CAPÍTULO VIII. CONVERGENCIA DE SUCESIONES

SECCIONES

A. CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales se dice *sucesión*.

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión y $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, representamos la sucesión por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{a_n\}$ y a_n se llama *término general* (o n-ésimo) de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es *convergente* cuando existe y es finito $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si dicho límite es infinito, la sucesión es *divergente*, y si no existe, la sucesión es *oscilante*.

Las propiedades de los límites de funciones se aplican a sucesiones en forma directa. Por tanto, para estudiar la convergencia de una sucesión son válidos los mismos métodos utilizados en el cálculo de límites de funciones. También se pueden aplicar las equivalencias entre infinitésimos nombradas allí (ver capítulo 3). También es válida aquí la fórmula $\lim_{n\to\infty}(1+u_n)^{1/u_n} = e$, cuando $u_n \to 0$.

Sin embargo existen otros criterios específicos para las sucesiones que enunciamos a continuación:

1) *Media aritmética:* Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

2) *Media geométrica:* Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $a_n > 0, \forall n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} = a.$$

3) *Cociente-Raíz:* Si $a_n > 0, \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

4) *Stolz:* Si $\{a_n\}$ es una sucesión arbitraria, $\{b_n\}$ es una sucesión creciente tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

Aparte de estos criterios, es útil la *fórmula de Stirling*:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$, es decir, $n!$ y $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ son infinitos equivalentes.

En los problemas que siguen se desarrollan distintos métodos para los diferentes casos de indeterminación en el cálculo de límites de sucesiones.

PROBLEMA 8.1.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-n}.$$

Solución

Multiplicamos y dividimos por el conjugado y se obtiene:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+4/n}+\sqrt{1-1/n}} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.2.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n.$$

Solución

Como tenemos una indeterminación $\infty - \infty$, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.3.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - \sqrt{2}n.$$

Solución

Multiplicamos y dividimos dos veces por el conjugado y obtenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2n^2}\right)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1-n^4}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2n^2}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4}\right)}=0.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.4.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{3n^2-1}-3n.$$

Solución

Debido a la indeterminación $\infty-\infty$, procedemos así:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{3n^2-1})-\lim_{n\to\infty}3n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-3n^2+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{3n^2-1}}\\
&\quad -\lim_{n\to\infty}3n=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+\dots}{\sqrt{n^2+\dots}+\sqrt{3n^2+\dots}}-\infty=-\infty.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.5.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-n}.$$

Solución

Teniendo en cuenta la factorización $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, si llamamos

$a = \sqrt[3]{n^3+2n^2}$ y $b = \sqrt[3]{n^3-n}$, resulta:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}(a-b) = \lim_{n\to\infty}\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-n^3+n}{(n^3+2n^2)^{2/3}+(n^3+2n^2)^{1/3}(n^3-n)^{1/3}+(n^3-n)^{2/3}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{\sqrt[3]{n^6+\dots}+\sqrt[3]{n^6+\dots}+\sqrt[3]{n^6+\dots}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{\sqrt[3]{1+\dots}+\sqrt[3]{1+\dots}+\sqrt[3]{1+\dots}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.6.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[3]{n^9+2n} - \sqrt{n^6-7n^3}.$$

Solución

Teniendo en cuenta que $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{(n^9+2n)^2} - \sqrt[6]{(n^6-7n^3)^3}$, si llamamos $a = \sqrt[6]{(n^9+2n)^2}$, $b = \sqrt[6]{(n^6-7n^3)^3}$, aplicamos la fórmula

$$a - b = \frac{a^6-b^6}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}(a-b) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^9+2n)^2-(n^6-7n^3)^3}{\sqrt[6]{(n^9+2n)^{10}}+\dots+\sqrt[6]{(n^6-7n^3)^{15}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^{10}+4n^2-(-21n^{15}+147n^{12}-7^3n^9)}{\sqrt[6]{n^{90}+\dots}+\dots+\sqrt[6]{n^{90}+\dots}} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.7.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+5} + \sqrt[3]{8n^3+4n^2} - 3n.$$

Solución

En primer lugar, transformamos la indeterminación $\infty - \infty$ en $0 \cdot \infty$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3(1+5/n^3)} + \sqrt[3]{8n^3(1+4n^2/8n^3)} - 3n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[n(1+5/n^3)^{1/3} + 2n(1+1/2n)^{1/3} - 3n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[(1+5/n^3)^{1/3} + 2(1+1/2n)^{1/3} - 3\right]. \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{1/3} &= 1 + \binom{1/3}{1}\frac{5}{n^3} + \binom{1/3}{2}\frac{5^2}{n^6} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{n^3} + \frac{1/3(1/3-1)}{2!}\cdot\frac{5^2}{n^6} + \dots = 1 + \frac{5}{3n^3} - \frac{25}{9n^6} + \dots \\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/3} &= 1 + \binom{1/3}{1}\frac{1}{2n} + \binom{1/3}{2}\frac{1}{2^2n^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n} + \frac{1/3(1/3-1)}{2!}\cdot\frac{1}{2^2n^2} + \dots = 1 + \frac{1}{6n} - \frac{1}{36n^2} + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo en la última expresión de L:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} n\left[1 + \frac{5}{3n^3} - \frac{25}{9n^6} + \dots + 2 + \frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + \dots - 3\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + \dots\right] = lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{18n} + \dots\right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.8.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[a]{n^a + n^{a-1}} - \sqrt[a]{n^a - n^{a-1}},\ a \in \mathbb{N}.$$

Solución

En primer lugar sacamos n factor común en cada sumando:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\sqrt[a]{\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\sqrt[a]{\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Desarrollamos ahora cada término en serie de potencias:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/a} &= 1+\binom{1/a}{1}\frac{1}{n}+\binom{1/a}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{1/a}{3}\frac{1}{n^3}+\dots \\
&= 1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1/a(1/a-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1/a(1/a-1)(1/a-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots \\
&= 1+\frac{1}{an}+\frac{1-a}{2a^2n^2}+\frac{(1-a)(1-2a)}{6a^3n^3}+\dots \\
\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/a} &= 1-\binom{1/a}{1}\frac{1}{n}+\binom{1/a}{2}\frac{1}{n^2}-\binom{1/a}{3}\frac{1}{n^3}+\dots \\
&= 1-\frac{1}{an}+\frac{1-a}{2a^2n^2}-\frac{(1-a)(1-2a)}{6a^3n^3}+\dots
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la última expresión del límite, resulta:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2}{an}+\frac{(1-a)(1-2a)}{3a^3n^3}+\dots\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{a}+\frac{(1-a)(1-2a)}{3a^3n^2}+\dots\right]=\frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.9.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\frac{n(\sqrt{n}+2n+1)}{n^2+3}.$$

Solución

Comparando los grados del numerador y denominador, resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+2n^2+n}{n^2+3}=2.$$

PROBLEMA 8.10.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\frac{(3n-2)(n+3)(2n-5)^2}{n^2(2n+6)(3n-5)}.$$

Solución

Comparando de nuevo los grados del numerador y del denominador, obtenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+9n-2n-6)(4n^2+25-20n)}{n^2(6n^2-10n+18n-30)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^4+\dots}{6n^4+\dots} = 2.$$

PROBLEMA 8.11.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

Solución

Aplicamos la fórmula $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$. Resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 8.12.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{n^a}\binom{n}{a}, \ a \in \mathbb{N}.$$

Solución

Al desarrollar $\binom{n}{a}$ resulta directamente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-a+1)}{a!} = \frac{1}{a!} \lim_{n\to\infty} \frac{n^a+\dots}{n^a} = \frac{1}{a!}.$$

PROBLEMA 8.13.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}.$$

Solución

Si dividimos numerador y denominador por $\sqrt{n}$, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1/n + \sqrt{n/n^4}}}} = 1. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.14.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n-3}(4 - \sqrt[5]{n})}.$$

Solución

Para comparar los grados del numerador y denominador escribimos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[15]{4^5} - 4\sqrt[15]{n^6}}{\sqrt[15]{(n-3)^5}(4 - \sqrt[15]{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[15]{4^5} - 4\sqrt[15]{n^6}}{4\sqrt[15]{n^5 - 5n^4 \cdot 3 + \dots} - \sqrt[15]{n^8 + \dots}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\sqrt[15]{4^5} - 4\sqrt[15]{n^6}}{\sqrt[15]{n^8}}}{\frac{4\sqrt[15]{n^5 - 5n^4 \cdot 3 + \dots} - \sqrt[15]{n^8 + \dots}}{\sqrt[15]{n^8}}} = \frac{0}{0-1} = 0. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.15.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{n\left(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n^3-\sqrt{n}}\right)}.$$

Solución

Si racionalizamos numerador y denominador, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+\sqrt{n}-n^2+\sqrt{n})(\sqrt[3]{(n^3+\sqrt{n})^2}+\dots)}{n(n^3+\sqrt{n}-n^3+\sqrt{n})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+\sqrt{n^2-\sqrt{n}})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{(n^3+\sqrt{n})^2}+\sqrt[3]{n^6-n}+\sqrt[3]{(n^3-\sqrt{n})^2}\right)}{2n\sqrt{n}(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+\sqrt{n^2-\sqrt{n}})} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

debido a que los grados del numerador y denominador son iguales.

PROBLEMA 8.16.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3^n+7}{5^n-4}.$$

Solución

Debido a la indeterminación ∞/∞, dividimos numerador y denominador por 5^n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(3/5)^n+(7/5^n)}{1-(4/5^n)} = \frac{0}{1} = 0,$$

debido a que $(3/5)^n \to 0$.

PROBLEMA 8.17.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt[4]{n+h}-\sqrt[4]{n+k}}{\sqrt[3]{n+h}-\sqrt[3]{n+k}} \cdot \sqrt[12]{n+j}.$$

Solución

En primer lugar tenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n(1+h/n)} - \sqrt[4]{n(1+k/n)}}{\sqrt[3]{n(1+h/n)} - \sqrt[3]{n(1+k/n)}} \cdot \sqrt[12]{n(1+j/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}\left[(1+h/n)^{1/4} - (1+k/n)^{1/4}\right]}{n^{1/3}\left[(1+h/n)^{1/3} - (1+k/n)^{1/3}\right]} \cdot n^{1/12} \cdot (1+j/n)^{1/12} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+h/n)^{1/4} - (1+k/n)^{1/4}}{(1+h/n)^{1/3} - (1+k/n)^{1/3}} \cdot (1+j/n)^{1/12}.
\end{aligned}$$

Desarrollamos ahora las potencias de los binomios:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{h}{n}\right)^{1/4} &= 1 + \binom{1/4}{1}\frac{h}{n} + \binom{1/4}{2}\frac{h^2}{n^2} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{h}{n} + \frac{1/4(1/4-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{n^2} + \dots = 1 + \frac{h}{4n} - \frac{3h^2}{32n^2} + \dots \\
\left(1+\frac{h}{n}\right)^{1/3} &= 1 + \binom{1/3}{1}\frac{h}{n} + \binom{1/3}{2}\frac{h^2}{n^2} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{n} + \frac{1/3(1/3-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{n^2} + \dots = 1 + \frac{h}{3n} - \frac{h^2}{9n^2} + \dots \\
\left(1+\frac{j}{n}\right)^{1/12} &= 1 + \binom{1/12}{1}\frac{j}{n} + \binom{1/12}{2}\frac{j^2}{n^2} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{j}{n} + \frac{1/12(1/12-1)}{2!}\cdot\frac{j^2}{n^2} + \dots = 1 + \frac{j}{12n} - \frac{11j^2}{288n^2} + \dots
\end{aligned}$$

Sustituimos en la fórmula del límite y tenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{h}{4n} - \frac{3h^2}{32n^2} + \dots - \left(1 + \frac{k}{4n} - \frac{3k^2}{32n^2} + \dots\right)}{1 + \frac{h}{3n} - \frac{h^2}{9n^2} + \dots - \left(1 + \frac{k}{3n} - \frac{k^2}{9n^2} + \dots\right)} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{j}{12n} - \frac{11j^2}{288n^2} + \dots\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h-k}{4n} - \frac{3(h^2-k^2)}{32n^2} + \dots}{\frac{h-k}{3n} - \frac{h^2-k^2}{9n^2} + \dots}\left(1 + \frac{j}{12n} - \frac{11j^2}{288n^2} + \dots\right) \\
&= \frac{\frac{1}{4}(h-k)}{\frac{1}{3}(h-k)} \cdot 1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.18.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{1/(2n^2) + 1 - \cos 1/n}{n^4}.$$

Solución

Operando directamente resulta $L = 0/\infty = 0$.

PROBLEMA 8.19.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{\ln(5n^4 - 4n^3 + 6n^2 + 3n - 2)}{\ln(6n^3 + 4n^2 - 5n + 7)}.$$

Solución

Por las propiedades de los logaritmos, tenemos:
$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^4(5 - 4/n + 6/n^2 + 3/n^3 - 2/n^4)}{\ln n^3(6 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^4 + \ln(5 - 4/n + 6/n^2 + 3/n^3 - 2/n^4)}{\ln n^3 + \ln(6 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4\ln n + \ln(5 - 4/n + 6/n^2 + 3/n^3 - 2/n^4)}{3\ln n + \ln(6 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \ln(5 - 4/n + 6/n^2 + 3/n^3 - 2/n^4)/\ln n}{3 + \ln(6 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3)/\ln n} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.20.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n}{2n-1}}{\operatorname{sen} \frac{-\pi}{4n-2} \cdot \sqrt[4]{n^4 + 1}}.$$

Solución

Debido a que $\operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{2n-1} \to \operatorname{sen} \pi/2 = 1$, y teniendo en cuenta la equivalencia de infinitésimos $\operatorname{sen} \dfrac{-\pi}{4n-2} \sim \dfrac{-\pi}{4n-2}$, resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n}{2n-1}}{\frac{-\pi}{4n-2} \cdot \sqrt[4]{n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{-\pi \sqrt[4]{n^4+1}} = -\frac{4}{\pi}.$$

PROBLEMA 8.21.

Sabiendo que $2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\cos(A+B) + \cos(A-B)$, *calcular el límite de la sucesión de término general*

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} + \operatorname{sen} \frac{2}{n^2} + \operatorname{sen} \frac{3}{n^2} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{n}{n^2}.$$

Solución

Multiplicando y dividiendo el término general de la sucesión por $2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{2n^2}$:

$a_n = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(1/2n^2)} \left[2 \operatorname{sen} \frac{2\cdot 1}{2n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2n^2} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\cdot 2}{2n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2n^2} + \cdots + 2 \operatorname{sen} \frac{2n}{2n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2n^2}\right].$

Si aplicamos ahora la fórmula dada, tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\left(-\cos \frac{3}{2n^2} + \cos \frac{1}{2n^2}\right) + \cdots + \left(-\cos \frac{2n+1}{2n^2} + \cos \frac{2n-1}{2n^2}\right)\right] \\ &\quad \times \frac{1}{2 \operatorname{sen}(1/2n^2)} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(1/2n^2)} \left[\cos \frac{1}{2n^2} - \cos \frac{2n+1}{2n^2}\right] \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sen}(1/2n^2)} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{n+1}{2n^2} \operatorname{sen} \frac{n}{2n^2}. \end{aligned}$$

Entonces, debido a la equivalencia $\operatorname{sen} u_n \sim u_n$ cuando $u_n \to 0$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 \cdot (1/2n^2)} \cdot 2 \cdot \frac{n+1}{2n^2} \cdot \frac{n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 8.22.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}.$$

Solución

Por una parte,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n+2}\right)}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4n+2}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n+2}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}.$$

Teniendo en cuenta la equivalencia $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4n+2} \sim \dfrac{\pi}{4n+2}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+2}{\pi}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{\pi\sqrt[3]{n^3+2n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4+2/n}{\pi\sqrt[3]{1+2/n^2-1/n^3}} = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.23.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = n \ln \sqrt{\frac{n+a}{n-a}}.$$

Solución

Debido a la equivalencia $\ln \dfrac{n+a}{n-a} \sim \dfrac{n+a}{n-a} - 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \ln \frac{n+a}{n-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\left(\frac{n+a}{n-a} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{n+a-n+a}{n-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{2an}{2n-2a} = a. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.24.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (4n+3)^m \left(\ln \frac{n+1}{n-2}\right)^m \text{ donde } m \in \mathbb{R}.$$

Solución

Aplicamos la equivalencia $\ln \frac{n+1}{n-2} \sim \frac{n+1}{n-2} - 1$ y resulta:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left[(4n+3)\ln\frac{n+1}{n-2}\right]^m = \left[\lim_{n\to\infty}(4n+3)\left(\frac{n+1}{n-2}-1\right)\right]^m \\ &= \left[\lim_{n\to\infty}(4n+3)\frac{3}{n-2}\right]^m = 12^m. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.25.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = n\sqrt[n]{a} - n, \text{ siendo } a > 0.$$

Solución

Aplicaremos la equivalencia $a^{1/n} - 1 \sim (1/n)\ln a$:

$$L = \lim_{n\to\infty}(na^{1/n} - n) = \lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n}\ln a = \ln a.$$

PROBLEMA 8.26.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{(a+n)(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Solución

Si tomamos logaritmos y utilizamos la equivalencia $\ln(1+u_n) \sim u_n$, cuando $u_n \to 0$, resulta:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a+n}{n}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{a+n}{n} + \lim_{n\to\infty}(n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a+n}{n} + \lim_{n\to\infty}(n-1)\left(\frac{n-1}{n}-1\right) = \ln 1 + (-1) = -1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $L = e^{-1}$.

PROBLEMA 8.27.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (n/3)\ln(n+a)(n+b)(n+c) - \ln n^n.$$

Solución

Tenemos una indeterminación $\infty-\infty$ que operamos del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left[(n/3)\ln(n+a)(n+b)(n+c) - \ln(n^{n/3}n^{n/3}n^{n/3})\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}[(n/3)\ln(n+a) + (n/3)\ln(n+b) + (n/3)\ln(n+c) \\
&\qquad -(n/3)\ln n - (n/3)\ln n - (n/3)\ln n] \\
&= \lim_{n\to\infty}(n/3)\ln\frac{n+a}{n} + \lim_{n\to\infty}(n/3)\ln\frac{n+b}{n} + \lim_{n\to\infty}(n/3)\ln\frac{n+b}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\cdot\frac{a}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\cdot\frac{b}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\cdot\frac{c}{n} \\
&= \frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{3}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.28.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3n^4 \operatorname{sen}^2(1/n)\ln(1+1/n)}{(n+5)\cos\frac{\pi n+5}{4n+1}}.$$

Solución

Debido a las equivalencias $\operatorname{sen} 1/n \sim 1/n$ y $\ln(1+1/n) \sim 1/n$, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4}{n+5} \cdot \frac{1/n^2 \cdot 1/n}{\sqrt{2}/2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 \cdot 2}{\sqrt{2}n^3(n+5)} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.29.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = n^2(\ln \operatorname{sen}(\pi/2 + 2/n) - \ln \cos 1/n).$$

Solución

Nuevamente, por la equivalencia $\ln u_n \sim u_n - 1$, cuando $u_n \to 1$, resulta:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} n^2 \ln \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + 2/n)}{\cos 1/n} = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + 2/n) - \cos 1/n}{\cos 1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\cos 2/n - \cos 1/n}{\cos 1/n} = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\cos(1/n + 1/n) - \cos 1/n}{\cos 1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\cos^2 1/n - \operatorname{sen}^2 1/n - \cos 1/n}{\cos 1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cos 1/n(\cos 1/n - 1)}{\cos 1/n} - \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\operatorname{sen}^2 1/n}{\cos 1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-1)(1/n)^2}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos 1/n} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

En la última línea aplicamos las equivalencias $\operatorname{sen}(1/n) \sim 1/n$ y $1 - \cos(1/n) \sim (1/n)^2/2$.

PROBLEMA 8.30.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{(3n^2+1)(1 - \cos(1/n)}{(n^2 - 2)\ln[1 + (1/n^2)]}.$$

Solución

Teniendo en cuenta las equivalencias de los infinitésimos $1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{(1/n)^2}{2}$ y $\ln(1+u_n) \sim u_n$, cuando $u_n \to 0$, tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2-2} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(1/n)}{\ln(1+(1/n^2))} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1/n^2}{2}}{1/n^2} = \frac{3}{2}.$$

PROBLEMA 8.31.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\sqrt{\frac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{2n-1}{1+3n}}.$$

Solución

Calculando directamente los límites de la base y el exponente, tenemos que

$$L = \left(\sqrt{1/2}\right)^{2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

PROBLEMA 8.32.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-3}.$$

Solución

Tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Tomamos logaritmos y utilizamos la equivalencia $\ln u_n \sim u_n - 1$ cuando $u_n \to 1$:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} (n-3)\left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n+1-n+1)}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-6}{n-1} = 2 \Longrightarrow L = e^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.33.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{(n^2-1)/n}.$$

Solución

De forma similar al anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n}\left[\frac{n^2+3}{n^2+4n}-1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2+3-n^2-4n)}{n(n^2+4n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n^3-3+4n}{n^3+4n^2} = -4 \Longrightarrow L = e^{-4}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.34.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+n}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}.$$

Solución

Como la indeterminación es del tipo 1^∞, tenemos:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{2n^2+1} \ln \frac{n^2+3n-2}{n^2+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{2n^2+1} \cdot \frac{n^2+3n-2-n^2-n}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+\dots}{2n^4+\dots} = 1.\end{aligned}$$

Por tanto, $L = e^1 = e$.

PROBLEMA 8.35.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left[1 + \ln \frac{n^2 - 3n + 5}{n^2 - 9n}\right]^{\frac{2n^2-3}{n+1}}.$$

Solución

Con la misma indeterminación anterior, deberemos aplicar dos veces la equivalencia $\ln u_n \sim u_n - 1$ cuando $u_n \to 1$:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n+1} \ln \frac{n^2-3n+5}{n^2-9n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n+1} \left(\frac{n^2-3n+5}{n^2-9n} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n+1} \cdot \frac{n^2-3n+5-n^2+9n}{n^2-9n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(6n+5)(2n^2-3)}{(n^2-9n)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^3+\dots}{n^3+\dots} = 12 \Longrightarrow L = e^{12}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.36.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left[\frac{\ln(n+a)}{\ln n}\right]^{n \ln n}.$$

Solución

Debido a que

$$\frac{\ln(n+a)}{\ln n} = \frac{\ln n(1+a/n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+a/n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+a/n)}{\ln n} \to 1,$$

tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Por tanto, si llamamos L al límite de la sucesión, resulta

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} n \ln n \left[\frac{\ln(n+a)}{\ln n} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \ln(1+a/n) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \ln(1+a/n) = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a/n)^n = \ln e^a = a.
\end{aligned}$$

Queda en definitiva que $L = e^a$.

PROBLEMA 8.37.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = [1 + \ln(n^2 - 5n + 3) - \ln(n^2 + 3n - 5)]^{2n-5}.$$

Solución

Debido a que $a_n = \left[1 + \ln \dfrac{n^2 - 5n + 3}{n^2 + 3n - 5}\right]^{2n-5} \to 1^\infty$, resulta:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} (2n-5) \ln \frac{n^2 - 5n + 3}{n^2 + 3n - 5} = \lim_{n\to\infty} (2n-5) \left(\frac{n^2 - 5n + 3}{n^2 + 3n - 5} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-5)(-8n+8)}{n^2 + 3n - 5} = -16. \end{aligned}$$

En definitiva, $L = e^{-16}$.

PROBLEMA 8.38.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \left[3 \cdot \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{4n^3}\right]^{2n+1}.$$

Solución

Calcularemos en primer lugar la expresión $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ utilizando la fórmula $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1^2 &+ 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n)^2 \\ &\quad -[2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2] \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n)^2 - 2^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 2^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8n^3 - 2n}{6}. \end{aligned}$$

De este modo $a_n = \left[\frac{3}{4n^3} \cdot \frac{8n^3 - 2n}{6}\right]^{2n+1} = \left[\frac{4n^2 - 1}{4n^2}\right]^{2n+1} \to 1^\infty$.

Entonces hacemos

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} (2n+1) \left[\frac{4n^2 - 1}{4n^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)}{4n^2} = 0.$$

Por tanto $L = e^0 = 1$.

PROBLEMA 8.39.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{4n^2 - 7n}}{\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2}}\right)^{\sqrt[3]{n^3 + n^2/2}}.$$

Solución

Tenemos un límite de la forma 1^∞. Llamando $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, si utilizamos la equivalencia $\ln u_n \sim u_n - 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3 + n^2/2} \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - 7n} - \sqrt[3]{8n^3 + 4n^2}}{\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3 + n^2/2}{8n^3 + 4n^2}} \left(\sqrt[6]{(4n^2 - 7n)^3} - \sqrt[6]{(8n^3 + 4n^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[6]{(4n^2 - 7n)^3} - \sqrt[6]{(8n^3 + 4n^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Si llamamos ahora $a = \sqrt[6]{(4n^2 - 7n)^3}$ y $b = \sqrt[6]{(8n^3 + 4n^2)^2}$ y utilizamos la identidad $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4 b + \dots + b^5)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\ln L &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2 - 7n)^3 - (8n^3 + 4n^2)^2}{\sqrt[6]{(4n^2 - 7n)^{15}} + \dots + \sqrt[6]{(8n^3 + 4n^2)^{10}}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{-400n^5 + 572n^4 - 343n^3}{\sqrt[6]{(2n)^{30} + \dots} + \dots + \sqrt[6]{(2n)^{30}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-400}{6 \cdot 2^{30/6}} = \frac{-25}{24}.
\end{aligned}$$

En definitiva, $L = e^{-25/24}$.

PROBLEMA 8.40.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \left[\frac{\cos(a+1/n)}{\cos a}\right]^n.$$

Solución

Como tenemos una indeterminación 1^∞, hacemos:
$$\ln L = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\cos(a+1/n)}{\cos a} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\cos(a+1/n)-\cos a}{\cos a}.$$

Aplicamos la fórmula $\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}$ y tenemos:
$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{-2\operatorname{sen}\left(a+\frac{1}{2n}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{2n}}{\cos a} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2\operatorname{sen}\left(a+\frac{1}{2n}\right)}{\cos a}\cdot\lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\frac{1}{2n}\\ &= \frac{-2\operatorname{sen} a}{\cos a}\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2n} = -2\operatorname{tg} a\cdot\frac{1}{2} = -\operatorname{tg} a.\end{aligned}$$

Queda en definitiva $L = e^{-\operatorname{tg} a}$.

PROBLEMA 8.41.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \left[\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right]^n.$$

Solución

Análogamente al anterior tenemos:
$$\ln L = \lim_{n\to\infty} n\left[\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right].$$

Utilizaremos la fórmula $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Longrightarrow \cos 2x - 1 = -2\operatorname{sen}^2 x$ y resulta:
$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} n\left[-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}(-2n)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{4n} = \frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

En definitiva, $L = e^{-1/2}$.

PROBLEMA 8.42.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left[\frac{1 + \operatorname{tg} 1/n}{1 - \operatorname{tg} 1/n}\right]^n.$$

Solución

Como tenemos una indeterminación del tipo 1^∞, hacemos lo siguiente:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{1 + \operatorname{tg} 1/n}{1 - \operatorname{tg} 1/n} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{2 \operatorname{tg} 1/n}{1 - \operatorname{tg} 1/n}\right].$$

Como $1/n \to 0$, podemos sustituir $\operatorname{tg} 1/n$ por $1/n$. Así:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{2/n}{1 - \operatorname{tg} 1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 - \operatorname{tg} 1/n} = 2.$$

Por tanto, $L = e^2$.

PROBLEMA 8.43.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (\cos \phi/n + a \operatorname{sen} \phi/n)^n.$$

Solución

Como tenemos un límite de la forma 1^∞, usamos las equivalencias $\ln u_n \sim u_n - 1$, $1 - \cos u_n \sim u_n^2/2$, $\operatorname{sen} u_n \sim u_n$, cuando $u_n \to 0$ y resulta:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} n\,(\cos \phi/n - 1 + a \operatorname{sen} \phi/n) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\,(\cos \phi/n - 1) + \lim_{n\to\infty} n \cdot a \operatorname{sen} \phi/n \\
&= \lim_{n\to\infty} -n \cdot \frac{\phi^2}{2n^2} + \lim_{n\to\infty} n \cdot a \cdot (\phi/n) = \phi \cdot a.
\end{aligned}$$

Luego $L = e^{\phi a}$.

PROBLEMA 8.44.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (1/n + \operatorname{sen} 1/n + \cos 1/n)^{\operatorname{cotg} 1/n}.$$

Solución

Tomando logaritmos, y usando las equivalencias $\operatorname{tg} 1/n \sim 1/n$, $1-\cos 1/n \sim \frac{(1/n)^2}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{cotg} 1/n(1/n + \operatorname{sen} 1/n + \cos 1/n - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n + \operatorname{sen} 1/n + \cos 1/n - 1}{\operatorname{tg} 1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\operatorname{tg} 1/n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{\operatorname{tg} 1/n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\cos 1/n - 1}{\operatorname{tg} 1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} + \lim_{n\to\infty} \cos 1/n + \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n)^2}{2(1/n)} = 1 + 1 - 0 = 2.
\end{aligned}$$

de donde $L = e^2$.

PROBLEMA 8.45.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{a_1^{1/n} + \dots + a_k^{1/n}}{k}\right)^n.$$

Solución

Debido a la indeterminación 1^∞, usamos la equivalencia $a^{1/n} \sim (1/n)\ln a$ con lo que:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_1^{1/n} + \dots + a_k^{1/n}}{k} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\frac{(a_1^{1/n}-1) + \dots + (a_k^{1/n}-1)}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{(1/n)\ln a_1 + \dots + (1/n)\ln a_k}{k} = \frac{\ln(a_1 \dots a_k)}{k}.
\end{aligned}$$

De donde, $L = \sqrt[k]{a_1 \dots a_k}$.

PROBLEMA 8.46.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{n + \sqrt[n]{a}}{n + \sqrt[n]{b}} \right)^{n^2}.$$

Solución

Procediendo como en el problema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n + \sqrt[n]{a} - n - \sqrt[n]{b})}{n + \sqrt[n]{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})}{n + \sqrt[n]{b}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - 1) - (\sqrt[n]{b} - 1)}{1/n + \sqrt[n]{b}/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{1/n + \sqrt[n]{b}/n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{1/n + \sqrt[n]{b}/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)\ln a}{1/n + \sqrt[n]{b}/n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)\ln b}{1/n + \sqrt[n]{b}/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{1 + \sqrt[n]{b}/n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln b}{1 + \sqrt[n]{b}/n} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $L = a/b$.

PROBLEMA 8.47.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{p}}{p} \right)^n.$$

Solución

Utilizaremos la equivalencia $a^{u_n} - 1 \sim u_n \ln a$, cuando $u_n \to 0$:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{p}}{p} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} \left[(\sqrt[n]{1} - 1) + (\sqrt[n]{2} - 1) + \cdots + (\sqrt[n]{p} - 1) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} (\sqrt[n]{1} - 1) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} (\sqrt[n]{p} - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{n} \ln 1 + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{n} \ln p \\
&= \frac{\ln 1 + \cdots + \ln p}{p} = \frac{\ln(1 \dots p)}{p} = \ln \sqrt[p]{p!}
\end{aligned}$$

Por tanto, $L = e^{\ln \sqrt[p]{p!}} = \sqrt[p]{p!}$

PROBLEMA 8.48.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left[\frac{p \cdot a^{1/n} + q \cdot b^{1/n} + r \cdot c^{1/n}}{p + q + r} \right]^n.$$

Solución

Como tenemos un límite de la forma 1^∞, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{p \cdot a^{1/n} + q \cdot b^{1/n} + r \cdot c^{1/n}}{p + q + r} - 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{p(a^{1/n} - 1) + q(b^{1/n} - 1) + r(c^{1/n} - 1)}{p + q + r} \right] \\
&= \frac{1}{p + q + r} \left[p \lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) + q \lim_{n\to\infty} n(b^{1/n} - 1) + r \lim_{n\to\infty} n(c^{1/n} - 1) \right].
\end{aligned}$$

Tal como hemos visto en el problema anterior,

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a, \ \lim_{n\to\infty} n(b^{1/n} - 1) = \ln b, \ \lim_{n\to\infty} n(c^{1/n} - 1) = \ln c.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\ln L &= \frac{1}{p+q+r}(p\ln a + q\ln b + r\ln c)\\ &= \frac{1}{p+q+r}\ln(a^p b^q c^r) = \ln(a^p b^q c^r)^{\frac{1}{p+q+r}}.\end{aligned}$$

y finalmente $L = \sqrt[p+q+r]{a^p b^q c^r}$.

PROBLEMA 8.49.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ln(3/n)}.$$

Solución

En este caso tenemos una indeterminación 0^0. Así pues:

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ln(3/n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(3/n)}\ln\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{\ln 3 - \ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n/\ln n}{\ln 3/\ln n - \ln n/\ln n} = 1.\end{aligned}$$

Como $\ln L = 1 \Longrightarrow L = e$.

PROBLEMA 8.50.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{n+2}{3n^3-1}\right)^{1/\ln(n^4-3)}.$$

Solución

Debido a la indeterminación 0^0, tomamos logaritmos y aplicamos las equivalencias $\ln(n^4-3) \sim \ln n^4$ y $\ln \dfrac{n+2}{3n^3-1} \sim \ln \dfrac{n}{n^3} = \ln n^{-2}$:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n^4-3)} \ln \frac{n+2}{3n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n^4} \ln n^{-2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2\ln n}{4\ln n} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que $L = e^{-1/2}$.

PROBLEMA 8.51.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{1/(1+\ln n)}.$$

Solución

Tomando logaritmos, tenemos:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\ln n} \ln \frac{n+1}{n^2+n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n^2+n+5)}{1+\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n(1+1/n) - \ln n^2(1+1/n+5/n^2)}{1+\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln(1+1/n) - 2\ln n - \ln(1+1/n+5/n^2)}{1+\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - 2\ln n}{1+\ln n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n) - \ln(1+1/n+5/n^2)}{1+\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{1+\ln n} + 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1/\ln n + 1} = -1 \Longrightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.52.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (2+3n^4)^{1/[3+2\ln(n+1)]}.$$

Solución

La indeterminación es en este caso del tipo ∞^0. Así pues:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+2\ln(n+1)} \ln(2+3n^4).$$

Teniendo en cuenta las equivalencias $\ln(2+3n^4) \sim \ln n^4$ y $\ln(n+1) \sim \ln n$, resulta:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{4\ln n}{3+2\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3/\ln n + 2} = 2.$$

Por tanto, $L = e^2$.

PROBLEMA 8.53.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = (1-1/2^2)(1-1/3^2)\dots(1-1/n^2).$$

Solución

Desarrollando cada factor y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\dots\frac{n^2-1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\dots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.54.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Solución

Si descomponemos cada fracción en fracciones simples tenemos:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \Longrightarrow 1 = A(k+1)+Bk.$$

Entonces $A = 1,\ B = -1$, de donde $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

Aplicando lo anterior a cada sumando de la sucesión dada tenemos:

$$a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Es evidente entonces que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

PROBLEMA 8.55.

Demostrar que $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Deducir de lo anterior que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Solución

Por ser $\ln n > 0$ y $n > 0$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \geq 0$.

Por otro lado, si llamamos $a_n = \ln n$, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{e^{a_n}} \leq \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{2^{a_n}} = \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{(1+1)^{a_n}} \\ &= \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{1 + \binom{a_n}{2} + \binom{a_n}{3} + \dots} \leq \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{\binom{a_n}{2}} \\ &= \lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n}{a_n(a_n-1)/2!} = \lim_{a_n\to\infty} \frac{2}{a_n - 1} = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba entonces que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Si ahora aplicamos la fórmula $a^b = e^{b \ln a}$, podemos calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = e^{\lim_{n\to\infty} 1/n \ln n} = e^0 = 1.$$

PROBLEMA 8.56.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[n]{n^{n+1}}(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Solución

Teniendo en cuenta la equivalencia $a^{1/n} - 1 \sim (1/n)\ln a$ y sabiendo que $\sqrt[n]{n} \to 1$, resulta:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} n^{(n+1)/n}(a^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n^{(n+1)/n}\frac{1}{n}\ln a \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{(n+1)/n} \cdot n^{-1} \cdot \ln a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\ln a = \ln a. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.57.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[n]{n^3 + an^2 + bn + c}.$$

Solución

Debido a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{(n-1)^3 + a(n-1)^2 + b(n-1) + c} = 1,$$

se deduce por el criterio del cociente-raíz que $L = 1$.

PROBLEMA 8.58.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[3n]{n^3 - 1}.$$

Solución

Por el mismo criterio anterior, si escribimos $\sqrt[3n]{n^3-1} = \left(\sqrt[n]{n^3-1}\right)^{1/3}$, como $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{(n-1)^3-1} = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3-1} = 1$. Por tanto, $L = 1$.

PROBLEMA 8.59.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}}.$$

Solución

Calculamos también el límite del cociente entre dos términos consecutivos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}}{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+n)}{n} = 1.$$

PROBLEMA 8.60.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[n]{n^{n+1}(\sqrt{a}-1)}.$$

Solución

Por el criterio del cociente-raíz, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}(\sqrt{a}-1)}{(n-1)^n(\sqrt{a}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = +\infty \cdot e = +\infty. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.61.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^{\ln n}}}{\ln a}.$$

Solución

Utilizamos el mismo criterio de los problemas anteriores y tenemos:

$$L = \frac{1}{\ln a} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \frac{1}{\ln a} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln n}}{(n-1)^{\ln(n-1)}}.$$

Teniendo en cuenta la equivalencia $\ln n \sim \ln(n-1)$, resulta:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\ln a} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\ln n} = \frac{1}{\ln a} e^{\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \frac{n-n+1}{n-1}} \\ &= \frac{1}{\ln a} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n-1}} = \frac{1}{\ln a} e^0 = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.62.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \sqrt[n]{(1+1/n)^p \dots (1+n/n)^p}.$$

Solución

Por el criterio del cociente-raíz nuevamente, resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^p \dots (1+n/n)^p}{[1+1/(n-1)]^p \dots [1+(n-1)/(n-1)]^p}.$$

Escribimos ahora

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{n-1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n\cdot n}{(n+1)(n-1)},\\
1+\frac{2}{n-1} &= \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{n\cdot(n+1)}{(n+2)(n-1)},\\
1+\frac{3}{n-1} &= \left(1+\frac{3}{n}\right)\frac{n\cdot(n+2)}{(n+3)(n-1)},\\
&\dots\\
1+\frac{n-2}{n-1} &= \left(1+\frac{n-2}{n}\right)\frac{n\cdot(2n-3)}{(2n-2)(n-1)},\\
1+\frac{n-1}{n-1} &= \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\frac{n\cdot(2n-2)}{(2n-1)(n-1)},
\end{aligned}
$$

y obtenemos

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)\dots(1+(n-1)/n)(1+n/n)}{(1+1/n)\frac{n\cdot n}{(n+1)(n-1)}\dots(1+(n-1)/n)\frac{n\cdot(2n-2)}{(n-1)(2n-1)}}\right]^p\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+n/n)}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\frac{n(n+1)\dots(2n-3)(2n-2)}{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)}}\right]^p\\
&= \left[\lim_{n\to\infty}(1+n/n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{2n-1}{n}\right]^p = (4e^{-1})^p = (4/e)^p.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 8.63.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}.$$

Solución

Por el criterio de la media aritmética

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

En general $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n-1)^p} = 1.$

PROBLEMA 8.64.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\ln(n!)}{n}.$$

Solución

Por el criterio de Stolz (o el de la media aritmética), tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

PROBLEMA 8.65.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3!} + \cdots + \sqrt[n]{n!}}{n^2}.$$

Solución

Aplicamos el criterio de Stolz y utilizamos la fórmula de Stirling:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3!} + \cdots + \sqrt[n]{n!} - (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3!} + \cdots + \sqrt[n-1]{(n-1)!})}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2 - n^2 + 2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e(2n-1)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2en - e} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{2\pi n}} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.66.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}}{\ln n!}.$$

Solución

Aplicamos el criterio de Stolz por dos veces:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\cdots+\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}-\left[\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\cdots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right]}{\ln n! - \ln(n-1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln[n!/(n-1)!]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right]}{\ln n - \ln(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln(n/n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln e} = 1.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.67.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln[\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{k})+1]}{\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{3k+2}}.$$

Solución

Aplicamos en primer lugar el criterio de Stolz:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln[\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{k})+1] - \sum_{k=1}^{n-1} \ln[\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{k})+1]}{\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{3k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} 1/\sqrt{3k+2}}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{arc\,tg} 1/\sqrt{n} \to 0$ y $\ln(u_n+1) \sim u_n$ cuando $u_n \to 0$, tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{n})+1]}{1/\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+2}{n}} = \sqrt{3}.$$

PROBLEMA 8.68.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Solución

Por el criterio de Stolz tenemos directamente:
$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}(n-n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.69.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}.$$

Solución

Nuevamente por el criterio de Stolz tenemos:
$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}-(n-1)^2\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}(n^2\sqrt{n}+(n-1)^2\sqrt{n-1})}{n^4\cdot n-(n-1)^4\cdot(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n(n-1)^2\sqrt{n^2-n}}{n^5-(n-1)^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+\sqrt{n^8+\dots}}{5n^4+\dots} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.70.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{\ln\left[\sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}\dots\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2}}\right]}{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen}(1/2) + \cdots + \operatorname{sen}(1/n)}.$$

Solución

Aplicamos el criterio de Stolz y tenemos en cuenta la equivalencia $\operatorname{sen} 1/n \sim 1/n$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt{1+\sqrt{2}} + \ln \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}} + \cdots + \ln \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2}}}{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen}(1/2) + \cdots + \operatorname{sen}(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2}}}{\operatorname{sen}(1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)\ln(1+2^{1/n})}{\operatorname{sen}(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)\ln(1+2^{1/n})}{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+2^{1/n}) = \ln 2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.71.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\ln 1 - \ln 2 + \ln 3 - \cdots + \ln(2n-1) - \ln(2n)}{\ln n}.$$

Solución

Por el criterio de Stolz y la equivalencia $\ln u_n \sim u_n - 1$, cuando $u_n \to 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n-1) - \ln(2n)}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n-1)/(2n)}{\ln n/(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{2n} - 1}{\frac{n}{n-1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.72.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}}.$$

Solución

Recordando que $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}$ y aplicando sucesivamente el criterio de Stolz, tenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(1+1)^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n-1-2^{n-1}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n-2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n(1-1/2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n-1)^2}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1-(2n-3)}{2^{n-2}-2^{n-3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^{n-3}} = 0.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.73.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}}.$$

Solución

Por el criterio de Stolz se obtiene directamente:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}-(n-1)^2\sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n^2+2n}(n^2\sqrt{n}+(n-1)^2\sqrt{n-1})}{n^5-(n-1)^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\ldots}(\sqrt{n^5}+\sqrt{n^5+\ldots})}{5n^4+\ldots} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.74.

Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, calcular

a) $L_1 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n}{n^2}$.

b) $L_2 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_1/1 + u_2/2 + \cdots + u_n/n}{\ln n}$.

Solución

a) Por el criterio de Stolz,

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{nu_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{a}{2}.$$

b) Si aplicamos nuevamente el criterio de Stolz,

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{u_n/n}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n \ln \frac{n}{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = a \cdot \frac{1}{\ln e} = a. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.75.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left[\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right].$$

Solución

Por el criterio de Stolz tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.76.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Solución

Tomando logaritmos, resulta:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} [2\ln n - \sqrt{n}] = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{2\ln n}{\sqrt{n}} - 1\right].$$

Aplicamos ahora el criterio de Stolz para resolver el límite de $c_n = \dfrac{2\ln n}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n - 2\ln(n-1)}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln\frac{n}{n-1}}{\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\ln\frac{n}{n-1} = 2\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n-1}} \\
&= 2\ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n-1}} = 2\ln e^0 = 0.
\end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}[c_n - 1] = -\infty.$$

y $L = e^{-\infty} = 0$.

PROBLEMA 8.77.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}.$$

Solución

Aplicando el criterio de Stolz tenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} [\ln n - \ln(n-1)][\ln n + \ln(n-1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln[n(n-1)] \ln \frac{n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \ln(n^2-n) \left(\frac{n}{n-1} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2-n)}{n-1}.
\end{aligned}$$

Aplicamos nuevamente el criterio de Stolz, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2-n) - \ln[(n-1)^2 - (n-1)]}{n-1-(n-2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^2-n}{n^2-3n+2} = \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.78.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = n(\cos x)^n,\ 0 < x < \pi/2.$$

Solución

En el intervalo $0 < x < \pi/2, 0 < \cos x < 1$ y $(\cos x)^n \to 0$, por lo que tenemos un límite indeterminado de la forma $\infty \cdot 0$. Resulta:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{n\to\infty} \ln n(\cos x)^n = \lim_{n\to\infty} [\ln n + n \ln \cos x] = \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{\ln n}{n} + \ln \cos x\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln n}{n} + \ln \cos x\right].
\end{aligned}$$

Por una parte, según el criterio de Stolz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{n-1} = 0.$$

Por otra parte, como $0 < \cos x < 1$, entonces $-\infty < \ln \cos x < 0$, con lo que

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln n}{n}+\ln\cos x\right]=k<0$ y

$$\ln L=\lim_{n\to\infty} n \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{n}+\ln\cos x\right]=+\infty\cdot k=-\infty.$$

En definitiva, $L=e^{-\infty}=0$.

PROBLEMA 8.79.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n\ln n}.$$

Solución

Aplicando el criterio de Stolz,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n\ln n-(n-1)\ln(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n^n-\ln(n-1)^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Como $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\to e$, $L=\frac{1}{1+0}=1$.

PROBLEMA 8.80.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}.$$

Solución

En primer lugar tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}.\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el criterio de Stolz y resulta:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n} - \ln \frac{n(n+1)\dots(n-1+n-1)}{(n-1)^{n-1}}}{n-(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n(n+1)\dots(2n-2)}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln \left[\frac{(2n-1)2n}{n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln \left[\frac{(2n-1)2n}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}\right] \\ &= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} + \ln \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \ln 4 + \ln e^{-1} = \ln(4e^{-1}).\end{aligned}$$

Queda por tanto, $L = 4e^{-1}$.

PROBLEMA 8.81.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \dots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{5^2 \cdot 6^3 \cdot 7^4 \dots (n+2)^{n-1} \cdot (n+3)^n}.$$

Solución

Agrupando términos y aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \dots \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ln \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \dots + \ln \left(\frac{n}{n+3}\right)^n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[2 \ln \frac{2}{5} + 3 \ln \frac{3}{6} + \dots + n \ln \frac{n}{n+3}\right].\end{aligned}$$

Aplicando ahora el criterio de Stolz, obtenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln \frac{n}{n+3}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{n}{n+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n}{n+3} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{n+3} = -3. \end{aligned}$$

> **PROBLEMA 8.82.**
>
> Calcular el límite de la sucesión de término general
> $$a_n = \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}}.$$

Solución

Tomamos logaritmos y aplicamos el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n} - \ln \binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\dots\binom{n-1}{n-1}}{n^2-(n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\dots\binom{n-1}{n-1}}}{n^2-(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Sabiendo que $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}} = \dfrac{n}{n-k}$ y $\dbinom{n}{n} = 1$, resulta:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\dots\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{1}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^n/n!)}{2n-1}.$$

Aplicamos ahora la fórmula de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^n - \ln\sqrt{2\pi n}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\sqrt{2\pi n}}{2n-1}. \end{aligned}$$

Volvemos a aplicar el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\sqrt{2\pi n} - \ln\sqrt{2\pi(n-1)}}{2n-1-(2n-3)} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(n-1)}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \ln\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $L = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

PROBLEMA 8.83.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n[2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots (2n-2)]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)]^2}.$$

Solución

Escribiremos la sucesión en términos de factoriales y aplicaremos la fórmula de Stirling:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2\ldots(n-1)\cdot 2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)\cdot 2n}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2^{n-1}(n-1)!\cdot 2\cdot 4\ldots 2n}{(2n)!}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot 2^n\cdot n!}{(2n)!}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2^{2n-1}\cdot(n-1)!\; n!}{(2n)!}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2^{2n-1}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}\cdot n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n-1)^{n-1}e\sqrt{\pi}\sqrt{n(n-1)}}{2n^n\sqrt{n}}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot e^2\pi^2 n(n-1)(n-1)^{2n-2}}{4\cdot n^{2n}\cdot n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{2n-1}e^2\pi^2}{4n^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-1}\frac{\pi^2 e^2}{4} \\
&= \frac{\pi^2 e^2}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-1} = \frac{\pi^2 e^2 e^{-2}}{4} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.84.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \binom{2n}{n} 4^{-n}\sqrt{n}.$$

Solución

Por la fórmula de Stirling, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\ 4^{-n}\sqrt{n}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\ 4^{-n}\sqrt{n}}{n^{2n}e^{-2n}\cdot 2\pi n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n^{2n} e^{-2n} 2n \cdot 4^{-n}\sqrt{\pi}}{n^{2n}e^{-2n}\cdot 2\pi n} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.85.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = n\left[\frac{2\cdot 4\dots(2n-2)}{1\cdot 3\dots(2n-1)}\right]^2.$$

Solución

Aplicando nuevamente la fórmula de Stirling,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\cdot\frac{(n-1)!\ 2^{n-1}}{\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}}\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}\cdot 2^{n-1}[(n-1)!]^2 2^{n-1}}{(2n-1)!}\right]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}\cdot 2^{2n-2}e^{-2n+2}(n-1)^{2n-2}[\sqrt{2\pi(n-1)}]^2}{e^{-2n+1}(2n-1)^{2n-1}\sqrt{2\pi(2n-1)}}\right]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}\cdot 2^{2n-2}e\cdot(n-1)^{2n-1}2\pi}{(2n-1)^{2n-1}\sqrt{2\pi(2n-1)}}\right]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{2n-1}(n-1)^{2n-1}}{(2n-1)^{2n-1}}\right]^2\cdot\frac{e^2 n\pi^2}{4\pi n-2\pi} \\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{2n-1}\right]^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^2 n\pi^2}{4\pi n-2\pi} \\ &= (e^{-1})^2\cdot e^2\frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.86.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}.$$

Solución

Utilizamos la fórmula de Stirling en el numerador y denominador:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}e^{-2n}n^{2n}2\pi n\sqrt{n}}{e^{-2n-1}(2n+1)^{2n+1}\sqrt{4\pi n+2\pi}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n^{2n}2\pi n\sqrt{n}}{e^{-1}(2n+1)^{2n+1}\sqrt{4\pi n+2\pi}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \cdot e \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{4\pi n+2\pi}} \\
&= e^{-1} \cdot e \cdot \frac{2\pi}{2\sqrt{4\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.87.

Calcular el límite de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{(2n!)^2\left(e^{n^n/(n!)^2}-1\right)}{n^n}.$$

Solución

Debido a que $A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = 0$, resulta la equivalencia de infinitésimos $e^{n^n/(n!)^2} - 1 \sim \frac{n^n}{(n!)^2}$. Luego

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n!)^2 n^n}{n^n(n!)^2} = 4.$$

PROBLEMA 8.88.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Solución

Si aplicamos la fórmula de Stirling, tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot e^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}{n} = \lim_{n\to\infty} e^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}.$$

Ahora bien, como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$, resulta que $L = e^{-1}$.

PROBLEMA 8.89.

Calcular el límite de la sucesión de término general
$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}[(2n)!]}.$$

Solución

Aplicando la fórmula de Stirling tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{\sqrt{n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi(2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\cdot 2\pi n}{\sqrt{n}\cdot 2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n}{\sqrt{n}\cdot 2\sqrt{\pi}\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8.90.

Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 2,\ a_n = 5a_{n-1} + 3$, calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{5^n}$.

Solución

Vamos a obtener el término general de la sucesión dando valores a n:

$$\begin{aligned}
& a_n = 5a_{n-1} + 3;\\
a_{n-1} = 5a_{n-2} + 3 \Longrightarrow \quad & 5a_{n-1} = 5^2 a_{n-2} + 5 \cdot 3;\\
a_{n-2} = 5a_{n-3} + 3 \Longrightarrow \quad & 5^2 a_{n-2} = 5^3 a_{n-3} + 5^2 \cdot 3;\\
\dots \quad & \\
a_3 = 5a_2 + 3 \Longrightarrow \quad & 5^{n-3} a_3 = 5^{n-2} a_2 + 5^{n-3} \cdot 3;\\
a_2 = 5a_1 + 3 \Longrightarrow \quad & 5^{n-2} a_2 = 5^{n-1} a_1 + 5^{n-2} \cdot 3.
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, $a_n = 5^{n-1}a_1 + 3(5^{n-2} + \dots + 5^2 + 5 + 1)$.

El último paréntesis corresponde a la suma de los términos de una progresión geométrica, con lo que

$$a_n = 5^{n-1} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} = \frac{11 \cdot 5^{n-1} - 3}{4}.$$

Entonces,

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{5^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{11 \cdot 5^{n-1} - 3}{4 \cdot 5^n} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{11}{20} - \frac{3}{4 \cdot 5^n} \right] = \frac{11}{20}.$$

B. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Calcular el límite de las sucesiones de término general

1.- $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$.

Resp.: $L = e^2$.

2.- $a_n = \left[\dfrac{3n^2-2}{3n^2-1}\right]^{pn^2-1}$.

Resp.: $L = -p/3$.

3.- $a_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

Resp.: $L = 4$.

4.- $a_n = \dfrac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2+1}$.

Resp.: $L = 8$.

5.- $a_n = \dfrac{n^\pi - 2n(4n-n^3)}{5-n^3} \cdot \dfrac{1+n^{-1}}{1+n}$.

Resp.: $L = -2$.

6.- $a_n = \sqrt[3]{n^3+an^2} - \sqrt[3]{n^3-an^2}$.

Resp.: $L = 2a/3$.

7.- $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{n\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n^3-\sqrt{n}}}$.

Resp.: $L = 0$.

8.- $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos(\operatorname{tg} n)}{n!}$.

Resp.: $L = 0$.

9.- $a_n = n \operatorname{sen}(\pi/n)$.

Resp.: $L = \pi$.

10.- $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$.

Resp.: $L = 1$.

11.- $a_n = (4n+3)\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$.

Resp.: $L = -4$.

12.- $a_n = \left(\dfrac{5n+2}{15n-4}\right)^{\frac{3n+4}{9n-5}}$.

Resp.: $L = 1/\sqrt[3]{3}$.

13.- $a_n = \sqrt[n^2]{n!}$

Resp.: $L = 0$.

14.- $a_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$.

Resp.: $L = 4/e$.

15.- $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Resp.: $L = 1/e$.

16.- $a_n = \dfrac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}}$, $(m > -1)$.

Resp.: $L = 1/(1+m)$.

17.- $a_n = \sqrt{2\sqrt{2\dots\sqrt{2}}}$ (n veces).

Resp.: $L = 2$.

18.- $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}$ (n veces).

Resp.: $L = 2$.

19.- $a_n = \dfrac{1 + \sqrt{2!} + \sqrt[3]{3!} + \cdots + \sqrt[n]{n!}}{n^2}$.

Resp.: $L = 1/e$.

20.- $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Resp.: $L = 1$.