ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
ANNO CCCXXI
1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1924.

V. Scialoja, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI.

Matematica. — *Sulle coppie di congruenze rettilinee stratificabili.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1.

Come in una Nota precedente [2], consideriamo una coppia di congruenze rettilinee (r), (r'), poste in corrispondenza biunivoca dei loro raggi r, r'. La coppia (r), (r') di congruenze determina due serie di faccette piane, ciascuna ∞^3, definite dall'avere i loro centri distribuiti sopra uno dei due raggi r (o r') ed i piani passanti pel raggio corrispondente r' (o r). Se avviene che ciascuna delle due serie di faccette possa ordinarsi in una serie ∞^1 di superficie, si dirà che la coppia (r), (r') di congruenze è (completamente) stratificabile. Qui però considereremo anche il caso più generale che la stratificabilità abbia luogo in un solo senso, cioè per una sola delle serie ∞^3 di faccette.

Nella Nota precedente si è considerato un caso di coppie di congruenze rettilinee (completamente) stratificabili, con raggi corrispondenti r, r' sempre mutuamente ortogonali, che si collegano colle superficie applicabili sul paraboloide rotondo, reale o immaginario. Nella presente Nota considereremo un nuovo caso di coppie (r), (r') di congruenze rettilinee, con raggi corrispondenti ortogonali, e dapprima, supponendo la stratificabilità in un solo

(1) Presentata nella seduta del 2 novembre 1924.
(2) Questi Rendiconti, vol. XXXIII, fasc. 10, 2° sem., pag. 369.

senso, il problema si identificherà colla teoria dei *sistemi ciclici* di Ribaucour, mentre l'ulteriore ipotesi di una stratificabilità completa darà luogo ad una proprietà caratteristica delle superficie a curvatura costante.

Facciamo l'ipotesi che la prima congruenza rettilinea (r) sia *normale*, e, fissata una delle superficie ortogonali S_0, la seconda congruenza (r') abbia i raggi corrispondenti r' giacenti nei rispettivi piani tangenti di S_0. In primo luogo domanderemo soltanto che sia stratificabile la serie ∞^3 di faccette coi centri sulle normali r della S_0 e i cui piani passano pel raggio corrispondente r'. In altri termini, si tratterà di risolvere il seguente problema:

A) *Data una qualunque superficie* S_0, *si domanda di intersecarne le normali con una serie* ∞^1 *di superficie* S, *delle quali la* S_0 *medesima faccia parte, e tali che i piani tangenti alle* ∞^1 *superficie* S *nei punti d'incontro con una qualunque normale* r *di* S_0, *formino un fascio* (1).

Si vedrà che questo problema si identifica colla ricerca dei sistemi ∞^2 normali di circoli ortogonali alla S_0 (sistemi ciclici di Ribaucour).

2.

Per trattare il problema A), riferiamo la superficie S_0 alle sue linee di curvatura (u, v) e, mantenendo le consuete notazioni, cominciamo dal trascrivere le formole fondamentali a cui dovremo riferirci:

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,X_1\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2-\frac{\sqrt{E}}{r_2}X_3\,,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1\,,\quad \frac{\partial X_3}{\partial u}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}X_1\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2\,,\\
&\qquad\frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1-\frac{\sqrt{G}}{r_1}X_3\,,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}X_2\,,
\end{aligned}\right.$$

insieme alle equazioni di Codazzi, sotto la doppia forma:

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &&\text{o}\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \lg\sqrt{E}}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &&\quad\;\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)=\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial u}.
\end{aligned}\right.$$

In ogni piano tangente di S_0, col punto di contatto in $m\equiv(x, y, z)$, sia tracciato, secondo la nostra ipotesi, un raggio r' come corrispondente

(1) Una soluzione evidente si ha intersecando la congruenza colle superficie normali (parallele alla S_0).

al raggio r normale alla S_0 in m. Per fissare r', caliamo da m la perpendicolare mp su r' e diamo le coordinate polari R, φ del piede p riferite, come ad assi cartesiani, alle due direzioni principali (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2). Le ordinarie coordinate x_p, y_p, z_p del punto p saranno date allora da

$$x_p = x + R\cos\varphi\, X_1 + R \operatorname{sen}\varphi\, X_2 \tag{1}$$

colle due formole analoghe, mentre i coseni di direzione del raggio r' saranno

$$\operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2\,,\quad \operatorname{sen}\varphi\, Y_1 - \cos\varphi\, Y_2\,,\quad \operatorname{sen}\varphi\, Z_1 - \cos\varphi\, Z_2. \tag{2}$$

Ora, per le coordinate $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ di un punto qualunque sulla normale r, avremo

$$\overline{x} = x + TX_3\,,\ \text{ecc.} \tag{3}$$

e noi supporremo T una tale funzione di u, v che la superficie S, definita parametricamente da queste formole, abbia il piano tangente passante per r'. La direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ della normale alla S dovrà essere, ad un tempo, ortogonale alla direzione coi coseni (2) ed alla congiungente i due punti $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, (x_p, y_p, z_p); e siccome le differenze di queste rispettive coordinate sono

$$x_p - \overline{x} = R\cos\varphi\, X_1 + R\operatorname{sen}\varphi\, X_2 - TX_3\,,\ \text{ecc.},$$

ne segue che $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ saranno proporzionali ai valori seguenti:

$$\overline{X} \equiv T\cos\varphi\, X_1 + T\operatorname{sen}\varphi\, X_2 + R X_3\,,\ \text{ecc.} \tag{4}$$

Le condizioni del problema si traducono nelle due equazioni

$$S\overline{X}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0\,,\quad S\overline{X}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0\,,$$

che calcoliamo deducendo dalle (3)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= \sqrt{E}\left(1 + \frac{T}{r_2}\right) X_1 + \frac{\partial T}{\partial u} X_3 \\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= \sqrt{G}\left(1 + \frac{T}{r_1}\right) X_2 + \frac{\partial T}{\partial v} X_3\,, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

e, sostituendo nelle precedenti, abbiamo, per determinare T, il seguente sistema simultaneo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\, T\left(1 + \frac{T}{r_2}\right) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\, T\left(1 + \frac{T}{r_1}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{I}$$

Per le nostre ipotesi questo sistema di Riccati, ammettendo una soluzione T con una costante arbitraria, deve essere completamente integrabile, cioè debbono essere verificate le condizioni d' integrabilità che si calcolano nelle due seguenti:

$$
(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\cdot\dfrac{1}{r_1}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\cdot\dfrac{1}{r_2}\right)=\dfrac{\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{R^2}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right) \end{cases}
$$

In virtù della prima, l'espressione differenziale

$$
\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\,du+\frac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,dv
$$

deve risultare un differenziale esatto, e noi introduciamo una nuova funzione incognita Φ ponendo

$$
(7)\quad \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\ ,\quad \frac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{R}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\ ,
$$

dopo di che la seconda condizione (6) d' integrabilità diventa

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{1}{r_1}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{1}{r_2}\right)+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0\ .
$$

Se si eseguiscono le derivazioni, tenendo conto delle equazioni (6) di Codazzi sotto la seconda forma, e si sopprime il fattore $\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}$, nullo soltanto nel caso della sfera [1], resta per Φ la ben nota *equazione del Cayley*

$$
(\mathrm{A})\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\ .
$$

Da ogni soluzione Φ di questa, ove si calcolino poi R e φ dalle (7), si ha così una soluzione del nostro problema. Quanto alle superficie S stratificate, esse si otterranno integrando le (I), le quali possono scriversi

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Phi}{T}\right)=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Phi}{T}\right)=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\ .
$$

In effetto, soddisfacendo Φ all'equazione (A) del Cayley, l'espressione differenziale

$$
\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,du+\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,dv
$$

è un differenziale esatto, onde integrando abbiamo

$$
(8)\quad \frac{\Phi}{T}=c-\int\left(\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,du+\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,dv\right),
$$

(1) Resta così escluso il caso che la S_0 sia una sfera; ma si potrebbe vedere facilmente che anche in questo caso valgono le deduzioni seguenti nel testo.

con c costante arbitraria. Sostituendo nelle (3) per T il valore così determinato, si avranno le ∞^1 superficie S stratificate (1).

3.

Nelle formole sopra stabilite per la risoluzione del problema A), si riscontra una coincidenza (anche nelle notazioni appositamente scelte) con quelle che si hanno per la determinazione dei sistemi ∞^2 normali di circoli ortogonali alla superficie S_0 nella teoria dei *sistemi ciclici di Ribaucour* (2).

Risulta infatti che, se per ogni punto m di S_0 si descrive il circolo C di R, normale alla S_0 in m, ed avente il centro nel piede p della perpendicolare calata dal punto m sul raggio r', questa doppia infinità di circoli è un sistema normale; e viceversa. Per risolvere, nel modo più generale, il problema A), basta dunque tracciare un qualunque sistema ∞^2 *normale* di circoli C ortogonali alla superficie S_0 ed associare ogni volta a ciascuna normale r di S_0, come raggio corrispondente r', l'asse del circolo C. Ma, spingendo più oltre la ricerca, possiamo porre in semplice relazione geometrica le ∞^1 superficie S stratificate colle ∞^1 superficie, che diremo Σ, normali ai circoli C. Per questo paragoniamo la formola superiore (8) coll'altra stabilita sotto il n. (VII), pag. 150 (loc. cit.):

$$\operatorname{tang}\left(\frac{t}{2}\right) = c - \int\left(\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}du + \frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}dv\right),$$

per determinare le superficie Σ normali ai circoli; dal confronto segue

$$T = R\operatorname{cotang}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Tenendo conto del significato dell'angolo t (ibid.), questa formola si interpreta geometricamente così: si consideri una determinata superficie Σ che incontri normalmente in m' il circolo C ed il punto n ove la tangente in m' a C incontra la tangente in m (la normale r alla S_0); *il punto* n *descriverà la corrispondente superficie stratificata* S.

In altro modo, si osservi che la sfera descritta con centro n e con raggio $nm = nm'$ descrive una congruenza di sfere le cui due falde dell'inviluppo sono S_0 e Σ; e siccome su queste due superficie si corrispondono le linee di curvatura, questa è una *congruenza di sfere di Ribaucour*.

Pertanto si ha la più generale soluzione del problema A) dalla costruzione seguente:

Si descriva un qualunque sistema ∞^2 *normale di circoli ortogonali alla superficie* S_0, *e, fissata fra le superficie ortogonali ai circoli una*

(1) Il caso delle superficie S parallele alla S_0 corrisponde alla soluzione $\Phi = \text{cost.}$ della (A).

(2) Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale* (2a edizione 1903), § 273.

arbitraria Σ, *si considerino le* ∞^2 *sfere che toccano* S_0, Σ *in punti* m, m' *corrispondenti. Il luogo dei centri di queste sfere è la superficie* S *stratificata corrispondente alla* Σ.

Formulata così la costruzione geometrica, è facile verificare che queste superficie S, luogo dei centri delle sfere, risolvono in effetto il problema A). Si sa infatti che, rispetto al piano tangente di S luogo dei centri, i due punti m, m' di contatto colle due falde dell'inviluppo sono simmetrici, e per ciò il piano tangente di S passa per l'asse del circolo C. L'analisi superiore ci ha provato, di più, che *tutte le soluzioni del problema* A) *si ottengono con questa costruzione.*

Ed ora, dalle proprietà note dei sistemi ciclici e degli inviluppi di sfere, deduciamo altre conseguenze che sarebbe facile confermare coll'analisi.

È noto che sulle superficie Σ normali ai circoli le linee di curvatura si corrispondono, e corrispondono alle sviluppabili della congruenza (r') degli assi dei circoli; di più, sulle superficie S, luogo dei centri delle sfere, alle dette linee di curvatura corrisponde un sistema coniugato. Abbiamo quindi il risultato:

In ogni soluzione del problema A) *le sviluppabili delle due congruenze* (r), (r') *si corrispondono, e quelle della congruenza* (r) *delle normali alla* S_0 *tagliano ciascuna superficie stratificata in un sistema coniugato.*

4.

Veniamo ora alla seconda parte della ricerca e proponiamoci di risolvere il problema particolare

B) *Fra le coppie* (r), (r') *di congruenze, che risolvono il problema* A), *trovare quelle che sono stratificabili anche nel secondo senso, per le quali cioè esiste una seconda serie* ∞^1 *di superficie* S' *coi punti distribuiti sui raggi* r', *e i cui piani tangenti passano pel corrispondente raggio* r.

Un punto $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ di r' avrà coordinate della forma

$$\overline{x}' = x_p + T'(\operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2),$$

ossia

$$\overline{x}' = x + (R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi)\, X_1 + (R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi)\, X_2, \tag{9}$$

e noi supporremo T' una tale funzione di u, v che ne risulti definita una superficie S' stratificata della seconda serie

La normale (X', Y', Z') alla S' deve essere dunque perpendicolare, insieme alla direzione (X_3, Y_3, Z_3) e a quella della congiungente i due punti $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$, (x, y, z), le cui differenze delle coordinate sono

$$\overline{x}' - x = (R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi)\, X_1 + (R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi)\, X_2, \text{ ecc.}$$

Ne risultano per X', Y', Z' le formule di proporzionalità

$$X' \equiv (R \operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi)\, X_1 - (R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi)\, X_2\,, \tag{10}$$

e le condizioni per T' saranno date dalle due equazioni

$$S X' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = 0\,, \quad S X' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial v} = 0\,. \tag{11}$$

Per costruire queste due equazioni calcoliamo prima le espressioni seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} S X_1 \frac{\partial \bar{x}'}{\partial u} &= \sqrt{E} + \frac{\partial}{\partial u}(R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}(R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi) \\ S X_2 \frac{\partial \bar{x}'}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi) - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}(R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} S X_1 \frac{\partial \bar{x}'}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi) - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi) \\ S X_2 \frac{\partial \bar{x}'}{\partial v} &= \sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial v}(R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi) + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi)\,, \end{aligned}\right.$$

e, sostituendo nelle (11), troveremo il sistema

$$\left\{\begin{aligned} & R\frac{\partial T'}{\partial u} - T'\frac{\partial R}{\partial u} - (R^2 + T'^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \\ & \qquad + \sqrt{E}\,(R\operatorname{sen}\varphi - T'\cos\varphi) = 0 \\ & R\frac{\partial T'}{\partial v} - T'\frac{\partial R}{\partial v} - (R^2 + T'^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) - \\ & \qquad - \sqrt{G}\,(R\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Questo è, per la funzione incognita T', un sistema del tipo di Riccati

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial u} &= a\,T'^2 + b\,T' + c \\ \frac{\partial T'}{\partial v} &= a'T'^2 + b'T' + c'\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

coi seguenti valori pei coefficienti:

$$\left\{\begin{aligned} & a = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\,, \quad b = \frac{\partial \log R}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\,, \\ & \qquad c = R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) - \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi\,; \\ & a' = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\,, \quad b' = \frac{\partial \log R}{\partial v} + \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\,, \\ & \qquad c' = R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \sqrt{G}\cos\varphi\,, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

dove si noterà che, a causa delle (7), i coefficienti medii b, b' possono anche scriversi

$$b = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{R}{\Phi}\right) \quad , \quad b' = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{R}{\Phi}\right).$$

Per le nostre ipotesi, il sistema (11) deve essere completamente integrabile, cioè debbono trovarsi verificate le condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a'}{\partial u} = ba' - ab' \, , \quad \frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b'}{\partial u} = 2(ca' - ac') \, , \quad \frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c'}{\partial u} = cb' - bc' \, .$$

Sostituendo in queste i valori (13), e tenendo conto della consueta formola per la curvatura K della S_0

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\},$$

si trovano ordinatamente le tre equazioni seguenti:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{E}\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) - \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = KR\sqrt{EG} \\ &\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \sqrt{G}\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0 \\ &\sqrt{G}\cos\varphi\,\frac{\partial R}{\partial u} + \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial R}{\partial v} + \sqrt{EG}\,(KR^2 + 1) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

alle quali bisogna ancora associare le equazioni ottenute al n. 2.

5.

Le due prime, risolute rispetto ai binomii

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,,$$

dànno le due equivalenti

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -KR\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \quad KR\sqrt{G}\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Se deriviamo la prima di queste rapporto a v, la seconda rispetto ad u, sottraendo coll'osservare le (14), resta

$$(16)\qquad \sqrt{G}\cos\varphi\,\frac{\partial K}{\partial u} + \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial K}{\partial v} = 0$$

Ma dalla (14_2) risulta

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi)-\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\varphi)=0\,, \tag{17}$$

onde la prima delle (6) si semplifica nell'altra

$$\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial R}{\partial u}-\sqrt{E}\cos\varphi\frac{\partial R}{\partial v}=0\,.$$

Associandovi la terza delle (14), si ottengono le due equazioni

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial u}&=-(KR^2+1)\sqrt{E}\cos\varphi\\ \frac{\partial R}{\partial v}&=-(KR^2+1)\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\end{aligned}\right. \tag{18}$$

e dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)=0\,,$$

osservando la (17), risulta

$$\sqrt{E}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial v}(KR^2)-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial u}(KR^2)=0\,.$$

Ma i termini che provengono nel primo membro dalla derivazione di R^2 si elidono, per le (18) stesse, e resta

$$-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial K}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\varphi\frac{\partial K}{\partial v}=0\,, \tag{16*}$$

la quale equazione, associata alla (16), dimostra che deve essere insieme

$$\frac{\partial K}{\partial u}=0\qquad\frac{\partial K}{\partial v}=0\,,$$

cioè $K=$ cost. Abbiamo così dimostrato finalmente:

In ogni soluzione del problema B) *la superficie fondamentale* S_0, *ortogonale ai raggi* r *della prima congruenza, deve essere a curvatura* K *costante.*

Ma ora proviamo subito che, inversamente, per ogni superficie a curvatura costante K il problema B) è sempre solubile e precisamente *in una doppia infinità di modi.* E infatti, riunendo le equazioni (15) e (18), risulta per le due funzioni incognite R, φ il sistema di equazioni ai differenziali totali

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=-KR\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\quad \frac{\partial R}{\partial u}=-(KR^2+1)\sqrt{E}\cos\varphi\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=KR\sqrt{G}\cos\varphi\,,\quad \frac{\partial R}{\partial v}=-(KR^2+1)\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\end{aligned}\right. \tag{II}$$

ed i calcoli stessi sopra eseguiti provano che, se K è costante, questo sistema è completamente integrabile e comporta quindi una soluzione (R, φ) con due costanti arbitrarie. D'altra parte, soddisfatte le (II), anche le altre equazioni di condizione sopra dedotte si trovano soddisfatte.

6.

Resta che vediamo come si integra il sistema (II) e che ne diamo poi l'interpretazione geometrica.

Consideriamo per ciò le linee g inviluppate sulla superficie S_0 dalle rette mp inclinate dell'angolo φ sulla direzione (X_1, Y_1, Z_1); queste linee g hanno l'equazione differenziale

$$g) \qquad \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\, du - \sqrt{G}\cos\varphi\, dv = 0\,.$$

Noi passiamo a dimostrare che queste linee g sono geodetiche e formano un fascio, cioè escono da un medesimo punto (reale o ideale) della S_0. Le trajettorie ortogonali delle g hanno l'equazione differenziale

$$\sqrt{E}\cos\varphi\, du + \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\, dv = 0\,,$$

il cui primo membro, come risulta dalla (17), è un differenziale esatto. E, se poniamo

$$\psi = \int\left(\sqrt{E}\cos\varphi\, du + \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\, dv\right),$$

risulta

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 = 1\,,$$

ovvero

$$\varDelta_1\psi = 1\,.$$

Questa dimostra che le linee $\psi =$ cost. sono geodeticamente parallele, cioè le loro trajettorie ortogonali g sono linee geodetiche come sopra si è affermato; di più, ψ è l'arco delle geodetiche g contato da una trajettoria ortogonale fissa. Calcoliamo ora la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\psi}$ delle linee $\psi =$ cost. dalla formola di Bonnet

$$\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}}\right)\right\},$$

che dà, nel caso nostro,

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cos\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\},$$

e, a causa delle (II), resta semplicemente

$$\frac{1}{\rho_\psi}=KR.$$

Dalle (II) stesse si ha poi

$$\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=0,$$

cioè R è funzione di ψ, onde deduciamo che le linee $\psi=\text{cost.}$ sono circoli geodetici paralleli, e per ciò le geodetiche ortogonali g formano un fascio, c. d. d.

Inversamente, se prendiamo sulla S_0, a curvatura costante K, un fascio di geodetiche g e indichiamo con φ la loro inclinazione sulla linea $v=\text{cost.}$, e poniamo

$$R=\frac{1}{K}\frac{1}{\rho_\psi},$$

essendo $\frac{1}{\rho_\psi}$ la curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle geodetiche g, le due funzioni $\varphi(u,v)$ e $R(u,v)$ dànno una soluzione del sistema (II), la cui integrazione equivale dunque, in effetto, alla ricerca delle geodetiche su S_0.

Per definire infine completamente le attuali coppie (r), (r') di congruenze stratificabili, collegate ad ogni superficie S_0 a curvatura costante, in luogo di proseguire coi calcoli, basta applicare il teorema generale di permutabilità nelle condizioni particolari seguenti [1]. Della superficie S_0 prendiamo due particolari complementari arbitrarie S'_1, S'_2, rispetto a due diversi fasci di geodetiche. Le due coppie (S_0, S'_1), (S_0, S'_2) sono le falde focali di due congruenze *normali* W, e applicando il teorema di permutabilità, la coppia (r), (r') di congruenze stratificabili corrispondenti avrà per raggi r le normali di S_0 e i raggi r' giacenti nei piani tangenti. Si ha dunque una soluzione del problema B), che è la soluzione generale, come risulta dal considerare che essa dipende da due costanti arbitrarie. In questo caso poi tutte le superficie stratificate della seconda serie sono altrettante

[1] È il caso studiato dal Tortorici nella sua tesi di laurea: *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità*, tomo 35° dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1913), ved. §§ 11-15.

complementari di S_0 come le due S'_1, S'_2, perchè i loro piani tangenti passano per la normale r di S_0, mentre ciascuna di esse colla S_0 forma le due falde di una congruenza W (normale). In fine osserviamo che anche in queste coppie (r), (r') di congruenze stratificabili le sviluppabili delle congruenze si corrispondono e tracciano sulle rispettive superficie stratificate un sistema coniugato. Come quelle considerate nella Nota prec., esse rientrano perciò nella classe considerata dal Fubini (loc. cit).

Chimica. — *Ricerche sulla diffusibilità dell'elio attraverso setti cristallini* (1). Nota del Socio prof. A. Piutti e del dott. Enrico Boggio-Lera (2).

In seguito alle nostre ricerche sulla diffusibilità dell'elio attraverso il vetro di Turingia (3), abbiamo pensato di estenderle a setti ricavati da cristalli tagliati secondo determinate direzioni, sia per portare un contributo allo studio degli edifici cristallini, sia coll'intento di trovare setti che permettessero di separare, fra loro e da altri, i gas nobili ed eventualmente di ottenere, per diffusione frazionata, la separazione dei loro isotropi.

Le difficoltà pratiche e sopratutto quelle economiche, che abbiamo incontrato per la esecuzione sperimentale del lavoro, non ci hanno permesso di condurla a termine se non adoperando lamine di quarzo e di mica, avendo dovuto rinunciare ad altre, sia per il prezzo elevato, sia per la difficoltà di ricavare lamine resistenti e di piccolo spessore da altri minerali cristallini.

Perciò in questa Nota diamo conto dei risultati ottenuti soltanto col quarzo e con la mica.

La figura che segue mostra l'apparecchio che abbiamo costruito e impiegato per queste ricerche.

Descrizione dell'apparecchio.

Il setto cristallino D è un disco di 24 mm. di diametro ricavato da un cristallo che naturalmente deve essere esente da inclusioni, fenditure, ecc.; questo disco viene deposto sulla superficie anulare B del pezzo in bronzo tornito A; questa superficie viene preventivamente spalmata con uno smalto fusibile (ottenuto con minio p. 7, anidride borica p. 2, borace fuso p. 1) polverizzato e impastato con alcool; il tubo di ottone E, saldato al blocco A, viene fissato

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica organica e farmaceutica della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 2 novembre 1924.

(3) Rendic. Acc. Lincei, serie V, vol. XIV. fasc. VI.