com](mailto:i.am.mr.ursa@gmail.com)

[TomKomarnicki@gmail.com](mailto:TomKomarnicki@gmail.com)

З розвитком технологій, проблема розпізнавання образів стала однією із популярніших тем сьогодення. Сама проблема являє собою, як без використання людського ресурсу можна було би розпізнавати об'єкти, наприклад яблуко або помідор, в загальному відносно форми подібні, навіть є червоні яблука і зелені помідори, но як їх відрізнити. На допомогу нам приходять теорія розпізнавання образів, но самостійно така система працювати не буде. Один із кращих варіантів буде технологія сьогодення – нейронні мережі.

Штучна нейронна мережа – це математична модель, а також її програмна та апаратна реалізація, побудовані за принципом функціонування біологічних нейронних мереж — мереж нервових клітин живого організму. Це поняття виникло при вивченні процесів, які відбуваються в мозку, та при намаганні змодельовати ці процеси.

Основною проблемою є, знаходження обличч і їх обробка при скануванні фотографії, відео. Нам потрібно знайти, де на фото розташована людина і не сплутати її з годинником на стіні і кактусом на підвіконні. Здавалося б, просте завдання для людини, но виявляється не такою простою задачею для комп'ютера. Для того, щоб знайти особу ми повинні виділити його основні компоненти, такі як ніс, лоб, очі, губи і т.д. Щоб вирішити таку проблему, будемо використовувати шаблони (вони ж примітиви Хаара). Ці шаблони являють собою властивості які пояснюють шукані нами компоненти обличчя. Якщо застосувати шаблони до всього зображення ми не знайдемо там осіб, тому що вони будуть менші ніж наші шаблони. Для того щоб шукати на всіх фото обличчя різних розмірів, використовується метод ковзного вікна. Саме всередині цього

вікна і вираховуються примітиви. Вікно як би ковзає по всьому зображенню. Після кожного проходження зображення, вікно збільшується, щоб знайти обличчя більшого масштабу. Цей метод для роботи простий, но не ефективний, чому? А тому що часто зображення зроблено із різним освітленням, частину обличчя не видно, або воно розмите, чи якісь зображення є поганою. Для рішення такої проблеми підходять нейронні мережі, а якщо точніше, Convolutional Neural Network (згорткові нейронні мережі).

Щоб ЗНМ зуміла із шансом в 98.9% найти два однакових обличчя потрібно придумати спосіб навчити ЗНМ відрізняти обличчя і шукати однакові, або візуально подібні. Для цього ми застосуємо Active Appearance Models (активні моделі зовнішнього вигляду): це статистичні моделі зображень, які шляхом різного роду деформацій можуть бути підігнані під реальне зображення.

Для цього ми за допомогою деформацій і методу градієнтного спуску, будуємо точки і створюємо таку собі 3D модель обличчя, виконуючи триангуляцію. Процедура навчання ААМ починається з нормалізації форм на розмічених зображеннях з метою компенсації різниці в масштабі, нахилі і зміщенні. Для цього використовується так званий узагальнений Прокрустом аналіз. Далі з пікселів всередині трикутників, утворених точками форми, формується матриця, така що, кожен її стовпець містить значення пікселів відповідної текстури. Варто відзначити, що використовувані для навчання текстури можуть бути як одноканальними (градації сірого), так і багатоканальними (наприклад, простір кольорів RGB або інше). У разі багатоканальних текстур вектори пікселів формуються окремо по кожному з каналів, а потім виконується їх конкатенація. Після знаходження головних компонент матриці текстур модель ААМ вважається навченою.

Приклад конкретизації ААМ – вектор параметрів форми

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T = (-54, 10, -9.1, \dots)^T$$

використовується для синтезу моделі форми  $s$ , а вектор параметрів

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T = (3559, 351, -256, \dots)^T$$

для синтезу зовнішнього вигляду моделі. Підсумкова модель особи

$$M(W(x; p))^T$$

виходить як комбінація двох моделей - форми і зовнішнього вигляду. Підгонка моделі під конкретне зображення обличчя виконується в процесі рішення оптимізаційної задачі, суть якої зводиться до мінімізації функціоналу методом градієнтного спуску. Знайдені при цьому параметри моделі і відобразатимуть стан моделі на конкретному зображенні.



За допомогою ААМ можна моделювати зображення об'єктів, схильних до як жорсткої, так і нежорсткій деформації. ААМ складається з набору параметрів, частина яких представляють форму особи, інші задають його текстуру. Під деформацією зазвичай розуміють геометричне перетворення у вигляді композиції перенесення, повороту і масштабування. При вирішенні задачі локалізації особи на зображенні виконується пошук параметрів (розташування, форма, текстура) ААМ, які представляють синтезування зображення, найбільш близьким до спостережуваного. За ступенем близькості ААМ підганяє зображення, далі приймається рішення - є особа на зображенні чи ні.

## МОВА ПРОГРАМУВАННЯ V (НЮ)

*Ривак Володимир Ігорович*, Україна  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[GreatV@email.ua](mailto:GreatV@email.ua)

Мова програмування *v* (лат. ню) – об’єктна мова програмування. Синтаксис мови в дечому є C-подібним, типізація статична. Трансляція генерує з сирцевого коду «проміжне представлення» – сукупність описів структур даних, функцій і відношень між ними. Проміжне представлення в подальшому транслюється в LLVM інструкції, що робить мову придатною для будь-якої платформи, для якої реалізований відповідний back-end. На даний момент мова перебуває у стані активної розробки.

Основні особливості мови *v* – відділення імен від сутностей, гнучкість механізмів іменування, каскадний препроцесинг, контекстно-залежні правила синтаксичного розбору. Основні цілі мови – універсальність, швидкодія, боротьба з архаїзмами і необґрунтованими обмеженнями, можливість розвитку синтаксичних конструкцій через користувацькі бібліотеки (а не ядро мови). На меті є створити універсальне і гнучке ядро, навколо якого користувачі могли б сформувати зручний для себе інтерфейс. У своєму використанні мова *v* опирається на активне застосування новітніх підходів до розробки: код-стандартів і середовищ розробки. Ідея в тому, щоб не обмежувати розробника, а дати йому якомога більше, аби потім з цієї множини кожен міг виокремити для себе необхідні засоби.

Відкинувши несуттєві деталі, мову можна розділити на три основні компоненти: імена, схеми і алгоритми. Перші – дозволяють розробнику розрізняти сутності під час написання програми, другі – представляють собою контейнери для даних, треті – алгоритми над цими даними.

Імена призначені для зручної ідентифікації об’єктів користувачем. Вони відділені від решти механізмів мови, даючи можливість оперувати іменем в незалежності від того, якій сутності воно належить (схема, алгоритм, блок, etc).

Схеми є шаблонами майбутніх змінних, аналогами класів, типів і структур з відомих нам мов програмування. Схеми до певної міри визначають структуру і поведінку об’єктів які будуть створені «за їх виглядом і подобою». Також вони описують загальну структуру програми, умовно розбиваючи її на області, які вирішують окремі задачі.

Алгоритми визначають поведінку об'єктів, операції над даними. Кожен алгоритм описує необхідні синтаксичні умови для своєї реалізації, дозволяючи розширити множину варіантів свого застосування у кодї програми. Алгоритми є аналогами функцій, властивостей і процедур, але з більшою претензією до синтаксису. Оголошуються алгоритми всередині схем і декларують поведінку для усієї множини її екземплярів.

Мова *v* – певною мірою експеримент, спроба дослідити можливі переваги відкритого доступу до формування синтаксису. Мови загального призначення часто не дають достатньо засобів, щоб підігнати синтаксис під певні потреби. Наслідком цього є те, що велика кількість задач виноситься в окремі рішення (предметно-орієнтовані мови). Прикладами тому є мови, предметними областями яких є розмітка (HTML), текст (TeX), бази даних (SQL), графічний інтерфейс користувача (Tcl), командні стрічки (Unix Shell), моделювання (UML), та інші. Реалізація кожного такого рішення окремо вимагає і окремих ресурсів для створення базових компонентів транслятора. Більше того, окремі рішення зазвичай бувають несумісні між собою і вимагають додаткового втручання для можливості роботи в єдиній системі. Можливість гнучких налаштувань синтаксису дає змогу уникнути цих проблем, формуючи предметно-орієнтовану мову поверх базового функціоналу.

## ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ШИФРУВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

*Солдатов Максим Дмитрович, Олеськів Ярослав Ярославович, Україна*

Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[slavko.ol96@gmail.com](mailto:slavko.ol96@gmail.com)

[max.sold32@gmail.com](mailto:max.sold32@gmail.com)

Доволі поширеною є ідея застосувати теорію прийняття рішень у шифрувальних системах для спрощення і пришвидшення роботи при надзвичайних ситуаціях. Сформулюємо саму задачу. Нехай нам необхідно передати деяке повідомлення, яке оцінюється такими параметрами як об'єм інформації, час актуальності та важливість. Припустимо, що ми використовуємо такі чотири шифри: шифр Цезаря, шифр простої заміни, шифр Віженера та шифр частотоку, які, в принципі, можуть бути замінені будь-якими іншими існуючими шифрами. Окрім того можуть бути застосовані їхні комбінації. В залежності від оцінок повідомлення, комп'ютер повинен вибрати найкращий варіант для шифрування переданого повідомлення.

Тепер необхідно означити оцінки для повідомлень. Чим менший час актуальності, тим простіший алгоритм можна вибрати для швидшого розшифрування. Чим більша важливість, тим більше маніпуляцій варто зробити з текстом. Чим більший обсяг повідомлення тим складніший шифр треба вибрати для ускладнення дешифрування. Припустимо, що дешифрування буде здійснюватися методом брутальної атаки. В чому ж полягає роль теорії прийняття рішень? Враховуючи оцінки, комп'ютер вибиратиме оптимальний варіант шифрування для даного випадку. Оскільки ми використовуємо симетричні алгоритми, відправник та одержувач повинні попередньо узгодити ключі для кожного з алгоритмів і тримати їх в таємниці. Ключем, що передається, буде число, яке формуватиметься в залежності від оцінок і позначатиме спосіб використання даних алгоритмів шифрування, які також повинні бути узгодженні заздалегідь.

Для розв'язання нашої задачі будується дерево вибору. Листками цього дерева будуть всі можливі комбінації заданих шифрів, котрі будуть відповідним чином пронумеровані числами від одиниці. Кожна цифра виступатиме в ролі ключа, який відповідатиме певній комбінації шифрів.

Необхідно пов'язати загальну оцінку повідомлення і оцінку алгоритмів. Для цього введемо уніфіковану оцінку виду:

$\alpha * t + \beta * l + \gamma * i$ , де  $\alpha * t$  – оцінка часу актуальності,  $\beta * l$  – оцінка величини повідомлення,  $\gamma * i$  – оцінка важливості. Коефіцієнти обиратимемо так, щоб загальна сума була в межах від нуля до одиниці. За оцінку алгоритмів братимемо їхню стійкість до бруталної атаки, затрати на шифрування. Оцінку шифрування будемо за тією ж схемою, що і оцінку повідомлення. Далі необхідно, застосовуючи методи теорії прийняття рішень, побудувати алгоритм знаходження оптимального варіанту шифрування. Для цього шукатимемо найбільшу схожість оцінок. Враховуючи невелику кількість можливих варіантів, застосується метод простого перебору. Перебираючи оцінки методу шифрування, ми знайдемо ту, котра є найближчою до оцінки повідомлення і використаємо цей метод.

Отже, математичну модель можна подати у такий спосіб. На вхід подається саме повідомлення та дві величини: час актуальності та важливість. Далі ми з'ясуємо об'єм повідомлення і обираємо коефіцієнти  $\alpha, \beta, \gamma$  так, щоб вони задовольняли умову, що уніфікована оцінка лежить в межах від нуля до одиниці, та знаходимо найкращий варіант кодування і формуємо ключ. На виході ми отримаємо пару: зашифрований текст і ключ. І передаємо її одержувачу.

1. *Алферов А. П.* Основы криптографии / А. П. Алферов, А. Ю. Зубов, А. С. Кузьмин, А. В. Черемушкин. – М.: Гелиос АРВ., 2002. – 480 с.
2. *Бартіш М. Я.* Дослідження Операцій / М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний - Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 168 с.
3. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в Волшебных Странах / О. И. Ларичев. – М.: Логос, 2000.–296 с.
4. *Рябко Б. Я.* Основы современной криптографии и стеганографии / Б. Я. Рябко, А. Н. Фионов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 232 с.

## ПРОЕКТУВАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ 3D ОБ'ЄКТІВ

*Тимчишин Святослав Ярославович, Україна*  
Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[21826599@ukr.net](mailto:21826599@ukr.net)

На сьогоднішній день у світі існує багато систем візуалізації 3-D об'єктів, проте жодне з існуючих рішень не має можливості проектувати просторові фігури. У даній роботі пропонується варіант системи проектування геометричних об'єктів у 3-D просторі за мінімальних затрат. Розроблене програмне забезпечення надає можливість будувати віртуальні просторові об'єкти згідно параметрів, які користувач зможе ввести відповідно до обраного ним класу об'єкта.

У даній роботі для створення системи візуалізації 3-D об'єктів використано основи побудови просторових геометричних фігур, моделі їх оптимізації, а також математичні основи комп'ютерної графіки з використанням алгоритмів спрощення 3D-полігональних об'єктів і афінних перетворень у просторі.

Враховуючи затрати на процес реалізації, для спрощення системи використано основні алгоритми побудови об'єктів векторної графіки, що базуються на побудові графічних примітивів, таких як лінії що з'єднуються вузлами. Слід зауважити, що для побудови складніших об'єктів, кількість таких вузлів значно зростає.

У зв'язку з вище сказаним пропонується використання ітераційних алгоритмів, що дає змогу спростити полігональні моделі, які в свою чергу можна поділити на два типи:

- моделі на основі проріджених вершин;
- моделі, що базуються на методах згортання ребра.

Найшвидшим алгоритмом геометричного спрощення, що належить до категорії проріджування вершин, є алгоритм кластеризації вершин.

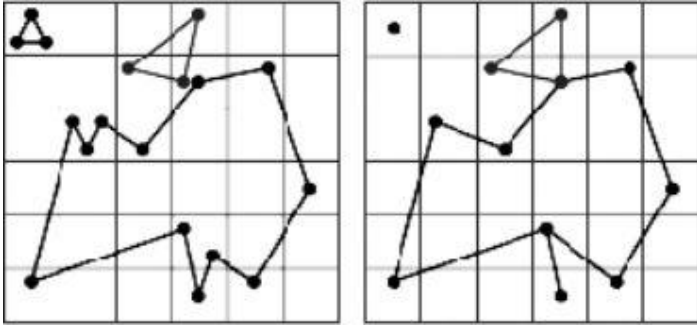


Рис. 1. Етапи виконання алгоритму кластеризації вершин

Даний метод полягає в об'єднанні вершин, що містяться в одному кластері простору, в одну. Кластери утворюють собою тривимірну сітку, тобто координати вершин фактично заокруглюються із заданою точністю, а у разі збігу кількох вершин, після заокруглення, ці вершини замінюються однією.

На противагу розрідженню, згортання ребра передбачає операцію злиття двох вершин, які утворюють ребро, в одну (рис. 2). При цьому, в загальному випадку, відбувається видалення двох трикутних комірок. Кількість ітераційних кроків визначається досягненням заданої кількості граней або деякого порогового значення.

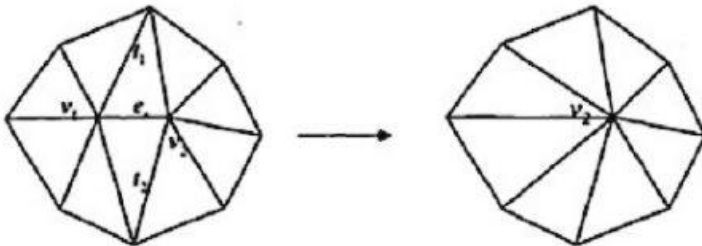


Рис. 2. Процедура згортання ребра  $e_r$ . Вершина  $V_1$  переноситься у вершину  $V_2$

Подібно до більшості завдань спрощення, також виникає проблема вибору між якістю представлення 3D-моделей і швидкодією їх відтворення. Критерієм ефективності прийнято вважати власне швидкодію.

Обертання об'єктів здійснюємо застосовуючи загальну форму афінних перетворень у просторі, що задається системою рівнянь:

$$x' = ax + by + ez + m$$

$$y' = cx + dy + fz + n$$

$$z' = gx + hy + pz + l$$

де  $(x', y', z')$  – точки (вектори), що одержуються в результаті цих перетворень.

На сьогоднішній день створення системи візуалізації 3-D об'єктів є досить трудомістким процесом, тому у даній роботі запропоновано методи їх побудови за мінімальних затрат часу і ресурсів.

1. *Cohen J., Varshney A., Manocha D., Turk G., Weber H., Agarwal P., Brooks F. and Wright W. Simplification Envelopes. // In ACM SIGGRAPH 96 Conference Proceedings, – 2001 – P. 119–128.*
2. *Анісімов В.А., Терещенко В.М., Кравченко І.В. Основні алгоритми обчислювальної геометрії: Навч. посібн. – К.: Київський університет, 2002. – 82 с*
3. *Тозик В.Т., Меженін А.В. 3ds max 7: трехмерное моделирование и анимация. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 992 с: ил*



## СТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ “INFORMATICS”

*Черкаска Роман Сергійович, Україна*

Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет інформаційно аналітичних технологій та менеджменту  
[cherkasko.roman@gmail.com](mailto:cherkasko.roman@gmail.com)

Розвиток сучасного суспільства визначається стрімким старінням знань, а отже зростають потреби в їх оновленні. Досягнення інформаційних технологій дають змогу вирішити дану проблему шляхом використання дистанційного навчання (ДН). Але, для забезпечення навчального процесу необхідне масштабне застосування потужних систем, що зможуть забезпечити дистанційний доступ до ресурсів навчального призначення, таких як електронні бібліотеки, курси дистанційного навчання, системи тестування, електронні підручники та інші ресурси.

Проаналізувавши існуючі системи керування навчанням (Learning Management System (LMS)), можна виділити такі: Moodle, Прометей, Віртуальний Університет, та всі вони мають вагомні недоліки, а саме потребують потужного серверу або придбання ліцензії що дозволить використання.

Тобто, розробка LMS має великі перспективи і надає потужну альтернативу традиційному процесу навчання, через це було прийнято рішення створити власну безкоштовну та легку в використанні систему ДН, що буде надавати весь необхідний функціонал для успішного процесу навчання.

Метою цієї роботи є розробка веб додатку “Informatics” для керування процесом ДН. Ця система повинна передбачати декілька ролей доступу, а саме: студент, викладач, адміністратор, та в повній мірі виконувати необхідний функціонал для цих користувачів. передбачати зручні можливості взаємодії с системою. Не менш важливим було реалізувати гнучку та добре спроектовану структуру додатку для легкого розширення функціоналу системи в майбутньому (за необхідністю).

Загальний опис системи ДН: студент реєструється в системі та отримує можливість вивчати будь який доступний курс, переглянути інформацію про власну успішність, надати особисту інформацію про себе за бажанням. В свою чергу викладач повинен мати функції які дозволять організувати все необхідне для зручного процесу навчання певного курсу

студентами (завантажити необхідні матеріали чи завдання, розробити найбільш зручну структуру курсу, що вивчається) також мати можливість оцінити роботу, яку надає той чи інший студент. Адміністратор має виконувати організаційну роботу та управління всією системою, відстежувати існуючі данні в системі та мати можливість видалити чи відредагувати їх при необхідності.

Під час проектування системи було побудовано різні UML діаграми. Діаграма варіантів використання з точки зору ролі «студент» показана на рисунку 1.

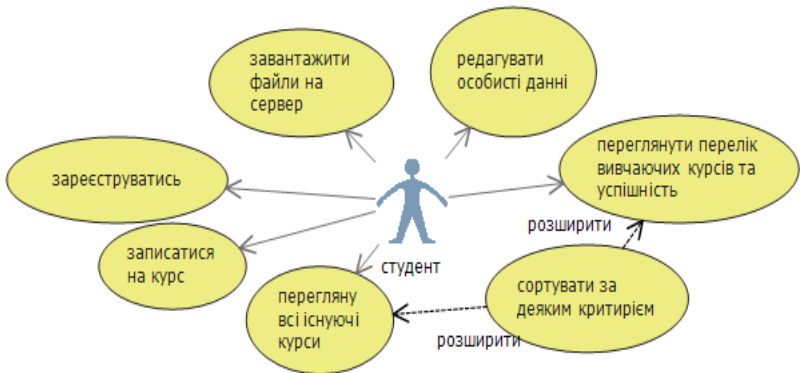


Рис.1 – Діаграма варіантів використання для ролі «студент»

На етапі розробки було реалізовано функціонал використовуючи мову програмування JAVA. Розроблений веб-застосунок суттєво розширив можливості щодо набуття необхідних знань.

## ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ



## ТРИКРОКОВИЙ МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

*Бакович М.П., Бартіш М.Я., Україна*  
 Львівський національний університет ім. Івана Франка  
 факультет прикладної математики та інформатики  
[marianna605@gmail.com](mailto:marianna605@gmail.com)

Розглядається задача

$$P(x) = 0, P: R^n \rightarrow R^m, m \geq n$$

Для пошуку розв'язку систем нелінійних рівнянь багатьох змінних використовують послідовні алгоритми, у яких вибір наступного наближення залежить від попередніх результатів.

У випадку  $n = m$  і при виконанні певних умов можна використовувати метод Ньютона або його модифікації. У випадку  $n < m$  використовуємо метод Гауса-Ньютона (також при виконанні певних умов). Одним із недоліків даних методів є трудомісткість кожної ітерації, особливо це відчувається при великих  $n$  (на кожному кроці необхідно обчислювати матриці Якобі). З метою побудови менш трудомістких алгоритмів нами використано градієнтний метод спуску.

При цьому розглядаємо задачу:

$$f(x) = \frac{1}{2} (P(x), P(x)) \rightarrow \min,$$

яка в певному сенсі еквівалентна початковій і використовуємо алгоритм

$$u_k = x_k - \alpha_k h_{i_1}$$

$$v_k = x_k - \beta_k h_{i_2}$$

$$x_{k+1} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} f(u_k + \gamma(v_k - u_k)), k = 0, 1, 2 \dots$$

$$\text{де } i_1 = k - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor n + 1,$$

$$i_2 = i_1 - \left\lfloor \frac{i_1}{n} \right\rfloor n + 1$$

У даному випадку напрям  $h_i$  має вигляд  $h_i = \left( 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}, 0, 0 \right)^T$ .

Умовою закінчення роботи алгоритму вибираємо:

$$\|x_{k+n} - x_k\| < \varepsilon$$

Даний алгоритм проявляє свою актуальність при достатньо великих  $n$ , оскільки при апробації обчислювальні затрати для таких  $n$  суттєво зменшуються.

1. *Бартіш М. Я.* Методи оптимізації. Теорія і алгоритми./ Бартіш М.Я. – Львів, 2006. – С.16-31, 102-106.
2. *Бартіш М.Я.* Про один ітераційний метод розв'язання функціональних рівнянь/ Бартіш М. Я. – доп. АН УРСР.– 1968.– С.387-391.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. / Бахвалов Н.С., Жидков Н. П., Кобельков Г.М. – Москва, 1987. – С. 330-336.

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

*Бекетов Віталій Дмитрович, Україна*  
Львівський національний університет ім. Івана Франка  
факультет прикладної математики та інформатики  
[beketov0vitaliy@gmail.com](mailto:beketov0vitaliy@gmail.com)

У роботі розглядається чисельне розв'язування задачі Коші для системи еліптичних рівнянь у двозв'язній області методом інтегральних рівнянь.

Нехай  $D$  – двозв'язна область в  $\mathbb{R}^2$  з відомими внутрішньою та зовнішньою границями  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ , відповідно,  $\vec{\nu}$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої. Розглянемо задачу Коші для системи еліптичних рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta u_n - \gamma^2 u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \text{ в } D, \quad n = \overline{0, N}, \\ u_n = f_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = g_n \quad \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\gamma, \beta_i$  – відомі дійсні константи.

Потрібно знайти значення  $u_n|_{\Gamma_1}$  і  $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$ . Оскільки задача (1) є некоректною, то для її розв'язування необхідно застосовувати регуляризуючі методи. Для зведення задачі (1) до інтегральних рівнянь подамо розв'язок у вигляді суми потенціалів простого шару [1]:

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \phi_m^i(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (2)$$

де  $\phi_m^1, \phi_m^2$  – невідомі густини,  $\Phi_m, m = \overline{0, N}$  – фундаментальні розв'язки відповідних еліптичних рівнянь в задачі (1).

Для знаходження  $\phi_m^1, \phi_m^2, m = \overline{0, N}$ , використавши теорему про неперервне продовження потенціалу простого шару на границю, отримаємо послідовність систем інтегральних рівнянь, які після параметризації мають вигляд:

$$\left\{ \frac{i-1}{2\pi} \mu_n^2(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \mu_n^1(\tau) H_{0,i1}(t, \tau) + \mu_n^2(\tau) H_{0,i2}^1(t, \tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + \mu_n^2(\tau) H_{0,i2}^2(t, \tau) \right) d\tau = F_n^i(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3) \right.$$

де  $\mu_m^i(t) = \phi_m^i(x_i(t))$ ,  $F_n^i(t)$  - праві частини, що містять розв'язки знайдені на попередніх кроках,  $H_{0,i1}$ ,  $H_{0,i2}^1$ ,  $H_{0,i2}^2$ - гладкі ядра.

Використавши тригонометричні квадратурні формули[2] до інтегралів у (3), і взявши в якості точок колокацій квадратурні вузли,отримаємо послідовність систем лінійних рівнянь. Зважаючи на некоректність систем, застосовуємо регуляризацію Тіхонова. Дані Коші на  $\Gamma_1$  визначаємо шляхом дискретизації подання (2) та його нормальної похідної.

Приклад.Нехай область  $D$  задана наступними граничними кривими:

$$\Gamma_1 = \{x_1(t) = (0.8 \cos(t), 0.4 \sin(t))\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2(t) = (2 \cos(t) + 0.5 \cos^2(t), 0.8 \sin(t))\}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

В якості граничних функцій  $f_n^1$  і  $f_n^2$  виберемо звуження фундаментальних розв'язків  $\Phi_n$  рівняння в задачі (1) і їх похідних на кривій  $\Gamma_2$ . У табл.1 подано значення похибки для системи еліптичних рівнянь розмірності  $N = 20$  для  $\gamma = 1$ ,  $\beta_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, N$  і різних значень параметра дискретизації  $M$  та параметра регуляризації  $\alpha$ .

Таблиця 1.

$M$	$N$	$\alpha$	$\ \tilde{u}_n - u_n\ _{L^2}$	$\left\  \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L^2}$
8	0	$10^{-9}$	0.000709	0.012342
	10	$10^{-10}$	0.000647	0.007781
	20	$10^{-13}$	0.000707	0.009706
16	0	$10^{-9}$	0.000036	0.000923
	10	$10^{-11}$	0.000027	0.000514
	20	$10^{-13}$	0.000015	0.000513

Як бачимо з чисельних експериментів, метод інтегральних рівнянь є досить ефективним при розв'язуванні такого роду задач.

1. *Chapko R., Johansson B.T.* Boundary-integral approach for the numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation // Ukrainian Mathematical Journal, 2016.- 68.- P.1665-1682.
2. *Kress R.* Linear Integral Equatios. Springer, 1989.



## ВИКОРИСТАННЯ ОЦІНОК АПОСТЕРІОРНИХ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ АДАПТИВНОГО ЗГУЩЕННЯ СІТКИ ДЛЯ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ

*Василишин Богдан Богданович, Україна*  
Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[asmeralt@gmail.com](mailto:asmeralt@gmail.com)

В даній роботі представлено програмну реалізацію в середовищі WOLFRAM Mathematica алгоритму для  $h$ -адаптивного методу скінченних елементів(МСЕ) для розв'язування двоїстих задач кручення стрижнів [1, 5-6] з використанням точної сумарної апостеріорної оцінки похибки кусково лінійних апроксимацій цього методу. Щоб продемонструвати ефективність  $h$ -адаптування ми порівнюємо одержані результати із такими, що обчислені МСЕ із звичайним рівномірним згущення сіток.

**Апостеріорний оцінювач похибки МСЕ.** Для апостеріорного оцінювання похибок МСЕ використаємо відносну похибку  $\delta$ , одержану із результатів праці [1] нормуванням значеннями  $\|z\|_W^2$

$$\delta = [ \|z\|_W^2 - (\|\nabla\psi_h\|_W^2 + \|u_h\|_V^2) ] / \|z\|_W^2 100\%. \quad (1)$$

Для локального адаптування сітки трикутних елементів обчислимо значення похибки за формулою (6.4) для кожного скінченного елемента та подрібнимо ті з них, для яких абсолютне значення оцінки похибки більше за середнє абсолютне значення похибок для всієї триангуляції. Для рівномірного згущення сітки кожен її трикутник ділимо на чотири конгруентні, тим самим вдвічі зменшуючи її діаметр  $h$ .

**Числові результати.** Розв'яжемо задачу кручення стержня з L-подібним поперечним перерізом, одержаним трьома одиничними квадратами, з модулем жорсткості  $G = 1$ , кутом скручування  $\alpha = 1$  і допустимим рівнем відносної похибки  $\delta = 3\%$ . Початкова сітка показана на рис. 1. Табл. 1 демонструє результати, одержані на рівномірно згущуваних сітках, а Табл. 2 – такі ж результати за  $h$ -адаптивною схемою. Використання  $h$ -адаптування в чотири рази швидше алгоритму рівномірного згущення. На рис. 2 подано сітку, одержану на третьому кроці рівномірного згущення, а на рис. 3 – сітку четвертого кроку  $h$ -адаптування.

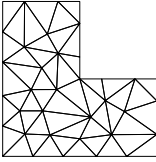


Рис. 1

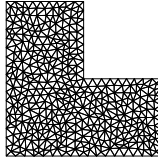


Рис. 2

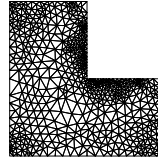


Рис. 3

№	Кількість вузлів	Кількість елементів	$\ \nabla\psi_h\ _W^2$	$\ u_h\ _V^2$	$\delta, \%$	Час, с	Збіжність
1	37	50	1.0360	0.6961	36.6	0.92	-
2	112	184	1.1075	0.8105	20.3	1.81	-
3	413	754	1.1313	0.8418	11.6	3.19	-
4	1586	3034	1.1395	0.8517	6.6	13.11	0.92
5	6196	12120	1.1423	0.8548	3.8	116.56	1.01
6	24623	48708	1.1432	0.8558	2.3	1706.02	1.06

Табл. 1

№	Кількість вузлів	Кількість елементів	$\ \nabla\psi_h\ _W^2$	$\ u_h\ _V^2$	$\delta, \%$	Час, с	Збіжність
1	37	50	1.0360	0.6961	36.6	0.92	-
2	59	155	1.0934	0.7855	24.6	1.23	-
3	174	551	1.1245	0.8355	14.2	2.17	-
4	591	1243	1.1373	0.8469	8.9	4.05	2.02
5	1438	3362	1.1410	0.8524	5.8	14.00	0.82
6	3937	8469	1.1426	0.8547	3.6	68.20	0.82
7	10209	21647	1.1432	0.8556	2.4	343.55	1.26

Табл. 2

**Висновки.** Використання формули (1) дає точну сумарну оцінку похибок пари двоїстих задач про кручення стрижня, проте, в залежності в форми поперечного перерізу стрижня, для досягнення бажаного рівня похибки може знадобитися велика кількість невідомих. Одним із способів оптимізації обчислень є використання  $h$ -адаптивних алгоритмів, які дають більший порядок збіжності чисельної схеми, та суттєвий вииграш в кількості обчислень.

1. О. Вовк. Точна сумарна оцінка апостеріорних похибок апроксимацій МСЕ для двоїстих задач кручення стрижнів / Вовк О., Квасниця Г., Шинкаренко Г. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. Вип. 24, 2016.- С. 44-52.
2. О. С. Zienkiewicz Adaptive techniques in the finite element method / О. С. Zienkiewicz, J. Z. Zhu // Communications in Applied Numerical Methods, 1988.

## УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ХОВАНСЬКОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Дропко Марта Йосипівна, Україна*  
Львівський національний університет ім. Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
[artamine@gmail.com](mailto:artamine@gmail.com)

У сучасних математичних науках важливим є наближене представлення функції у вигляді многочленів від незалежних змінних. Існують методи, які дозволяють отримати велику кількість дробово-раціональних наближень і не потребують громіздких викладів. Одним з таких методів є метод ланцюгових дробів, який лежить в основі методу Хованського.

Ідею алгоритму методу Хованського можна реалізувати для рівняння Ріккати. Дане рівняння широко застосовується у теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні, в задачах оптимального керування, фільтрації, стабілізації керованих лінійних систем.

У даній роботі побудовано і реалізовано обчислювальний алгоритм методу Хованського розв'язування рівняння Ріккати. Програмно реалізовано багатопотокове обчислення, використовуючи вищезгаданий алгоритм.

Алгебричним рівнянням Ріккати називається рівняння вигляду:

$$XFX + AX + XB + C = 0. \quad (1)$$

У даному рівнянні  $A$  – квадратна матриця порядку  $n$ ,  $B$  – квадратна матриця порядку  $m$ ,  $F$  – матриця розмірності  $m \times n$ ,  $C$  – матриця розмірності  $n \times m$ ,  $X$  – невідома матриця розмірності  $n \times m$ , при чому  $n \geq m$ .

Нехай  $K = k \cdot E$ , де  $K \in R^{n \times n}$  – діагональна невідроджена матриця. Рівняння (1) можемо записати:

$$XFX + AX + KX - KX + XB + C = 0. \quad (2)$$

Введемо деякий параметр – діагональну невідроджену матрицю  $L = l \cdot E$ , де  $L \in R^{n \times n}$ . Рівняня (2) домножимо зліва на  $L$  і отримаємо:

$$(LXF + LA + K)X = KX - (LXB + LC). \quad (3)$$

Далі припустимо, що матриця  $(LXF + LA + K)$  є невинродженою, тоді з (3) отримаємо співвідношення:

$$X = (LXF + LA + K)^{-1}(KX - LXB - LC) \quad (4)$$

або у вигляді рекурентної формули

$$X^i = (LX^{i-1}F + LA + K)^{-1}(KX^{i-1} - LX^{i-1}B - LC) \quad (5)$$

тут  $i = 1, 2, 3, \dots$

Даний алгоритм реалізовано засобами .Net. Проведено чисельні експерименти, отримано і наведено результати обчислень.

1. *Недашковська А.М.* Матриця ланцюгових дробів ланцюгових дробів для розв'язання поліноміальних матричних рівнянь/ Недашковська А.М. – Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2014. – № 2(116).
2. *Самарский А.А.* Численные методы / Самарський А.А. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.
3. *Хованський А.Н.* Застосування ланцюгових дробів і їх узагальнень до наближеного аналізу/ Хованський А.Н. – Москва:Наука, 1963. – 212 с.

## МОДИФІКАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНЕЦЕВОГО МЕТОДУ ШЛЯХОМ ПРИМІНЕННЯ АПОСТЕРІОРНОГО ОЦІНЩИКА НА НЕРЕГУЛЯРНІЙ СІТЦІ

*Дудник О.О., Україна*

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,  
факультет прикладної математики

[frightempire@yandex.ru](mailto:frightempire@yandex.ru)

Багато технічних та фізичних процесів потребують рішення задачі Штурма-Ліувілля. Наприклад, вона описує режим коливання різноманітних систем, таких як коливання струни або власних енергетичних функцій квантового механічного осцилятора. Таким чином, проблема побудування ефективних методів знаходження власних значень та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля є нагальною задачею.

Метод, представлений тут, був вперше описаний в [1] і по суті є функціонально-різницеvim (FD) методом нульового рангу [3]. Метою цієї роботи є демонстрація модифікації цього методу, що полягає у застосуванні апостеріорного оцінщика, який дозволяє зменшити похибку за допомогою більш ефективного згущення сітки на кожній ітерації роботи метода на нерегулярній сітці.

Розглядається задача Штурма-Ліувілля наступного виду:

$$\begin{cases} u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, & x \in (0;1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Суть FD-методу полягає у апроксимації функції  $q(x)$  ступінчатою функцією  $\bar{q}(x)$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, N+1}$ , що в підсумку приводить до необхідності рішення трансцендентного рівняння:

$$F(\lambda) = \det(A_1 + \prod_{j=2}^N A_j) = 0$$

де матриці  $A_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  залежать від  $\lambda$  та  $\bar{q}(x)$ .

Для кожного власного значення на кожній ділянці нерегулярної сітки розраховується значення оцінювача похибки [2]:

$$ERR_i = \left| \int_a^b \lambda_k (\bar{q} - q) \bar{u}_k^2 dx \right|$$

Ті ділянки, для яких  $ERR_i > TOL$ , діляться навпіл на наступному кроці. В результаті для кожного власного значення отримуємо нові сітки. Ці сітки

накладаються одна на одну і отримуємо сітку, яка використовується у наступній ітерації алгоритму.

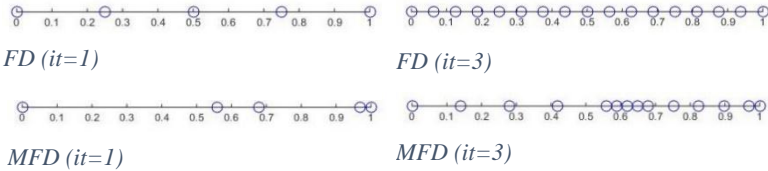
Обчислювальний експеримент було проведено для наступної задачі:

$$\begin{cases} u''(x) + [\lambda - (\pi^2(1 - \cos \pi x))]u(x) = 0, & x \in (0;1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В таблиці та на рисунку приведено порівняння результатів розв'язку задачі (1) за допомогою FD-метода [1] та модифікованого FD-метода. Кожний з методів виконував три ітерації. FD-метод використовує регулярну сітку і на кожній ітерації методу кожна ділянка сітки ділилась навпіл. Модифікований метод є більш точним. Також на рисунку можна помітити, що при використанні модифікованого метода ділення сітки проходить більш ефективно. Приближення власних значень знизу та зверху взяті з [3].

FD-method	Modified FD-method	Приближення знизу	Приближення зверху
1,919281275	1,91809248	1,91805812	1,91805816
5,038321863	5,03200157	5,031913	5,031922
10,012137152	10,0145964	10,011665	10,014381
16,758125873	17,0021122	16,538364	17,035638

Порівняння результатів для власних значень



Порівняння ділення сітки, *it*-номер ітерації

1. Dahnn J. Anwendung eines direkten Verfahrens zur numerischen Behandlung von selbstadjungierten, positive definiten Eigenwertaufgaben bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit stückweise stetigen Koeffizientenfunktionen. ZAMM; 1982, Bd. 62, p. 687-695.
2. Marletta M., Pryce J. D. Automatic solution of Sturm-Liouville problems using the Pruess method. Journal of Computational and Applied Mathematics: North-Holland; 1992.
3. Макаров В. Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами. Докл. АН СССР; 1991, 320 (1), с. 34-39.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ МАГНІТНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

*Заверуха Ольга Ігорівна, Україна*

Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет Інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

[olha.zaverukha@nure.ua](mailto:olha.zaverukha@nure.ua)

Магнітні системи широко поширені в природі та техніці. Переважно, для чисельного аналізу магнітних систем використовуються методи скінченних різниць, скінченних елементів, граничних інтегральних елементів тощо. Як альтернативу існуючим методам чисельного розрахунку магнітних систем є використання структурного методу (методу R-функцій), запропонованого акад. НАН України В.Л. Рвачовим.

Розглянемо магнітну систему, яка складається з феромагнетика  $\Omega_f$  і вакууму  $\Omega_v$  з замкненими струмовими обмотками  $\Omega_c$ . Ставиться задача знайти розподіл магнітного поля, яке створено стаціонарними струмами та намагніченістю ізотропних феромагнетиків [1]. Припустимо, що позовжній розріз магніту значно більше поперечного. Тоді векторний потенціал вектору магнітної індукції буде мати тільки одну ненульову координату  $u = u(x, y)$  і від системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля можна буде перейти до скалярного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\mu_0 J_z(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \quad (1)$$

Тут  $\mu$  – функція магнітної проникності феромагнетика, яка є відомою в  $\Omega_f$  нелінійної функцією від вектора напруженості магнітного поля (для немагнітного середовища  $\mu=1$ ),  $\mu_0$  – магнітна проникність вакууму,  $J_z(x, y)$  –  $z$ -я компонента вектора об'ємної щільності струму, відмінна від нуля лише в  $\Omega_c$  і яка задовольняє співвідношенню

$$\iint_{\Omega_c} J_z(x, y) dx dy = 0, \quad u(x, y) = \begin{cases} u_f(x, y), & (x, y) \in \Omega_f, \\ u_v(x, y), & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases}$$

Рівняння (1) слід доповнити умовами спряження на межі  $\partial\Omega_v$  розділу феромагнетика і вакууму:

$$u_f|_{\partial\Omega_{f\nu}} = u_\nu|_{\partial\Omega_{f\nu}}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{f\nu}} = \frac{\partial u_\nu}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{f\nu}}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор нормалі до  $\partial\Omega_{f\nu}$ , та умовами на нескінченості:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} u = 0. \quad (3)$$

Умову на нескінченності (3) замінімо умовою

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (4)$$

де контур  $\partial\Omega_0$  знаходиться на достатній відстані від  $\Omega_f$ . Наприклад, можна взяти за  $\partial\Omega_0$  коло  $x^2 + y^2 = R_0^2$  при достатньо великому  $R_0$ . Через  $\Omega_0$  позначимо розрахункову область задачі (1), (2), (4).

Нехай функція  $\omega_0(x, y)$  така, що

- 1)  $\omega_0(x, y) > 0$  в  $\Omega_0$ ;
- 2)  $\omega_0(x, y) = 0$  на  $\partial\Omega_0$ .

Функцію  $\omega_0(x, y)$  із зазначеними властивостями можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу за допомогою конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій [2].

Можна показати, що структура розв'язку задачі (1), (2), (4) має вигляд

$$u(x, y) = \begin{cases} \omega_0 \Phi - (1 - \mu) \omega_{f\nu} D_1^{f\nu}(\omega_0 \Phi), & (x, y) \in \Omega_f, \\ \omega_0 \Phi, & (x, y) \in \Omega_\nu, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\omega_{f\nu} = 0$  – нормалізоване рівняння межі  $\partial\Omega_{f\nu}$ , причому  $\omega_{f\nu} > 0$  в  $\Omega_f$ , а оператор  $D_1^{f\nu}$  визначається рівністю

$$D_1^{f\nu} = \frac{\partial \omega_{f\nu}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{f\nu}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Для побудови наближеного розв'язку задачі (1) – (3) невизначену компоненту  $\Phi$  в структурі (5) апроксимуємо виразом вигляду

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \tau_i, \quad (6)$$

де  $\{\tau_i\}$  – повна в  $L_2(\Omega_0)$  система функцій (тригонометричні або степеневі поліноми, сплайни тощо),  $c_1, \dots, c_n$  – невідомі коефіцієнти.

Для знаходження коефіцієнтів  $c_1, \dots, c_n$  з (6) можна скористатися будь яким варіаційним або проєкційним методом.



1. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1990. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 251 – 307.

2. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ У ДВОЗВ'ЯЗНІЙ ТОРОЇДАЛЬНІЙ ОБЛАСТІ

*Ключковська Марія Василівна*, Україна  
Львівський національний університет ім. Івана Франка  
факультет прикладної математики та інформатики  
[maria\\_kliuchkovska@ukr.net](mailto:maria_kliuchkovska@ukr.net)

В багатьох випадках для дослідження природних явищ або штучних систем використовується їх опис за допомогою диференціальних задач. Одну з таких задач розглянуто в даній роботі, а саме обернену задачу двозв'язної тороїдальної області [2].

Нехай  $D$  – тороїдальна область в  $\mathbb{R}^3$ , обмежена двома граничними поверхнями  $S_1$  і  $S_2 \in C^2$ . Розглянемо задачу Коші для рівняння Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u = f \text{ на } S_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ на } S_2, \end{cases} \quad (1)$$

де  $f$  і  $g$  – задані функції,  $\nu$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі.

Зокрема, становить інтерес відтворення значень розв'язку та його нормальної похідної на внутрішній поверхні  $S_1$ .

Задача (1) є некоректною, оскільки порушується умова неперервної залежності розв'язку від вхідних даних. Відповідно, при її розв'язуванні слід застосовувати регуляризуючі методи.

Скористаємось методом потенціалів і подамо розв'язок у вигляді суми потенціалів простого шару [1]:

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} \varphi_i(y) \Phi_i(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (2)$$

де  $\varphi_i \in C(S_i)$  ( $i = 1, 2$ ) – невідомі густини,  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) – фундаментальний розв'язок для рівняння Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ .

Зважаючи на неперервність потенціалу простого шару і стрибок його нормальної похідної, задача (1) зводиться до розв'язування системи граничних інтегральних рівнянь, яка після врахування тороїдальності граничних поверхонь набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mu_1(\tau)H_{11}^2(t, \tau) + \mu_2(\tau)H_{12}^2(t, \tau)] d\tau = f(t), \\ \mu_2(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mu_1(\tau)H_{21}^2(t, \tau) + \mu_2(\tau)H_{22}^2(t, \tau)] d\tau = g(t), \end{cases} \quad (3)$$

де  $t \in [0, 2\pi]$ .

В даній системі ядра  $H_{ij}^m$  виражені через повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, причому  $H_{im}^m$  містять логарифмічну особливість, яку виділяємо у формі вагової періодичної функції:

$$H_{im}^m(t, \tau) = H_{im}^{m1}(t, \tau) \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + H_{im}^{m2}(t, \tau), \quad i = 1, 2.$$

Для чисельного розв'язування інтегральних рівнянь використаємо квадратурний метод, оснований на тригонометричній інтерполяції з рівновіддаленими вузлами. Застосувавши відповідні квадратурні формули [3] до інтегралів системи та колокуючи її у квадратурних вузлах, приходимо до системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2N-1} \left\{ \frac{1}{2N} \tilde{\mu}_1(t_j) H_{11}^2(t_i, t_j) + \tilde{\mu}_2(t_j) \left[ H_{12}^2(t_i, t_j) R_j(t_i) + \frac{1}{2N} H_{12}^{22}(t_i, t_j) \right] \right\} = \\ = f(t_i), \quad i = \overline{0, 2N-1}, \\ \tilde{\mu}_2(t_i) + \sum_{j=0}^{2N-1} \frac{1}{2N} \tilde{\mu}_1(t_j) H_{21}^2(t_i, t_j) + \\ + \sum_{j=0}^{2N-1} \tilde{\mu}_2(t_j) \left[ H_{22}^2(t_i, t_j) R_j(t_i) + \frac{1}{2N} H_{22}^{22}(t_i, t_j) \right] = g(t_i), \quad i = \overline{0, 2N-1}, \end{cases}$$

де  $t_i = \frac{i\pi}{N}$ ,  $\tilde{\mu}_i \approx \mu_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $R_j$  – відомі вагові функції.

Оскільки задача Коші є некоректною, то застосовуємо регуляризацію Тіхонова до отриманої системи лінійних рівнянь і знаходимо невідомі  $\tilde{\mu}_{ij} = \tilde{\mu}_i(t_j)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{0, 2N-1}$ .

Наближений розв'язок та його нормальну похідну на граничній поверхні  $S_1$  знаходимо на основі подання (2).

Як підсумок, в роботі розглянуто результати чисельних експериментів, що засвідчують ефективність методу потенціалів для розв'язування обернених задач у тороїдальних областях.

1. Babenko C., Chapko R., Johansson B.T. On the numerical solution of the Laplace equation with complete and incomplete Cauchy data using integral equations // CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2014.- **101**.- P. 299-317.
2. Chapko R. On the numerical solution of the Dirichlet initial boundary-value problem for the heat equation in the case of a torus // J. Eng. Math., 2002. - **34**. - P. 75-87.
3. Kress R. Linear Integral Equations. Springer, 1989.

## ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Кондратюк Галина Олегівна, Україна  
 Львівський національний університет ім. Івана Франка  
 факультет прикладної математики та інформатики  
[rosa.lovely23@gmail.com](mailto:rosa.lovely23@gmail.com)

Аналіз складних моделей потребує створення нових, чисельних або чисельно-аналітичних методів розв'язання задач. В даній роботі побудовано і реалізовано обчислювальний алгоритм розв'язання початково-граничної задачі для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами. Ця задача охоплює клас тривимірних задач метематичної фізики.

Початково-гранична задача для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами запишеться так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$\text{де } Lu = L_1u + L_2u, L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), k_\alpha(x, t) > 0, \alpha = 1, 2,$$

сітка

$$Q_T = \{x_1 \in [0, a], x_2 \in [0, b], t \in [0, T]\}$$

В цьому випадку при будь-якому  $t$  оператор  $L_\alpha$  апроксимується оператором

$$\Lambda_\alpha u = \Lambda_\alpha(t) u = (a_\alpha(x, t) u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \alpha = 1, 2,$$

де  $a_\alpha$ , наприклад, визначається за формулою  $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5\alpha)}$  або  $a_\alpha = 0,5(k_\alpha + k_\alpha^{(-1\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , що забезпечує другий порядок апроксимації для  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2), \quad \alpha = 1, 2.$$

Зведемо цю схему до чисельного вигляду, тобто до вигляду зручному для обчислень. Для явної схеми в індексному вигляді отримаємо формулу

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{k+1} = & u_{ij}^k + \frac{\tau}{2h_1^2} [(k_{ij,k}^{(1)} + k_{i+1,j,k}^{(1)})y_{i+1,j}^k + (k_{ij,k}^{(1)} + k_{i-1,j,k}^{(1)})y_{i-1,j}^k - \\
 & (k_{i+1,j,k}^{(1)} + 2k_{ij,k}^{(1)} + k_{i-1,j,k}^{(1)})y_{ij}^k] + \frac{\tau}{2h_2^2} [(k_{ij,k}^{(2)} + k_{i,j+1,k}^{(2)})y_{i,j+1}^k + (k_{ij,k}^{(2)} + \\
 & k_{i,j-1,k}^{(2)})y_{i,j-1}^k - (k_{i,j+1,k}^{(2)} + 2k_{ij,k}^{(2)} + k_{i,j-1,k}^{(2)})y_{ij}^k] + \frac{\tau}{2} [f_{ij}^k + f_{ij}^{k+1}],
 \end{aligned}$$

(3)

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3 - 1}.$$

На побудованій сітці початкові та граничні умови запишуться так:

$$\begin{aligned}
 u_{0,j,k} = \mu_{0,j,k}; \quad u_{i,0,k} = \mu_{i,0,k}; \\
 u_{i,j,0} = \mu_{i,j,0};
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 u_{N_1,j,k} = \mu_{N_1,j,k}; \quad u_{i,N_2,k} = \mu_{i,N_2,k}, \\
 i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3 - 1}.
 \end{aligned}$$

За даним алгоритмом проведено обчислювальні експерименти, одержано достовірні результати.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарський А.А. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
2. Шахно С.М. Практикум з чисельних методів / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2013. – 432 с.

## МЕТОД БЛОЧНОГО ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ

*Лабазевич М.О., Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[marta.labazevuch@gmail.com](mailto:marta.labazevuch@gmail.com)

У різних галузях людського життя часто виникає потреба у розв'язуванні задач мінімізації. Такі задачі часто трапляються в науці, техніці, промисловості та багатьох інших галузях. Здебільшого математичні моделі зводяться до розв'язування типових задач оптимізації, а зростання потужності комп'ютерів сприяє розширенню сфер успішного застосування методів оптимізації у розв'язанні все складніших задач все більших розмірностей. Різні методи виявляють свою ефективність на різних класах задач. Методи мають свої переваги та недоліки: вибір початкового наближення, швидкість збіжності, трудомісткість окремої ітерації тощо. Сьогодні не існує універсального алгоритму, тому і надалі актуально залишається проблема побудови ефективних методів.

Розглядаємо метод спуску, а саме метод блочного покоординатного спуску, який використовує часткові похідні мінімізуючої функції по блоках у координатах вектора спуску.

Розглянемо задачу безумовної мінімізації функції багатьох змінних

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n,$$

(1)

Введемо позначення  $N = \{2, \dots, n\}$ . З даної множини виділимо підмножини  $N_e = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ ,  $i \in N, 0 \leq e_i \leq n, \bigcup_{i=1}^p N_e = N, N_i \neq N_j$ .

Введемо вектор  $a_j(x)$ ,

де

$$a_j^i(x) = \begin{cases} 0, & i \notin N_j \\ \frac{df}{dx^i}, & i \in N_j \end{cases},$$

Для розв'язування задачі (1) запропоновано метод вигляду

$$x_{k,j+1} = x_{k,j} - \alpha_{k,j} a_j(x_{k,j}) \quad (2)$$

$$f(x_{k,j+1}) - f(x_{k,j}) \leq -\varepsilon \alpha_{k,j} \|a_j(x_{k,j})\|^2 \quad (3)$$

де  $\alpha_{k,j} > 0, j = 1, 2, \dots, p, \varepsilon \in (0, 1)$  для якого справедливі наступні леми.

Лема 1. Нехай  $f(x) \in C^{1,1}(R^n)$  – диференційована і перша похідна задовольняє умову Ліпшиця  $\|f'(x) - f'(y)\| \leq M \|x - y\|, x, y \in R^n, M > 0$ . Тоді для довільних  $x_k \in R^n, \varepsilon \in (0, 1)$  і  $a_k$ , що задовольняє умову  $(f'(x_k), a_k) < 0$ , умова виконується при

$$0 < \alpha_k \leq \frac{(1 - \varepsilon)}{M}.$$

Лема 2. Якщо функція  $f \in C^2(R^n)$  і  $f''(x)$  – задовольняє умову  $(f''(x)a, a) \leq D \|a\|^2, \forall x, a \in R^n, \infty > D > 0$ , тоді для довільних  $x_k \in R^n, \varepsilon \in (0, 1)$  і  $h_k \in \cup(x_k, f)$  умова виконується при

$$0 < \alpha_k \leq -\frac{2(1 - \varepsilon)}{D}.$$

Запропонований метод побудований за принципом методів спуску, проте замість вектора спуску використано лише декілька часткових похідних мінімізуючої функції. Метод має лінійну збіжність.

На підставі проведених обчислень і порівнянні отриманих результатів, з'ясували, що метод спуску за кількістю обчислень переважає градієнтний метод, зі збільшенням розмірності функції ефективність запропонованого методу блочного покоординатного спуску, в сенсі кількості обчислень зростає.

1. Бартіш М. Я. *Методи оптимізації. Теорія і алгоритми.* – Львів. Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2006.

2. Бейко І.В. *Задачі, методи та алгоритми оптимізації* / І. В. Бейко, П. М. Зінько, О.Г. Наконечний. – К.: ВПЦ Київський університет. – 2012. – 800с.



## ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ

*Мазуряк Ілля Васильович, Україна*  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[Illay1994@gmail.com](mailto:Illay1994@gmail.com)

**Вступ.** Дослідження процесів дифузії є актуальною проблемою та часто привертають увагу вчених. Це пов'язано, зокрема, з тим, що процеси дифузії зумовлюють зміну функціональних властивостей і деградацію елементів напівпровідникових мікроструктур, а також вузлів та елементів різного виду технічних макроконструкцій. Крім цього, такі процеси часто виникають у природі, зокрема при поширенні забруднень у довкіллі.

**Постановка задачі.** Розглянемо двовимірну задачу гетеродифузії, записану у безрозмірних координатах

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial t} = \Delta c_1 + d_1 \Delta c_2 - a c_1 + c_2 + f_1, \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} = d_2 \Delta c_2 + d \Delta c_1 + a c_1 - c_2 + f_2. \end{cases} \quad (1)$$

де  $a, d, d_1, d_2$  - сталі, що характеризують середовище, для яких відомо, що  $a \gg 1, d, d_1, d_2 \ll 1, a(d + d_1) \sim 1, f_1, f_2$  функції джерел. Розглянемо випадок однорідних граничних умов на границі  $\Gamma$

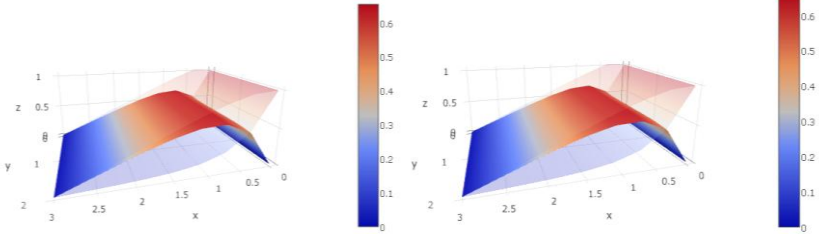
$$c_1 = 0, c_2 = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T]$$

а також початкових умов

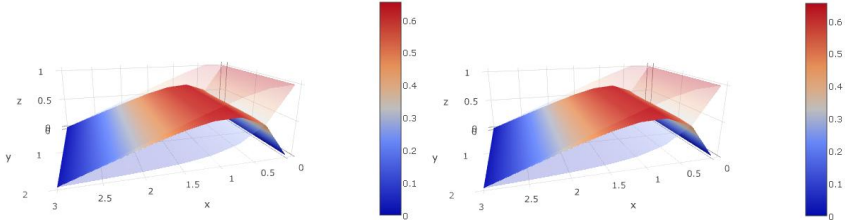
$$c_1(\xi, t) = \alpha c_0, c_2 = (1 - \alpha) c_0 \text{ при } t = 0, \xi \in \Omega$$

### Обчислювальний експеримент

Застосуємо до розв'язування задачі (1) метод скінченних елементів з базисними функціями-бульбашками на трикутних скінченних елементах. Для прикладу розглянемо випадок, коли  $d_1, d_2 = 0; d = 0.8; c_0 = 1; \alpha = 1$



$\alpha = 5$  при розбитті на 8 та 16 скінченних елементів



$\alpha = 10$  при розбитті на 8 та 16 скінченних елементів

**Висновки.** Для розв'язання задачі гетеродифузії числовим методом – методом скінченних елементів – необхідно розбити середовище на підобласті. В даному випадку це здійснюється таким чином, щоб розбиття задовольняло умову Делоне. Крім того, розглянута конкретна задача та отриманий її числовий розв'язок. На основі МСЕ розроблений алгоритм і програмне забезпечення для розв'язування задач гетеродифузії домішкової речовини у двовимірних за просторовою змінною середовищах. Для шару ґрунту проведено низку обчислювальних експериментів для різних параметрів моделі та проаналізовано вплив параметрів моделі на розподіл концентрацій домішкової речовини.

1. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України. Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача. - Львів: СПОЛОМ.2003-128с.

## ІНТЕРВАЛЬНІ МЕТОДИ НЬЮТОНІВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

*Мартинюк-Лотоцька Вікторія Володимирівна*, Україна  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[viktoriiaml@gmail.com](mailto:viktoriiaml@gmail.com)

Нелінійність представляє інтерес для математиків, фізиків, оскільки більшість фізичних систем за своєю природою нелінійні. Одна з найбільш важливих проблем в оптимізації і обчислювальної математики - це вирішення систем нелінійних рівнянь.

Одним із способів розв'язування систем нелінійних рівнянь є ітераційний метод Ньютона. Ітераційні методи не є досить точними. На зміну їм прийшли інтервальні методи. Розглянемо інтервальні методи ньютонівського типу для розв'язування вище згаданих систем.

Нехай дана множина функцій  $f_i(X)$   $1 \leq i \leq n$  векторної змінної  $X = X_1, \dots, X_n$ , які об'єднуємо у векторну функцію  $f_p(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$ . Нехай похідна Фреше  $f'(x)$  функції  $f(x)$  існує на множині  $B \subseteq V_n(\mathbb{R})$  і  $x^{(0)} = (X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})^T \in B$ .

Розглянемо довільну матрицю  $B_n$ .  
 $z = q(B_n, f(\bar{x}) - (B_n - f'(X))(X - \bar{x}))$ . Застосовуючи властивості алгоритму Гауса отримаємо

$$B_n^{-1}(f(\bar{x}) - (B_n - f'(X))(X - \bar{x})) \subseteq q(B_n, f(\bar{x}) - (B_n - f'(X))(X - \bar{x}))$$

тобто ми отримали включення

$$\bar{x} - B_n^{-1}(f(\bar{x}) - (B_n - f'(X))(X - \bar{x})) \subseteq \bar{x} - z$$

Тепер покажемо, що при  $B_n = f'(x)$  ліва частина цього відношення рівна

$$k(X) = \bar{x} - B_n f(\bar{x}) + (1 - B_n(f'(X)(X - \bar{x}))) \subseteq X$$

Використовуючи симетричність виразів  $f'(x) - f'(X)$  і  $x - \bar{x}$  отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{x} - f'(x)^{-1}(f(\bar{x}) - f'(x) - f'(X)(X - \bar{x})) \\ = \bar{x} - \overline{f'(x)^{-1}(f(\bar{x}) - f'(x) - f'(X)(X - \bar{x}))} \\ = k(X) \end{aligned}$$

Припустимо, що відображення  $f: B \subseteq V_n(R) \rightarrow V_n(R)$  двічі непервно диференційоване і що похідна  $f''(x) \in M_n(R)$  має місце в інтервальній арифметиці. Для деякого  $x \subseteq B$  і довільного вектора  $\bar{x} \in X$  розглянемо наступні інтервальні методи ньютонівського типу для розв'язування систем нелінійних рівнянь.

$$\begin{aligned} k_1(X) &= \bar{x} - B_n f(\bar{x}) - B_n (f''(X)(X - \bar{x})(X - \bar{x})), B_n = f'(\bar{x})^{-1} \\ k_2(X) &= \bar{x} - B_n f(\bar{x}) - \frac{1}{2} B_n (f''(X)(X - \bar{x})(X - \bar{x})), B_n = f'(\bar{x})^{-1} \\ k_3(X) &= \bar{x} - B_n f(\bar{x}) - \left\{ I - B_n f'(X) \frac{1}{2} B_n (f''(X)(X - \bar{x})(X - \bar{x})) \right\}, B_n = f'(\bar{x})^{-1} \end{aligned}$$

де  $X$  – інтервал,  $\bar{x}$  – середнє інтервалу

Наведена методика апробовулася розв'язання ряду систем нелінійних рівнянь.

1. Алефельд Г., Херцбургер Ю. Введение интервальные вычисления, МИР, 1987.-360 с.
2. Шокин Ю. Н. Интервальный анализ.-Новосибирск:Наука,1881

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

*Мерцало Оксана Миколаївна, Україна*  
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[oksanamerzalo@gmail.com](mailto:oksanamerzalo@gmail.com)

Розглядається проста модельна задача осесиметричної електростатики. Нехай один заряджений електрод змодельовано бічною поверхнею  $S_\psi$  круглого циліндра, вісь якого збігається з віссю  $OZ$  запровадженій циліндричній системі координат  $ZR\varphi$ , за умови  $R \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Граничне значення потенціалу на  $S_\psi$  дорівнює  $U_0$ , а відповідні геометричні характеристики такої найпростішої електронно-оптичної системи зображені на рис. 1.

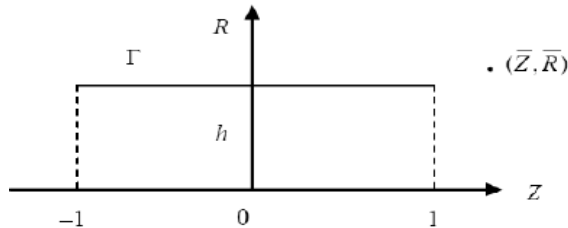


рис. 1. Меридіанний перетин бічної поверхні  $S_\psi$  з нівплощиною  $\varphi = const$ .

Для обчислення потенціалу в довільній точці півплощини  $(\bar{Z}, \bar{R})$  використовують таке відоме інтегральне подання [1]:

$$U(\bar{Z}, \bar{R}) = \int_{-1}^1 g(\tau) \frac{4hK(\tau, h; \bar{\tau}, \bar{R})}{\sqrt{(h + \bar{R})^2 + (\tau - \bar{\tau})^2}} d\tau. \quad (1)$$

Для визначення невідомої густини  $g(\tau)$ , на підставі інтегрального подання (1), отримуємо таке інтегральне рівняння першого роду:

$$\int_0^1 g_h(\tau) \left[ B_h(\tau, \bar{\tau}) \ln |\tau - \bar{\tau}| + B_h(\tau, \bar{\tau}) \right] d\tau = U_0, \quad \bar{\tau} \in (0, 1), \quad (2)$$

де  $B_h(\tau, \bar{\tau}) := K_h(\tau, \bar{\tau}) + K_h(-\tau, \bar{\tau}) + D_h(-\tau, \bar{\tau}) \ln |\tau + \bar{\tau}|$ .

**Наближене розв’язування прямої задачі**

Розглянемо розв’язок (2) у так званому модифікованому просторі Гьольдера  $H_{\mu}([0,1])$ . Для одержання наближеного розв’язку (2) застосуємо метод Боголюбова-Крилова[2]. Далі, запишемо (2) у вигляді

$$\sum_{j=1}^n \int_{(j-1)/n}^{j/n} g_h(\tau) [D_h(\tau, \bar{\tau}) \ln |\tau - \bar{\tau}| + B_h(\tau, \bar{\tau})] d\tau = U_0, \quad \bar{\tau} \in (0,1).$$

Отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \int_{(j-1)/n}^{j/n} g_h(\tau_j) \left[ \frac{D_h(\tau, \bar{\tau}_i)}{\sqrt{1-\tau}} \ln |\tau - \bar{\tau}_i| + \frac{B_h(\tau, \bar{\tau}_i)}{\sqrt{1-\tau}} \right] d\tau = U_0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

**Розв’язування оберненої задачі**

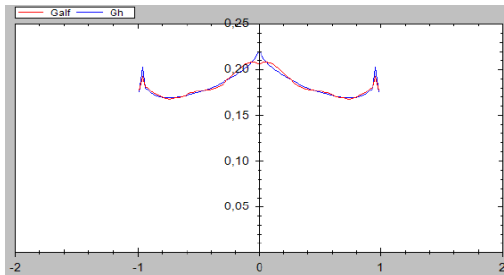
Припустимо, що в  $n$  точках  $i = \overline{1, n}$  відомі значення  $U(\bar{\tau}_i)$ . Тоді для відтворення значень шуканої густини розподілу зарядів уздовж  $\Gamma$  потрібно розв’язати СЛАР

$$L \sum_{j=1}^n g_h(\tau_j) \int_{(j-1)/n}^{j/n} \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \left[ \sqrt{2 + (\tau - \bar{\tau})^2}^{-1/2} + \sqrt{2 + (\tau + \bar{\tau})^2}^{-1/2} \right] d\tau = U(\bar{\tau}_i). \quad (4)$$

Оскільки ця система є дискретним аналогом інтегрального зображення (1) при відомій  $U(\bar{\tau}, \bar{R})$  і таких значеннях параметрів  $\bar{\tau}$  і  $\bar{R}$ , які забезпечують відсутність логарифмічної особливості в ядрі відповідного інтегрального рівняння, то (4) належить до класу некоректно сформульованих задач. До наближеного розв’язування застосуємо метод регуляризації А. Тихонова.

**Чисельні результати**

Для побудови наближеного розв’язку прямої та оберненої задачі були обрані такі параметри:  $U_0 = 1, h = 1, n = 40$  та  $\alpha = 10^{-12}$ .



1. *Ильин В.П.* Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / *В.П. Ильин, В.А. Катешов, Ю.В. Куликов, М.А. Монастырский.* - Новосибирск.: Наука, 1987.- 190 с.
2. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа // *Л.В. Канторович, В.И. Крылов.* – М.-Л.:ГИТТЛ, 1952.-696 с.
3. *Петров Ю.П.* Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями / *Ю. П. Петров, В.С. Сизиков.* -Спб.: Политехника,2003.-261с.
4. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* –М.: Наука, 1986.-288 с.

## ІТЕРАЦІЙНІ ІНТЕРВАЛЬНІ МЕТОДИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ І РОЗКАЛДУ ЇЇ НА ТРИКУТНІ МАТРИЦІ

*Мудрий Р.Р.*, Україна,

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[mudryroman93@gmail.com](mailto:mudryroman93@gmail.com)

Розв'язування систем нелінійних рівнянь знаходить широке застосування в математичному моделюванні складних процесів. Для кожного класу задач існують методи, більш ефективні при їхньому застосуванні. Тим не менше, потреба у створенні нових ефективніших алгоритмів не відпала. Навпаки, зі стрімким розвитком науки, виникають нові процеси, що потребують математичного моделювання, тож старі методи не завжди застосовні до них.

Дано систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$f(x) = 0, \text{ де}$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Необхідно знайти такий вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , який задовільнить систему нелінійних рівнянь. Для вирішення даної задачі застосовується метод Ньютона  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - (F'(x^{(k)}))^{-1} * f(x^{(k)})$ . Для знаходження розв'язків на інтервалах використовується модифікація цього алгоритму, метод Ньютона в формі Мура. Ідея полягає у двохсторонній апроксимації, тобто локалізації розв'язків системи на інтервалах, що містять їх. Метод набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} N^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - (F'(X^{(k)}))^{-1} * f(\bar{x}^{(k)}), \\ X^{(k+1)} = N^{(k)} \cap X^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots), \end{cases} \text{ де}$$

$X^{(k)}$  – інтервальний вектор, поточна локалізація розв'язків

$N^{(k)}$  – інтервальний вектор, наступна локалізація розв'язків

$X^{(k+1)}$  – інтервальний вектор, наступна локалізація розв'язків,

вдосконалена перетином з поточною локалізацією

$\bar{x}^{(k)}$  – точковий вектор, що містить середини інтервалів  $X^{(k)}$



$f(\bar{x}^{(k)})$  – значення функцій на серединах локалізуючих інтервалів

$(F'(X^{(k)}))^{-1}$  – обернена інтервальна матриця Якобі

$$F'(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1(X^{(k)})} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial f_1(X^{(k)})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial f_n(X^{(k)})} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial f_n(X^{(k)})} \end{pmatrix} - \text{інтервальна матриця Якобі}$$

Обернена матриця, в свою чергу, отримується за допомогою ітераційного інтервального методу Шульца, що виглядає наступним чином:

$$U^{(k+1)} = m(U^{(k)}) + U^{(k)} (I_p - A_p * m(U^{(k)})), (k = 0, 1, \dots)$$

$I_p$  - одинична точкова матриця

$A_p$  -точкова матриця, для якої обчислюється обернена

$U^{(k)}$  - поточна локалізація оберненої матриці

$U^{(k+1)}$  -наступна локалізація оберненої матриці

$$m(U^{(k)}) = \frac{1}{2} (\text{infimum}(U_{ij}) + \text{supremum}(U_{ij})) - \text{матриця, елементами}$$

якої є середини відповідних елементів інтервальної матриці  $U^{(k)}$ .

Оскільки, обернену матрицю необхідно знаходити на кожній ітерації, виникає потреба оптимізувати процес зменшення кількості ітерацій за допомогою застосування оператора перетину для інтервальних матриць, в результаті, алгоритм набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} Y^{(k+1)} = m(U^{(k)}) + U^{(k)} (I_p - A_p * m(U^{(k)})) \\ U^{(k+1)} = Y^{(k+1)} \cap U^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

З аналогічних міркувань, перетин застосовується у ітераційному інтервальному методі Ньютона у формі Мура, що набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} N^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - (m(X^{(n)}) + X^{(n)} (I_p - A_p * m(X^{(n)}))) * f(\bar{x}^{(k)}), \\ X^{(k+1)} = N^{(k)} \cap X^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Умовою завершення процедури знаходження розв'язків системи є  $|\omega(X)| < \varepsilon$ , тобто щоб ширини локалізуючих інтервалів були меншими, ніж наперед задане  $\varepsilon$ , що забезпечує бажану точність результату.

Розглянутий алгоритм, при виконанні певних умов, накладених на вхідні дані, та правильній програмній реалізації, дає точний результат.

При виконанні інших умов доцільно використовувати інші методи, такі як Кравчика, Хансена-Сенгупти та простих ітерації.

1. *Алефельд Г.* Введення в інтервальні обчислення / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. - М.: Мир, 1987.
2. *Сеньо П. С.* Інтервальні методи розв'язування деяких класів детермінованих задач / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7.
3. *Сеньо П. С.* Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. - 2014. - Вип. 21.

**A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR FOR DIFFUSION-ADVECTION-REACTION PROBLEM**

Muts Pavlo Yuriyovych, Ukraine,  
 Ivan Franko National University of Lviv  
 Faculty of Applied Mathematics and Informatics  
[pavlo.muts@gmail.com](mailto:pavlo.muts@gmail.com)

**Problem formulation.** Let consider the following variational formulation of the diffusion-advection-reaction problem [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma\} \text{ and} \\ a_\Omega(u, v) := \int_\Omega [(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + v \beta \cdot \nabla u + \sigma uv] dx, \\ (l_\Omega, v) := \int_\Omega f v dx \quad \forall v, u \in V; \\ \text{find } u \in V \text{ such that} \\ a_\Omega(u, v) = (l_\Omega, v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (1)$$

where  $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^2$ ,  $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^2$ ,  $\beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^2$ ,  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $f = f(x)$

are given functions and  $a \cdot b = \sum_{i=1}^2 a_i b_i \quad \forall a = \{a_i\}_{i=1}^2, b = \{b_i\}_{i=1}^2$ .

**A posteriori error estimator.** If finite element approximation  $u_h$  is calculated in subspace  $V_h \subset V$ , we find an estimator of the error  $e = u - u_h$  as the solution of the residual problem of the following form [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given the space } E_h \subset V \setminus V_h \text{ and } u_h \in V_h; \\ \text{find estimator } e_h \in E_h \text{ such that} \\ a(e_h, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad \forall v \in E_h. \end{array} \right. \quad (2)$$

Let  $S_h = \partial T_h \setminus \Gamma = \{S_{ij}\}$  be the set of all internal edges of triangulation  $T_h = \{K\}$  used for construction subspace  $V_h$  and define the estimator [1]

$$e_h(x) = \sum_{S_{ij} \in S_h} \lambda_{ij} \varphi_{ij}(x) \text{ for } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

where  $S_{ij} = \bar{K} \cap \bar{K}'$ ,  $\{L_i\}$  are barycentric coordinates of  $K$ ,

$$\varphi_{ij}(x) = \begin{cases} 4L_i(x)L_j(x), & \forall x \in K = A_i A_j A_k, \\ 4L_i'(x)L_j'(x), & \forall x \in K' = A_j A_i A_{k'} \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus (K \cup K'). \end{cases} \quad (4)$$

Substituting (3) into (2) and taking into account the orthogonality property of the basis functions  $\{\varphi_{ij}\}$  we get

$$\lambda_{ij} = \frac{\langle l_{K'ij}, \varphi_{ij} \rangle - a_{K'ij}(u_h, \varphi_{ij})}{a_{K'ij}(\varphi_{ij}, \varphi_{ij})}, \tag{5}$$

where  $K'_{ij} = \{K \cup K' : \bar{K} \cap \bar{K}' = S_{ij} \ \forall K, K' \in T_h\}$ .

Finally we define the element-based a posteriori error estimator in the following form

$$e_h(x)|_K = \lambda_{ij}\varphi_{ij}(x) + \lambda_{jk}\varphi_{jk}(x) + \lambda_{kl}\varphi_{kl}(x) \quad \forall K = A_i A_j A_k \in T_h, \tag{6}$$

To obtain the finite element approximation with the prescribed tolerance  $\varepsilon$  we use  $h$ -adaptive finite element scheme with bisection refinement as proposed in [3].

**Numerical results.** Consider the following boundary value problem:

$$-\Delta u + 1000u = f, \quad u|_\Gamma = 0, \quad \Omega = (0,1)^2 \tag{7}$$

where right-hand side  $f$  is chosen such that problem (7) has the exact solution:

$$u(x, y) = e^{50xy(x-1)(y-1)} - 1.$$

The obtained numerical results for the problem (7) are presented in the table 1.

We denote  $p$  and  $p_h$  are convergence rates of the exact error and error estimator respectively,  $\hat{e}_h$  is the estimator suggested in [4] and  $\hat{p}_h$  is its convergence rate,  $\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

Table 1. Convergence of  $h$ -adaptive FEM with the tolerance  $\varepsilon = 3\%$ .

	<i>No</i>	<i>Car</i>	$\ e_h\ $	$p_h$	$\ e\ $	$p$	$\ \hat{e}_h\ _V$	$\hat{p}_h$
1	25	36	20.858	-	24.42	-	23.341	-
2	49	72	11.149	1.81	14.297	1.54	10.615	2.27
3	85	144	7.513	1.14	10.154	0.99	6.316	1.5
4	161	280	5.745	0.81	7.26	1.01	3.935	1.42
5	309	568	3.634	1.29	4.835	1.15	2.091	1.79
6	593	1120	2.889	0.68	3.544	0.91	1.369	1.25
7	1133	2184	1.907	1.24	2.392	1.18	0.902	1.25
8	2041	3984	1.499	0.8	1.803	0.94	0.665	1.02
9	3257	6416	1.06	1.45	1.374	1.14	0.581	0.56

We can remark that the sequence of approximations converges to the exact solution and error estimator satisfies the following inequality

$\|\hat{e}_h\|_V \leq \|e_h\|_V \leq \|e\|_V$  which means that the error estimator suggested here gives better results than the error estimator suggested in [4].

1. *Deuffhard P., Weiser M.* Adaptive Numerical Solution of PDEs. – Walter de Gruyter, 2012. – 421 p.
2. *Ostapov O., Vovk O., Shynkarenko H.* A posteriori error estimator h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problem. / Ostapov O., Vovk O., Shynkarenko H // Recent Advances in Computational Mechanics, Taylor & Francis Group, London. – 2014. – P. 329–337.
3. *Ostapov O. Yu.* Computable two-sided a posteriori error estimates for h adaptive finite element method / O. Yu. Ostapov, O. V. Vovk, H. A. Shynkarenko // Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues. – Taylor & Francis Group, 2016. – P. 449–453.

**МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ  
ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ З МЕТОДОМ НАЙШВИДШОГО  
СПУСКУ. ПРОГРАМНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ МЕТОДІВ.**

*Останко А. І., Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[samuelandriy4@gmail.com](mailto:samuelandriy4@gmail.com)

Розглянемо наступну систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Уявімо нашу задачу знаходження рішення даної системи як оптимізаційну, або інакше, екстремальну задачу. З функцій  $f$  і  $g$  системи утворюємо нову  $\Phi(x, y) = f^2(x, y) + g^2(x, y)$ . Так як ця функція невід'ємна, то знайдеться точка  $(x^*; y^*)$  така, що  $\Phi(x, y) \geq \Phi(x^*, y^*) \geq 0 \quad \forall (x; y) \in R_2$ , т.е.  $(x^*; y^*) = \arg \min_{x \in R_2} \Phi(x, y)$ . Отже, якщо тим чи іншим способом вдається отримати точку  $(x^*; y^*)$ , мінімізовану функцію  $\Phi(x, y)$ , і якщо при цьому виявиться, що  $\min_{(x,y) \in R_2} \Phi(x, y) = \Phi(x^*; y^*) = 0$ , то  $(x^*; y^*)$  - шукане рішення системи.

Аналогічно для  $n$ -мірної системи зведемо її рішення до екстремальної задачі  $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x) \rightarrow \min$

Основна ідея методів спуску полягає в тому, що при заданому початковому наближенні визначається напрямок, в якому функція спадає і проводиться переміщення в цьому напрямку. Якщо величина кроку переміщення вибрана не дуже велика, то значення функції зменшується. Алгоритм будь-якого методу спуску задається формулою  $x^{k+1} = x^k + h_k v^k$ , де  $x^k$  -  $k$ -те наближене для рішення,  $v^k$  - вектор,  $h_k$  - довжина кроку в напрямі  $v^k$ .

Як правило, в якості  $h_k$  вибирається значення  $h$ , що реалізує  $\min_h F(x^k + h v^k)$ .

У методі *найшвидшого спуску* вектор  $v^k$  вважається рівним вектору, протилежного градієнту функції  $F$  в точці  $x^k$  і задає напрямок найшвидшого спадання функції  $F$  в точці  $x^k$ .

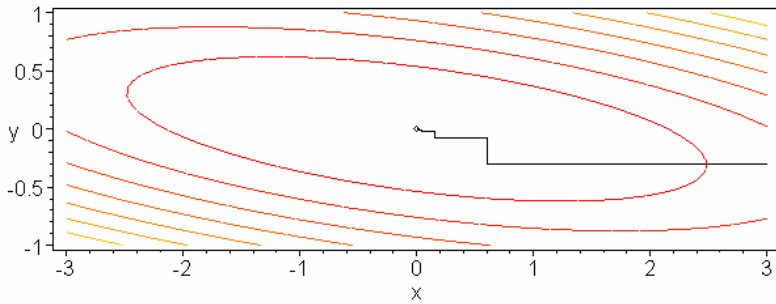
$$v^k = -gradF(x^k) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^k), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^k)\right)$$

У методі *покоординатного спуску* в якості  $v^k$  вибираються вектори, паралельні почерзі кожній із осей координат (в двовимірному випадку  $v^{2k} = (1,0), v^{2k+1} = (0,1), k = 0,1,2 \dots$ ).

Таким чином, задача багатовимірної оптимізації зводиться на кожному кроці до вирішення задачі  $\min_n F(x^k + hv^k)$ . Одновимірна оптимізація по даній формулі відбувається, як правило, методом золотого перетину з огляду на таке зауваження. На прямій  $x^k + hv^k$  може існувати кілька локальних мінімумів. Оскільки нас цікавить найближчий, то до застосування методу золотого перетину його спочатку локалізують способом, аналогічним описаному в методі золотого перетину. Відмінність полягає в тому, що задавшись деяким кроком  $h_0$ , свідомо меншим половини проміжку між двома локальними екстремумами досліджуваної функції, ми знаходимо значення  $F_j^k = F(x^k + h_0 j v^k), j = 0,1,2 \dots$ , до тих пір, поки не виконається умова  $F_{j+1}^k > F_j^k$ . Після цього викликаємо процедуру методу золотого поділу, в який мінімізується функція  $F(x^k + hv^k)$  зв змінною  $h$  на сегменті  $[h_0(j-1), h_0(j+1)]$ .

У методі покоординатного спуску невідомо, спадає чи зростає функція в напрямку  $v^k$ . Тому тут при виконанні на першому кроці умови  $F_1^k > F_0^k$  потрібно змінити напрям на протилежний або, змінити знак  $h_0$  и повторити алгоритм локалізації.

Метод покоординатного спуску (графічне представлення):



1. *Бартіш М.Я.* Методи оптимізацій.
2. *Бартіш М.Я., Чипурко А.І.* Про застосування модифікацій методу Гауса-Ньютона //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2000. Вип. 1. С. 3–7.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.



**NUMERICAL SOLUTIONS FOR THE NARLOVE –ARROW MODEL  
OF OPTIMAL INVESTMENT.**

*Nadiia Pavliuk, Ukraine/Italy*

Ivan Franko National University of Lviv/ University of L'Aquila  
FAMI/ DISIM  
[nadiia.pavliuk@intermaths.eu](mailto:nadiia.pavliuk@intermaths.eu)

The problem of the optimal strategy of finding in the advertising industry is actively pursued by specialists in economics and finance, business management and marketing from the beginning of 1960s.

Now there are several models for such problems, which are different by sets of conditions and factors that affect the result. Small changes in formulation often leads to considerable complication of the problem. The criterion of optimality, is generally considered as the greatest profits at these conditions. In many cases this leads to optimal control problems for which we use Pontryagin maximum principle.

In the classical Nerlove-Arrow model, proposed in 1962, we are following the next conditions: some company-monopoly invests the money to advertise their products during the time  $T$ .  $u(t)$  is determined by the amount of invested assets (in dollars) per unit time at the moment  $t$ , and  $x(t)$  - disposition (goodwill) of buyers to these products. The goodwill is a kind of measure of the effectiveness of advertising, so named "virtual" capital of company that can be converted into real money, using the utility function

$\psi(x)$ . This function is assumed to be known in advance.

All factors that can influence sales, except for the location, are assumed to be constant throughout the lifecycle, i. e. the whole range  $[0, T]$ . The main idea of task is to find function  $u(t)$  that maximizes the total income of the company

$$J = \int_0^T (\psi(x(t)) - u(t)) dt.$$

This model was many times summarized and supplemented by new conditions. In particular, S.Sethi put a restriction on value of advertising budget. In both model of decision the solution was obtained in an explicit form, but included elements of the impulse control, i.e., the optimal trajectory existed only in the sense of distributions [2]. In particular, the function  $u(t)$  was a generalized function with a singular component in the form of Dirac's delta-function  $\delta(t)$ . However, such answer cannot be applicable in practice, since the manager of the company will not allow to spend a large part of the budget

within one moment. From mathematical site it is a priory not clear how to prove optimality of such impulse control trajectories.

In our thesis we generalize approach of V. Y. Protasov and A.V. Rozhdestvenskiy on problem of S. Sethi, consider the modification of Nerlove- Arrow model with two extra restrictions: on the size of advertising budget and on the goodwill. In other words, the control function  $u(t)$  will have value on  $[0, C]$  and the amount of money spent  $\int_0^T u(t) dt$  does not exceed the fixed value of the advertising budget  $B_0$ .

According to the classical Nerlove-Arrow model, advertising expenditure can be considered as a capital investment to create present and future demand for the firm's products and, hence, to create present and future revenues for the firm. Advertising is assumed to influence via stock of goodwill which cumulatively counts for the effects of the firm's current and past advertising outlays.

This paper considers an optimal control problem for the dynamics of the Nerlove-Arrow advertising model. The optimal control being the rate of advertising expenditure required to maximize the present value of net profit streams over a finite horizon subject to a budget constraint. We derive the conditions of optimality my means of Pontryagin's maximum principle and find the trajectory by solving the optimality equations numerically. We use the numerical integration, the Newton and the bisection methods of solutions of algebraic equations, the shooting method, etc. We analyze the convergence of our numerical algorithms and the dependence of the optimal trajectory on the initial data.

1. M. Nerlove, K. J. Arrow, *Optimal advertising policy under dynamic conditions*, *Economica*, 39 (1962), 129- 142.
2. S. P. Sethi, *Optimal advertising for policy under dynamics conditions*, *Economic*, 39 (1962), 129 - 142.

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ НЕЯВНОЇ СХЕМИ

*Прусак Іван Романович, Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[iv.prusak@gmail.com](mailto:iv.prusak@gmail.com)

Була розглянута нелінійна нестационарна задача теплопровідності

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial x} \left( w^p \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, t_*],$$

$$w = w(x, t): [a, b] \times [0, t_*] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$w(a, t) = \varphi(t),$$

$$w(b, t) = \psi(t),$$

$$w(x, 0) = \mu(x).$$

Дана задача широко використовується в нелінійних задачах тепло- і масоперенесення, теорії горіння і теорії фільтрації. Наприклад, вона описує нестационарне теплоперенесення в нерухомому середовищі, коли коефіцієнт температуропровідності є степенною функцією температури.

Для знаходження наближеного розв'язку була здійснена дискретизація рівняння за часом. Для більш точної апроксимації був використаний підхід Кранка-Ніколсона.

В результаті вихідна початково-крайова задача була зведена до послідовності нелінійних двоточкових крайових задач на кожному часовому шарі.

Для побудови наближеного розв'язку задачі було проведено лінеаризацію методом Ньютона-Канторовича. Для цього розв'язок нелінійної крайової задачі на  $m$ -ому часовому шарі був поданий у вигляді

$$w_m = w_{m-1} + \Delta w_m,$$

де  $\Delta w_m$  – деяка мала нев'язка.

Підставляючи дане співвідношення у рівняння і крайові умови нелінійної одновимірної задачі, розвиваючи праві частини в ряд Тейлора і відкидаючи нелінійні доданки отримуємо лінеаризовану крайову задачу з однорідними умовами на відшукання функції  $\Delta w_m$ . Цю задачу розв'язуємо методом скінченних різниць.

На основі наведеної теорії було розроблено і реалізовано алгоритми для значення  $p = \pm 1$ . Було проведено верифікацію даних алгоритмів на аналітичних розв'язках вихідної задачі ([1]), і таким чином, було показано хорошу збіжність.

1. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.

## NUMERICAL SOLUTION FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CHATTERING REGIME

*Sapuzhak Anna*, Ukraine

Ivan Franko National university of Lviv

Department of applied mathematics and informatics

University of L'Aquila, Italy

Intermaths program, Interdisciplinary mathematics

[annasapuzhak94@gmail.com](mailto:annasapuzhak94@gmail.com)

supervisor: Vladimir Protasov

Optimal control theory is a mathematical optimization method for deriving control policies. The method is largely due to the work of Lev Pontryagin and Richard Bellman in the 1950s, after contributions to calculus of variations by Edward J. McShane.

The optimal control theory deals with the problem of finding a control law for a given system such that a certain optimality criterion is achieved. A control problem includes an objective functional that is a function of state and control variables. An optimal control is a set of differential equations describing the paths of the control variables that minimize the objective function. The conditions of optimal control can be derived using Pontryagin's maximum principle (a necessary condition also known as Pontryagin's minimum principle or simply Pontryagin's Principle) or by solving the Hamilton–Jacobi–Bellman equation (a sufficient condition). In our work the optimal control conditions will be derived using Pontryagin's maximum principle [4],[3]

The aim of our work to elaborate efficient numerical methods for optimal control problems with the chattering regime. The chattering regime, called also the bang-bang regime, is a phenomenon when the optimal trajectory of the system possesses an infinite discrete set of switching points on a finite time interval. This phenomenon naturally appears in many problems of mechanics, astronautics, robotics, economics, and engineering. In most of cases, with a very few exceptions, the optimal trajectory cannot be found explicitly. It is given as a solution of a system of differential equations with some optimality conditions. Its existence and uniqueness are proved. That is why it becomes an important issue to use numerical methods for the construction of the optimal trajectory possessing the chattering phenomenon. We consider several examples[6] of problems with the chattering phenomenon from the book [5] including the well-known Fuller example [1],[2]. For each example we apply various numerical methods to build the optimal trajectory, analyze the stability

and convergence of those methods and make the sensitivity analysis, i.e., the dependence of the optimal trajectory on the conditions of the problem. In addition, we consider applications of Fuller's problem to the approximation theory, more precisely, to the Kolmogorov type functional inequalities. Another modification of the Fuller example considered in our work leads to the following mechanical problem: the minimization of a weighted mean-square deviation of a massive object from the origin. The control function is interpreted as a bounded exterior force and the weight is the discounted factor  $e^{-\alpha t}$ .

For constructing the optimal trajectories we use the basic results of the optimal control theory, the numerical methods of solving algebraic equations such as the bisection and the Newton methods, and numerical methods for boundary value problems, in particular, the shooting method. Changing parameters of the problems we derive conclusions of efficiency of the methods, of their convergence, stability, and the dependence on the initial conditions.

1. *A. Kochurov, G. Magaril-Ilyayev, V. Tikhomirov*, Inequalities for derivatives on a line and a half-line and problems of recovery of linear functionals
2. *T. Fuller*, Relay control systems optimized for various performance criteria
3. *V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin*, Optimal Control, 1987
4. *В.Ю.Протасов*, Вариационное исчисление и оптимальное управление ,[http://new.math.msu.su/departament/opu/sites/default/files/attached\\_files/course-opu-2008.pdf](http://new.math.msu.su/departament/opu/sites/default/files/attached_files/course-opu-2008.pdf)
5. *Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Осмоловский Н.П., Магарил-Ильяев Г.Г., Протасов В.Ю., Тихомиров В.М., Фурсиков А.В.*, Оптимальное управление
6. *M. L. Zelikin and V. F. Borisov* , Theory of Chattering Control

## ГЕТЕРОГЕННА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

*Сподар Ірина Володимирівна, Україна*  
Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[iryanka-ww@ukr.net](mailto:iryanka-ww@ukr.net)

**Вступ.** Для опису та моделювання складних фізичних явищ можливим є поєднання ієрархічних математичних моделей з метою зменшення обчислювальної складності. Це призводить до системи гетерогенних проблем, де крайові задачі різних видів розглядаються на підобластях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (з перетином або без) вихідної розрахункової області  $\Omega$ . В такому випадку виникають два питання: в який спосіб можуть бути розроблені умови об'єднання суміжних меж підобластей та які алгоритми застосовувати для знаходження розв'язків. В даній роботі розглянуто розбиття розрахункової області на підобласті без перетину та застосування алгоритму Діріхле-Неймана до задачі адвекції-дифузії.

**Головна ідея методу Діріхле-Неймана** полягає в тому, що на одній з підобластей формулюють задачу з крайовими умовами Діріхле, на іншій – з крайовими умовами Неймана. Розв'язуючи ітераційно отримані задачі, знаходять послідовності функцій  $\{u_1^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  на  $\Omega_1$ ,  $\{u_2^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  на  $\Omega_2$ , що збігаються до розв'язків вихідної гетерогенної задачі  $u_1$  і  $u_2$  відповідно. Співпадіння розв'язків  $u_1$  і  $u_2$  на спільній межі підобластей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  забезпечується умовами спряження.

**Обчислювальний експеримент.** Розглянемо задачу адвекції-дифузії

$$\begin{cases} A_1 u_1 = \frac{d}{dx} \{u_1\} \mp b_0 u_1 = f & \text{в } \Omega_1, \\ A_2 u_2 = -\frac{d}{dx} \left( v \frac{du_2}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \{u_2\} \mp b_0 u_2 = f & \text{в } \Omega_2, \\ u_1 = g & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \\ u_2 = g & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Задамо умови спряження:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{на } \Gamma, \\ \frac{d}{dx} \langle u_1 \rangle - \frac{d}{dx} \left( v \frac{du_2}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \langle u_2 \rangle = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases}$$

Для прикладу розглянемо випадок, коли  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $v = 1$ ,  $g = 0$ ,  $b = const$  – коефіцієнт адвекції,  $\Gamma$  – спільна межа  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ .

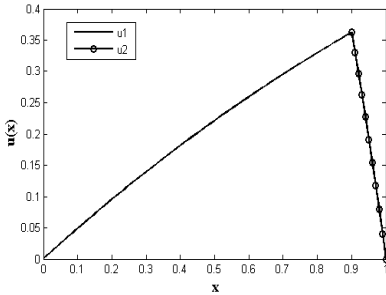


Рис.1. Графічна ілюстрація розв'язку при  $b = 2$

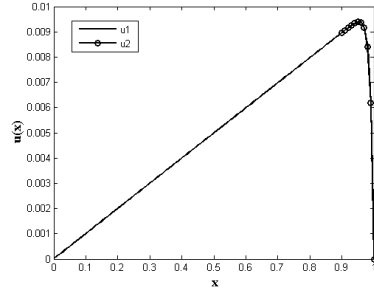


Рис.2. Графічна ілюстрація розв'язку при  $b = 100$

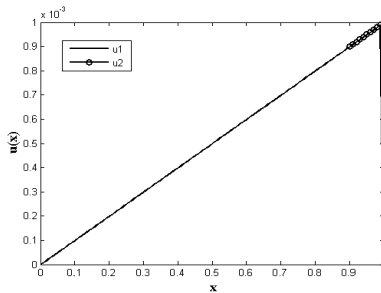


Рис.3. Графічна ілюстрація розв'язку при  $b = 1000$

**Висновки.** Застосовано алгоритм декомпозиції областей Діріхле-Неймана до задачі адвекції-дифузії. Наведено графіки отриманого розв'язку для різних значень коефіцієнтів адвекції. Результати обчислювальних експериментів демонструють виконання умов спряження



та збіжність методу Діріхле-Неймана при його застосуванні до задачі адвекції-дифузії.

1. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. *Quarteroni A.* Heterogeneous Mathematical Models in Fluid Dynamics and Associated Solution Algorithms / A. Quarteroni – NY : Springer, 2012. – p. 57. – (Multiscale and Adaptivity: Modeling, Numerics and Applications).

## АПАРАТ МАЖОРАНТ І МІНОРАНТ ТА ЇХНІХ ДІАГРАМ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО

Троян Марія Юріївна, Україна

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[masha\\_troyan@mail.ru](mailto:masha_troyan@mail.ru)

В [1] побудовано апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблицно, який використано для апроксимації функцій, побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, побудови чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких функцій. За точки зображення значень функції  $f(x)$  взято  $(x_i, -\ln|f(x_i)|)$ .

В доповіді розглядається побудова апарату мажорант і мінорант та їхніх діаграм функцій, заданих таблицно, де за точки зображення значень функції  $f(x)$  береться  $(x_i, f(x_i))$ . Там же цей апарат використано для побудови чисельного методу відшукування екстремуму як гладких, так і негладких вгнутих або опуклих функцій однієї змінної.

Далі побудуємо чисельний метод відшукування абсолютного екстремуму як гладких, так і негладких довільних функцій однієї змінної, використовуючи розроблений апарат мажорант і мінорант функцій, заданих таблицно.

Розглянемо функцію  $y = f(x) > 0$ , визначену на проміжку  $[a, b]$ . Виберемо на цьому проміжку систему точок  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , де  $x_0 = a$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ , і позначимо  $f(x_i) = a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Алгоритм відшукування абсолютного максимуму функції  $f(x)$  складається з низки кроків.

На першому кроці шукаємо

$$R = \max_{0 < v \leq n} \frac{1}{vh} (a_v - a_0) \quad (1)$$

Якщо  $R < 0$ , то точка  $x_0$  є точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  і на цьому робота алгоритму завершується.

Нехай  $R \geq 0$  і  $v = k_1$  – індекс, для якого в (1) досягається максимум. Якщо  $k_1 = n$ , то точка  $x_n$  є точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  і на цьому робота алгоритму завершується. Припустимо, що  $k_1 \neq n$ . Якщо

$$R_{k_1} = \frac{1}{h} (a_{k_1+1} - a_{k_1}) < 0,$$

то точка  $x_{k_1}$  є точкою локального максимуму функції  $f(x)$ . Щоб ця точка була точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  досить виконання умови

$$\frac{1}{vh} (a_{k_1+v} - a_{k_1}) < 0, v = 1, 2, \dots, n - k_1.$$

Нехай точка  $x_{k_1}$  не є точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$ . Тоді шукаємо

$$R = \max_{0 < v \leq n - k_1} \frac{1}{vh} (a_{k_1+v} - a_{k_1}) \quad (2)$$

Нехай  $k_2$  – індекс, для якого в (2) досягається максимум. Якщо  $k_2 = n$ , то точка  $x_n$  є точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  і на цьому робота алгоритму завершується. Припустимо, що  $k_2 \neq n$ . Якщо

$$R_{k_2} = \frac{1}{h} (a_{k_2+1} - a_{k_2}) < 0,$$

то точка  $x_{k_2}$  є точкою локального максимуму функції  $f(x)$ . Щоб ця точка була точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  досить виконання умови

$$\frac{1}{vh} (a_{k_2+v} - a_{k_2}) < 0, v = 1, 2, \dots, n - k_2.$$

І так далі... Припустимо, що знайдена точка  $x_{k_s}$  є точкою локального максимуму функції  $f(x)$  і не є точкою абсолютного максимуму цієї функції. Тоді шукаємо

$$R = \max_{0 < v \leq n - k_s} \frac{1}{vh} (a_{k_s+v} - a_{k_s}) \quad (3)$$

Нехай  $k_{s+1}$  – індекс, для якого в (3) досягається максимум. Якщо  $k_{s+1} = n$ , то точка  $x_{s+1}$  є точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  і на цьому робота алгоритму завершується. Припустимо, що  $k_{s+1} \neq n$ . Якщо

$$R_{k_{s+1}} = \frac{1}{h} (a_{k_{s+1}+1} - a_{k_{s+1}}) < 0,$$

то точка  $x_{k_{s+1}}$  є точкою локального максимуму функції  $f(x)$ . Щоб ця точка була точкою абсолютного максимуму функції  $f(x)$  досить виконання умови

$$\frac{1}{vh} (a_{k_{s+1}+v} - a_{k_{s+1}}) < 0, v = 1, 2, \dots, n - k_{s+1}.$$

Отже, за скінченну кількість кроків завжди з точністю  $o(h)$  буде знайдена точка абсолютного максимуму функції  $f(x)$ .

Якщо функція  $f(x) < 0$ , то можна розглянути  $f(x) + C$ , де  $C > 0$  – деяка стала, така що  $f(x) + C > 0$ .

Для відшукування абсолютного мінімуму функції  $f(x)$  можна використати алгоритм відшукування абсолютного максимуму функції  $-f(x)$  або побудувати аналогічний алгоритм, використовуючи міноранту функції  $f(x)$ .

1. Цегелик Г.Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. - 190 с
2. Ostrowski A. Recherches sur la Méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent / A. Ostrowski // Acta math. – 1940. – Vol.72. – P. 99-257.

## МЕТОД БЛОЧНОГО ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

*Хімка О.В.*, Україна

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[olkhima@gmail.com](mailto:olkhima@gmail.com)

Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач немає, тому актуальною є проблема побудови нових ефективніших алгоритмів.

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$P(x) = 0, P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1)$$

Для розв'язування задачі (1) у випадку  $m = n$  використовують метод Ньютона, який є локально квадратично збіжним.

У випадку  $m > n$  задачу (1) замінимо задачею про найменші квадрати

$$f(x) = \frac{1}{2} (P(x), P(x)) \rightarrow \min$$

Пропонується метод блочного покоординатного спуску, який є ефективний при великих  $n$ .

Введемо позначення  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_1 = \{1_1, 1_2, \dots, 1_p\} \subseteq N$ ,  $1 = \overline{1, s}$ , де  $1_i \in N$ ,  $1 \leq 1_i \leq n$ , зауважимо що

$$\bigcup_{i=1}^s N_i = N, s \in \mathbb{R}, p \leq n,$$

а також  $N_i \neq N_j, i \neq j$ .  $h_1 = (h_1^1, \dots, h_1^p)^T$ ,

$$h_1^i = \begin{cases} 0, & i \in N_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}, & i \in N_1 \end{cases}$$

Тоді для розв'язування (1) пропонується алгоритм вигляду

$$x_{k,j+1} = x_{k,j} - \alpha_{k,j} h_j(x_{k,j})$$

$$x_{k,p+1} = x_{k+1,1} = x_{k+1}$$

$$f(x_{k,j+1}) - f(x_{k,j}) \leq -\varepsilon \alpha_{kj} \|h_j(x_{k,j})\|^2$$
$$k = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots, p$$

Розглянутий алгоритм при виконанні певних умов накладених на  $P(x)$  коректно визначений і збіжний.

1. *Бартіш М.Я.* Методи оптимізацій.
2. *Бартіш М.Я., Чипурко А.І.* Про застосування модифікацій методу Гауса-Ньютона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2000. Вип. 1. С. 3–7.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.

**СПОСІБ ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР'Є ТА ЙОГО  
ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ЧИСЛОВОГО  
ОБЕРНЕННЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА**

*Хоменко Надія Віталіївна, Україна*

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук

[nadja.chomenko@gmail.com](mailto:nadja.chomenko@gmail.com)

Розв'язок широкого кола задач математичної фізики може бути отримано у вигляді рядів Фур'є. При розгляді задач, що пов'язані з дослідженням локалізованих дій отримують швидкозмінні розв'язки, у зв'язку з чим ряди повільно збігаються. Для розв'язування складних задач метод рядів Фур'є використовують сумісно з іншими підходами. Зокрема, при додатковому застосуванні методу граничних елементів коефіцієнти рядів знаходяться шляхом розв'язування одно- або двовимірних інтегральних рівнянь, що відповідно вимагає значного обсягу обчислень [2, 3, 5]. У таких випадках актуальною є проблема покращення збіжності рядів з контрольованою точністю розрахунків. У літературі наведено низку способів, які дозволяють покращити збіжність рядів: сігма-множники Ланцоша; підходи, які побудовані на основі розгляду задачі сумування рядів як некоректної [4] і ін. У доповіді запропоновано метод покращення збіжності рядів Фур'є для функцій, які можуть бути з достатньо високою точністю апроксимовані методом найменших квадратів кусково-неперервними поліномами першого степеня на всьому проміжку задання ряду або на всьому проміжку, за винятком області малих розмірів, та відомому розміщенні останньої.

Розглянемо неперервну на проміжку  $-l \leq x \leq l$  функцію  $f(x)$ , задану рядом Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Наблизимо її лінійно-неперервними функціями. Для цього поділимо проміжок вузловими точками  $x_j = jh + a$ ,  $j = 0, \dots, N$ ,  $h = (b - a) / N$ . Для знаходження наближених значень функції у вузлових точках  $A_j$  отримано систему рівнянь

$$aA_{j-1} + bA_j + aA_{j+1} = \beta_j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (1)$$

де  $\beta_j = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma(0.5 \lambda_n h) e^{i \lambda_n x_j}$ ,  $\gamma(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2}$ .

Звідси отримуємо формулу

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Gamma_n \exp(i \lambda_n x), \quad \Gamma_n = g(\lambda_n h),$$

$$g(t) = \frac{3}{2 + \cos t} \left( \frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2. \quad (2)$$

Наведений підхід може бути ефективно застосованим для покращення збіжності рядів Фур'є у формулі обернення перетворення Лапласа на основі формули Пруднікова. Розглянемо задачу знаходження функції  $f(t)$  на основі відомого інтегрального зображення Лапласа

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$ . Позначимо через  $\delta$  сталу, таку що функція  $F(s)$  аналітична при  $\text{Re } s > \delta$ . Тоді існує точна формула подання оригіналу через його зображення [1]

$$f(t) = \frac{1}{l} \exp(ct/l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s_n) \exp(2\pi n i t/l) - R_1, \quad (3)$$

де  $s_n = (c + 2\pi n i)/l$ ;  $c$  – стала, вибором якої можна покращити збіжність розв'язку ( $\text{Re}(c) > 0$ );  $l$  – деяка стала,  $0 < t < l$

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nc) f(t + nl). \quad (4)$$

Як правило, ряд у формулі (3) збігається повільно. Це пов'язано з тим, що для широкого класу функцій  $F(s_n) = O(1/n)$ , причому за великих значень  $n$  ряд є знакозмінним. Тому при розрахунках з використанням формули (3) для обчислення ряду необхідно утримувати в ньому велику кількість членів. Показано, що для підвищення ефективності формул числового обернення перетворення Лапласа, які базуються на рядах Фур'є, доцільно застосовувати отриману формулу (2). Наведено приклади застосування отриманої формули, які вказують на її високу точність для розв'язування широкого кола прикладних задач.



1. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М.: Высш. школа, 1975. – 407 с.
2. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
3. Максимович В. Н., Соляр Т. Я. Уточненные формулы для определения обратного преобразования Лапласа и их применение в задачах теплопроводности // Инж. физ. журн. – 2002. – **75**, №3. – С. 102-103.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 286 с.
5. Kushnir R. M., Solyar T. Ya. A Numerical-Analytical Approach to the Analysis of Non-Stationary Temperature Fields in Multiply-Connected Solids // Mechanics, Materials Science & Engineering. – 2016. – № 3. – pp. 90-106, doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.

## ІНТЕРВАЛЬНИЙ МЕТОД ТИПУ РУНГЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

*Штогрин Юлія Богданівна, Україна*  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
[julia.ilxiv@gmail.com](mailto:julia.ilxiv@gmail.com)

Потрібно розв'язати рівняння

$$F(x)=0, \quad (1)$$

де  $F: R^n \rightarrow R^n$  – нелінійне відображення.

Для розв'язування рівняння (1) побудуємо ефективний інтервальний ітераційний процес, який базується на ідеї Рунге розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Розкладемо  $F(x)$  в ряди Тейлора:

$$F(x^{(k)} + F'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)} + \theta_2^0(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)})^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & F(x^{(k)} + F'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)})(x^* - x^{(k)})^2 + \\ & + \frac{1}{3!}F'''(x^{(k)} + \theta_2^0(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)})^3 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо лінійну комбінацію значень першої похідної функції:

$$F(x, z) = F(x^{(k)}) + (\alpha_1 F'(x^{(k)}) + \alpha_2 F'(x^{(k)} + \beta(z - x^{(k)})))(x - x^{(k)}) \quad (4)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  – невизначені коефіцієнти.

Із означення  $F(x, z)$  маємо:

$$\begin{aligned} & F(x, z) = F(x^{(k)}) + (\alpha_1 + \alpha_2)F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \alpha_2\beta F''(x^{(k)} + \\ & \beta(\theta_2^0)_z(z - x^{(k)})^2 \ni 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Порівнюючи (2) і (5), для визначення коефіцієнтів  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ , які задовільняють умови, вказані вище, маємо співвідношення:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 \beta^3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Звідси отримуємо  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{2}{3}$ . Але  $(\theta_2^1)_z \rightarrow \frac{1}{3}$ , а  $\theta_2^0 \rightarrow \frac{1}{4}$ .

Враховуючи те, що  $z \in Z$ , і таким чином,  $(\theta_2^1)_z$  приймає різні значення інтервалу  $(0,1)$ , легко отримати умови, при яких на порядок підвищується точність апроксимації  $F(x)$  лінійної комбінації  $F(x, z)$ .

Таким чином, для розв'язання рівняння (1) маємо наступний метод:

$$V^{(k+1)} = x^{(k)} - \left( \frac{1}{4} F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4} F'(x^{(k)} + \frac{2}{3} (X^{(k)} - x^{(k)})) \right)^{-1} F(x^{(k)}) \quad (6)$$

$$X^{(k+1)} = V^{(k+1)} \cap X^{(k)}$$

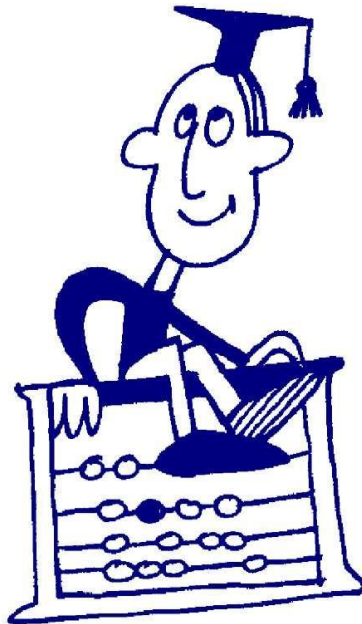
Методика побудови методу (6) передбачає його високу ефективність.

Метод (6) апробовувався розв'язуванням систем нелінійних рівнянь.

Результати проведених числових експериментів підтверджують отримані теоретичні висновки.

1. Алфельд Г.,  
Херцберг Ю. Введеие в интервальные вычисления.-Москва,1987.,360с.
2. Калмиков С.А.,  
Шокин Ю.И., Олдашев З.Х. Методы интервального анализа. –  
Новосибирск, 1986., 215с.
3. Сеньо П.С.,  
Венгерский П.С. Интервальный метод решения систем нелинейных  
уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем. – Львов,  
1990.

## МОДЕЛЮВАННЯ



## MATHEMATICAL INVESTIGATION OF ELASTODYNAMIC EQUATIONS

Abdurakhmanova Sofiya, Ukraine  
Ivan Franko National university of Lviv  
Department of applied mathematics and informatics  
University of L'Aquila, Italy  
Intermaths program, Interdisciplinary mathematics  
[sofiya.abdurahma@gmail.com](mailto:sofiya.abdurahma@gmail.com)

Italy has been shaken by deadly earthquakes dozens times, and most recent earthquakes have occurred in the Apennines, specifically in Abruzzo. The earth's crust in this area is cracked with geological defects. Basically, the stresses and strains enhance gradually and afterwards blast immensely. "The highest seismicity is concentrated in the central-southern part of the peninsula, along the Apennine ridge, in Abruzzo, Calabria and Sicily and in some northern areas, like Friuli, part of Veneto and western Liguria", says Protezione Civile.

One of the most destructive earthquake wrecked L'Aquila on April 6th 2009 and killed more than 300 people at the time. It lasted 20 second with magnitude 6.9 and effected more than 45 towns, 1.600 people were injured and more than 65.000 inhabitants were compelled to quit their homes. Historic events or swarms of trembles are recorded for 1315, 1349, 1452, 1461, 1498, 1501, 1646, 1703, 1706, 1791, 1809, 1848 and 1887. One of the most important earthquakes occurred February 2, 1703, causing ruins over much of central Italy and destroying the city of L'Aquila, killing 5.000 people.

Since Italy is located in the ground of plate collision between African and Eurasian continents, it leads to the ongoing activity of the earth's crust. [2] The main principle of the phenomenon of such earthquakes is characteristic of an extensional earthquake, due to stretching of the earth's crust, not a compressional one. [6] The extension is oriented in a northeast-southwest direction, at right angles to the Apennine range. During years, people consider the problem of investigation of the reasons is immensely relevant. Pretending possible consequences of occurring trembles takes a role of the global significance. [2]

An *earthquake* is the shaking of the surface of the Earth, resulting from the sudden release of energy in the Earth's lithosphere that creates seismic waves. *Seismic waves* are waves of energy that travel through the Earth's layers, and are a result of earthquakes, volcanic eruptions, magma movement, large landslides and large man-made explosions that give out low-frequency acoustic energy. [7]

The Earth's lithosphere is broken up to lots of pieces called tectonic plates. These plates always move but extremely slowly. From time to time, plates rub against each other, set apart from each other, slip under each other, cross over or collide with one another. The plates move because of the currents of the liquid mantle that the tectonic plates float on. The mantle moves in a pattern called a convection cell that forms when warm material rises, cools, and eventually sink down. As the cooled material sinks down, it is warmed and rises again. This current makes the liquid rock continuously move under the lithosphere, in turn making the plates move. [4]

Earth's outward layer, the crust, is divided into a set of massive moving plates. The borders of their adjacency are called plate boundaries. There are three different types of plate boundaries: divergent, convergent and transform. [1] A *divergent*, or constructive plate boundary is when two plates move apart from each other, usually producing a large crack down the center where they separated. A *convergent*, or destructive plate boundary is when two plates move towards each other. When it happens near land, the earth above the two meeting plates rise, forming spectacular mountain ranges. A parallel oceanic trench typically forms just off the shore, as one plate descends deep into the Earth's core. These convergent boundaries commonly cause volcanoes to form, as old crust melts. The last plate boundary is the transform boundary. A *transform* boundary is when the two plates slide against each other in a sideways motion creating a crack down the middle. As two plates pushing against one another, in a transform boundary, neither plate is added to at the boundary, nor destroyed.

Soft soils such as sand and clay consist of small particles, and often the pore space between the particles is filled with water. In soil mechanics this is denoted as a saturated or partially saturated porous medium. The deformation of such porous media depends upon the stiffness of the porous material, and upon the behavior of the fluid in the pores. If the permeability of the material is small, the deformations may be considerably retarded by the viscous behavior of the fluid in the pores. The simultaneous deformation of the porous material and the flow of the pore fluid is the subject of the theory of consolidation, often denoted as poroelasticity.

Specifically, here is considered seismic attenuation and dispersion resulted from wave-induced fluid flow (WIFF) in heterogeneous poroelastic media. WIFF occurs when local pressure equilibration is obtained between the peaks and troughs of a passing wave by means of viscous pore-fluid flow induced by the macroscopic pressure gradient. [5]

In the current case, this is about mesoscopic flow which means that the considering flow is on a scale much larger than typical pore size but much smaller than the wavelength. In order to evaluate seismic attenuation in the presence of heterogeneities of varying complexity, ranging from periodically-layered media to rocks containing fractures and highly-irregular distributions of fluid patches, models are developed using Biot's theory of poroelasticity. The basic principles of the theory of poroelasticity are twofold: the equations of equilibrium of the porous medium, and the equations of conservation of mass of the two components: the solids and the pore fluid.

The Biot's theory implies that one phase media corresponds to an elastic solid, and the second phase corresponds to a fluid moving through the pores of the solid. Compression of the pore fluid and compression of the particles has been taken into account. [3]

The main goal of mathematical modelling of wave processes is to explain the observed effects and predict new ones, as well as to determine the conditions for their occurrence in geological environments. The purpose of the current work is to interface poroelastic and elastodynamic models, to investigate and describe their behavior in the shared medium, to study the physical features of the propagation of seismic waves in the shared medium and to develop numerically some earthquake models.

1. BBC Earth, Plate boundaries, [http://www.bbc.co.uk/science/earth/surface\\_and\\_interior/plate\\_boundary](http://www.bbc.co.uk/science/earth/surface_and_interior/plate_boundary)
2. Bressan D., Scientific American, 2012, April 6
3. Kudarova A., Effective models for seismic wave propagation in porous media, 2016
4. L'Aquila Earthquake, Cause of the L'Aquila Earthquake of 2009, <http://emmanolanlaquilaearthquakeitaly2009.weebly.com/cause.html>
5. Müller, Tobias M., Boris Gurevich, and Maxim Lebedev. "Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks—A review." *Geophysics* 75.5 (2010): 75A147-75A164
6. Pierce R., What Are the Types of Stresses in the Earth's Crust?, Scientific.com
7. Wikipedia, Earthquake, <https://en.wikipedia.org/wiki/Earthquake>

**NUMERICAL SOLUTION OF BLACK-SCHOLES INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM**

*Bomk Volodymyr-Markiyany Mykhailovych*, Ukraine  
 Ivan Franko National University of Lviv  
 University of Nice–Sofia Antipolis  
 Applied Mathematics and Informatics Faculty  
 markiyanybomk10@gmail.com

Option pricing is one of the many problems of financial mathematics or financial engineering as it is called now. Example may be the European call option on a given asset which enables its holder to sell the asset at a future time  $T$ , the *maturity*, for a price  $K$ , the *strike*. Assume that the market is liquid and that arbitrage is not possible, the price of the option at  $T$  will be  $(S_T - K)^+$ . Another thing is that  $S_{t+\delta t}$  evolves from  $S_t$  with a mean *tendency*  $\mu$  and a random fluctuation of intensity  $\sigma$ , the *volatility*:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \tag{1}$$

Where  $B_t$  is a Brownian motion and therefore the European call option  $C_t$  is priced by:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E(S_T - K)^+ \tag{2}$$

There are two important classes of numerical methods in financial engineering: Monte-Carlo method and deterministic methods based on the PDE.

**Monte-Carlo Method** Consider SDE (1). The exact solution of (1) is:

$$S_t = \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) \tag{3}$$

Here we simulate Brownian motion with standard normal distribution using Box-Muller method. Now we can get price of call option (2) using Monte-Carlo procedure:

$$E[f(S_t)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S_t^{(i)}) \tag{4}$$

with following initial conditions:  $N = 100\,000$  – number of samples,  $S_0 = 6$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $K = 4$ ,  $T = 1$ .

$C_t = 4.1270$  – price of call option with variance  $\sigma = 3.1315$ .

Looking at (5)

$$S_n - \frac{\zeta_{\alpha\sigma}}{\sqrt{N}} \leq E[f(S_t)] \leq S_n + \frac{\zeta_{\alpha\sigma}}{\sqrt{N}} \tag{5}$$



we see that we can reduce confidence interval by increasing number of samples or by decreasing variance.

**Finite-Volume Method** Consider the initial-boundary value problem of heat conduction: find such a function  $P(S, t)$  that satisfies equation

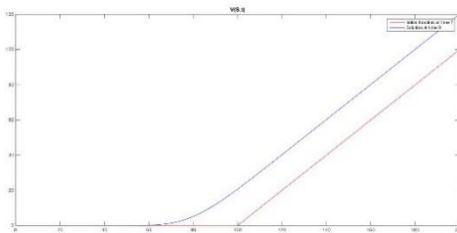
$$\begin{cases} \partial_t P(S, t) + \partial_S \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S P(S, t) + (r - \sigma^2) S P(S, t) \right) - (2r - \sigma^2) P(S, t) = 0 \\ P(S, 0) = (S - K)^+ \text{ на } (0, S_{max}) \\ P(S_{max}, \tau) = S - K e^{-r\tau} \text{ на } (0, T) \end{cases}$$

Using Upwind scheme for spatial discretization as well as theta method for time discretization we obtain following discretized problem:

Find  $v_h \in V_h$  such that

$$\begin{cases} \frac{v_i^n - v_{i-1}^{n-1}}{\Delta \tau^n} h_i + \widetilde{f_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{v_i^n - v_{i-1}^{n-1}}{2} \right) + \widetilde{f_{i-\frac{1}{2}}} \left( \frac{v_i^n - v_{i-1}^{n-1}}{2} \right) - ch_i v_i^n = 0 \\ \widetilde{f}_0 = 0 \\ \widetilde{f_{N+\frac{1}{2}}} = \alpha S_{N+\frac{1}{2}}^2 \frac{v_N - f(S_{max}, \tau)}{h_{N+\frac{1}{2}}} + (-b^+ S_{N+\frac{1}{2}} f(S_{max}, \tau) - b^- S_{N+\frac{1}{2}} v_N) \end{cases} \quad (7)$$

Taking initial conditions:  $T = 0.25$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.9$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $S_{max} = 200$ ,  $N = 200$  – number of spatial nodes,  $M = 25$  – number of time steps. We get the



following solution of the Black-Scholes equation:

On this picture we can see initial condition at time  $T = 1$  and price of the call option at time  $T = 0$

1. Gilles Pages., Introduction to Numerical Probability for Finance. LPMA, 2016. – 340 p.

**МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТРАНСПОРТУ**

*Жидецький Юрій-Стефан Юрійович*, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[zhidetskij@gmail.com](mailto:zhidetskij@gmail.com)

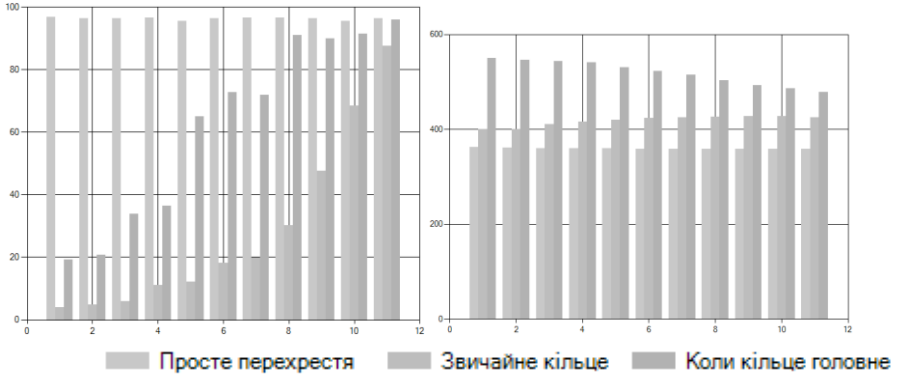
Останнім часом все більш актуальною є проблема транспорту. За розрахунками фахівців Національного транспортного університету України, київські автомобілісти проводять у заторах по 45 днів на рік [2]. Німці проводять у заторах у середньому 2,5 доби на рік, економічні збитки Німеччини від заторів перевищили 100 млрд. євро. [1].

На цю тему є багато наукових джерел та публічних виступів. Крім того розроблено комп'ютерні програми для вирішення цієї проблеми - PTV VISUM, AnyLogic. В загальному прийнято використовувати клітинні автомати та стохастичне моделювання [3].

У нашому дослідженні ми використовуємо підхід, який ґрунтується на повній імітації дорожнього руху в комп'ютерній програмі. Використання такого підходу дає можливість залучати для аналізу значно більше важливих інформаційних даних. Наприклад, габарити автомобіля, його швидкісні показники, особливості поведінки водія на дорозі, ширину та нахил дороги тощо.

У програмі визначені класи “Машина”, “Дорога”, “Перехрестя”, “Модель”. Маршрут машини визначається при її створенні. Перехрестя має область дії. Модель дає всім дорогам і перехрестям, що до неї входять, команду рухати машини, що на них знаходяться. Перехрестя визначає, куди хоче повернути кожна машина і тоді за прописаними правилами розподіляє послідовність проїзду. На даному етапі наша програма може моделювати рух транспорту на звичайних і кільцевих перехрестях. За допомогою розробленої програми було проведено дослідження, в результаті яких отримано дані про пропускну здатність різних типів перехресть при різних завантаженостях доріг.

*Рис. 1* Графік відсоткового співвідношення машин, що проїхали до тих, що були створені(зліва) та графік середнього часу проїзду (справа)



Для кожного типу перехрестя і завантаженості дороги робилось по 20 тестів. На основі результатів можна зробити висновки, що кільцеве перехрестя, коли кільце є головною дорогою краще, ніж те, коли всі дороги рівнозначні, що підтверджено і світовою практикою, але гірше за звичайне перехрестя двох доріг, що є сумнівним результатом. Це може бути зумовлене тим, що в нашій програмі враховані не всі головні особливості руху транспорту.

1. Пояснювальна записка до проекту Закону України "Про внесення змін ... щодо усунення перешкод дорожньому руху після дорожньо-транспортних пригод... [://search.ligazakon.ua/l\\_doc2.nsf/link1/GH2PH00A.html](http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/GH2PH00A.html)
2. Степанов Е. О. Математические модели оптимизации транспортных сетей. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2005.
3. Modeling and Simulation An Application-Oriented Introduction / [H.-J. Bungartz, S. Zimmer, M. Buchholz, D. Pflüger ] - 2nd edition, Berlin 2014.

## ЛОГІСТИЧНА ВІКОВА ЗАЛЕЖНІСТЬ РОЗВИТКУ ПОПУЛЯЦІЇ

*Жук Владислав Михайлович, Україна*  
 Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
 факультет прикладної математики та інформатики  
[vladzhuk17071997@gmail.com](mailto:vladzhuk17071997@gmail.com)

**Вступ.** У математичній демографії досить простою, але водночас і цікавою є так звана модель «логістичного приросту» популяції запропонована Ферхульстом. Нехай  $P(t)$  – це загальна популяція в момент часу  $t$ , тоді динаміка розвитку популяції описується таким диференціальним рівнянням:

$$P'(t) = P(t)[(\beta - \mu) - \gamma P(t)], \quad P'(t) = \frac{\partial P}{\partial t},$$

де  $\beta$  - коефіцієнт народжуваності,  $\mu$  - властивий коефіцієнт смертності,  $\gamma$  – константа, що ґрунтується на явищі самообмеження. Ми розглядаємо рівняння залежності популяції від віку з нелінійним коефіцієнтом смертності логістичного типу. Загальна асимптотична стійкість нульового розв'язку досліджується при  $R(0) < 1$ . Якщо  $R(0) > 1$ , ми отримуємо існування нетривіального стійкого стану, який стає асимптотично стійким сам по собі, в той час як нульовий розв'язок є нестійким.

Ця модель характеризується лінійним законом оновлення і коефіцієнтом смертності у формі  $\mu + \gamma P$  лінійно в загальній чисельності населення.

Вважаючи, що щільність населення певного віку  $a$  в момент часу  $t$  дорівнює  $u(a, t)$ , загальний розмір популяції  $P(t)$  дорівнює  $\int_0^A u(a, t) da$ ,

де  $A$  – максимальна тривалість життя.

Таким чином, споріднену модель вікової залежності можна записати, використовуючи наступне рівняння гіперболічного типу:

$$u_a + u_t + \mu(a)u + \gamma P(t)u = 0 \quad (1)$$

**Головна ідея** методу для розв'язування даної задачі полягає в тому, що ми застосуємо метод скінченних різниць до рівняння (1), таким чином отримуючи розв'язок задачі на наступному кроці за допомогою значень на попередньому. При цьому розв'язок задачі в початковий момент часу заданий відомою функцією.

**Обчислювальний експеримент.** Розглянемо дану задачу за таких початкових умов для задачі [1]:

$$\gamma > 0,$$

$$P(t) = \int_0^A u(a, t) da$$

$$u(0, t) = \int_0^A \beta(a) u(a, t) da \quad u(a, 0) = \phi(a), a \in [0, A], t \geq 0$$

де  $\phi \in C^1[0, A], \phi \geq 0, \phi(A) = 0$  та  $\phi(0) = \int_0^A \beta(a) \phi(a) da$

Для коректності нашої задачі достатньо припустити, що [1]:

$$\beta \in C[0, A] \quad \beta > 0 \text{ на } (0, A) \quad \beta(0) = \beta(A) = 0$$

$$\mu \in C[0, A] \quad \mu > 0 \quad \int_0^A \mu(a) da = +\infty$$

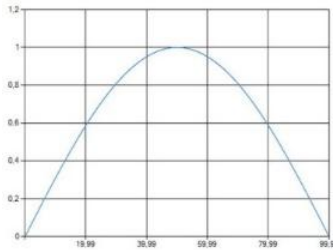


Рис.1 Коефіцієнт народжуваності

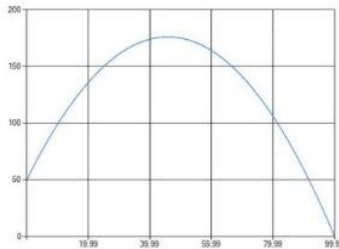


Рис.2 Початковий розподіл популяції

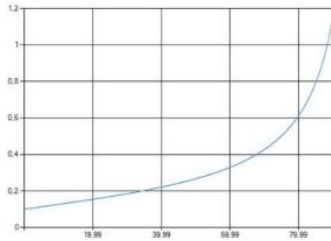


Рис.3 Властивий коефіцієнт смертності

Age	0Time	2Time	4Time	6Time	8Time	10Time	12Time
24	147.44	75.86760794005	0	129.8278362113	114.263220906	93.79844098916	72.683515
26	152.44	76.1927025845	400.7424734696	387.1851731193	213.6947032350	131.260556434	86.993367
28	156.96	76.885318687982	918.1612210119	906.2124248626	476.2508072223	287.3349789665	146.09654
30	161	74.915341348158	1309.971561100	1476.543846009	823.5970180134	456.1198921990	254.11672
32	164.56	73.24477929305	1471.710845488	1897.228424761	1341.644255698	670.4135563898	387.92811
34	167.64	70.82538024461	1424.260655814	2074.709831687	1341.750490052	839.4045002601	512.00026
36	170.24	67.99533031969	1244.316361729	2020.246101424	1394.1286140456	926.1854794752	596.37954
38	172.36	63.47441025971	1010.1001944583	1803.035656462	1317.585270643	924.6816994442	626.84421
40	174	58.35695005647	776.6143095814	1504.285972512	1155.471860991	851.7608575615	605.44446
42	175.16	52.10111611400	573.5738654684	1189.998832297	954.0018745833	734.4797978707	545.00372
44	175.84	44.51210219864	410.7431600446	901.9410690480	749.6465554777	599.4635839959	462.26959
46	176.04	35.31459916579	286.4131372722	659.7436684732	565.1411682718	466.96641659838	372.61562
48	175.76	24.10527417366	193.58271427994	467.3817100650	410.8692072284	349.3228593672	287.27914
50	175	10.265079674968	123.8800852430	319.8340576296	288.435492861	251.7467209210	212.77336
52	173.76	0	73.60239825746	210.3874740328	195.2367953953	174.9470932772	151.75183
54	172.04	0	42.864196575395	133.9835642198	127.6992063049	117.3915619710	104.39633

Рис.4 Таблиця результатів

**Висновки.** Застосовано метод скінченних різниць до знаходження розв’язку моделі вікової залежності популяції. Наведено графіки функції початкових умов. Результати обчислень заданим алгоритмом підтверджують стійкість розв’язку задачі при вхідних параметрах, що задовольняють наведені обмеження, тобто загальна кількість особин популяції збільшується при додатніх коефіцієнтах приросту популяції відносно її смертності, а при досягненні граничних меж зменшується за рахунок явища самообмеження.

1. *P.Marcati*, Journal of Mathematical Biology “On the Global Stability of the Logistic Age-Dependent Population Growth” (1982) p.215-226

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ РАКОВИХ ПУХЛИН З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Кавецький Андрій Романович, Україна*

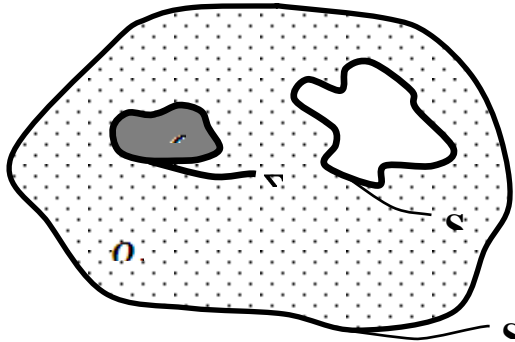
Львівський національний університет ім.Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[AndriyKavetsky@gmail.com](mailto:AndriyKavetsky@gmail.com)

Онкологічні захворювання – одна з найсерйозніших загроз для людства. Боротьба з цією важкою недугою є важливою соціальною проблемою. Розвиток сучасної науки дає змогу вплинути на зменшення захворюваності та смертності від раку. Комп'ютерне моделювання росту пухлини створює можливість аналізу проблеми та підбору можливих ефективних методик лікування. Відомими в цьому напрямку є роботи авторів[1,2,4].

У нашій роботі для моделювання росту ракової пухлини використаємо формулювання, в якому вважається, що пухлина перебуває в невазкуляроному стані. Існує ряд робіт, які показують, що еволюція ракових пухлин якісно не залежить від просторового розміру проблеми, тому можна досліджувати двовимірні області.

Рис. 1. Досліджувана область з раковою пухлиною.



Отже, розглянемо процес росту пухлини в живій тканині, що описується областю, зображеною на (рис.1). Тут область  $\Omega$  є двовимірною та неоднозв'язною із зовнішньою границею  $S$ . Ця область складається з частини здорової тканини людини, яку позначимо  $\Omega_H(t)$  та пухлинної

тканини, яка займає під область  $\Omega_T(t)$  із границею  $\Sigma$ . При цьому вважатимемо, що границя  $\Sigma$  є змінною й залежить від явищ некрозу й апоптозу [1,2].

Зміна стану пухлини залежить від двох факторів: живлення глюкозою та киснем, тобто клітинним субстратом. Для знаходження його концентрації потрібно розв'язати рівняння (0.1)-(0.2), що доповнюється граничними умовами (0.3),(0.4)

$$0 = \nabla^2 c - c \text{ в } \Omega_T, (0.1)$$

$$0 = D \nabla^2 c \text{ в } \Omega_H, (0.2)$$

$$c_H|_V = c_T \text{ на } \Sigma, (0.3)$$

$$c = 1 \text{ на } S, (0.4)$$

де  $s$ -шукана функція концентрації, яка залежить від  $x$  та  $t$ ,  $D = D_H / D_T$  – відношення коефіцієнта дифузії в здоровій тканині до коефіцієнта дифузії в пухлинній тканині.

Розв'язавши задачу з визначення концентрації, можна знайти парціальний тиск. Його розподіл описується рівнянням (0.5) з граничною умовою Діріхле (0.6).

$$0 = \nabla^2 p \text{ в } \Omega_T. (0.5)$$

$$p = k + (G - \chi)(c)_\Sigma - G - AG \frac{(x \cdot x)_\Sigma}{2d} \text{ на } \Sigma, (0.6)$$

Тут прийняті позначення:  $p$  – парціальний тиск,  $k$  – локальна повна кривизна,  $A$  – коефіцієнт, що описує відносну силу дії апоптозу і мітозу клітин,  $G$  – коефіцієнт, що описує відносну силу дії клітинного мітозу до механізмів релаксації(міжклітинної адгезії),  $d$  – вимірність простору,  $x$  – положення в просторі.

Отримані шукані розв'язки дають змогу знайти швидкість зміни точок границі пухлини. Вона залежить від коефіцієнтів адгезії та апоптозу, геометрії області та зміни тиску й концентрації. Ця залежність описується співвідношенням

$$V = -n \cdot (\nabla p)_\Sigma + G n \cdot (\nabla c)_\Sigma - AG \frac{n \cdot (x)_\Sigma}{d} (0.7)$$

де  $V$ - швидкість зміни границі пухлини у напрямку зовнішньої нормалі,  $n$  - зовнішня нормаль до границі  $\Sigma$ .



Використовуючи співвідношення (0.7), можна отримати нові геометричні характеристики областей.

Для чисельного дослідження проблеми використаємо МСЕ [3]. Для реалізації цього підходу автором побудовано програмний комплекс, що дозволяє перебудовувати сітки скінченних елементів з урахуванням зміни границь під областей. Розв'язані задачі знаходження концентрації та тиску на часовому кроці. Здійснений аналіз отриманих числових результатів підтверджує ефективність використання запропонованої числової методики.

1. V. Cristini Multiscale Modeling of Cancer An Integrated Experimental and Mathematical Modeling Approach. / V. Cristini, J. Lowengrub. - Cambridge University Press, New York, 2010. - 278 p.
2. V. Cristini Nonlinear simulation of tumor growth. / V. Cristini, J. Lowengrub, and Q. Nie. - J. Math. Biol, 2003. - 46: - P. 191–224
3. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. / Савула Я.Г. - Львів, 2004. – 222 с.
4. A. Friedman Analysis of a mathematical model for the growth of tumors / A. Friedman, F. Reitich. – J. Math. Biol, 1999. - 38: -P. 262–284

## ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ

*Козак Олена Іванівна, Україна*

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[olenakozak@i.ua](mailto:olenakozak@i.ua)

Процеси дифузії належать до найбільш поширених нерівноважних процесів у природі, експериментальне і теоретичне дослідження яких постійно привертає увагу вчених. У зв'язку з забрудненням ґрунтів радіонуклідами, небезпечними хімічними сполуками та їх перенесення підземними водами, актуальними є проблеми комп'ютерного моделювання процесів дифузії.

Математична модель перенесення домішок описується системою диференціальних рівнянь. Отже розглянемо стаціонарну задачу гетеро дифузії, записану у безрозмірних координатах, де  $c_1, c_2 \in \Gamma \times \mathbb{Q}, T_-$  - невідомі концентрації домішкової речовини, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta c_1 + d_1 \Delta c_2 - a c_1 + c_2 + f_1 = 0 \\ d_2 \Delta c_1 + d \Delta c_2 + a c_1 - c_2 + f_2 = 0 \end{cases}$$

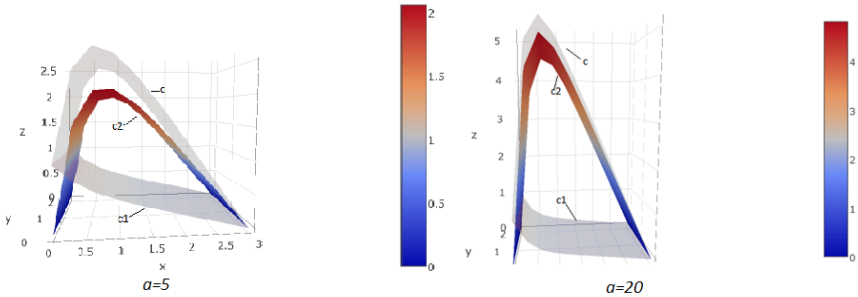
а також однорідні граничні умови:  $c_1 = 0, c_2 = 0 \in \Gamma$

Введемо змінну сумарної концентрації  $C = c_1 + c_2$

та наступні обмеження на коефіцієнти рівняння

$$a \gg 1, \quad d, d_1, d_2 \ll 1, \quad a(d + d_1) \sim 1$$

Використовуючи метод скінченних елементів було досліджено залежність розподілу концентрацій  $c, c_1, c_2$  від коефіцієнта інтенсивності переходу  $a$  та коефіцієнта дифузії  $d \cdot d_1 = d_2 = 0, d = 0.1, \alpha = 1$



**Рис.1.** Залежність розподілу концентрацій домішки від коефіцієнта  $a$

За результатами програмних експериментів ми дослідили, що при збільшенні параметра  $a$ , концентрація  $c_2$  збільшується, а концентрація  $c_1$  – зменшується.

Моделі дифузії в середовищі можуть використовуватися з метою оцінки окремих параметрів у стаціонарному випадку, наприклад, асимптотичних значень сумарного потоку домішкової речовини через шар.

1. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України. Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. - Львів: СПОЛОМ. 2003-128с.
3. Дзелендзяк У.Ю., Павельчак А.Г., Самотий В.В. Прямі та ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь-Львів: НУЛП, 2007.-36 с.

## МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

*Кончаковська Оксана Сергіївна, Україна*

Харківський національний університет радіоелектроніки,  
факультет Інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту  
[oksana.konchakovska@nure.ua](mailto:oksana.konchakovska@nure.ua)

Двадцять перше сторіччя характеризується швидкими темпами розвитку мікроелектромеханічних систем (МЕМС), які об'єднують в собі досягнення механіки, мікроелектроніки, оптики, електротехніки та інших науково-прикладних областей. Одним з поширених типів актюаторних елементів МЕМС є електростатичний актюатор, який містить рухомий і нерухомий електроди. В якості рухомих електродів виступають пружні пластини і мембрани. Принцип дії даних актюаторів заснований на виникненні електростатичної сили між рухомих і нерухомим електродами. При подачі відхиляючої напруги між електродами виникає електростатична взаємодія, і рухомий електрод притягується до нерухомого, внаслідок чого може статися схлопування електродів. Зворотній процес називається стійким станом системи.

Однією з задач, яка виникає при математичному моделюванні МЕМС, є:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} \quad \text{у} \quad \Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

$$0 < u < 1 \quad \text{у} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де  $\lambda > 0$  – співвідношення електростатичних та механічних сил у системі,  $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$  – співвідношення відносної діелектричної проникності середовища до діелектричної проникності мембрани.

Існує декілька проблем, які необхідно враховувати при фактичному проектуванні МЕМС. Зазвичай однією з основних цілей є досягнення максимально можливого стійкого відхилення мембрани. Інша проблема полягає в тому, щоб збільшити стабільний робочий діапазон пристрою шляхом збільшення відхиляючої напруги (pull-in voltage) за умови, що діапазон прикладеної напруги обмежений джерелом живлення. Такі поліпшення в стабільному робочому діапазоні важливі для проектування певних МЕМС пристроїв, таких як мікрорезонатори. Один із способів досягнення великих значень напруги при одночасному збільшенні відстані відхилення (pull-in distance) полягає у введенні просторово-змінюваної діелектричної проникності мембрани, що також дозволить

врахувати взаємодію молекул в матеріалі мембрани, що виникають внаслідок деформації. Оберемо  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . У роботі [2] доведено, що задача (1), (2) має при  $0 < \lambda \leq 1$  єдиний додатний розв'язок, при  $1 < \lambda \leq 1,333\dots$  існує декілька додатних розв'язків, а при  $\lambda > 1,333\dots$  – розв'язків не має.

Побудуємо двобічний процес послідовних наближень до розв'язку задачі (1), (2), застосовуючи методи нелінійного аналізу в напіввпорядкованих просторах [1]. На конусі  $K$  невід'ємних у  $C(\Omega)$  функцій розглянемо еквівалентне задачі (1), (2) нелінійне операторне рівняння  $u = Tu$  з

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{|\mathbf{s}| ds}{(1-u(\mathbf{s}))^2},$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у колі. Оператор  $T$  є неперервним і монотонним на конусі  $K$ .

Теорема. Для  $0 < \lambda \leq 1$  оператор  $T$  має єдину нерухому точку  $u^*$ , яка належить конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$ , де  $w_0 = \beta$ ,  $v_0 = 0$ , причому  $\beta$  визначається нерівностями  $\lambda \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} |\mathbf{s}| G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta(1-\beta)^2$ ,  $0 < \beta < 1$ .

Послідовні наближення, які формуються за правилами  $v_{n+1} = Tv_n$ ,  $w_{n+1} = Tw_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , двобічно збігаються до нерухомої точки оператора  $T$ , причому

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Графік залежності значень норми наближеного розв'язку задачі (1), (2) від параметра  $\lambda$  наведено на рис. 1.

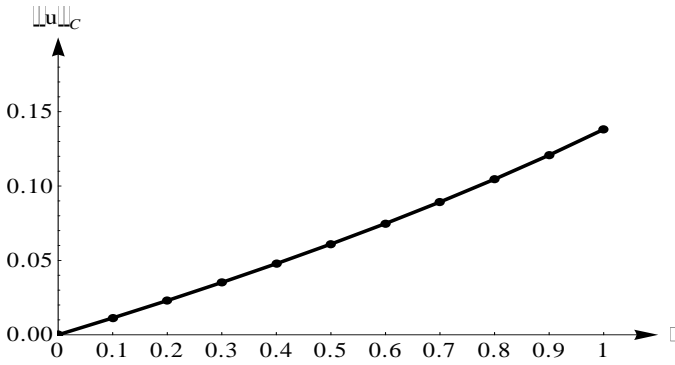


Рис. 1. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметра  $\lambda$

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. Y. Guo and N. Ghossoub. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case. Submitted (2005).

**APPLICATION OF  $(G'/G)$  – EXPANSION METHOD TO ONE  
NONLINEAR EVOLUTION SYSTEM**

*Mykhailiuk Ivan Stepanovych*, Ukraine  
Ivan Franko National University of Lviv  
Faculty of Applied Mathematics and Informatics  
[iv.mykh@gmail.com](mailto:iv.mykh@gmail.com)

Consider the following *generalized Korteweg – de Vries system* [1]:

$$u_t = -v_x, \quad v_t = v_{xxx} + uv_x + u_x v. \tag{1}$$

Let us solve system (1) by use of  $(G'/G)$  – expansion method [2].

**Step 1.** Combining independent variables  $x$  and  $t$  into one travelling wave variable  $\xi = x - Vt$ , we convert system (1) into a system of ODE. Integrating equations of the obtained system with respect to  $\xi$  once yields

$$Vu = v + C_1, \quad -Vv = v'' + uv + C_2. \tag{2}$$

**Step 2.** Suppose that the solution to system (2) can be expressed as

$$u \llcorner \sum_{i=0}^m \alpha_i (G'/G)^i, \quad v \llcorner \sum_{i=0}^n \beta_i (G'/G)^i, \tag{3}$$

where function  $G = G(\xi)$  satisfies the *second order linear ODE*

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{4}$$

$\alpha_i (i = \overline{0, m}), \beta_j (j = \overline{0, n}), \lambda, \mu$  are constants to be determined,  $\alpha_m \neq 0, \beta_n \neq 0$ .

To determine constants  $m$  and  $n$  consider the *homogeneous balance* between the highest order derivatives and nonlinear terms appearing in (2):

$$\begin{cases} m = n \\ n + 2 = m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}, \tag{5}$$

**Step 3.** Substituting (3) into (2) and equating each quotient of the obtained polynomial in  $(G'/G)$  to zero yields an overdetermined system of equations for undetermined constants. By use of *Mathematica* we obtain *two sets of solutions*.

**Step 4.** Substituting the obtained constants with general solution to Eq. (4) into (3) yields three families of solutions to the original system (1) for each set of parameters.

**I.** If  $\lambda^2 - 4\mu > 0$ , than we obtain the *hyperbolic functions solution*:

$$u_{\xi_1} \supseteq -\frac{3\sigma \mathcal{A}_1^2 - A_2^2}{2 \mathcal{A}_1 \sinh \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\sigma} + A_2 \cosh \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\sigma}} + \frac{6\beta_0 \lambda}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{6\lambda} - \lambda^2 - 2\mu,$$

$$v_{\xi_1} \supseteq \frac{\beta_1 \sigma \mathcal{A}_1^2 - A_2^2}{4\lambda \mathcal{A}_1 \sinh \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\sigma} + A_2 \cosh \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\sigma}} - \frac{\beta_1 \mu}{\lambda} + \beta_0;$$

if  $\lambda^2 - 4\mu = 0$ , then we obtain the rational functions solution:

$$u_{\xi_1} \supseteq \frac{A_2^2 \mathcal{A}_1^2 \tilde{\sigma} - 12}{2 \mathcal{A}_2 \xi_1 + A_1} + \frac{\beta_1}{6\lambda} + \frac{6\beta_0 \lambda}{\beta_1},$$

$$v_{\xi_1} \supseteq \beta_0 - \frac{\beta_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \xi_1 - 2}{4\lambda \mathcal{A}_2 \xi_1 + A_1} + \frac{A_1 \lambda \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \xi_1 + 2}{A_1 \lambda},$$

if  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ , then we obtain the trigonometric functions solution:

$$u_{\xi_1} \supseteq -\frac{3\bar{\sigma} \mathcal{A}_1^2 + A_2^2}{2 \mathcal{A}_1 \sin \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\bar{\sigma}} + A_2 \cos \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\bar{\sigma}}} + \frac{6\beta_0 \lambda}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{6\lambda} - \lambda^2 - 2\mu,$$

$$v_{\xi_1} \supseteq \frac{\beta_1 \bar{\sigma} \mathcal{A}_1^2 + A_2^2}{4\lambda \mathcal{A}_1 \sin \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\bar{\sigma}} + A_2 \cos \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{\bar{\sigma}}} - \frac{\beta_1 \mu}{\lambda} + \beta_0.$$

**II.** If  $\mu < 0$ , then we obtain the hyperbolic functions solution:

$$u_{\xi_2} \supseteq \frac{6\mu \mathcal{A}_2 \sinh \xi_2 \sqrt{-\mu} + A_1 \cosh \xi_2 \sqrt{-\mu}}{\mathcal{A}_1 \sinh \xi_2 \sqrt{-\mu} + A_2 \cosh \xi_2 \sqrt{-\mu}} + \frac{\beta_2}{6} + \frac{6\beta_0}{\beta_2} - 8\mu,$$

$$v_{\xi_2} \supseteq \beta_0 - \frac{\beta_2 \mu \mathcal{A}_2 \sinh \xi_2 \sqrt{-\mu} + A_1 \cosh \xi_2 \sqrt{-\mu}}{\mathcal{A}_1 \sinh \xi_2 \sqrt{-\mu} + A_2 \cosh \xi_2 \sqrt{-\mu}};$$

if  $\mu = 0$ , then we obtain the rational functions solution:

$$u_{\xi_2} \supseteq -\frac{6A_2^2}{\mathcal{A}_2 \xi_2 + A_1} + \frac{\beta_2}{6} + \frac{6\beta_0}{\beta_2}, \quad v_{\xi_2} \supseteq \frac{A_2^2 \beta_2}{\mathcal{A}_2 \xi_2 + A_1} + \beta_0;$$

if  $\mu > 0$ , then we obtain the trigonometric functions solution:



$$u(\xi_2) = \frac{6\mu(A_1^2 + A_2^2)}{A_1 \sin \xi_2 \sqrt{\mu + A_2} \cos \xi_2 \sqrt{\mu}} + \frac{\beta_2}{6} + \frac{6\beta_0}{\beta_2} - 2\mu,$$

$$v(\xi_2) = \frac{\beta_2 \mu(A_1^2 + A_2^2)}{A_1 \sin \xi_2 \sqrt{\mu + A_2} \cos \xi_2 \sqrt{\mu}} - \beta_2 \mu + \beta_0.$$

In the solutions above,  $\xi_1 = x + \beta_1 t / 6\lambda$ ,  $\xi_2 = x + \beta_2 t / 6$ ,  $\sigma = \lambda^2 - 4\mu$ ,  $\tilde{\sigma} = \lambda^2 - 16\mu$ ,  $\bar{\sigma} = 4\mu - \lambda^2$ ,  $A_1, A_2$  are arbitrary constants.

1. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега-де Фриза // Итоги науки и техники. Сер.: Современ. пробл. математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНТИ, 1984. – 15. – С. 81-180.
2. Wang M. The (G'/G) – expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics / M. Wang, X. Li, J. Zhang. // Physics Letters. – 2008. – №372. – P. 417–423.

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ

Нос Надія Василівна, Україна

Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики[nosnadya.n@gmail.com](mailto:nosnadya.n@gmail.com)

Розв'язання основних проблем екології, неможливе без знань основних положень і методів екологічної науки, які створюються і розвиваються на основі сучасної методології, зокрема основних положень системного аналізу, математичних методів і методів математичного та імітаційного моделювання. Нехай ми маємо математичну модель динаміки популяції за допомогою програмного розв'язання диференціальних рівнянь, використовуючи відомі методи Ейлера та Рунге-Кутта (1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків), а також «жорсткі» та «м'які» математичні моделі динамічних популяцій. Метою поставленого завдання є порівняння результатів, зміни в залежності від введених даних та вибраного способу розв'язання даних методів та моделей. Поставлена задача є актуальною, так як на сьогодні є важливою проблема охорони природнього середовища.

Середня швидкість розмноження популяції визначається як відношення зміни кількості організмів (особин)  $\Delta N$  до проміжку часу  $\Delta t$ , протягом якого відбулася ця зміна (збільшення або зменшення, в останньому випадку  $\Delta N$  береться зі знаком мінус). Миттєва (істинна) швидкість  $V = \frac{dN}{dt}$  розмноження особин або просто швидкість розмноження організмів у деякий момент часу  $t$  визначається як межа середньої швидкості за умови необмеженого зменшення проміжку часу  $\Delta t$ , тобто:

$$V = \frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad (1)$$

Таким чином, швидкість розмноження популяції є похідною за часом від кількості особин, що розглядається як функція часу (віку особин або віку популяції), тобто

$$N = f(t), V = f'(t).$$

Крім уже згаданих кількісних величин, при формалізації закономірностей розмноження популяції розглядають також певну так звану питому швидкість розмноження  $r$ , яка дорівнює зміні числа особин за одиницю часу з розрахунку на одну особину (організм), тобто:

$$r = \frac{\Delta N}{N \Delta t} \quad (2)$$

Якщо розглядати випадок, коли для розмноження популяції створені найсприятливіші умови і відсутні лімітуючі фактори, то швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням,

$$\frac{dN}{dt} = rN. \quad (3)$$

що виражає закон прямої пропорційності швидкості розмноження кількості особин (організмів) цієї популяції, причому параметр  $r$  в рівнянні (3) часто називають коефіцієнтом швидкості розмноження популяції (або угруповання).

Для прикладу розглянемо дві задачі Коші. Загальний вигляд задачі Коші:

$$\begin{cases} N'(t) = f(t, N); \\ N(t_0) = N_0; \end{cases} \quad (5)$$

1) Отримуємо логістичне рівняння:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2, \quad (6)$$

за допомогою якого після інтегрування ми знаходимо функцію

$$N(t) = \frac{aK}{a + e^{-r(t-t_0)}}, \quad a = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (7)$$

де  $K = N_{max}$  – максимально можлива чисельність популяції;  $r$  – питома швидкість розмноження;  $[t_0; t]$  – відрізок часу;  $e = 2,718282 \dots \approx 2,72$ ;

та програмно розв'язуємо методами Ейлера та Рунге-Кутта (1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків).

2) Наведемо так звану «жорстку» модель:

$$\frac{dN}{dt} = rN; \quad (8)$$

за допомогою якої після інтегрування ми знаходимо функцію

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \quad (9)$$

де  $r$  – питома швидкість розмноження;  $N_0$  – чисельність популяції;  $[t_0; t]$  – відрізок часу;  $e = 2,718282 \dots \approx 2,72$ .

Найпростіша математична модель, так звана “жорстка” математична модель відповідає реальному процесу зростання чисельності особин певної популяції тільки на початковому етапі розвитку. Отже, вона не може описувати зростання популяції протягом тривалого періоду.

1. *Лаврик В.І.* Методи математичного моделювання в екології/*Лаврик В.І.* – Київ: Видавничий дім «КМ Академія»,2002 – 72ст.(Моделювання чисельності окремих популяцій).
2. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь на ЕОМ [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://posibnyky.vntu.edu.ua>. – Загол. з екрану.

## МУЛЬТИАГЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ІНСТРУМЕНТ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАХВОРЮВАНOSTІ ПРИРОДНООСЕРЕДКОВИМИ ХВОРОБАМИ

*Пілецький Павло Євгенійович, Україна*

Національний аерокосмічний університет ім. М. Е. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»,

факультет Систем управління літальними апаратами

[pavel1997pileckii@gmail.com](mailto:pavel1997pileckii@gmail.com)

Серед широко поширених в світі інфекційних хвороб виділяється група природноосередкових, збудники або переносники яких безпосередньо пов'язані з умовами свого місцеперебування. Одними з найбільш чисельних захворювань даної групи в Україні є іксодові кліщові бореліози (ІКБ) – група інфекційних трансмісивних природноосередкових хвороб, що передаються іксодовими кліщами. Клінічно захворювання протікає з переважним ураженням шкіри, нервової системи, опорно-рухового апарату, м'яз серця і характеризується схильністю до хронічного, а також латентного перебігу [1].

Застосування математичного моделювання для прогнозування епідемічного процесу природноосередкових хвороб є ефективним інструментом для попередження виникнення епідемій [2].

В ході дослідження розроблена мультиагентна модель динаміки розповсюдження захворюваності природноосередкових хвороб на прикладі ІКБ. Система являє собою безліч об'єктів-агентів, що взаємодіють один з одним і навколишнім середовищем. Виділено два типи агентів: джерела інфекції (кліщі) і люди. При цьому в залежності від типу, агенти можуть перебувати в різних станах (здоровий, сприйнятливий, імунний, інфікований, тощо). При побудові моделі враховувалися особливості поширення захворюваності, інкубаційний період, а також стадії перебігу хвороби. Продукт розроблений в спеціалізованому мультиагентному середовищі AnyLogic. Адекватність моделювання перевірена на реальних статистичних даних щодо захворюваності на ІКБ.

Таким чином, в ході даного дослідження проведено аналіз захворюваності іксодовим кліщовим бореліозом в Харківській області з 2000 по 2016 рік. Розроблено програмний комплекс, що дозволяє обчислити прогнозний рівень захворюваності ІКБ на підставі мультиагентного підходу до імітаційного моделювання. Проведене

дослідження показує, що зберігається нестійка епідемічна ситуація щодо КБ, що диктує необхідність розробки плану профілактичних заходів, головною метою якого є зниження захворюваності людей на КБ. Віртуальна перевірка ефективності таких заходів буде наступним етапом нашого дослідження.

1. Білецька Г.В., Виноград І.А., Лозинський І.М., Друль О.С. Неврологічні прояви хвороби Лайма в Україні // Матеріали науково-практичної конференції і пленуму Асоціації Інфекціоністів України. - Харків, 2001.
2. Білецька Г.В., Лозинський І.М., Семеншин О.Б. Сучасні проблеми епідеміології кліщових трансмісивних інфекцій в Україні // Матеріали науково-практичної конференції «Інфекційні хвороби, туберкульоз та сучасний стан довкілля». - Львів, 2005.- С. 135-138.

## MATHEMATICAL MODEL FOR SEISMIC WAVE PROPAGATION IN A HETEROGENEOUS MEDIA

*Prots Diana, Ukraine*

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine  
Department of applied mathematics and informatics

University of L'Aquila, Italy

Intermaths program, Interdisciplinary mathematics

[dianaprots@gmail.com](mailto:dianaprots@gmail.com)

Central Italy has experienced earthquakes throughout history. Although most earthquakes are small ( $M_W < 2$ ) and cause little damage, many are powerful enough to cause significant damage to local areas ( $3 < M_W < 5$ ) and some ( $M_W > 5.5$ ) can cause widespread damage, population displacement and deaths. For example: 27/03/2017, 3.2  $M_W$ , Amatrice, Lazio, Italy; 30/10/2016, 6.6  $M_W$ , Perugia, Umbria, Italy.

In the last 20 years, there have been more than 7 earthquakes with a magnitude greater than 5 along the Apennine spine, causing severe damage, hundreds of deaths and displacing thousands. For example: 26/09/1997, 6.4  $M_W$ , Umbria; 31/10/2002, 5.9  $M_W$ , Molise; 6/04/2009, 6.3  $M_W$ , Abruzzo; 29/05/2012, 5.8  $M_W$ , Emilia-Romagna; 24/08/2016, 6.2  $M_W$ , Lazio; 30/10/2016, 6.6  $M_W$ , Umbria; 18/01/2017, 5.7  $M_W$ , Abruzzo.

Every year people suffer from earthquakes, so it is very important to have an instrument, which allows us to simulate an earthquake with a particular magnitude within a particular domain, investigating its possible effect on the surface - the living, inhabited area.

Based on this hypothesis, the goal of this thesis will be to use elastodynamic equations solved using the Discontinuous Galerkin method, non-conforming high-order technique, to simulate an earthquake. 'The proposed method turns out to be particularly useful for a variety of earthquake engineering problems, such as modeling of dynamic soil structure and city-site interaction effects, where accounting for multi-scale wave propagation phenomena as well as sharp discontinuities in mechanical properties of the media is crucial.' [1]

For the numerical simulations we used the software SPEED [2] to solve the elastodynamics wave equation within the Sulmona basin. SPEED (SPectral Elements in Elastodynamics with Discontinuous Galerkin), is an open-source numerical code, created at the university of Milan. To run this kind of software a very powerful computer is required, for this reason we use HPC techniques to

solve our model. In particular, we will use Caliban [2], a High Performance Computing Cluster, located in DISIM at the university of L'Aquila for our computations.

As said above, the target area of this research is the Sulmona Basin. 'The sedimentary basin of Sulmona is one of the easternmost intermountain basins of the Central Apennines. This is a tectonic depression, created by the Quaternary activity of the Mt. Morrone normal fault system, which bounds the basin to the east.' [3] The Sulmona Basin, part of Central Italy, located in the Abruzzo region, has been chosen as an object of this research due to:

- 1) 'high probability of occurrence of a characteristic earthquake on the dominant fault;' [3]
- 2) a town of 25,000 inhabitants, Sulmona, lies on the basin together with 3 smaller towns of around 7000 inhabitants in total.

We will focus on the largest fault in the Sulmona region, this is because the main fault is very large: around 20 kilometres long, as a comparison the fault which caused 6.3 earthquake in L'Aquila in 2009 was about 16 kilometres long. This earthquake caused 308 casualties, 70,000 evacuees and incalculable losses to the cultural heritage, almost completely destroying the centre of the city of L'Aquila.

Results of this work will be a valuable contribution into seismological investigation of the Sulmona Basin and surrounding areas. The simulation of the earthquake with particular magnitude in particular regions allows us to evaluate the consequences for different points, located on a fault and in its vicinity. Modeling buildings in different points of the domain with further analysis gives us the opportunity to determine possible areas, which are needed to be prohibited from populating, or indeed safer areas which can be set aside for the building of key disaster management infrastructures, such as hospitals or fire departments.

1. Mazziere, I., Stupazzini, M., Guidotti, R., Smerzini, C., 2013. *SPEED-Spectral Elements in Elastodynamics with Discontinuous Galerkin: a non-conforming approach for 3D multi-scale problems*. MOX, pages 1-2.
2. <http://speed.mox.polimi.it/>
3. <http://caliban.dm.univaq.it/wordpress/>
4. Villani, M., Faccioli, E., Ordaz, M., Stupazzinic, M., 2014. *High-Resolution Seismic Hazard Analysis in a Complex Geological Configuration: The Case of the Sulmona Basin in Central Italy*. Earthquake Spectra: November 2014, Vol. 30, No. 4, page 1808.



## ВИДІЛЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ: КАРТА НОРМАЛЕЙ

*Ривак Володимир Ігорович, Україна*

Львівський Національний Університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики

[GreatV@email.ua](mailto:GreatV@email.ua)

Сьогодні активно розвивається сектор електронних ігор (консольних, комп'ютерних, на мобільні платформи, etc.). Цей процес можна безспідставно пов'язати з двома важливими подіями у даній галузі. Його можливі причини - розповсюдження потужних і водночас безплатних ігрових рушіїв (Unity, Unreal Engine, CryEngine). Можливі наслідки - створення високопродуктивних стандартів комп'ютерної графіки (Mantle, DirectX 12, Vulkan, Metal). Але не дивлячись на здавалося б ідеальні умови для процвітання сучасних ігор - ми спостерігаємо абсолютно протилежну картину. Примітивізм проявляється не лише у ігровому процесі, але й у графіці. Попри високу продуктивність апаратних рішень, сучасні ігри часто використовують дуже просту графіку. Причин цьому може бути безліч, але одна з незаперечних - нестача графічного наповнення. Створення цього наповнення не завжди є задачею тривіальною і часто вимагає не лише творчості, але й глибокого розуміння фізики процесу - поведінки світла. Дана робота має на меті автоматизацію цього процесу, а саме - виділення точної карти нормалей з реальних зображень.

Предметною областю задачі є абстрактна «сцена», зі спрямованою на неї «камерою». На сцену можна до певної міри впливати (наприклад, освітлювати з різних ракурсів) не змінюючи її властивостей, фіксуючи результати цього впливу на камеру.

Результатом даної роботи став наступний алгоритм:

1. Сцена ізолюється від зовнішнього світла
2. Сцена освітлюється розсіяним світлом з усіх сторін, проводиться фотозйомка. Отримані для кожного пікселя дані будуть використовуватись в подальшому як альbedo –  $\rho$ .
3. Сцена освітлюється лише точковим джерелом світла, проводиться фотозйомка. Отримана інтенсивність освітлення для кожного пікселя буде надалі використовуватись як початкова інтенсивність –  $i_0$ , напрямком на світло –  $\vec{l}_0$ .
4. Точкове джерело світла переміщується на деяку величину і фотозйомка повторюється. Крок повторюється 3 (три) рази,

причому зміщення джерела світла має відбуватись у взаємно перпендикулярних напрямках. Отримані результати інтенсивності зберігаються відповідно:

$$\vec{i} = (i_x; i_y; i_z), L = (\bar{l}_x; \bar{l}_y; \bar{l}_z)$$

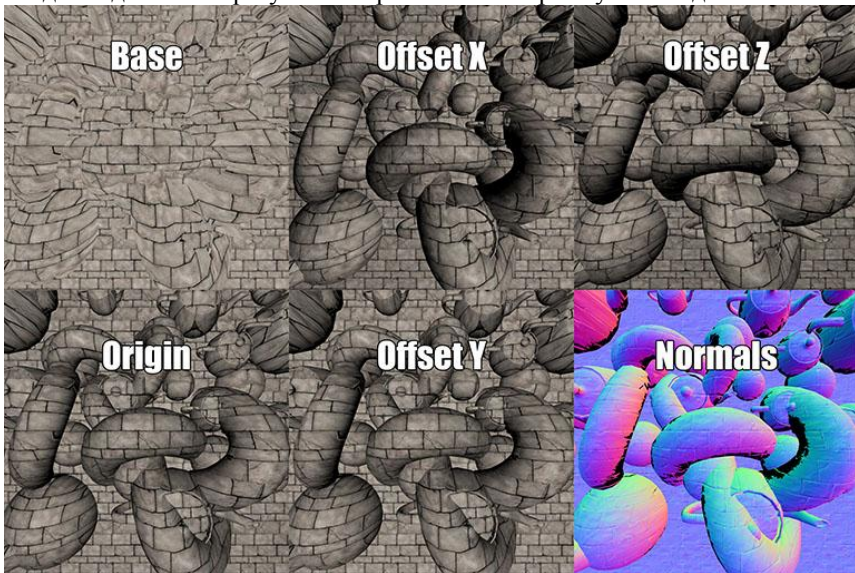
5. Нормаль  $n$  знаходиться за наступною формулою:

$$\Delta \vec{i} = \frac{(i_x - i_o; i_y - i_o; i_z - i_o)}{\rho}, \Delta L = \begin{pmatrix} \bar{l}_x - \bar{l}_o \\ \bar{l}_y - \bar{l}_o \\ \bar{l}_z - \bar{l}_o \end{pmatrix}$$

$$n = \Delta L^{-1} \Delta \vec{i}$$

Як легко бачити з вище наведеної формули, ми можемо знайти нормаль лише за ненульового альбедо ( $\rho \neq 0$ ) і при існуванні оберненої до  $\Delta L$  матриці (а це гарантується ортогональністю зміщень джерела світла).

Через відсутність необхідної апаратури і ресурсів, даний метод був протестований з використанням комп'ютерно згенерованих зображень. Вхідні дані і результат роботи алгоритму наведено нижче:



Малюнок 1

## ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РІВНЯ ЖИТТЯ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ

*Станицька Софія Олегівна*, Україна  
Львівський Національний Університет ім. Івана Франка,  
факультет прикладної математики та інформатики  
[stanytskasofia@gmail.com](mailto:stanytskasofia@gmail.com)

Співставлення рівня життя населення у регіонах України та визначення їх рейтингу є основою для виявлення основних причин асиметрії розвитку регіонів. Такий аналіз на основі існуючих джерел допоможе виявити ті соціально-економічні параметри, коригування яких потребує особливої уваги, та на цьому підґрунті визначити дієві та ефективні заходи в системі соціального захисту членів суспільства відповідно до вимог часу.

Використано екстраполяцію часових трендів для аналізу рівня життя населення України. Моделювання за допомогою трендів зручно застосовувати для початкового дослідження динаміки економічного явища чи процесу. Для скорочення та спрощення обсягу статистичної інформації застосовано кластерний аналіз.

На основі статистичних даних, які можуть вплинути на рівень життя населення України за 1996-2015 рр. було побудовано лінійний, квадратичний, логарифмічний, гіперболічний часові тренди. З їх допомогою розраховано теоретичні значення дослідження показників та їхні прогностичні значення на наступні чотири роки. Якість моделей порівнювалась за допомогою коефіцієнтів кореляції та детермінації.

Взято до уваги статистичні дані: доходи населення, динаміка середньомісячної зарплати, валовий регіональний процент, обсяг обороту роздрібною торгівлі, роздрібний товарооборот підприємства, економічно активне населення, рівень зайнятості населення.

Для зручності всі регіони розбито на однорідні групи (кластери) за вищесказаними ознаками. Обчислено відстані до ідеальних точок та функції переваг. Індекс розвитку рівня життя населення в Україні по регіонах в ідеалі дорівнює 1. Якщо значення для функції переваги певного регіону ближче до 1, тоді індекс рівня життя населення в Україні по регіонах в його межах є вищим.

Отримані значення індексу рівня життя населення України подано в діаграмі, що ілюструє значення індексу рівня життя населення України по регіонах 2016р. (рис. 1.)



Рис. 1. Індекс рівня життя в розрізі регіонів у 2016р.

Сучасна статистична наука володіє певними підходами та системою показників, що дозволяють здійснити оцінку просторової диференціації рівня життя населення України. Це грошові доходи населення (в тому числі заробітна плата), показники реального споживання, забезпеченості житлом, зайнятості, здоров'я, демографічні показники та ін.

Проведений кластерний аналіз сприяє полегшенню і спрощенню обчислювальних процедур, забезпечує компактність отриманих результатів та одночасне збереження необхідної точності.

Діаграми підтверджують значну диференціацію значень індексу розвитку рівня життя населення України в розрізі регіонів та наявність трьох груп областей (кластерів) за значенням індексу (з високим, середнім і низьким індексом рівня життя населення в Україні).

Проведено нами дослідження свідчать, що застосовані методи мат. моделювання є ефективним засобом аналізу соціально економічних процесів, зокрема такого як рівень життя населення по регіонах. На даному етапі розвитку України проблема рівня життя населення країни є надзвичайно актуальною.

1. <http://www.ukrstat.gov.ua/>
2. Жамбю М. *Иерархический кластер – анализ и соответствия.* - М. Финансы и статистика 1988. 344 с.
3. Єріна А. М. *Статистичне моделювання та прогнозування: Навч. посібник.* – К. КНЕУ, 2001. 170 с.

Дизайн обкладинки: Максим Зінко  
Комп'ютерна верстка: Костельна Оксана та Зубаль Богдан