

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538 3

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В МЕТАЛЛАХ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э. А. Канер, В. Г. Скобов

§ 1. Введение

Характерной особенностью металлов является их высокая электропроводность, которая обусловлена очень большой концентрацией носителей тока — электронов проводимости. Вследствие этого долгое время существовало мнение, что низкочастотные электромагнитные возбуждения в металлах распространяться не могут. Это объясняется следующими причинами.

Электромагнитное поле в металле определяется уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1,1)$$

Здесь \mathbf{E} — вектор высокочастотного электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{j} — вектор плотности тока, c — скорость света. Исключим переменное магнитное поле из уравнений (1,1). Тогда для монохроматической плоской волны в безграничном металле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \quad (1,2)$$

уравнения Максвелла приобретают вид

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}. \quad (1,3)$$

Здесь \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота волны, $\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$ — фурье-компонента высокочастотной проводимости.

В области высоких частот ($\omega \gg kv$) пространственная дисперсия не играет роли и $\hat{\sigma}$ не зависит от \mathbf{k} :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m(\nu - i\omega)}, \quad (1,4)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона, m — эффективная масса, n — концентрация электронов проводимости, ν — частота их столкновений с рассеивателями.

Подставляя (1,4) в (1,3) и полагая $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, нетрудно получить дисперсионное уравнение для электромагнитных волн:

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_0^2, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}, \quad \nu \ll \omega, \quad (1,5)$$

ω_0 — плазменная частота металла.

Очевидно, что это уравнение не имеет вещественных решений при $\omega < \omega_0$. Другими словами, для частот ω , меньших плазменной

частоты ω_0 , эффективная диэлектрическая проницаемость оказывается отрицательной и собственные электромагнитные колебания в металле отсутствуют (внешняя волна испытывает полное отражение).

Для типичных металлов $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$. Нам же в дальнейшем будут интересовать электромагнитные волны радиочастотного диапазона. Частоты этих волн удовлетворяют условию

$$\omega \ll \omega_0. \quad (1,6)$$

Поэтому в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения $\omega\mathbf{E}/4\pi i$ по сравнению с током проводимости $\hat{\sigma}\mathbf{E}$. При этом (1,3) переходит в

$$k^2\mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \hat{\sigma}\mathbf{E}. \quad (1,7)$$

При комнатных температурах частота ν столкновений электронов проводимости с рассеивателями порядка 10^{13} сек^{-1} . В случае $\omega \ll \nu$ проводимость металла σ (1,4) является вещественной. Это означает, что электрическое поле в металле приводит к появлению большого диссипативного тока проводимости. Решения дисперсионного уравнения

$$k^2 c^2 = i \cdot 4\pi\omega\sigma \quad (1,8)$$

в этом случае являются комплексными, а собственных электромагнитных колебаний по-прежнему не существует. Падающая же на поверхность металла внешняя электромагнитная волна затухает на расстояниях порядка $10^{-3} - 10^{-5} \text{ см}$ от поверхности. Это явление известно под названием скин-эффекта (см., например, ¹).

При низких температурах длина свободного пробега электронов проводимости l в чистых металлах достигает величины порядка сантиметра. Поэтому в случае не слишком низких частот ω становится существенной пространственная дисперсия ($kl \gg 1$). При этом проводимость металла σ оказывается вещественной, но зависящей от величины волнового вектора k . Основной вклад в σ в этом случае дают те электроны на поверхности Ферми, для которых выполняется условие

$$kv = \omega, \quad (1,9)$$

где v — скорость электрона. Эти электроны движутся в фазе с волной, наиболее сильно с ней взаимодействуют ² и обуславливают поглощение электромагнитной волны. Такой механизм затухания получил в литературе название затухания Ландау. Благодаря этому механизму в рассматриваемом случае электромагнитные волны в металле не могут распространяться. Внешняя же волна проникает лишь на глубину порядка $10^{-4} - 10^{-5} \text{ см}$. Поскольку глубина проникновения поля в данном случае мала по сравнению с длиной пробега носителей ($kl \gg 1$), то это явление носит название аномального скин-эффекта. Его теория была построена Рейтером и Зондхеймером ³.

Таким образом, в отсутствие постоянного магнитного поля в металлах не существует незатухающих электромагнитных волн.

Константинов и Перель ⁴, а также Эгрейн ⁵ впервые обратили внимание на то, что радиоволна может проникать в глубь металла, если имеется сильное постоянное магнитное поле \mathbf{H} , направленное по нормали к поверхности кристалла. В магнитном поле проводимость $\hat{\sigma}$ является тензором, элементы которого имеют существенно различную природу. Если спектр электронов проводимости является изотропным, то при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H} \parallel Oz$ из соображений симметрии следует, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \quad (1,10)$$

Поэтому распространение электромагнитной волны определяется только поперечными элементами тензора проводимости.

В области сильных магнитных полей H , удовлетворяющих неравенствам

$$|v - i\omega| \ll \Omega, \quad (1,11)$$

$$kR \ll 1, \quad (1,12)$$

где $\Omega = eH/mc$ — циклотронная частота носителей, $R = v/\Omega$ — ларморовский радиус, пространственная дисперсия не оказывает влияния на поперечную проводимость даже при $kl \gg 1$, так как при параллельных векторах \mathbf{k} и \mathbf{H} пространственная дисперсия в плоскости xy отсутствует.

В случае одной группы носителей поперечные элементы тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ имеют вид ⁴

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{ne^2}{H}, \quad (1,13)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{ne^2(v - i\omega)}{m\Omega^2}. \quad (1,14)$$

Очевидно, что недиссипативная холловская проводимость σ_{xy} значительно больше эрмитовой части проводимости $\text{Re } \sigma_{xx}$, определяющей поглощение электромагнитного поля.

Для циркулярно-поляризованных величин

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y \quad (1,15)$$

уравнения Максвелла (1,7) приобретают вид

$$(k^2 \mp 4\pi\omega c^{-2}\sigma_{\pm})E_{\pm} = 0, \quad \sigma_{\pm} = \sigma_{xy} \pm i\sigma_{xx}. \quad (1,16)$$

Подставляя в (1,16) выражения (1,13) и (1,14), нетрудно найти спектр электромагнитных волн ⁴:

$$\omega_{\pm} = \mp \frac{k^2 c H}{4\pi n e} \left(1 \pm i \frac{v}{\Omega} \right). \quad (1,17)$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость для волны с поляризацией плюс отрицательна. Следовательно, эта волна обладает мнимым волновым вектором и затухает на расстоянии, равном длине волны. Эффективная диэлектрическая проницаемость для волны с поляризацией минус положительна, и эта волна является слабо затухающей. Относительное затухание ее равно v/Ω и уменьшается с ростом магнитного поля. Эта волна получила название спиральной электромагнитной волны. Возбуждения подобного типа при $kl \ll 1$ хорошо известны в магнитоактивной плазме ⁶. Низкочастотные спиральные волны в металлах при $kl \ll 1$ исследовались также в работах ^{7, 8}.

Бухсбаум и Голт ⁹ показали, что вдоль направления постоянного магнитного поля \mathbf{H} в висмуте могут распространяться альвееновские электромагнитные волны. В висмуте имеются электроны и «дырки» с одинаковыми концентрациями ($n_1 = n_2$). Вследствие этого холловская проводимость σ_{xy} равна нулю. Диагональные же элементы поперечной проводимости при выполнении условий (1,11) и (1,12) представляют собой сумму двух членов типа (1,14), т. е.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = n(m_1 + m_2)c^2H^{-2}(v - i\omega), \quad (1,18)$$

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1,19)$$

Индекс 1 относится к электронам, а индекс 2 — к «дыркам».

Подставляя (1,18) в (1,7), легко показать, что при условии

$$\omega \gg \nu \quad (1,20)$$

в металле имеются две слабо затухающие волны, спектр которых определяется формулой⁹

$$\omega = kv_a - \frac{i\nu}{2}, \quad (1,21)$$

где

$$v_a = H [4\pi n (m_1 + m_2)]^{-1/2} \quad (1,22)$$

— альвеновская скорость носителей.

Следует подчеркнуть, что результаты Константинова и Переля⁴, а также Бухсбаума и Голта⁹ справедливы только в том случае, если векторы \mathbf{k} и \mathbf{H} параллельны и направлены вдоль оси симметрии высокого порядка (частный случай — изотропный закон дисперсии носителей). Если же векторы \mathbf{k} и \mathbf{H} направлены под углом друг к другу или если их направление не совпадает с осью симметрии кристалла, то становится существенной пространственная дисперсия и возникает затухание Ландау. При этом ситуация становится более сложной, и возможность существования слабо затухающих волн не является очевидной.

В последние годы в ряде теоретических и экспериментальных работ было показано, что при низких температурах и при наличии магнитного поля в металлах существуют различные электромагнитные волны. Помимо разнообразных волн, длина которых много больше размеров электронных орбит ($kR \ll 1$), в металлах могут распространяться короткие волны с длинами, малыми по сравнению с характерными размерами орбит ($kR \gg 1$). В настоящем обзоре суммированы результаты всех этих исследований*).

С точки зрения современных представлений теории твердого тела электромагнитные волны являются коллективными колебаниями электронно-«дырочной» плазмы металла. Они представляют собой электромагнитную ветвь длинноволновых возбуждений бозевского типа. Общая причина существования этих возбуждений состоит в том, что движение электронов в перпендикулярной магнитному полю \mathbf{H} плоскости является финитным. Вращение электронов в магнитном поле приводит к сильному уменьшению диссипативных токов. В результате антиэрмитова часть тензора проводимости может оказаться большей по сравнению с диссипативной эрмитовой частью. При этом антиэрмитова часть проводимости (дизлектрическая проницаемость) определяет спектр собственных электромагнитных колебаний в металле, а эрмитова часть — затухание. Малость последней обеспечивает сравнительно слабое затухание волн.

Из общих соображений вытекает, что закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ электромагнитных волн определяется лишь свойствами энергетического спектра электронов, т. е. формой и топологией поверхности Ферми. Время релаксации в первом приближении не входит в закон дисперсии и может влиять только на затухание волн. Так как длины всех электромагнитных волн велики по сравнению с межатомами расстояниями, величина фазового объема этих волн мала. Поэтому они не дают заметного вклада в термодинамику, но оказывают существенное влияние на высокочастотные свойства металлов. Наличие незатухающих электромагнитных волн приводит к аномальной прозрачности металла и к возникновению ряда новых резонансных эффектов.

*) Некоторые результаты по длинноволновым возбуждениям приведены в обзоре Веденова¹⁰.

§ 2. Общая формулировка задачи.
Дисперсионное уравнение

Как было отмечено во введении, в случае низких частот (1,6) можно пренебречь током смещения и уравнения Максвелла для плоской монохроматической волны в безграничном металле имеют вид (1,7). Оператор $\hat{\sigma}$ в этих уравнениях представляет собой тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H})$ с учетом пространственной и временной дисперсии и зависимости от постоянного магнитного поля \mathbf{H} . Из (1,7) следует соотношение

$$\mathbf{kj} = k_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}E_{\beta} = 0, \tag{2,1}$$

которое тождественно условию электрической квазинейтральности металла $\rho' = 0$, где ρ' — нескомпенсированная объемная плотность заряда. По дважды встречающимся векторным индексам α, β в (2,1) подразумевается суммирование.

Выберем систему координат $x y z$ так, чтобы ось z была направлена вдоль магнитного поля \mathbf{H} , а ось x — поперек \mathbf{k} и \mathbf{H} . В дальнейшем нам потребуются еще система $x \eta \zeta$, в которой ось ζ параллельна вектору \mathbf{k} . Угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H} есть Φ :

$$k_x = 0, \quad k_y = k \sin \Phi, \quad k_z = k \cos \Phi. \tag{2,2}$$

Спектр, затухание и поляризация собственных колебаний поля определяются из однородной системы уравнений (1,7). Дисперсионное уравнение получается в результате приравнивания нулю определителя этой системы. Оно может быть записано в форме

$$\left(\frac{k^2 c^2}{4\pi\omega}\right)^2 - \text{Det } \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} - i \frac{k^2 c^2}{4\pi\omega} \text{Sp } \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = 0, \tag{2,3}$$

где

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \frac{(\sigma_{\alpha\alpha'} k_{\alpha'}) (k_{\beta'} \sigma_{\beta'\beta})}{k_{\gamma} \sigma_{\gamma\delta} k_{\delta}} \tag{2,4}$$

— «перенормированный» двумерный тензор проводимости.

Элементы тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ должны быть найдены с помощью кинетического уравнения для электронной функции распределения

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \hat{I}(F) = 0. \tag{2,5}$$

Здесь \mathbf{p} — квазиимпульс электрона, $\hat{I}(F)$ — оператор столкновений.

Решение уравнения (2,5) будем искать в форме

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\varepsilon) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_F}, \tag{2,6}$$

где

$$f_0(\varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}\right) + 1 \right]^{-1} \tag{2,7}$$

— функция распределения Ферми, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ — энергия электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} , ε_F — энергия Ферми, T — температура в энергетических единицах.

В линейном по \mathbf{E} приближении функция χ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) + \nu + \Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \right\} \chi = e\mathbf{E}\mathbf{v}, \tag{2,8}$$

при получении которого из (2,5) мы учли, что, согласно Лифшицу, Азбелю и Каганову¹¹,

$$\frac{e}{c} \left[\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] \mathbf{H} = \Omega \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Здесь $\tau = \Omega t$ — безразмерное время движения (фаза) электрона по орбите в магнитном поле, $\Omega = eH/mc$ — циклотронная частота,

$$m = (2\pi)^{-1} \frac{\partial S(\varepsilon, p_z)}{\partial \varepsilon}$$

— эффективная масса, $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$ плоскостью $p_z = \text{const}$. Интеграл столкновений мы взяли в форме

$$\hat{I}(F) = \mathbf{v}(F - f_0(\varepsilon)). \quad (2,9)$$

Решение уравнения (2,8), периодическое по τ с периодом 2π , имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon, p_z, \tau) = & \frac{e\mathbf{E}}{\Omega(\varepsilon, p_z)} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \mathbf{v}(\varepsilon, p_z, \tau') \times \\ & \times \exp \left[\frac{(\mathbf{v} - i\omega)(\tau' - \tau)}{\Omega(\varepsilon, p_z)} + \frac{i\mathbf{k}}{\Omega(\varepsilon, p_z)} \int_{\tau}^{\tau'} \mathbf{v}(\varepsilon, p_z, \tau'') d\tau'' \right]. \quad (2,10) \end{aligned}$$

Плотность тока проводимости определяется формулой

$$\mathbf{j} = - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \mathbf{v} F = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_F} \mathbf{v} \chi, \quad (2,11)$$

где \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π . Производя в (2,11) замену переменных интегрирования:

$$\int d^3p \dots = \int_0^{\infty} d\varepsilon \int_{-p_{z \max}(\varepsilon)}^{p_{z \max}(\varepsilon)} dp_z \int_0^{2\pi} d\tau \dots, \quad (2,12)$$

получим следующую формулу для тензора проводимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = & \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_F} \int_{-p_{z \max}}^{p_{z \max}} dp_z \times \\ & \times \frac{m(\varepsilon, p_z)}{\Omega(\varepsilon, p_z)} \int_0^{2\pi} d\tau v_{\alpha}(\varepsilon, p_z, \tau) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' v_{\beta}(\varepsilon, p_z, \tau') \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{\Omega(\varepsilon, p_z)} \int_{\tau}^{\tau'} [\mathbf{v} - i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v}(\varepsilon, p_z, \tau'')] d\tau'' \right\}. \quad (2,13) \end{aligned}$$

Зависимость тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ (2,13) от \mathbf{k} , ω и \mathbf{H} является крайне сложной, и дисперсионное уравнение (2,3) не может быть решено в общем виде. В дальнейшем мы исследуем решения уравнения (2,3), используя асимптотические выражения тензора проводимости (2,13) в различных предельных случаях.

I. ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ ($kR \ll 1$)

§ 3. Спиральные волны (изотропный случай)

а) Слабая пространственная дисперсия. Рассмотрим сначала наиболее простой случай низких частот и сильного магнитного поля, когда пространственная дисперсия не играет роли, т. е.

$$kv \ll v \ll \Omega. \quad (3,1)$$

При выполнении этих неравенств временная дисперсия также несущественна ($\omega \ll v$). Поэтому тензор проводимости металла со сферической поверхностью Ферми имеет вид ¹¹ (в системе координат xuz)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{nc}{H} \begin{pmatrix} \frac{v}{\Omega} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{v}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Omega}{v} \end{pmatrix}. \quad (3,2)$$

После несложных преобразований двумерный тензор поперечной проводимости $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ приводится к виду

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{nc}{H \cos \Phi} \begin{pmatrix} \frac{v}{\Omega \cos \Phi} & -1 \\ 1 & \frac{v}{\Omega \cos \Phi} \end{pmatrix}. \quad (3,3)$$

Формула (3,3) справедлива при всех значениях угла Φ , за исключением малой окрестности $\Phi = \pi/2$ ($\text{ctg}^2 \Phi \gg v^2/\Omega^2$). Подставляя (3,3) в дисперсионное уравнение (2,3), получаем спектр и затухание электромагнитных волн в рассматриваемом случае. Так же, как и при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$, одно решение обладает мнимым волновым вектором. Второе решение дает слабо затухающую волну

$$\omega = \frac{k^2 c H \cos \Phi}{4\pi n e} (1 - i\Gamma), \quad (3,4)$$

$$\Gamma = \frac{v}{\Omega \cos \Phi}. \quad (3,5)$$

Спектр волны определяется недиссипативной холловской проводимостью, а ее затухание — диссипативной ($\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{\eta\eta}$). Используя уравнения Максвелла (1,7), легко показать, что вектор электрического поля в волне эллиптически поляризован в плоскости, перпендикулярной магнитному полю \mathbf{H} :

$$E_y = iE_x \sec \Phi, \quad E_z = 0. \quad (3,6)$$

Поперечная относительно волнового вектора \mathbf{k} часть поля \mathbf{E} поляризована по кругу. По этой причине волна (3,4) — (3,6) получила название спиральной (геликоидальной). Существование этих волн в магнитно-активной плазме было открыто Гинзбургом ⁶ и Пиддингтоном (спиральные волны в ионосфере известны под названием «свистящие атмосферники»). На возможность их распространения в металлах указали Константинов и Перель ⁴ и Эгрейн ⁵.

Существование незатухающей спиральной волны (3,4) в пределе $\nu \rightarrow 0$ обусловлено тем, что холловский ток

$$\mathbf{j}_H = \frac{nc}{H^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (3,7)$$

ортогонален электрическому полю \mathbf{E} . Следовательно, джоулевы потери, т. е. затухание волны, исчезают при $\nu \rightarrow 0$.

Для типичных металлов с концентрацией электронов порядка единицы на атом при низких температурах, когда $\nu \sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$, условия (3,4) хорошо выполняются в полях $H \gtrsim 10^3$ э при частотах $\omega \lesssim 10^2 \text{ сек}^{-1}$.

б) Сильная пространственная дисперсия. В области более высоких частот длина электромагнитной волны становится меньше длины свободного пробега электронов и пространственная дисперсия начинает играть важную роль. В предельном случае

$$|\nu - i\omega| \ll kv \ll \Omega \quad (3,8)$$

появляется черенковское поглощение волны электронами, движущимися с ней в фазе (затухание Ландау). Асимптотическое поведение элементов тензора проводимости в этом случае существенно отличается от (3,2). Согласно ¹², выражение для $\sigma_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{nc}{H} \begin{pmatrix} \frac{\nu - i\omega}{\Omega} + \frac{3\pi}{8} k_z R \operatorname{tg}^2 \Phi & -1 & \operatorname{tg} \Phi \\ 1 & \frac{\nu - i\omega}{\Omega} & 0 \\ -\operatorname{tg} \Phi & 0 & 3 \frac{\nu - i\omega}{\Omega (k_z R)^2} \end{pmatrix}. \quad (3,9)$$

(α, β = x, y, z)

Отличие от случая (3,2) состоит прежде всего в изменении величины и направления высокочастотного холловского тока

$$\mathbf{j}_H = \frac{nc}{kH} [\mathbf{k} \mathbf{E}], \quad (3,10)$$

который теперь оказывается ортогональным векторам \mathbf{k} и \mathbf{E} , а не \mathbf{H} и \mathbf{E} . Далее, вследствие сильной пространственной неоднородности поля волны вдоль направления \mathbf{H} продольная проводимость σ_{zz} уменьшается в $|k_z \nu / (\nu - i\omega)|^2$ раз. Наконец, третье отличие от (3,2) состоит в появлении черенковского поглощения волны. Электроны, для которых выполняется условие

$$k\bar{\nu} = \omega, \quad (3,11)$$

в среднем движутся в фазе с волной и наиболее эффективно с ней взаимодействуют (черта над ν в (3,11) означает усреднение по периоду вращения электрона в магнитном поле). Изменение импульса этих электронов под действием волны вызывает их дрейф поперек векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} , т. е. в направлении оси x . В результате эрмитова часть проводимости σ_{xx} приобретает дополнительное слагаемое

$$\frac{3\pi}{8} \frac{nc}{H} k_z R \operatorname{tg}^2 \Phi. \quad (3,12)$$

Величина этого слагаемого порядка $\sigma_0 (kR)^2$, где

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{mkv}$$

— связанная с затуханием Ландау проводимость в отсутствие магнитного поля. Такое уменьшение затухания Ландау объясняется тем, что вращение

электронов в магнитном поле не позволяет им двигаться строго в фазе с волной. На противоположных участках орбиты электрона электрическое поле волны действует на него противоположным образом. Однако вследствие небольшого сдвига фазы значения поля E в пределах орбиты отличаются на величину порядка $kR \ll 1$. В итоге действие электрического поля на разных участках компенсируется с точностью до членов порядка $(kR)^2$. Столь сильное уменьшение черенковского поглощения приводит к тому, что диссипативная проводимость σ_{xx} , определяющая затухание волны, оказывается много меньше недиссипативной холловской проводимости, которая характеризует спектр. Это и обуславливает возможность распространения слабо затухающей волны в условиях сильной пространственной дисперсии (3,8).

Из асимптотических формул (3,9) следует, что элемент $\sigma_{x\xi} = 0$ и $\tilde{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}$. Выражения же для элементов $\tilde{\sigma}_{x\eta}$ и $\tilde{\sigma}_{\eta\eta}$, как показывают вычисления, по-прежнему определяются формулами (3,3). Поэтому спектр и поляризация спиральной волны не изменяются, а ее затухание Γ теперь имеет вид ¹²

$$\Gamma = \frac{v}{\Omega} \sec \Phi + \frac{3\pi}{16} kR \sin^2 \Phi. \quad (3,13)$$

Подчеркнем, что затухание Ландау существенно зависит от угла между векторами k и H и исчезает при $\Phi = 0$. При поперечном распространении $\Phi = \pi/2$ ($\cos \Phi \ll v/\Omega$) спиральные волны отсутствуют.

Таким образом, область существования спиральной волны определяется условиями

$$\omega, v, kv \ll \Omega. \quad (3,14)$$

Ее спектр и поляризация определяются формулами (3,4) и (3,6) вне зависимости от соотношения между длиной волны $2\pi/k$ и длиной свободного пробега электронов $l = v/v$. Отличие случая сильной пространственной дисперсии (3,8) от (3,1) состоит в появлении затухания Ландау.

Выражая k через ω , наиболее жесткое условие $kR \ll 1$ можно переписать в виде

$$\frac{\omega}{\Omega} \ll \frac{v_a^2}{v^2}. \quad (3,15)$$

Отсюда следует, что максимальная частота спиральной волны возрастает пропорционально кубу магнитного поля.

§ 4. Магнитогидродинамические волны (изотропный случай)

Исследуем вопрос о возможности распространения электромагнитных волн в металлах с равными концентрациями электронов и «дырок» ($n_1 = n_2 = n$). Здесь может быть реализовано несколько различных случаев.

а) Слабая пространственная дисперсия. Рассмотрим сначала наиболее простой предельный случай сильных магнитных полей, когда выполняются неравенства

$$kv_s \ll \omega \ll \Omega_s \quad (s = 1, 2). \quad (4,1)$$

В этом случае пространственная дисперсия роли не играет, и в общем выражении (2,13) для тензора проводимости можно положить $k = 0$. Вследствие условия компенсации $n_1 = n_2$ холловская проводимость равна нулю, и тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ является диагональным. Элементы поперечной

проводимости определяются формулами (1,18), (1,19), а продольная проводимость

$$\sigma_{zz} = \sum_{s=1}^2 \frac{ne^2}{m_s(v_s - i\omega)} \quad (4,2)$$

имеет такой же вид, как и в отсутствие магнитного поля.

В рассматриваемом случае тензор проводимости имеет весьма простой вид, и для определения спектра собственных электромагнитных колебаний можно непосредственно воспользоваться уравнениями Максвелла (1,7). Поскольку продольная проводимость σ_{zz} значительно больше поперечной, то в уравнениях (1,7) можно положить $E_z = 0$. Подставляя (1,18) в (1,7), получим:

$$\begin{aligned} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{iv}{\omega} \right) \right] E_x &= 0, \\ \left[k_z^2 - \frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{iv}{\omega} \right) \right] E_y &= 0, \end{aligned} \quad (4,3)$$

где v_a определяется формулой (1,22).

Эти уравнения показывают, что в случае $v \ll \omega$ в металле имеются две слабо затухающие электромагнитные волны. Электрическое поле в одной из волн направлено вдоль оси x , а в другой — вдоль оси y .

Спектр и затухание первой волны определяются формулой (1,21). Закон же дисперсии второй волны имеет вид ¹²

$$\omega = k_z v_a - i \frac{v}{2}. \quad (4,4)$$

Волна (4,4) с фазовой скоростью $v_a \cos \Phi$ аналогична альвеновской волне в плазме. Волна же (1,21), в которой электрическое поле направлено поперек векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} (вдоль оси x), является аналогом быстрой магнитозвуковой волны. При этом следует подчеркнуть, что волны (1,21) и (4,4) могут распространяться в металлах лишь при $v \ll \omega$, т. е. в условиях, прямо противоположных тем, которые имеются в магнитной гидродинамике:

$$\omega \ll v, \quad \Omega \ll v. \quad (4,5)$$

Однако, несмотря на различия в условиях существования волн в металлах и в магнитной гидродинамике, ввиду сходства их спектров мы будем называть волны (1,21) и (4,4) магнитогидродинамическими *). Иногда их еще называют магнитоплазменными волнами.

Помимо альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в магнитной гидродинамике существует еще медленная магнитозвуковая волна. В случае сильного магнитного поля, когда альвеновская скорость значительно больше скорости звука, фазовая скорость этой волны порядка звуковой. Благодаря фермиевской статистике носителей тока роль скорости звука в электронно-«дырочной» плазме металла может играть лишь скорость Ферми. Поэтому в рассматриваемом предельном случае $k v_s \ll \omega$ эта волна отсутствует (для исследования характера спектра этой волны неприменима асимптотика тензора проводимости в случае (4,1)).

Выражая волновой вектор k с помощью (4,4) через ω , перепишем условия (4,1) и (1,20), определяющие область существования слабо

*) Здесь имеется полная аналогия с обычной плазмой, в которой магнитогидродинамические волны существуют и при $v \rightarrow 0$ (см., например, § 14 в 6).

затухающих волн (1,21) и (4,4), в виде

$$v_s \ll \omega \ll \Omega_s, \quad (4,6)$$

$$v_s \ll v_a \quad (s = 1, 2). \quad (4,7)$$

При поперечном распространении $\Phi = \pi/2$ альвеновская волна отсутствует.

В обычных металлах ($n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$) условие (4,7) может быть выполнено лишь в очень сильных магнитных полях — порядка нескольких миллионов эрстед. В висмуте $n \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и условие (4,7) выполняется уже при $H \gtrsim 10^3 \text{ э}$. На возможность распространения альвеновских волн в висмуте при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ впервые указали Бухсбаум и Голт⁹.

б) С и л ь н а я п р о с т р а н с т в е н н а я д и с п е р с и я. Рассмотрим вопрос о возможности распространения магнитогидродинамических волн в металлах с $n_1 = n_2$ в случае не слишком сильных магнитных полей, удовлетворяющих условиям:

$$v_a \ll v_s, \quad (4,8)$$

$$v_s \ll \omega \ll kv_s \ll \Omega_s. \quad (4,9)$$

Магнитозвуковые волны в плазме при

$$v_a \ll w_0 \quad (4,10)$$

(w_0 — скорость звука) имеют следующий спектр:

$$\omega_+ = kw_0, \quad \omega_- = kv_a, \quad (4,11)$$

где индекс плюс относится к быстрой волне, а индекс минус — к медленной.

Поскольку роль скорости звука в вырожденной электронно-«дырочной» плазме металла может играть лишь скорость Ферми, то быстрая магнитозвуковая волна не удовлетворяет условиям (4,9) (для этой волны $\omega \sim kv$). Поэтому с помощью асимптотического выражения $\sigma_{\alpha\beta}$ в случае (4,8), (4,9) могут быть получены лишь альвеновская и медленная магнитозвуковая волны.

Асимптотическое выражение электронной части тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ в случае (4,9) имеет вид (3,9). Выражение для «дырочной» части тензора проводимости может быть получено из (3,9) путем замены электронных характеристик «дырочными».

Поскольку недиагональные элементы электронной и «дырочной» частей отличаются лишь знаком, то суммарный тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ в системе координат $x y z$ является диагональным. Подчеркнем, что равенство нулю (малость) всех недиагональных элементов тензора проводимости является следствием условия компенсации $n_1 = n_2$ и изотропии закона дисперсии носителей. В дальнейшем будет показано, что вывод о диагональности $\sigma_{\alpha\beta}$ в случае (4,9) справедлив и при произвольном законе дисперсии носителей, если магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль оси симметрии кристалла.

Благодаря диагональности тензора проводимости и условию (2,1) величина z -компоненты электрического поля в альвеновской волне пренебрежимо мала:

$$\left| \frac{E_z}{E_y} \right| \sim \left| \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{zz}} \right| \ll 1.$$

Поэтому спектр этой волны по-прежнему определяется формулой (4,4).

Элемент σ_{xx} при $\Phi \sim 1$ является вещественным, что обусловлено пространственной дисперсией (величина σ_{xx} связана с затуханием Ландау).

Поэтому вторая волна, электрическое поле в которой поляризовано по оси x , в случае (4,8), (4,9) является быстро затухающей. При $\Phi = 0$ затухание Ландау отсутствует, и спектр медленной магнитозвуковой волны совпадает со спектром альвеновской:

$$\omega_- = kv_a.$$

Для решения вопроса о существовании в металле в случае (4,8), (4,9) волны, аналогичной быстрой магнитозвуковой волне в магнитной гидродинамике, необходимо иметь выражение для тензора проводимости при

$$|k_z v| \ll \omega. \quad (4,12)$$

Заметим, что при $|k_z v| > \omega$ возникает сильное затухание Ландау, которое препятствует распространению волны.

В случае (4,12) дисперсионное уравнение для волны, поляризованной вдоль оси x , является крайне сложным и не может быть решено аналитически. Его удается сравнительно легко проанализировать в частном случае, когда эффективные массы электронов и «дырок» равны: $m_1 = m_2$ ¹³. При этом электронные и «дырочные» части недиагональных элементов σ_{xy} и σ_{xz} отличаются лишь знаком, вследствие чего

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0. \quad (4,13)$$

Поэтому спектр быстрой магнитозвуковой волны определяется лишь элементом σ_{xx} :

$$k^2 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}). \quad (4,14)$$

Асимптотическое выражение для σ_{xx} можно легко получить из общей формулы (2,13):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}) = & \frac{3ne^2}{4\pi m \Omega} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\tau \times \\ & \times \cos \tau \int_{-\infty}^\tau d\tau' \cos \tau' \exp \left\{ \frac{1}{\Omega} (v - i\omega + ik_z v \cos \theta) (\tau' - \tau) + \right. \\ & \left. + ik_y R \sin \theta (\cos \tau - \cos \tau') \right\}. \quad (4,15) \end{aligned}$$

Здесь использована полярная система координат с полярной осью вдоль \mathbf{H} ($v_x = v \cos \tau \sin \theta$ и т. д.). Разлагая подынтегральное выражение в (4,15) в ряд по степеням малого параметра $k_y R$, представим σ_{xx} в форме

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)} + \sigma_{xx}^{(2)}. \quad (4,16)$$

В рассматриваемом предельном случае (4,9) $\sigma_{xx}^{(0)}$ характеризует поперечную проводимость металла в отсутствие пространственной дисперсии:

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \frac{ne^2}{m\Omega^2} (v - i\omega). \quad (4,17)$$

Линейное по $k_y R$ слагаемое исчезает, и основной член асимптотики $\sigma_{xx}^{(2)}$ определяется формулой

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{3ne^2}{8m} (k_y R)^2 \int_0^\pi \frac{d\theta \sin^5 \theta}{v - i\omega + ik_z v \cos \theta}. \quad (4,18)$$

Элементарное вычисление дает для σ_{xx} выражение

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \Phi \left[\frac{5}{3} - u^2 + \frac{1-u^2}{u} \ln \frac{u+1}{u-1} \right] \right\}, \quad (4,19)$$

$$u \equiv \frac{\omega + iv}{k_z v}.$$

Дисперсионное уравнение (4,14) можно переписать в форме

$$\frac{\sigma_{xx}(u)}{\sigma_{xx}^{(0)}} u^2 = \left(\frac{v_a}{v \cos \Phi} \right)^2. \quad (4,20)$$

Поскольку в левой части (4,20) стоят функции, зависящие только от u и Φ , а $v_a \ll v$, то (4,20) сводится к уравнению

$$\sigma_{xx}(u, \Phi) = 0. \quad (4,21)$$

Анализ показывает, что при всех значениях угла Φ , исключая узкие области вблизи $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi/2$, имеется один почти вещественный корень $|u| > 1$. Иными словами, спектр и затухание быстрой волны определяются формулой¹³

$$\omega_+ = A(\Phi) |k_z| v - iv, \quad A(\Phi) > 1. \quad (4,22)$$

Возможность распространения электромагнитной волны со спектром типа (4,22) обусловлена фермиевской статистикой носителей тока и является специфической особенностью металла. В бальцмановской плазме такая волна не могла бы распространяться, поскольку в случае (4,12) всегда нашлись бы движущиеся в фазе с волной электроны, которые привели бы к сильному затуханию Ландау.

Таким образом, в случае равных масс в условиях сильной пространственной дисперсии (4,12) в металле имеется слабо затухающая электромагнитная волна со спектром (4,22). В случае неравных масс, $m_1 \neq m_2$, недиагональный элемент проводимости σ_{xz} отличен от нуля. При этом становится существенной «перенормировка» σ_{xx} (2,4). Каждый из элементов σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zz} теперь является суммой двух членов одного типа, но с разными m и v . Поэтому дисперсионное уравнение (4,21) в этом случае не может быть так просто исследовано, как в случае $m_1 = m_2$. Однако из физических соображений очевидно, что должна существовать некоторая область значений угла Φ , в которой уравнение (4,21) имеет решение типа (4,22).

§ 5. Электромагнитные волны в окрестности циклотронного резонанса¹

Коллективное движение электронов в магнитном поле, которое характеризуется циклотронной частотой Ω , приводит к существованию электромагнитных волн в окрестности циклотронных резонансов $\omega \approx \Omega_s$. В этом параграфе мы будем предполагать, что магнитное поле является достаточно сильным, а концентрация носителей сравнительно невелика, так что выполняется условие (4,7). Этому условию, обеспечивающему отсутствие затухания Ландау, нетрудно удовлетворить в металлах типа висмута.

Следуя работе¹⁴, мы рассмотрим упрощенную модель, в которой закон дисперсии носителей является изотропным, а эффективная масса «дырок» m_2 больше массы электронов m_1 . Выводы, полученные для этой модели, останутся качественно справедливыми и в общем случае. Многие из приведенных в этом параграфе результатов имеют аналогию в теории невырожденной плазмы. Тем не менее нам представляется целесообразным сформулировать соответствующие выводы для электронно-«дырочной» плазмы металлов.

Довольно очевидно, что при малых значениях kR пространственная дисперсия начинает играть роль лишь в самой непосредственной окрестности циклотронного резонанса, когда

$$\frac{|\Omega_s - \omega|}{\omega} \ll |k_z R| \ll 1. \quad (5,1)$$

Возникающее при этом затухание Ландау делает распространение волн невозможным.

В принятой нами изотропной модели отличные от нуля элементы тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -i \frac{nec}{H} \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2} + \frac{\beta_2}{1 - \beta_2^2} \right), \\ \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} &= \frac{nec}{H} \left(\frac{1}{1 - \beta_1^2} - \frac{1}{1 - \beta_2^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= i \frac{nec}{H} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right), \quad \beta_s = \frac{\omega + i\nu_s}{\Omega_s}. \end{aligned} \right\} \quad (5,2)$$

Они отличаются от соответствующих выражений для $\sigma_{\alpha\beta}$ в статическом случае заменой ν_s на $\nu_s - i\omega$ и справедливы при

$$(kR)^2 \ll 1, \quad k_z R \ll |1 - \beta_s|. \quad (5,3)$$

Подставляя (5,2) в дисперсионное уравнение (2,3), нетрудно представить его решение в виде

$$\left(\frac{kv_a}{\omega} \right)^2 = \frac{1 - \beta_1 \beta_2 - \frac{1}{2} \sin^2 \Phi \mp \left[(\beta_1 - \beta_2)^2 \cos^2 \Phi + \frac{1}{4} \sin^4 \Phi \right]^{1/2}}{\beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1 \beta_2 \sin^2 \Phi + (1 - \beta_1^2 - \beta_2^2) \cos^2 \Phi}. \quad (5,4)$$

В пределе сильного магнитного поля $|\beta_1| \ll |\beta_2| \ll 1$ формула (5,4) дает спектр и затухание для быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн. Значения частоты ω , для которых волновой вектор k обращается в бесконечность (при $\nu_s \rightarrow 0$), являются предельными частотами для электромагнитных волн данного типа (резонанс). При условии $\cos^2 \Phi \gg \gg m_1/m_2$ эти частоты определяются формулами

$$\omega_+ = \Omega_1 \cos \Phi, \quad \omega_- = \Omega_2. \quad (5,5)$$

Частота ω_+ является точкой окончания спектра магнитозвуковой волны, частота ω_- — альвеновской волны. По мере приближения ω к Ω_2 спектр и поляризация альвеновской волны существенно изменяются. В окрестности «дырочного» циклотронного резонанса спектр имеет вид

$$k^2 = \frac{\Omega_2^2}{v_a^2} \cdot \frac{\omega}{\Omega_2 - \omega} \frac{1 + \cos^2 \Phi}{2 \cos^2 \Phi}, \quad (5,6)$$

электрическое же поле поляризовано эллиптически. Формула (5,6) справедлива при условии

$$|k_z| v_2 \ll \Omega_2 - \omega \ll \omega. \quad (5,7)$$

Выражая k через ω из (5,6), эти неравенства можно записать в форме

$$\left(\frac{v_2}{v_a} \right)^2 \ll \left| 1 - \frac{\omega}{\Omega_2} \right|^3 \ll 1. \quad (5,8)$$

В области меньших полей, где

$$\Omega_2 \ll \omega \ll \Omega_1, \quad (5,9)$$

«дырки» можно считать неподвижными и их вкладом в проводимость пренебречь (аналогично тому, как это имеет место в плазме, где роль «дырок»

играют ионы). В этом случае альвеновская волна отсутствует, а магнито-звуковая волна превращается в спиральную, которая характерна для металлов с различными концентрациями электронов и «дырок». Поляризация этой волны характеризуется формулами (3,6), а ее спектр и затухание имеют вид

$$\omega = \frac{\Omega_1 \cos \Phi}{1 + \left(\frac{\omega_0}{kc}\right)^2} - i\nu_1. \tag{5,10}$$

Вдали от предельной частоты $\Omega_1 \cos \Phi$ величина $(kc/\omega_0)^2$ значительно меньше единицы, спектр волны является квадратичным и совпадает с (3,4).

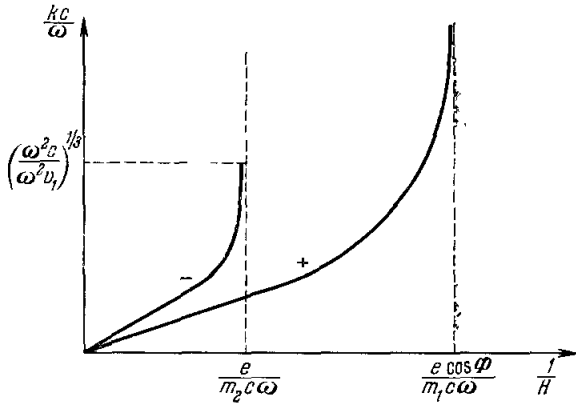


Рис. 1. Зависимость показателя преломления от магнитного поля для альвеновской (—) и быстрой магнитозвуковой (+) волн.

Вблизи границы спектра волновой вектор резко возрастает. На рис. 1 показана зависимость показателя преломления kc/ω обеих волн от магнитного поля.

В случае строго поперечного распространения ($\cos \Phi \rightarrow 0$) спектр быстрой магнитозвуковой волны кончается на частоте «гибридного» резонанса $\Omega_g = (\Omega_1 \Omega_2)^{1/2}$. При $\omega \rightarrow \Omega_g$ величина k резко возрастает:

$$k^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2 [1 - (\omega^2/\Omega_g^2)]}. \tag{5,11}$$

Эта формула справедлива при условии

$$\left| 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_g^2} \right| \gg \left(\frac{v_1}{v_a} \right)^2. \tag{5,12}$$

В самой непосредственной окрестности «гибридного» резонанса нужно уже учитывать пространственную дисперсию.

§ 6. Произвольный закон дисперсии электронов проводимости. Тензор электропроводности

Перейдем теперь к изучению влияния анизотропии поверхности Ферми на свойства электромагнитных волн в металлах. Будет показано, что учет анизотропии приводит к ряду новых особенностей.

Так, затухание и поляризация спиральной электромагнитной волны в металле с односвязной поверхностью Ферми зависит от H совершенно иначе, чем в случае многосвязной поверхности Ферми. Сложный характер

закона дисперсии электронов в металлах с $n_1 = n_2$ может привести к исчезновению магнитогидродинамических волн в той области магнитных полей, где альвеновская скорость много меньше скорости Ферми носителей. При определенных условиях вместо магнитогидродинамических волн с линейным спектром в металле с $n_1 = n_2$ может распространяться волна с квадратичным спектром. Длина этой волны зависит от ориентации постоянного магнитного поля \mathbf{H} , но не зависит от его величины. Электрическое поле в ней направлено параллельно \mathbf{H} .

При наличии нескольких групп носителей (многовязная поверхность Ферми) суммарный тензор проводимости представляет собой сумму выражений (2,13) для разных групп. Закон дисперсии электронов проводимости мы считаем произвольным, но будем предполагать, что их траектории в пространстве импульсов являются замкнутыми. Необходимо подчеркнуть, что в случае открытых траекторий элементы тензора поперечной проводимости имеют величину того же порядка, что и в отсутствие магнитного поля. Это должно привести к исчезновению электромагнитных волн (см. также ⁸). В работе ¹⁵ получено асимптотическое выражение для фурье-компоненты плотности тока в случае сильной пространственной дисперсии (3,8):

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = \frac{Nec}{i\mathbf{kH}} [\mathbf{kE}] + \sum C w'_i(\mathbf{w}^* \mathbf{E}) + s_0 \mathbf{H} (\mathbf{EH}) H^{-2} + \hat{s} \mathbf{E}. \quad (6,1)$$

Здесь

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} (V_1 - V_2) = n_1 - n_2; \quad (6,2)$$

V_1 — суммарный объем, ограниченный поверхностью Ферми, внутри которого находятся состояния с $\varepsilon < \varepsilon_F$ (электроны, $m > 0$); V_2 — объем, внутри которого находятся состояния с $\varepsilon > \varepsilon_F$ («дырки», $m < 0$) ¹⁰. Знак \sum означает суммирование по разным группам носителей.

Величина C определяется формулой

$$C = \frac{e^2}{2\pi\hbar^3} \left| \frac{m\mu}{k_z} \right|, \quad (6,3)$$

где $\mu = (\partial v_z / \partial p_z)^{-1}$ имеет размерность и порядок величины эффективной массы электрона. Компоненты комплексного вектора «скорости» \mathbf{w} имеют вид

$$w_x = \omega/k_x, \quad w_\alpha = \overline{ikv} q_\alpha \quad (\alpha = x, y), \quad (6,4)$$

$$q_x = \frac{c}{eH} (p_y - \bar{p}_y), \quad q_y = -\frac{c}{eH} (p_x - \bar{p}_x). \quad (6,5)$$

Черта означает усреднение по τ при $\varepsilon = \varepsilon_F$, $p_z = \text{const}$. Значения всех величин в (6,3), (6,4) должны быть взяты при тех значениях p_z , которые удовлетворяют условию

$$\bar{v}_z(\varepsilon_F, p_z) = \frac{\omega}{k_z}. \quad (6,6)$$

Звездочка в (6,1) означает комплексное сопряжение. Величина

$$s_0 = \frac{4\pi e^2}{k_z^2 (2\pi\hbar)^3} \sum (v - i\omega) \int m dp_z = \frac{e^2}{k_z^2} \sum (v - i\omega) \left| \frac{\partial n}{\partial \varepsilon_F} \right|. \quad (6,7)$$

Двумерный тензор

$$s_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar^3} \sum (v - i\omega) \int m \overline{q_\alpha q_\beta} dp_z \quad (\alpha, \beta = x, y) \quad (6,8)$$

характеризует поперечную проводимость металла в пределе однородного высокочастотного поля ($\mathbf{k} \rightarrow 0$).

Первое слагаемое в (6,1) представляет собой высокочастотный холловский ток. Как и в изотропном случае, в условиях сильной пространственной дисперсии этот ток ортогонален векторам \mathbf{k} и \mathbf{H} . Второй член описывает черенковское поглощение волны электронами, которые в среднем движутся с ней в фазе. Однако, в отличие от изотропного случая, эта часть плотности тока направлена не поперек векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} , а вдоль вектора \mathbf{w} .

Если магнитное поле \mathbf{H} параллельно оси симметрии выше второго порядка или если закон дисперсии носителей является изотропным, то

$$\overline{v_x Q_x} = \overline{v_x Q_y} = 0, \quad \overline{Q_x Q_y} = 0, \quad w_y = 0, \quad (6,9)$$

т. е. тензор $s_{\alpha\beta}$ оказывается диагональным, а диссипативный ток, связанный с затуханием Ландау, — направленным почти перпендикулярно векторам \mathbf{k} и \mathbf{H} . Формула (6,1) для \mathbf{j} в этом случае соответствует выражению (3,9).

Как было отмечено в конце § 4, для металлов типа висмута актуальным является случай слабой пространственной дисперсии (4,6), (4,7). При этом зависимость $\sigma_{\alpha\beta}$ от \mathbf{k} можно пренебречь, а затухание Ландау отсутствует, поскольку фазовая скорость волны больше скоростей носителей. Выражение $\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{H})$ получается из известной асимптотики тензора электропроводности¹¹ в результате простой замены $v \rightarrow v - i\omega$. При $N = 0$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{ne^2 c}{H} \sum_s \begin{pmatrix} -i\beta_s a_s^{xx} & -i\beta_s a_s^{xy} & a_s^{xz} \\ -i\beta_s a_s^{yx} & -i\beta_s a_s^{yy} & a_s^{yz} \\ a_s^{zx} & a_s^{zy} & ia_s^{zz}/\beta_s \end{pmatrix}. \quad (6,10)$$

Безразмерные матрицы $a_s^{\alpha\beta}$ зависят от формы поверхности Ферми и ориентации магнитного поля относительно кристаллографических осей. Если вектор \mathbf{H} параллелен оси симметрии выше второго порядка, то все недиагональные элементы матриц $a_s^{\alpha\beta}$ равны нулю.

§ 7. Спиральные волны (анизотропный случай)

Анизотропия закона дисперсии электронов не оказывает существенного влияния на характеристики спиральной волны в случае низких частот (3,1). Спектр и поляризация ее остаются такими же, как и у изотропного металла. Изменяется лишь выражение для затухания волны. Однако порядковая оценка $\Gamma \sim v/\Omega$ остается верной и в этом случае⁸.

Иначе обстоит дело в области сильной пространственной дисперсии (3,8). Топология и форма поверхности Ферми могут сильно влиять на затухание и поляризацию спиральной волны. Довольно очевидно, что в рассматриваемом случае в (6,1) можно пренебречь малым током $\hat{s}\mathbf{E}$. Соотношение (2,4) позволяет выразить продольное электрическое поле \mathbf{kE}/k через поперечную часть $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE})/k^2$:

$$\frac{\mathbf{kE}}{k^2} = - \frac{s_0(\mathbf{kh})(\mathbf{hE}_\perp) + \Sigma C(\mathbf{kw})(\mathbf{w}^* \mathbf{E}_\perp)}{s_0(\mathbf{kh})^2 + \Sigma C|\mathbf{kw}|^2}, \quad (7,1)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ — орт в направлении постоянного магнитного поля.

Используя (7,1) и уравнения (1,7), нетрудно написать дисперсионное уравнение для определения спектра и затухания спиральной волны:

$$1 - \left(\frac{4\pi\omega Ne}{ck\mathbf{kH}} \right)^2 = i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2} \left\{ \Sigma C|w_x^2| + \frac{s_0 \Sigma C|\omega_y^2| - \sin^2 \Phi |\Sigma C\omega_x \omega_y|^2}{s_0 \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \Sigma C|\omega_y^2|} \right\}. \quad (7,2)$$

При получении (7,2) мы пренебрегли членами порядка kR и $\omega/k_z v$ по сравнению с написанными. Из этого уравнения видно, что спектр спиральной волны с точностью до малых членов совпадает с (3,4). Затухание же волны, определяемое правой частью (7,2), является, вообще говоря, иным. Рассмотрим различные случаи.

а) Пусть вектор \mathbf{H} параллелен оси симметрии высокого порядка. Тогда $w_y = 0$, последнее слагаемое в правой части (7,2) исчезает и относительное затухание волны

$$\Gamma = \frac{2\pi\omega}{k^2 c^2} \sum C |w_x^2| \approx kR \sin^2 \Phi. \quad (7,3)$$

Из формулы же (7.1) следует, что $\mathbf{EH} \approx 0$, т. е. вектор электрического поля \mathbf{E} вращается в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю \mathbf{H} . Таким образом, этот случай полностью соответствует рассмотренному в § 3.

б) Рассмотрим далее случай односвязной, но неизотропной поверхности Ферми, когда суммы вида $\sum C w_\alpha w_\beta^*$ сводятся к одному слагаемому. При этом уравнение (7,2) удобно привести к виду

$$1 - \left(\frac{4\pi\omega Ne}{ck\mathbf{kH}} \right)^2 = \frac{\gamma \left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \xi + i \left(1 + \xi + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \right]}{\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 + (1 + \xi)^2}, \quad (7,4)$$

где введены обозначения:

$$\gamma = \frac{2\omega}{(2\pi\hbar)^3 H^2} \left| \frac{m\mu}{k_z} \left[(\overline{v_z p_x})^2 + (\overline{v_y p_y} \sin \Phi - \overline{v_z p_y} \cos \Phi)^2 \right] \right|_{v_z=0}, \quad (7,5)$$

$$\xi = \left(\frac{k_y k_z}{eH} \right)^2 \frac{\pi}{v} \int d^3 p \delta(\epsilon - \epsilon_F) \delta(k_z \overline{v_z}) (\overline{v_z p_x})^2 \left[\int d^3 p \delta(\epsilon - \epsilon_F) \right]^{-1}. \quad (7,6)$$

Величина γ порядка kR , а $\xi \sim k_z l (k_y R)^2$. В области низких частот $\omega \ll v$ изменение спектра волны значительно меньше относительного затухания, которое определяется формулой

$$\Gamma = \frac{\gamma}{1 + \xi} = \frac{akR}{1 + bk_z l (k_y R)^2}, \quad (7,7)$$

где a и b — положительные безразмерные величины порядка единицы, причем a сложным образом зависит от угла Φ .

Формула (7,7) показывает, что в рассматриваемом случае зависимость затухания волны от величины H имеет немонотонный характер. В относительно слабом магнитном поле при $\xi \gg 1$ затухание растет с полем: $\Gamma \sim (klkR)^{-1}$. При дальнейшем увеличении H величина Γ достигает максимума, а затем монотонно убывает: $\Gamma \approx akR$. На рис. 2 представлена зависимость относительного затухания от величины H . Пунктиром показано затухание спиральной волны в случае изотропного закона дисперсии электронов.

Своеобразно изменяется и поляризация волны. Поперечная часть электрического поля \mathbf{E}_\perp по-прежнему вращается по кругу. Величина же продольной составляющей определяется условиями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Ew} &= 0 & (\xi \gg 1), \\ \mathbf{EH} &= 0 & (\xi \ll 1), \\ (\mathbf{kH})(\mathbf{Ew}) + (\mathbf{kW})(\mathbf{EH}) &= 0 & (\xi = 1), \end{aligned} \right\} \quad (7,8)$$

т. е. в области слабых магнитных полей вектор \mathbf{E} вращается в плоскости, перпендикулярной направлению диссипативного тока \mathbf{w} .

Аналогичный немонотонный характер имеет затухание спиральной волны в области больших частот $\omega \gg \nu$. При этом максимум Γ смещается в сторону меньших полей.

В случае большого числа групп носителей затухание $\Gamma \sim kR$ и монотонно убывает с ростом H . Однако поляризация спиральной волны меняется аналогично (7,8). При сравнительно малых значениях H электрическое поле E вращается в плоскости, ортогональной вектору $\Sigma C(kw) w^*$.

Физическая природа отмеченных особенностей спиральной волны при сложном законе дисперсии носителей состоит в возможности ее взаимодействия с продольной волной. Дисперсионное уравнение для продольной волны в рассматриваемом случае имеет вид

$$s_0 \cos^2 \Phi + \sum C |w_y^2| \sin^2 \Phi = 0. \quad (7,9)$$

Оно не имеет вещественных решений, т. е. продольная волна затухает на своей длине. Тем не менее, когда длины спиральной и продольной волн становятся величинами одного порядка, затухание и поляризация спиральной волны существенно изменяются. Поскольку продольная волна быстро затухает, то резонанс является размытым. Эти особенности спиральной волны имеются только в металлах с анизотропным законом дисперсии носителей, когда $w_y \neq 0$.

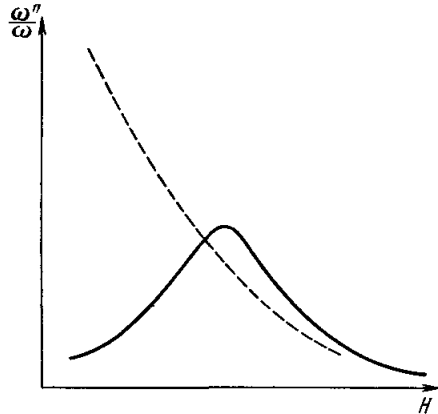


Рис. 2. Схематический вид зависимости относительного затухания спиральной волны от магнитного поля.

§ 8. Магнитогидродинамические волны (произвольный закон дисперсии носителей)

В § 4 было показано, что в металлах с равными концентрациями электронов и «дырок» существуют электромагнитные волны магнитогидродинамического типа с линейным спектром и плоской поляризацией. В области сильных магнитных полей, когда альвеновская скорость v_a велика по сравнению с фермиевской скоростью носителей, пространственная дисперсия не играет роли. В этом случае в металле могут распространяться две волны: альвеновская и быстрая магнитозвуковая. Их фазовые скорости порядка v_a .

В области меньших магнитных полей при $v_a \ll v$ в металле может распространяться быстрая волна со скоростью, несколько превышающей скорость Ферми, и альвеновская волна со скоростью, равной $v_a \cos \Phi$. В этом случае пространственная дисперсия приводит к быстрому затуханию волн, фазовая скорость которых мала по сравнению со скоростью Ферми. Возможность же распространения альвеновской волны с малой скоростью объясняется тем, что в изотропном случае диссипативные токи электронов и «дырок», связанные с затуханием Ландау, направлены поперек векторов k и H , т. е. параллельны, имеется одно направление электрического поля в плоскости xz , для которого эти токи равны нулю (ось y). Для этого направления мнимая часть проводимости оказывается отрицательной и при $\omega \gg \nu$ — большой по сравнению с вещественной частью, что и обуславливает возможность распространения альвеновской волны, электрическое поле в которой поляризовано по оси y .

В настоящем разделе мы рассмотрим влияние анизотропии закона дисперсии носителей на характер электромагнитных волн в металлах с $n_1 = n_2$. Сначала мы рассмотрим случай не слишком сильных магнитных полей, когда имеется сильная пространственная дисперсия, а затем перейдем к исследованию обратного предельного случая $v \ll v_a$.

а) Сильная пространственная дисперсия. Необходимым условием существования слабо затухающих электромагнитных волн, как обычно, является малость эрмитовой (диссипативной) части проводимости металла по сравнению с антиэрмитовой частью. В случае сильной пространственной дисперсии асимптотическое поведение плотности тока определяется формулой (6,1), в которой следует положить $N = 0$. Диссипативная часть проводимости, связанная с затуханием Ландау, оказывается много больше недиссипативной части. Поэтому возможность распространения магнитогидродинамических волн связана с исчезновением затухания Ландау для каких-либо направлений электрического поля в плоскости xu . Другими словами, в этих направлениях должны обращаться в нуль проекции скоростей w_1 и w_2 . В общем случае, когда магнитное поле направлено под углом к оси симметрии, это невозможно, и, следовательно, магнитогидродинамические волны в анизотропном металле отсутствуют.

Если вектор \mathbf{H} направлен по оси симметрии высокого порядка, то при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$

$$w_{1x} = w_{1y} = w_{2x} = w_{2y} = 0,$$

и в металле имеется две линейно поляризованные магнитогидродинамические волны с одинаковым спектром. В случае же непараллельных векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} $w_{1y} = w_{2y} = 0$ и существует одна (альвеновская) волна, электрическое поле в которой поляризовано по оси y .

Невозможность распространения альвеновской волны в общем случае обусловлена тем, что электронный и «дырочный» диссипативные токи, связанные с затуханием Ландау, не параллельны друг другу. Поэтому в плоскости xu не существует таких направлений электрического поля, для которых затухание Ландау отсутствовало бы. Однако наличие большой диссипативной проводимости во всей плоскости xu обуславливает возможность распространения в металле совершенно новой электромагнитной волны. В самом деле, в определенных областях значений магнитного поля поперечная проводимость $\sum C w_\alpha w_\beta^*$ может оказаться большей по сравнению с продольной проводимостью s_0 (6,7), а связь между ними — слабой. Поскольку мнимая часть s_0 является отрицательной и при $\omega \gg v$ большой по сравнению с вещественной частью, то в металле может распространяться волна, электрическое поле в которой поляризовано вдоль постоянного магнитного поля («обыкновенная» волна). Спектр этой волны определяется дисперсионным уравнением

$$k_y^2 c^2 = 4\pi i \omega s_0. \quad (1)$$

Используя выражение (6.7) для s_0 , нетрудно получить решение уравнения (8,1)¹⁵:

$$\omega(\mathbf{k}) = |k_y k_z| c r_D, \quad (8,2)$$

где

$$r_D = \left| 4\pi e^2 \sum \frac{dn}{d\varepsilon_F} \right|^{-1/2} \quad (8,3)$$

— радиус экранирования Дебая — Хюккеля в вырожденной плазме металла. Следует отметить, что спектр этой волны не зависит от величины магнитного поля H , но зависит от его направления. При $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ и при $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ эта волна отсутствует.

Для существования волны (8,2) необходимо, чтобы

$$|\sigma_{zz}| \ll |\sigma_{yy}|, \quad |\sigma_{z\alpha}|^2 \ll |\sigma_{zz}\sigma_{\alpha\alpha}| \quad (\alpha = x, y). \quad (8,4)$$

С помощью формул (6,3)–(6,7) эти условия можно представить в виде

$$\left| \frac{\omega}{k_z v} \right| \ll (kR)^2 \ll 1. \quad (8,5)$$

Выражая k через ω (8,2) и подставляя в (8,5), запишем неравенства

$$\frac{\omega}{\Omega} \frac{v}{v_a} \ll 1 \ll \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{v_a} \right)^{3/2}, \quad (8,6)$$

которые вместе с условием $\omega \gg v$ определяют область существования слабо затухающей волны (8,2).

Затухание волны (8,2) определяется рассеянием электронов проводимости и ее слабой связью с затухающими поперечными волнами. При выполнении условий (1,20) и (8,6) относительное затухание этой волны мало по сравнению с единицей.

Таким образом, в условиях сильной пространственной дисперсии анизотропия поверхности Ферми приводит к исчезновению альвеновской волны и к появлению совершенно новой продольной волны с квадратичным спектром (8,2), не зависящим от величины магнитного поля H . Возможность существования подобной волны является специфической особенностью металлов.

б) Слабая пространственная дисперсия. Исследуем теперь влияние анизотропии закона дисперсии носителей на характер распространения электромагнитных волн в предельном случае сильного магнитного поля (4,7), когда пространственная дисперсия не играет роли и асимптотическое поведение $\sigma_{\alpha\beta}$ характеризуется формулой (6,10).

Эрмитова часть тензора проводимости (6,10) определяет затухание электромагнитных волн вследствие рассеяния носителей. В случае $v \ll \omega$ она мала по сравнению с антиэрмитовой частью, определяющей спектр. Пренебрегая рассеянием носителей, которое дает относительное затухание волн порядка v/ω , запишем тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ в форме

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{nc}{H} \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{\Omega} a_1 & -\frac{i\omega}{\Omega} a_{12} & a_{13} \\ -\frac{i\omega}{\Omega} a_{12} & -\frac{i\omega}{\Omega} a_2 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & i \frac{\Omega}{\omega} a_3 \end{pmatrix}, \quad (8,7)$$

где

$$\Omega = \frac{eH}{(m_1 + m_2)c},$$

а величины $\{a\}$ очевидным образом связаны с элементами матриц $a_s^{(\alpha\beta)}$ в (6,10). Элементы двумерного тензора $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ (2,4) нетрудно выразить через элементы матрицы (8,7):

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = -\frac{i\omega}{\Omega} \frac{nc}{H} A_{\alpha\beta}, \quad (8,8)$$

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{a_{13}^2}{a_3} & \left(a_{12} + \frac{a_{13}a_{32}}{a_3} \right) \sec \Phi \\ \left(a_{12} + \frac{a_{13}a_{32}}{a_3} \right) \sec \Phi & \left(a_2 + \frac{a_{32}^2}{a_3} \right) \sec^2 \Phi \end{pmatrix}. \quad (8,9)$$

При вычислении мы считали, что $\cos \Phi \gg \frac{\omega}{\Omega}$.

Решение дисперсионного уравнения (2,3) дает две волны с линейным спектром ¹²

$$v_{\pm} = \frac{v_a}{(2 \det A_{\alpha\beta})^{1/2}} [A_{xx} + A_{\eta\eta} \pm \sqrt{(A_{xx} + A_{\eta\eta})^2 + 4A_{x\eta}^2}]^{1/2}. \quad (8,10)$$

Электрическое поле в этих волнах линейно поляризовано. Направления поляризации x' и η' совпадают с главными осями вещественного симметричного тензора $A_{\alpha\beta}$. Если магнитное поле направлено по оси симметрии высокого порядка, то все недиагональные элементы матрицы $a_{\alpha\beta}$ равны нулю. В этом случае волна с фазовой скоростью v_- переходит в альвеновскую волну (4,4), а волна со скоростью v_+ — в быструю магнитозвуковую волну со спектром (1,21).

В частном случае $\mathbf{k} \parallel \mathbf{y}$ ($\cos \Phi \ll \frac{\omega}{\Omega}$) «перенормированный» тензор проводимости $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{ne c}{H} \begin{pmatrix} -i \frac{\omega}{\Omega} \left(a_1 + \frac{a_{12}^2}{a_2} \right) & a_{13} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_2} \\ -a_{13} - \frac{a_{12} a_{23}}{a_2} & i \frac{\Omega}{\omega} \left(a_3 + \frac{a_{23}}{a_2} \right) \end{pmatrix}. \quad (8,11)$$

Волна, аналогичная альвеновской, в этом случае отсутствует, а скорость быстрой волны v_+ дается формулой

$$v_+ = v_a \left\{ a_1 + \frac{1}{a_2} \left[a_{12}^2 + \frac{(a_2 a_{13} + a_{12} a_{23})^2}{a_2 a_3 + a_{23}^2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (8,12)$$

Электрическое поле в волне поляризовано вдоль оси x .

§ 9. Возбуждение электромагнитных волн в металлах внешним полем. Поверхностный импеданс

До сих пор мы исследовали спектр, затухание и поляризацию электромагнитных волн в безграничном металле. Здесь мы рассмотрим возбуждение этих волн внешним электромагнитным полем и их влияние на высокочастотные характеристики металла. Одной из основных таких характеристик является тензор поверхностного импеданса $Z_{\alpha\beta}$, который связывает компоненты полного тока \mathbf{J} в металле с тангенциальными компонентами электрического поля на его поверхности:

$$\mathcal{E}_{\alpha}(0) = Z_{\alpha\beta} J_{\beta} \quad (\alpha, \beta = x, \eta). \quad (9,1)$$

В этом параграфе будет использоваться система координат $x\eta\zeta$. Ось ζ совпадает с внутренней нормалью к поверхности, поскольку из-за очень большой величины коэффициента преломления волна внутри металла всегда распространяется перпендикулярно его поверхности.

Для нахождения $Z_{\alpha\beta}$ необходимо решить уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha}^{\prime}(\zeta) &= -i4\pi\omega c^{-2} j_{\alpha}(\zeta) \quad (\alpha = x, \eta), \\ j_{\zeta}(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (9,2)$$

Штрих означает производную по ζ . Из (9,2) следует соотношение

$$J_{\alpha} = \frac{c^2 \mathcal{E}_{\alpha}^{\prime}(0)}{4\pi i \omega},$$

которое позволяет представить тензор импеданса в форме

$$Z_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - iX_{\alpha\beta} = 4\pi i \omega c^{-2} \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha}(0)}{\partial \mathcal{E}_{\beta}^{\prime}(0)}. \quad (9,3)$$

Вещественная часть тензора $Z_{\alpha\beta}$ определяет поглощение энергии внешней волны

$$Q = \frac{c^2}{8\pi} R_{\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha^{(i)} \mathcal{E}_\beta^{(i)*}, \quad (9,4)$$

где $\mathcal{E}^{(i)}$ — вектор электрического поля в падающей волне. Диагональные элементы тензора $X_{\alpha\beta}$ характеризуют сдвиг фазы при отражении (изменении частоты колебательного контура), а недиагональные — степень эллиптичности.

В тех случаях, когда электрическое поле поляризовано по кругу в плоскости $x\eta$ (спиральная волна), вместо тензора $Z_{\alpha\beta}$ (9,3) естественно ввести тензор импеданса для циркулярно поляризованных волн

$$\mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}_x \pm i\mathcal{E}_y. \quad (9,5)$$

Элементы этого тензора определяются формулами

$$\mathcal{E}_\pm(0) = Z_\pm J_\pm + Z' J_\mp \quad (9,6)$$

и связаны с элементами $Z_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$Z_\pm = \frac{1}{2} (Z_{xx} + Z_{\eta\eta}) \pm iZ_{x\eta}, \quad Z' = \frac{1}{2} (Z_{xx} - Z_{\eta\eta}). \quad (9,7)$$

Уравнения Максвелла (9,2) удобно решать в представлении Фурье. Формально продолжая поле $\mathcal{E}_\alpha(\zeta)$ четным образом на область вне металла $\zeta < 0$, будем искать его в виде

$$\mathcal{E}_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk E_\alpha(k) \cos k\zeta. \quad (9,8)$$

Уравнения для фурье-компонент являются алгебраическими:

$$k^2 E_\alpha(\mathbf{k}) + 2\mathcal{E}'_\alpha(0) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) E_\beta(\mathbf{k}) \quad (\alpha = x, \eta), \quad (9,9)$$

$$\sigma_{\zeta\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) E_\beta(\mathbf{k}) = 0,$$

волновой вектор \mathbf{k} параллелен оси ζ .

Мы пренебрегаем изменением оператора проводимости вследствие столкновений электронов с поверхностью металла. В случае малых kR учет поверхностных эффектов дает малые поправки к вещественной части импеданса ¹⁶. Эти поправки обусловлены поглощением энергии падающей волны вследствие неупругого (диффузного) рассеяния электронов на границе металла. При возбуждении слабо затухающих волн в объеме металла поверхностные эффекты также не играют заметной роли ¹².

После исключения продольной составляющей E_ζ из (9,9) получаем

$$D_{\alpha\beta}(k) E_\beta(k) = -2\mathcal{E}'_\alpha(0) \quad (\alpha, \beta = x, \eta), \quad (9,10)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(k) = k^2 \delta_{\alpha\beta} - 4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}, \quad (9,11)$$

а $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ определяется формулой (2,4).

Решение уравнений (9,10) с использованием (9,8) приводит к следующим выражениям для поля и для тензора импеданса ¹²:

$$\mathcal{E}_\alpha(\zeta) = T_{\alpha\beta}(\zeta) \mathcal{E}_\beta(0), \quad Z_{\alpha\beta} = 4\pi i \omega c^{-2} T_{\alpha\beta}(0), \quad (9,12)$$

$$T_{\alpha\beta}(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk (D^{-1})_{\alpha\beta} \cos k\zeta. \quad (9,13)$$

Элементы тензора $(D^{-1})_{\alpha\beta}$ связаны с $D_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$(D^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} k^2 - 4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{\eta\eta} & -4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{\eta x} \\ -4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{x\eta} & k^2 - 4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{xx} \end{pmatrix}, \quad (9,14)$$

$$D = k^4 - (4\pi i \omega c^{-2})^2 (\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{\eta\eta} - \tilde{\sigma}_{x\eta} \tilde{\sigma}_{\eta x}) - 4\pi i \omega c^{-2} k^2 (\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{\eta\eta}). \quad (9,15)$$

Перейдем теперь к получению явных выражений для распределения поля и поверхностного импеданса при возбуждении волн различных типов внешним электромагнитным полем.

а) Возбуждение спиральной волны. Пусть на поверхность металла падает циркулярно поляризованная внешняя электромагнитная волна. При фиксированной частоте ω дисперсионное уравнение спиральной волны можно записать в форме

$$k^2 = k_0^2 [1 + i\Gamma(k_0, H)], \quad k_0^2 = \frac{4\pi\omega N e}{cH \cos \Phi}, \quad (9,16)$$

значения относительного затухания волны $\Gamma(k, H)$ в различных случаях определяются выражениями (3,5), (3,13) и (7,7).

Используя формулы (9,5), (9,8) и (9,12) — (9,16), для циркулярно поляризованных величин $T_{\pm}(\xi)$ получаем

$$T_{-}(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk \cos k\xi}{k^2 - k_0^2(1+i\Gamma)} = \frac{i}{k_0} \left(1 - \frac{i\Gamma}{2}\right) \exp \left[ik_0 \left(1 + \frac{i\Gamma}{2}\right) \xi \right], \quad (9,17)$$

$$T_{+}(\xi) \approx -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk \cos k\xi}{k^2 + k_0^2(1+i\Gamma)} = -\frac{1}{k_0} \left(1 + \frac{i\Gamma}{2}\right) \exp(-k_0\xi). \quad (9,18)$$

Эти функции описывают распределение право- и левовращающейся компонент поля в объеме металла. Видно, что функция $T_{-}(\xi)$, в отличие от $T_{+}(\xi)$, весьма медленно затухает при возрастании ξ . Импеданс для этой волны

$$Z_{-} = \frac{4\pi\omega}{k_0 c^2} \left(1 - \frac{i\Gamma}{2}\right) = \frac{4\pi}{c} \left| \frac{\omega H \cos \Phi}{4\pi N e c} \right|^{1/2} \left(1 - \frac{i}{2} \Gamma\right) \quad (9,19)$$

является почти вещественным, что соответствует проникновению волны (9,17) в глубь металла. Малая мнимая часть $Z_{-} \sim R_{-}\Gamma$ обусловлена затуханием волны.

Волна (9,18) с противоположным направлением вращения вектора поляризации имеет мнимый волновой вектор ik_0 , т. е. испытывает полное отражение. Вследствие этого импеданс Z_{+} является почти мнимым:

$$Z_{+} = -iZ_{-}^*.$$

Перепутывание циркулярно поляризованных волн с различными направлениями вращения характеризуется элементами Z' и является малым при $\Gamma \ll 1$.

б) Возбуждение волн магнитогидродинамического типа. Как было показано в §§ 4, 5 и 8, в металлах с одинаковыми концентрациями электронов и «дырок» ($n_1 = n_2$) могут распространяться различные электромагнитные волны. Их относительное затухание является малым и в большинстве случаев имеет величину порядка ν/ω . При выполнении соответствующих условий внешнее поле возбуждает в металле эти волны. Электромагнитное поле внутри металла представляет

собой слабо затухающую плоскую волну вида $\exp(ik'\zeta - k''\zeta)$, где $k'' \sim k'v/\omega \ll k'$. На расстояниях ζ , меньших длины $1/k''$, затуханием волны можно пренебречь.

При вычислении поверхностного импеданса мы пренебрежем малым затуханием волн и множитель $1/D$ в формуле (9,14) представим в виде

$$\frac{1}{D} \approx \pi i \delta(D') + P \frac{1}{D'}, \quad (9,20)$$

где $D' = \text{Re}D$, P — символ главного значения.

В случае сильного магнитного поля, когда пространственная дисперсия не играет роли (см. § 8, б), тензор импеданса имеет вид

$$Z_{x'x'} = 4\pi v_+ c^{-2}, \quad Z_{\eta'\eta'} = 4\pi v_- c^{-2}, \quad (9,21)$$

оси x' и η' совпадают с главными осями вещественного тензора $A_{\alpha\beta}$ (8,9). Вдоль этих направлений поляризовано электрическое поле в альвеновской и магнитозвуковой волнах. Независимость импеданса от частоты обусловлена тем, что фазовые скорости v_+ и v_- не зависят от ω .

В случае сильной пространственной дисперсии $v_a \ll v$ при $\Phi \sim 1$ спектр быстрой магнитозвуковой волны дается формулой (4,22). Соответствующий этой волне элемент тензора импеданса

$$Z_{xx} = \frac{4\pi^2 v_a^2}{v c^2} \left(1 - i \frac{v}{\omega}\right) \int_0^\infty du \delta \left\{1 - \frac{3}{4} \text{tg}^2 \Phi F(u)\right\}, \quad (9,22)$$

где через $F(u)$ обозначена функция, стоящая в квадратных скобках в выражении (4,19). При значениях $\text{tg} \Phi$ порядка единицы интеграл в (9,22) также имеет величину порядка единицы.

Если магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль оси симметрии высокого порядка, то при $v_a \ll v$ возможно распространение альвеновской волны со спектром (4,4). Соответствующий ее возбуждению импеданс

$$Z_{\eta\eta} = 4\pi v_a c^{-2} \cos \Phi \quad (9,23)$$

в $(v/v_a) \gg 1$ раз больше, чем Z_{xx} . Это показывает, что быстрая волна (4,22) возбуждается внешним полем с относительно меньшей амплитудой, чем альвеновская волна.

Если значения ω и H удовлетворяют условиям (8,6) и (1,20) и $\Phi \sim 1$, то внешнее поле возбуждает в анизотропном металле волну со спектром (8,2). При этом

$$Z_{\eta\eta} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - \frac{4\pi i \omega s_0}{c^2 \sin^2 \Phi}} - \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\omega r_D}{c} \sin \Phi \cos \Phi\right)^{1/2}. \quad (9,24)$$

в) Возбуждение электромагнитных волн в пластине. Уравнения Максвелла в пластине толщины d ($-\frac{d}{2} < \zeta < \frac{d}{2}$) допускают два типа решений: 1) электрическое поле симметрично, магнитное — антисимметрично; 2) электрическое поле антисимметрично, магнитное — симметрично. Следуя работе Басса, Блапка и Каганова⁸, решения первого типа будем обозначать индексом s , а второго — индексом a . Если электромагнитное поле вне пластины отсутствует, то пластина представляет собой резонатор и, следовательно, волновой вектор k принимает дискретные значения. Собственные функции и

собственные числа имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_{xn}^{(s)}(\zeta) &= E_{xn}^{(s)}(0) \cos k_n^{(s)} \zeta, & H_{\eta n}^{(s)}(\zeta) &= i \frac{ck_n^{(s)}}{\omega} E_{xn}^{(s)}(0) \sin k_n^{(s)} \zeta, \\ k_n^{(s)} &= \frac{2\pi}{d} \left(n + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9,25)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{xn}^{(a)}(\zeta) &= \frac{i\omega}{ck_n^{(a)}} H_{\eta n}^{(a)}(0) \sin k_n^{(a)} \zeta, \\ H_{\eta n}^{(a)}(\zeta) &= H_{\eta n}^{(a)}(0) \cos k_n^{(a)} \zeta, \\ k_n^{(a)} &= \frac{2\pi n}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (9,26)$$

Связь частоты ω и волнового вектора k_n определяется законом дисперсии $\omega = \omega(k)$.

Если пластина помещена во внешнее поле частоты ω , то в ней будут возбуждаться волны (9,25), (9,26). Когда пластина находится в пучности электрического поля в резонаторе, то распределение электрического поля в ней является симметричным. В пучности магнитного поля осуществляется антисимметричный случай. При возбуждении слабо затухающей волны с данной поляризацией

$$Z_s = i \frac{4\pi\omega}{kc^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} kd \right), \quad Z_a = -i \frac{4\pi\omega}{kc^2} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} kd \right). \quad (9,27)$$

Зависимость

$$k = k'(\omega) + ik''(\omega) \quad (9,28)$$

в (9,27) определяется из обращенного дисперсионного уравнения. Из (9,27) следует, что в пределе $k'' \rightarrow 0$ импеданс пластины обращается в бесконечность при $kd = 2\pi n$ для случая s и при $kd = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$ для случая a .

В общем случае в пластине возбуждаются как симметричные, так и антисимметричные электрические поля. При этом вблизи резонанса происходит резкое изменение и вещественной и мнимой частей импеданса:

$$Z_n = \frac{4\pi\omega}{k'c^2d} \frac{k'' - i \left(k' - \frac{\pi n}{d} \right)}{(k'')^2 + \left(k' - \frac{\pi n}{d} \right)^2}. \quad (9,29)$$

Для того чтобы резонансная кривая была достаточно «острой», толщина пластины должна быть мала по сравнению с длиной затухания волны

$$d \ll \frac{1}{k''}. \quad (9,30)$$

Максимальные значения вещественной и мнимой частей импеданса имеют величину порядка $\omega d/c^2 \Gamma n^2$ и убывают с номером, как $1/n^2$. Возбуждение спиральных волн в пластине в условиях слабой пространственной дисперсии рассмотрено в работе ⁸, аналогичное рассмотрение для магнитогидродинамических волн проведено в работе ¹⁷.

§ 10. Экспериментальное наблюдение электромагнитных волн в металлах

В последнее время опубликован ряд экспериментальных работ, посвященных обнаружению слабо затухающих электромагнитных волн в металлах в сильном магнитном поле. Спиральные волны (3,4)—(3,5) были обнаружены Боуэрсом с сотрудниками ¹⁸ путем наблюдения стоячих волн в пластинках монокристаллического натрия. В дальнейшем низкочастотные

спиральные волны были наблюдаемы рядом авторов¹⁹⁻²² в большом числе других металлов (Ag, Au, Cu, Pb, Al, In и т. д.). Во всех этих работах спиральные волны обнаруживались по резонансам импеданса пластины (9.29) или прямоугольного бруска. В последнем случае образец представляет собой объемный резонатор, в котором «квантуются» все три компоненты волнового вектора:

$$k_\alpha = \frac{\pi n_\alpha}{d_\alpha} \quad (10,1)$$

Спектр (3,4) при подстановке в него (10,1) дает набор частот ω (n_1, n_2, n_3), которые наблюдаются на кривых типа приведенных на рис. 3. В работе⁷ сообщалось о наблюдении спиральных волн в K, Na, In, Al, Si при $T = 4,2^\circ \text{K}$. В работе²³ наблюдались высокочастотные спиральные волны $\omega \sim 10^{11} \text{сек}^{-1}$ в вырожденном InSb при азотной и комнатной температурах. Во всех этих опытах пространственная и временная дисперсия были несущественными (очень низкие частоты в случае металлов и малая концентрация электронов в случае InSb).

Волны магнитогидродинамического типа в условиях слабой пространственной дисперсии $kv \ll \omega$ впервые наблюдались Обри и Чемберсом²⁴. Ими было обнаружено резкое линейное возрастание вещественной части поверхностного импеданса висмута в полях $H > 3 \text{ кэ}$ при частоте $\omega \sim 6 \cdot 10^{10} \text{сек}^{-1}$. Магнитное поле было направлено параллельно поверхности образца. Возрастание импеданса обусловлено возбуждением быстрой магнитозвуковой волны (8,12).

Бухсбаум и Голт показали⁹, что в более ранней работе Голта и др.²⁵, посвященной исследованию циклотронного резонанса в висмуте в перпендикулярном поверхности металла магнитном поле ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$), наблюдались альвеновские волны с фазовыми скоростями $v_{1,2} = v_a$. В образцах висмута с различными концентрациями электронов и «дырок» ($n_1 \neq n_2$) ими были обнаружены спиральные волны. По-видимому, это было первое наблюдение спиральных волн в металлах.

В экспериментах Хайкина, Эдельмана и Мина²⁶⁻²⁸ детально исследованы альвеновская и быстрая магнитозвуковая волны (8,10) и (8,12) с помощью наблюдения стоячих волн в пластине Вi. На рис. 4 приведена одна из записей осцилляций импеданса пластины как функции обратного магнитного поля. В случае линейной зависимости фазовой скорости $v_\phi = \omega/k$ от величины H осцилляции периодичны в функции $1/H$. Период осцилляций определяется из условия

$$\frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\pi n}{2d}.$$

На кривой видны две системы резонансов — от двух разных волн. В работах²⁹⁻²⁸ показано, что одна из волн (альвеновская) исчезает при $\Phi \rightarrow \pi/2$, что затухание волн обусловлено рассеянием носителей, установлена

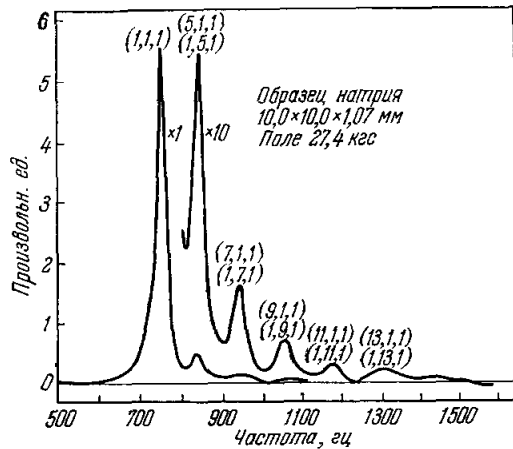


Рис. 3. Зависимость импеданса от частоты в натрии ($H = 27,4 \text{ кэ}$; рисунок заимствован из работы²¹).

Таблица I

Название волны	Условия существования	Спектр	Относительное затухание	Поляризация	Примечание
1. Спиральная волна	$n_1 \neq n_2$ $v, \omega, kv \ll \Omega$ $\Phi \neq \frac{\pi}{2}$	$\omega(k) = \frac{k^2 c H \cos \Phi}{4\pi e n_1 - n_2 }$	$\frac{v}{\Omega} \sec \Phi + \frac{3\pi}{16} k R \sin^2 \Phi$	$E_x = -iE_y \cos \Phi$ $E_z \ll E_x$	В случае одноосной анизотропии поверхности Ферми затухание и поляризация волны сильно меняются при изменении H (см. § 7)
2. Волны магнитогидродинамического типа	$n_1 = n_2$ $v \ll \omega \ll \Omega$	Точка окочаения спектра ($m_1 \ll m_2$) $\Omega_1 \cos \Phi + (\Omega_1 \Omega_2)^{1/2}$ Ω_2			
3. Альвеновская волна	$\Phi \neq \frac{\pi}{2}$	$\omega = kv_a \cos \Phi$ $\omega = kv_a$	$v/2\omega$	$E \parallel [kH]H$	В случае анизотропной поверхности Ферми спектр и поляризация волн приведены в § 8
4. Быстрая магнитозвуковая волна	а) Слабая пространственная дисперсия		$v/2\omega$	$E \parallel [kH]$	
5. Альвеновская волна	б) Сильная пространственная дисперсия $\Phi \neq \frac{\pi}{2}$	$\omega = kv_a \cos \Phi$	$v/2\omega$	$E \parallel [kH]H$	Существует, если направление вектора H совпадает с осью симметрии выше второго порядка
6. Быстрая волна	$\omega > kv \cos \Phi$ $\Phi \neq 0, \pi/2$ $\frac{\omega}{\Omega} \frac{v}{v_a} \ll 1 \ll \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{1/2} \left(\frac{v}{v_a}\right)^{3/2}$	$\omega = kv_a A(\Phi) \cos \Phi$ $A(\Phi) > 1$ $\omega = k^2 c r_D \sin \Phi \cos \Phi$	v/ω	$E \parallel [kH]$	Существует только в том случае, если направление вектора H не совпадает с осью симметрии
7. Медленная волна с квадратичным спектром				$E \parallel \bar{H}$	

независимость их фазовых скоростей от частоты и пропорциональность v_{ϕ} магнитному полю H . В работе Кирша²⁹ были обнаружены альвееновские волны в Bi в магнитном поле, перпендикулярном поверхности образца. Вильямсом³⁰ изучалась быстрая магнитозвуковая волна (8,12) в параллельном поверхности поле ($H \perp k$). В работе Смита и др.³¹ сообщалось о наблюдении той же волны вплоть до «гибридного» резонанса (5,11). В экспериментах^{28, 31} наблюдалось изменение периода осцилляций импеданса пластины вследствие изменения спектра волн при подходе к циклотронному резонансу (5,6) и (5,10).

Результаты всех этих экспериментов находятся в хорошем согласии с теорией, а также с моделью поверхности Ферми в висмуте²⁸. В работе³² сообщено о прямом наблюдении прозрачности пластины висмута толщиной свыше 1 мм в опытах по прохождению электромагнитных волн.

Такое большое число работ, посвященных исследованию незатухающих волн в висмуте, связано с тем, что благодаря малой концентрации носителей ($n_1 = n_2 \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$) в висмуте легко осуществляется случай слабой пространственной дисперсии $v_a \gg v$. В этой области полей длина магнитогидродинамических волн v_a/ω довольно велика, а длина v_1/v , на которой затухают волны, значительно больше длины свободного пробега носителей $l = v/v$.

Для осуществления случая слабой пространственной дисперсии в типичных металлах с концентрациями носителей порядка единицы на атом требуются очень большие поля: $H > 10^6 \text{ э}$. В меньших полях существенную роль играет затухание Ландау. Для наблюдения волн типа (4,2) и (8,2), спектр которых не зависит от величины H , необходимо менять частоту ω или угол наклона магнитного поля относительно образца. До сих пор в литературе нет данных о наблюдении подобных волн в металлах.

В табл. I содержится сводка всех слабо затухающих волн, длина которых велика по сравнению с ларморовским радиусом.

II. КОРОТКИЕ ВОЛНЫ ($kR \gg 1$)

§ 11. Качественные соображения

До сих пор мы рассматривали электромагнитные волны большой длины ($kR \ll 1$). Вопрос о возможности распространения возбуждений, длина волны которых мала по сравнению с размерами электронных орбит, является гораздо более сложным. Причина заключается в том, что в этой области длин волн особенно существенную роль играет черенковское

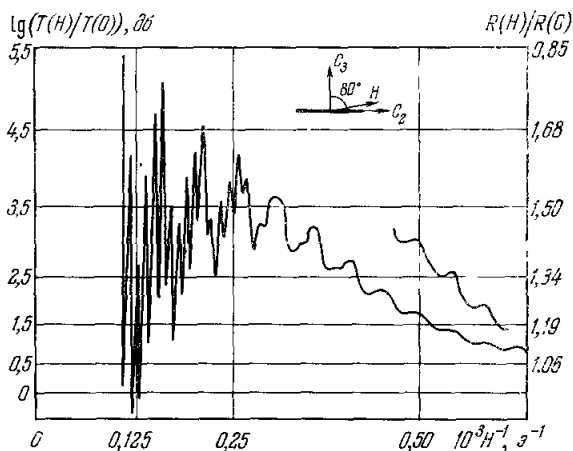


Рис. 4. Запись поверхностного импеданса висмута, демонстрирующая одновременное возбуждение альвееновской и быстрой магнитозвуковой волн.

Меньший период — альвееновская, больший период — магнитозвуковая. Вверху указано расположение векторов поля H и осей C_1 и C_2 в плоскости, перпендикулярной поверхности образца, изображенной жирной линией. Справа дана повторная запись части кривой с большим усилением. Рисунок заимствован из работы²⁸.

поглощение волны электронами и основная часть проводимости металла является диссипативной. Поэтому слабо затухающие волны могут существовать лишь в тех особых случаях, когда для некоторых направлений векторов \mathbf{k} и \mathbf{E} черенковское поглощение исчезает. Ниже мы и рассмотрим эти особые случаи.

В магнитном поле черенковское поглощение обусловлено электронами, которые в среднем движутся в фазе с волной и для которых выполняются соотношения

$$k_z v_z = \omega + N\Omega, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11,1)$$

Если волновой вектор \mathbf{k} направлен строго поперек магнитного поля \mathbf{H} ($k_z = 0$) и $\omega \neq N\Omega$, то условие (11,1) не удовлетворяется ни для каких электронов и затухание Ландау отсутствует. При этом в окрестности циклотронного резонанса могут существовать волны, длина которых много меньше характерного ларморовского радиуса. Распространение этих волн будет рассмотрено в § 16.

Если же угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H} отличен от $\pi/2$ и $\omega \ll \Omega$, то соотношение (11,1) удовлетворяется для многих групп электронов:

$$N \sim k_z R \gg 1. \quad (11,2)$$

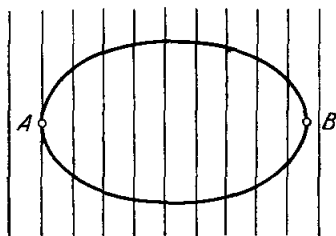


Рис. 5.

В этом случае черенковское поглощение является сильным и электромагнитные волны, вообще говоря, не могут распространяться. Однако при определенных условиях затухание Ландау может испытывать резкие осцилляции в зависимости от соотношения между длиной волны и диаметром электронной орбиты. Физическая природа этих осцилляций, по существу, та же, что и в случае «геометрического резонанса» в поглощении ультразвука³³. Возникновение этих осцилляций объясняется тем, что электрон наиболее эффективно взаимодействует с электромагнитным полем на тех участках своей орбиты, на которых он движется вдоль плоскостей равной фазы волны. В случае выпуклой орбиты электрона на ней имеется два таких участка (в окрестности точек A и B , см. рис. 5). При движении же электрона между этими участками на него действует быстро осциллирующее поле волны, которое в среднем не меняет его энергии. Поэтому поглощаемая электронами энергия зависит от разности фаз поля волны в точках A и B , в которых они движутся в противоположные стороны. Если на диаметре орбиты укладывается нечетное число полуволн, то поле волны действует на электрон на участках A и B одинаково. В этом случае поглощение является максимальным. Если же на диаметре укладывается четное число полуволн, то действие поля волны на этих участках оказывается противоположным и поглощение отсутствует.

При $k_z R \gg 1$ среди разных групп электронов всегда найдутся такие, вклад которых в поглощение будет большим. Следствием этого является относительно малая амплитуда осцилляций при изменении kR . Если же величина $k_z R$ мала, то условие (11,1) выполняется только при $N = 0$. В этом случае осцилляции «геометрического резонанса» велики³⁴, причем в минимумах черенковское поглощение исчезает. В^{12, 35} было показано, что для определенных значений вектора \mathbf{k} диссипативная проводимость становится настолько малой, что основную роль начинает играть «холловская» проводимость. В результате этого оказывается возможным распространение электромагнитных волн с дискретным спектром волновых векторов и частот. Рассмотрим их теперь более подробно.

§ 12. Асимптотическое поведение тензора проводимости

Для исследования свойств волн с дискретным спектром в случае больших kR необходимо найти асимптотический вид тензора $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H})$. Мы считаем угол Φ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H} близким к $\pi/2$:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Phi \ll 1. \tag{12,1}$$

Вместе с тем будем предполагать, что пространственная неоднородность поля волны вдоль \mathbf{H} является сильной. Другими словами, нас интересует асимптотическое поведение тензора (2,13) при выполнении следующих условий:

$$|\nu - i\omega| \ll k_z v \ll \Omega \ll kv. \tag{12,2}$$

В ³⁵ было найдено асимптотическое выражение тензора проводимости в случае изотропного квадратичного закона дисперсии электронов проводимости. В системе координат x, η, ζ оно имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = \frac{3ne^2}{2mk_z v k R} \times \left(\begin{array}{ccc} 1 - F & \frac{\cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right)}{(\pi k R)^{1/2}} - \frac{\nu - i\omega}{k_z v} G, & -\frac{\nu - i\omega}{k_z v} G \\ -\frac{\cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right)}{(\pi k R)^{1/2}} + \frac{\nu - i\omega}{k_z v} G & \frac{\nu - i\omega}{k_z v} & \frac{\nu - i\omega}{kv} \\ \frac{\nu - i\omega}{k_z v} G & \frac{\nu - i\omega}{kv} & 2k_z R \frac{\nu - i\omega}{kv} \end{array} \right), \tag{12,3}$$

где

$$F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \sin\left(2kR - \frac{\pi}{4} + x^2\right) \exp\left(-2x \sqrt{kR} \frac{\nu - i\omega}{k_z v}\right), \tag{12,4}$$

$$G = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \cos\left(2kR - \frac{\pi}{4} + x^2\right) \exp\left(-2x \sqrt{kR} \frac{\nu - i\omega}{k_z v}\right). \tag{12,5}$$

С помощью этих формул можно показать, что благодаря малости угла φ оси η и z , а также ζ и $-y$ можно не различать. Кроме того, из (12,3) следует, что величина продольной части поля E_ζ значительно больше поперечной:

$$E_\zeta \approx -E_y \approx -\frac{1}{2k_z R} (GE_x + E_z). \tag{12,6}$$

Однако, несмотря на это, «перенормировка» (2,4) не играет существенной роли и

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \cong \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = x, \eta). \tag{12,7}$$

Из выражений (12,4), (12,5) следует, что асимптотическое поведение элементов $\sigma_{\alpha\beta}$ зависит от величины параметра

$$w = (kR)^{1/2} \frac{\nu - i\omega}{k_z v}. \tag{12,8}$$

В случае

$$|w| \ll 1 \tag{12,9}$$

имеем ³⁵

$$\sigma_{xx} = \frac{3ne^2}{2mk_z v k R} \left[1 - \sin(2kR) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} w \cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (12,10)$$

$$\sigma_{xz} = -\sigma_{zx} = \frac{3\pi ne^2}{2mk_z v (\pi k R)^{3/2}} \left[\cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) - w \sqrt{\pi} \cos(2kR) \right]; \quad (12,11)$$

Re σ_{xx} ответственна за диссипацию энергии волны. Она является резко осциллирующей функцией kR , принимая минимальные значения при

$$kR = \alpha_n \equiv \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12,12)$$

Эти осцилляции Re σ_{xx} обусловлены тем, что основную роль в поглощении играют электроны, в среднем движущиеся в фазе с волной. Скорость этих электронов в направлении магнитного поля

$$v_z \sim \frac{|\omega + iv|}{k_z}, \quad (12,13)$$

а разброс диаметров их орбит

$$\delta D = 2R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_z^2}{v^2}} \right) \cong R \frac{v_z^2}{v^2} \cong R \left| \frac{v - i\omega}{k_z v} \right|^2. \quad (12,14)$$

Таким образом, условие (12,9) является достаточным для того, чтобы разброс диаметров этих эффективных электронов был мал по сравнению с длиной электромагнитной волны. Поэтому в случае (12,9) все эффективные электроны находятся в одинаковых условиях относительно волны и величина σ_{xx} резко осциллирует при изменении kR .

В обратном предельном случае

$$|w| \gg 1 \quad (12,15)$$

имеется большой разброс диаметров орбит эффективных электронов на длине волны. Вследствие усреднения их вкладов амплитуда осцилляций σ_{xx} и σ_{xz} сильно уменьшается:

$$\sigma_{xx} = \frac{3ne^2}{2mk_z v k R} \left[1 - \frac{1}{w \sqrt{\pi}} \sin\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (12,16)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3\pi ne^2}{2mk_z v (\pi k R)^{3/2}} \frac{\sin\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right)}{2w^2}. \quad (12,17)$$

§ 13. Низкочастотные волны с дискретным спектром

Рассмотрим сначала случай низких частот $\omega \ll v$ и будем считать выполненным условие (12,9). Сравним минимальное значение σ_{xx} с величиной σ_{xz} . При $kR = \alpha_n$

$$\frac{\sigma_{xx}^{\min}}{|\sigma_{xz}|} = \frac{2v}{\varphi \Omega}. \quad (13,1)$$

Если это отношение является малым, т. е. если угол φ удовлетворяет условиям

$$\frac{v}{\Omega} \ll \varphi \ll \frac{1}{\alpha_n}, \quad (13,2)$$

то недиссипативная проводимость σ_{xz} оказывается значительно больше диссипативных членов σ_{xx}^{\min} и σ_{zz} . Другими словами, для значений

волнового вектора

$$k_n = \frac{\alpha_n}{R} \quad (13,3)$$

эффективная диэлектрическая проницаемость электронного газа становится вещественной. Поэтому в металле оказывается возможным распространение волн с дискретным спектром. Допустимые значения k , для которых исчезает затухание Ландау, определяются соотношением (13,3). Соответствующие частоты ω_n находим из дисперсионного уравнения (2,3). Учитывая (12,7) и полагая $k = k_n$, получаем

$$\omega_n = \frac{k_n^2 c^2}{4\pi |\sigma_{xx}(k_n)|} \equiv \left(\frac{8\pi}{9}\right)^{1/2} \left(\frac{v_a}{v}\right)^2 \alpha_n^{9/2} \varphi \Omega. \quad (13,4)$$

Относительное затухание волны

$$\Gamma_n(k) = -\frac{\text{Im } \omega}{\omega_n} = \frac{\sigma_{xx}(k)}{2 |\sigma_{xx}(k_n)|} = \frac{v}{\varphi \Omega} + (2\pi \alpha_n)^{1/2} \sin^2(kR - \alpha_n) \quad (13,5)$$

минимально при $kR = \alpha_n$ и резко возрастает при увеличении $|kR - \alpha_n|$. Ширина области k -пространстве, в которой существует слабо затухающая волна, определяется условием

$$\Gamma_n(k) \ll 1. \quad (13,6)$$

При нарушении неравенства $v \ll \varphi \Omega$ даже минимальное значение относительного затухания Γ_n становится больше или порядка единицы, и волна быстро затухает.

Подставляя спектр волны (13,4) в уравнения Максвелла (1,7), нетрудно показать, что поперечная часть электрического поля волны поляризована по кругу: $E_x \approx iE_z$. Величина же продольного поля E_y должна быть найдена из соотношения (12,6).

Область существования волны определяется условиями (13,2) и неравенством $\omega_n \ll v$. Для типичных металлов ($n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $m \sim 10^{-27} \text{ г}$) они выполняются в полях $H \gtrsim 10^3 \text{ э}$ при углах φ порядка градуса и длине свободного пробега v/v порядка нескольких миллиметров.

§ 14. Высокочастотные волны с дискретным и непрерывным спектром

В области высоких частот $\omega \gg v$ элемент σ_{xx} (12,10) в минимумах осцилляций имеет заметную мнимую часть, пропорциональную ω . В³⁵ было показано, что выражения для ω_n и Γ_n в этом случае отличаются от (13,4) и (13,5) наличием дополнительного множителя $1/Q_n$, где

$$Q_n^2 = 1 + \left(\frac{32\pi}{9}\right)^{1/2} \left(\frac{v_a}{v}\right)^2 \alpha_n^{9/2}. \quad (14,1)$$

Поляризация же поперечной части электрического поля волны является эллиптической:

$$E_x = iQ_n E_z. \quad (14,2)$$

Рассмотрим изменение свойств этой волны при изменении магнитного поля H .

а) В области слабых полей, когда второе слагаемое в правой части (14,1) мало по сравнению с единицей, величина $Q_n \rightarrow 1$. При этом спектр, затухание и поляризация высокочастотной волны остаются такими же, как у низкочастотной (см. § 13).

б) В области более сильных полей, когда

$$Q_n^2 \gg 1, \quad (14,3)$$

имеем ³⁵

$$\omega_n = \left(\frac{2\pi}{9} \right)^{1/4} \frac{v_a}{v} \alpha_n^{9/4} \varphi \Omega, \quad (14,4)$$

$$\Gamma_n(k) = \frac{1}{2\omega_n} [v + \varphi \Omega (2\pi\alpha_n)^{1/2} \sin^2(kR - \alpha_n)]. \quad (14,5)$$

Поперечная часть электрического поля в волне поляризована вдоль оси x . Ее спектр и затухание определяются значением σ_{xx}^{\min} . Существование такой волны обусловлено тем, что при $kR = \alpha_n$

$$\operatorname{Re} \sigma_{xx}^{\min} \ll -\operatorname{Im} \sigma_{xx}. \quad (14,6)$$

в) В случае $\omega \gg v$ вещественная часть элемента σ_{zz} (см. (12,3)) мала по сравнению с его мнимой частью, которая является отрицательной. Это должно привести к существованию слабо затухающей волны. Однако благодаря заметной величине недиагонального элемента σ_{xz} имеется, вообще говоря, довольно сильная связь со второй волной, которая быстро затухает. Поскольку в случае $|w| \ll 1$ элемент σ_{xz} (12,11) является резко осциллирующей функцией kR , то при

$$kR = \beta_N \equiv \frac{\pi}{2} \left(N + \frac{3}{4} \right), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (14,7)$$

связь волн ослабляется и в дисперсионном уравнении можно пренебречь членом с σ_{xz} . При этом дисперсионное уравнение распадается на два уравнения. Одно из них определяет затухающую волну (при $k = \beta_N/R$ элемент σ_{xx} веществен). Другое:

$$k_N^3 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{zz}(k_N, \omega), \quad (14,8)$$

дает слабо затухающую волну с дискретным спектром и линейной поляризацией ³⁵:

$$\omega_N = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{v_a}{v} \beta_N^{5/2} \varphi \Omega, \quad k_N = \frac{\beta_N}{R}, \quad (14,9)$$

$$E_x = 0, \quad E_z = 2\varphi \beta_N E_y. \quad (14,10)$$

Помимо условий (12,2) и $\omega_N \gg v$ для ее существования должно выполняться неравенство

$$\frac{|\sigma_{xz}^{\max}|^2}{\sigma_{xx} |\sigma_{zz}|} \gg 1, \quad (14,11)$$

которое обеспечивает сильную связь волн при $k \neq k_N$. Наиболее жесткие из этих условий могут быть представлены в виде

$$\frac{v}{\varphi \Omega} \ll \frac{v_a}{v} \beta_N^{5/2} \ll 1, \quad \varphi \ll \frac{1}{\beta_N} \ll 1. \quad (14,12)$$

г) Наконец, если помимо условий (12,2) и $\omega_N \gg v$ выполняется неравенство

$$\varphi \ll \frac{\omega}{\Omega}, \quad (14,13)$$

то степень связи волн оказывается слабой (неравенство (14,11) заменяется на обратное). Уравнение (14,8) становится справедливым и при $kR \neq \beta_N$, и спектр волны из дискретного превращается в непрерывный ¹²:

$$\omega(k) = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{v_a}{v} (kR)^{5/2} \varphi \Omega. \quad (14,14)$$

Для существования волны со спектром (14,14) должны выполняться условия (1,20), (14,13) и неравенства

$$1 \ll \left(\frac{v}{v_a}\right)^{2/3} \left(\frac{\varphi\Omega}{\omega}\right)^{3/5} \ll \frac{\Omega}{\omega}, \quad (14,15)$$

которые получаются из (12,2), если выразить k через ω с помощью (14,14).

Проведенный анализ возможностей распространения слабо затухающих волн основан на использовании выражений (12,3) для элементов тензора проводимости. Эти асимптотические формулы получены для односвязной сферической поверхности Ферми. Довольно очевидно, что характер асимптотического поведения тензора $\sigma_{\alpha\beta}$, в частности, вывод о наличии резких осцилляций элементов σ_{xx} и σ_{xz} , сохранит силу и в случае не сферической, а выпуклой поверхности Ферми. Отличие состоит в том, что в (12,10), (12,11) в аргументах осциллирующих функций вместо $2kR$ будет стоять kD , где D — диаметр центрального сечения поверхности Ферми вдоль направления $[\mathbf{kN}]$. Кроме того, связанный с затуханием Ландау диссипативный ток будет направлен вдоль скорости электрона $\partial\varepsilon(\mathbf{p})/\partial\mathbf{p}$ в точке $\mathbf{pN} = 0$, $\mathbf{kv} = 0$ на поверхности Ферми $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$.

Из изложенных в § 11 соображений вытекает, что в случае многосвязной или невыпуклой поверхности Ферми амплитуда осцилляций проводимости будет малой. Действительно, в этом случае имеется не одна, а несколько групп «эффективных» электронов, в среднем движущихся в фазе с волной и удовлетворяющих условию $k_z v_z = \omega$. Поэтому σ_{xx} будет суммой выражений типа (12,10) для разных групп:

$$\sigma_{xx} \sim \sum_j a_j (1 - \sin kD_j). \quad (14,16)$$

Эта величина ни при каких вещественных значениях волнового вектора k в нуль не обращается*). Поэтому в случае многосвязной или невыпуклой поверхности Ферми волн с дискретным спектром нет. В металле может распространяться лишь волна с непрерывным спектром (14,14), если все диссипативные токи от разных групп «эффективных» электронов коллинеарны. Таким образом, предсказанные волны с дискретным спектром можно наблюдать лишь в металлах с выпуклой поверхностью Ферми. Этому требованию удовлетворяют щелочные металлы.

§ 15. Возбуждение волн с дискретным спектром.

Новый резонансный эффект

При падении внешней волны на поверхность металла имеет место скин-эффект. Резко неоднородное распределение электромагнитного поля у поверхности металла можно представить как суперпозицию плоских волн с различными значениями k . Благодаря малой глубине скин-слоя среди них всегда найдутся такие, которые удовлетворяют условию $kR = a_n$. Резонансное возбуждение собственных колебаний будет иметь место всякий раз, когда частота внешней волны ω совпадает с одной из собственных частот ω_n . Если частота ω фиксирована, то возбуждение волн с дискретным спектром происходит при значениях магнитного поля $H = H_n$, для которых $\omega_n(H) = \omega$.

В качестве примера можно рассмотреть возбуждение волны со спектром (14,4), в которой поперечная часть электрического поля поляризована

*) Исключение составляет случай, когда диаметры центральных сечений различных групп носителей находятся между собой в рациональном отношении. При этом спектр слабо затухающих волн является более «разреженным».

вдоль оси x . Для этой волны резонансные значения магнитного поля имеют вид

$$H_n = \frac{mc}{e} \left(\frac{\omega \omega_0 \nu}{\varphi c} \right)^{1/2} \left(\frac{9}{2\pi} \right)^{1/8} \alpha_n^{-9/8}. \quad (15,1)$$

Найдем сначала поле $\mathcal{E}_x(\zeta)$ на больших расстояниях от поверхности металла $\zeta = 0$. Это поле характеризуется функцией

$$T_{xx}(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k^{5/2} \cos k\zeta}{k^{9/2} - \left(\frac{H_n}{H} \right)^4 k_n^{9/2} [1 + 2i\Gamma(k)]}, \quad (15,2)$$

где $k_n = \alpha_n/R$, а выражение для $\Gamma(k)$ определяется формулой (14,5), в которой ω_n нужно заменить на ω . Введем «расстройку» резонанса

$$\Delta = \frac{8}{9} \frac{H - H_n}{H_n} \quad (|\Delta| \ll 1) \quad (15,3)$$

и новую переменную интегрирования $\tau = (k/k_n)^{1/2}$. В области резонанса ($\Delta \rightarrow 0$) основной вклад в $T_{xx}(\zeta)$ вносит небольшая окрестность полюса подынтегральной функции, находящегося около точки $\tau = 1$ на плоскости комплексного переменного τ . Поэтому функцию $T_{xx}(\zeta)$ можно приближенно представить в форме

$$T_{xx}(\zeta) \approx -\frac{2}{\pi k_n} \int_0^{\infty} \frac{d\tau \tau^9 [\exp(ik_n \zeta \tau^2) + \exp(-ik_n \zeta \tau^2)]}{\tau^9 - \left[1 - \frac{9}{2} \Delta + \frac{9}{4} i\Gamma(\Delta) \right]}, \quad (15,4)$$

где

$$\Gamma(\Delta) = \frac{1}{2\omega} [\nu + (2\pi\alpha_n)^{1/2} \varphi \Omega \Delta^2]. \quad (15,5)$$

В первом слагаемом в (15,4) повернем контур интегрирования к прямой $\arg \tau = \pi/4$, а во втором — к прямой $\arg \tau = -\pi/4$. В результате получим сумму вычетов и интегралы вдоль прямых $\arg \tau = \pm \pi/4$. При больших ζ основной вклад в $T_{xx}(\zeta)$ дает первый вычет в точке

$$\tau_0 = 1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{i}{4} \Gamma(\Delta). \quad (15,6)$$

В окрестности резонанса, где $\Gamma(\Delta) \ll 1$, получаем

$$T_{xx}(\zeta) \approx -\frac{4i}{9} \frac{R}{\alpha_n \left[1 - \Delta + \frac{i}{2} \Gamma(\Delta) \right]} \exp \left\{ \frac{i\alpha_n \zeta}{R} \left[1 - \Delta + \frac{i}{2} \Gamma(\Delta) \right] \right\}. \quad (15,7)$$

Это означает, что на больших расстояниях от поверхности поле представляет собой плоскую монохроматическую волну с длиной

$$\lambda_n = \frac{2\pi R}{\alpha_n} \approx \frac{2\pi R_n}{\alpha_n}, \quad R_n = R \frac{H}{H_n}, \quad (15,8)$$

и малым затуханием, пропорциональным $\Gamma(\Delta)$. Далее, из (15,2) при $\zeta = 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ находим резонансные значения поверхностного импеданса:

$$Z_{xx}^{(n)} = \frac{16\pi}{9} \frac{\omega R_n}{\alpha_n c^2} \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9} \right). \quad (15,9)$$

Они слабо возрастают с увеличением n :

$$Z_{xx}^{(n)} \sim \alpha_n^{1/8}. \quad (15,10)$$

Это возрастание резонансных значений Z при уменьшении магнитного поля обусловлено увеличением длины волны (15,8) собственных электромагнитных колебаний. Отношение ширины резонансного максимума к расстоянию между соседними максимумами по порядку величины совпадает с относительной шириной области в k -пространстве, в которой волна затухает слабо.

Вдали от резонанса, когда $\Gamma(\Delta) \gg 1$, выражение для $T_{xx}(0)$ можно записать в виде

$$T_{xx}(0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk \cdot k^2}{k^4 - i\delta_{\text{eff}}^4 [1 - \sin(2kR)]}, \quad (15,11)$$

где

$$\delta_{\text{eff}} = \left(\frac{2}{3} \frac{v^2 c^2 \varphi}{\omega_0^2 \omega \Omega} \right)^{1/4} \quad (15,12)$$

представляет собой эффективную глубину проникновения электромагнитного поля в металл. Величина $T_{xx}(0)$ в этом случае была вычислена в ³⁶. При $\delta_{\text{eff}} \ll R$

$$Z_{xx}^{(\text{нерез})} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \gamma \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\omega \delta_{\text{eff}}}{c^2} \exp \left(\frac{3\pi i}{8} \right) \sim H^{-1/4} \omega^{3/4}, \quad (15,13)$$

где $\gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Таким образом, на плавную зависимость импеданса от магнитного поля (15,13) накладываются узкие максимумы, соответствующие резонансному возбуждению собственных колебаний со спектром (14,4). Отношение резонансного значения импеданса $\overline{Z}_{xx}^{(n)}$ к нерезонансному (15,13)

$$\frac{Z_{xx}^{(n)}}{Z_{xx}^{(\text{нерез})}} \approx \frac{R}{a_n \delta_{\text{eff}}} \approx \left(\frac{\varphi \Omega_n}{\omega} a_n^{1/2} \right)^{1/4} \gg 1. \quad (15,14)$$

На рис. 6 схематически показана зависимость импеданса от обратного магнитного поля.

Аналогичный характер имеет зависимость $Z_{\alpha\beta}$ от H и при возбуждении других слабо затухающих волн с дискретным спектром.

§ 16. Электромагнитные волны в окрестности циклотронных резонансов

За исключением § 5, мы рассматривали волны, частоты которых были много меньше циклотронной частоты носителей Ω . В § 5 было отмечено, что вблизи циклотронного резонанса существенную роль играют пространственная дисперсия и связанное с ней черенковское поглощение. Результаты § 5 относятся к металлам с малой концентрацией носителей (типа висмута). Для этих металлов характерна малая величина параметра $\omega_0 R/c = v/v_a$, который определяет роль пространственной дисперсии. Для типичных металлов актуальным является обратный случай

$$\frac{\omega_0 R}{c} \gg 1, \quad (16,1)$$

когда длина электромагнитной волны оказывается много меньше диаметра электронных орбит ($kR \gg 1$). Поэтому циклотронный резонанс в таких

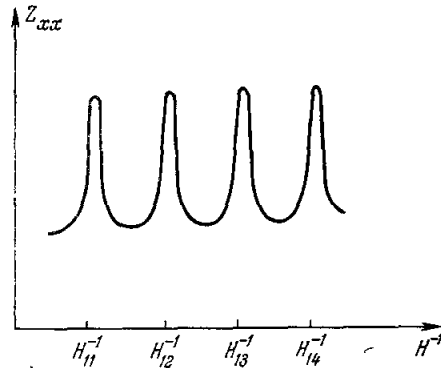


Рис. 6. Зависимость импеданса от обратного поля при возбуждении волны с дискретным спектром (14,4).

металлах возможен лишь в строго параллельном поверхности магнитном поле³⁷. При этом волновой вектор \mathbf{k} ортогонален вектору \mathbf{H} . В § 11 было отмечено, что в этом случае при $\omega \neq N\Omega$ среди электронов нет таких, которые хотя бы в среднем двигались бы в фазе с волной. Благодаря этому черенковское поглощение отсутствует. Математически это выражается в том, что пространственная дисперсия не влияет на вид множителей

$$(\omega - N\Omega + i\nu)^{-1}, \quad (16,2)$$

описывающих эффект резонансного взаимодействия электронов с электромагнитным полем.

Диссипация энергии волны при строго поперечном распространении $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ обусловлена лишь рассеянием носителей, которое характеризуется частотой столкновений ν . Поэтому в случае

$$|\omega - N\Omega| \gg \nu \quad (16,3)$$

величиной ν в (16,2) можно пренебречь, и диэлектрическая проницаемость проводника ϵ оказывается вещественной. Ее знак определяется знаком разности $\omega - N\Omega$. Таким образом, по одну сторону резонанса $\epsilon < 0$, и волна испытывает полное отражение. По другую сторону резонанса диэлектрическая проницаемость ϵ положительна, и, в соответствии с высказанной во введении общей точкой зрения, в металле могут распространяться слабо затухающие волны¹⁴. Это является и причиной резкой асимметрии резонансных кривых поверхностного импеданса при циклотронном резонансе³⁷.

Для простоты ограничимся рассмотрением изотропного закона дисперсии электронов. Из общего выражения (2,13) следует, что в рассматриваемом случае ($\mathbf{k} \parallel y, \mathbf{H} \parallel z$) элементы $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}$ тождественно равны нулю. Разлагая

$$\exp[ikR(\cos \tau - \cos \tau')]$$

в двойной ряд Фурье по переменным τ и по τ' и производя по ним интегрирование, получаем¹⁴

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{3ne^2}{2m} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu - i(\omega - N\Omega)} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \times$$

$$\times \begin{pmatrix} [J'_N(x)]^2 \sin^2 \theta & -J_N(x) J'_N(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \sin \theta & 0 \\ J_N(x) J'_N(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \sin \theta & -[J_N(x)]^2 \frac{N\Omega}{(kv)^2} (\nu - i\omega) & 0 \\ 0 & 0 & [J_N(x)]^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (16,4)$$

где $x = kR \sin \theta$, штрих означает производную функции Бесселя $J_N(x)$ по x .

Аргументы осциллирующих функций в асимптотическом выражении $J_N(x)$ и $J'_N(x)$ при $x \gg 1$ отличаются на $\pi/2$. Поэтому величина σ_{xy}^2 оказывается в kR раз меньше произведения $\sigma_{xx}\sigma_{yy}$ и тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ практически является диагональным. Его элементы определяются формулами¹⁴

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \frac{3\pi i}{4} \frac{ne^2}{mkv} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{\omega + i\nu}{\Omega} \right), \quad (16,5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{3ne^2(\nu - i\omega)}{m(kv)^2} \left[1 - \frac{\pi}{2} \frac{\omega + i\nu}{kv} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{\omega + i\nu}{\Omega} \right) \right]. \quad (16,6)$$

Из них следует, что дисперсионные уравнения для обеих поперечных волн одинаковы и не связаны друг с другом:

$$k^2 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{xx} \quad (16,7)$$

Волна, электрический вектор которой поляризован вдоль поля \mathbf{H} , в теории магнитоактивной плазмы⁶ называется обыкновенной. Вторая поперечная волна, в которой $\mathbf{E} \parallel x$, называется необыкновенной. Мы также будем использовать эту терминологию.

Вблизи циклотронных резонансов, когда

$$v \ll N\Omega - \omega \ll \Omega, \quad (16,8)$$

обе эти волны являются слабо затухающими. Их спектр и затухание имеют вид

$$\omega_N(k) = N\Omega \times \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2 \frac{1}{(kR)^3} \right], \quad (16,9)$$

$$- \text{Im } \omega = v. \quad (16,10)$$

Аналогичные результаты для невырожденной плазмы были получены Демидовым³⁸. Поскольку вблизи резонанса частота ω почти фиксирована условием (16,8), дисперсионное уравнение (16,9) удобнее решить относительно k :

$$(kR)^3 = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_0 R}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega}{N\Omega} \right)^{-1}. \quad (16,11)$$

Из (16,11) вытекает, что частоты $N\Omega$ являются предельными (резонансными) частотами. Условие $kR \gg 1$ автоматически удовлетворяется вблизи резонанса в случае (16,1).

Неравенства (16,8) обеспечивают малость дисперсии и затухания обыкновенной и необыкновенной волн. На рис. 7 схематически показана зависимость $\text{Re } \omega_N$ от k (сплошные линии).

Наряду с поперечными волнами вблизи циклотронных резонансов должна существовать еще третья, продольная волна¹⁴. Электрическое поле в ней является потенциальным и поляризовано вдоль волнового вектора \mathbf{k} . В отличие от случая малых kR , когда спектр продольной волны имеет большую «щель» ω_0 , при больших kR этот спектр смещается в область частот $N\Omega$, значительно меньших ω_0 . Подобные продольные волны должны существовать и в плотной высокотемпературной плазме при выполнении неравенств (16,8) и (16,1) (v следует заменить на $(2T/m)^{1/2}$).

Возможность распространения продольных волн обусловлена их слабой связью с поперечными:

$$|\sigma_{xy}^2| \ll |\sigma_{xx} \sigma_{yy}|. \quad (16,12)$$

Их спектр и затухание определяются дисперсионным уравнением

$$\epsilon_{yy} \equiv \frac{4\pi i \sigma_{yy}(k, H, \omega)}{\omega} = 0. \quad (16,13)$$

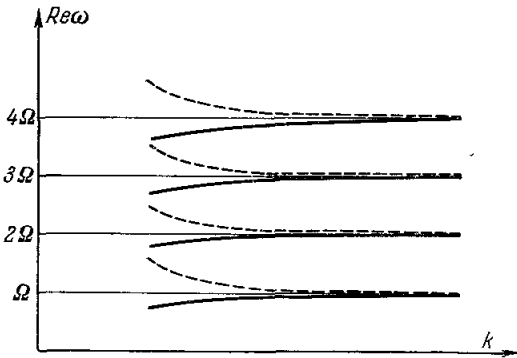


Рис. 7. Закон дисперсии слабо затухающих обыкновенной и необыкновенной волн (сплошные кривые) и продольной волны (пунктирные кривые) в окрестности циклотронных резонансов.

Таблица II

Волны	Условия существования	Спектр волны	Относительное загущение	Поляризация	Примечание
1. Низкочастотная волна с дискретным спектром Высокочастотные волны с дискретным спектром 2. Волна (13,4)	$\omega \ll v \ll \varphi\Omega \ll \Omega/\alpha_n$ $1 \ll \alpha_n$ $v \ll \omega_N, \varphi \ll \alpha_N^{-1} \ll 1$ $v \ll \varphi\Omega_N$ $\left(\frac{v_a}{v}\right)^2 \alpha_N^4 \ll \Omega_N$	$\omega_N = \left(\frac{8\pi}{9}\right)^{1/2} \left(\frac{v_a}{v}\right)^2 \times \varphi\Omega_N^2, k_N = \alpha_N/R$ $\omega_N = \left(\frac{8\pi}{9}\right)^{1/2} \times \left(\frac{v_a}{v}\right)^2 \frac{\varphi\Omega_N^{9/2}}{\Omega_N}, k_N = \alpha_N/R$	$\frac{v}{\varphi\Omega} + (2\pi\alpha_N)^{1/2} \times \sin^2(kR - \alpha_n)$ $\frac{1}{\Omega_N} \left[\frac{v}{\varphi\Omega} + (2\pi\alpha_N)^{1/2} \times \sin^2(kR - \alpha_n) \right]$	$E_x = iE_z$ $E_y = E_z/2\varphi\alpha_N$ $E_x = i\Omega_N E_z$ $E_y = \frac{4}{1 + \frac{4}{3}\alpha_N^2 \left(\frac{v_a}{v}\right)^2} \frac{E_z}{2\varphi\alpha_N}$	Существует в металле с одноосевой и выпуклой поверхностью Ферми То же
3. Волна (14,4)	$\omega_N \ll \varphi\Omega$	$\omega_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{v_a}{v} \varphi\Omega\beta_N^{5/2}, k_N = \beta_N/R$ $\omega = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \times \left(\frac{v_a}{v}\right) \varphi\Omega (kR)^{5/2}$	$\frac{1}{2\omega_N} \left[v + \frac{4\varphi\Omega \sin^2(kR - \beta_N)}{\pi(1 - \sin 2\beta_N)} \right] \frac{v}{2\omega}$	$E_x = 0$ $E_y = E_z/2k_z R$	»
4. Высокочастотная волна с непрерывным спектром	$v \ll \omega, \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2/5} \left(\frac{v_a\varphi}{v}\right)^{3/5} \ll \left(\frac{\omega}{\Omega} \ll \varphi + \left(\frac{\Omega v_a}{\omega v}\right)^{2/5} \ll \varphi\right) \ll \frac{\omega}{\Omega} + \left(\frac{\Omega v_a}{\omega v}\right)^{2/5} \ll \varphi$ $v \ll N\Omega - \omega \ll \Omega, \frac{\omega_0 R}{c} \gg 1, \varphi \ll \frac{ N\Omega - \omega }{kR}$ $\omega < N\Omega$	$\omega_N = N\Omega \times \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_0 R}{c}\right)^2 \right]$ $\omega_N = N\Omega \times \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_0 R}{c}\right)^2 \right]$ $\omega_N = N\Omega \left(1 + \frac{1}{2kR} \right)$	v/ω_N v/ω_N v/ω_N	$E_x = E_y = 0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ $E_z = E_y = 0, \mathbf{E} \parallel [\mathbf{kH}]$ $E_x = E_z = 0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$	»
5. Обыкновенная волна	$\omega < N\Omega$				
6. Необыкновенная волна	$\omega < N\Omega$				
7. Продольная волна	$\omega > N\Omega$				

При выполнении условия

$$v \ll (\omega - N\Omega) \ll \Omega \quad (16,14)$$

оно дает

$$\omega_N(k) = N\Omega \left(1 + \frac{1}{2kR} \right), \quad \text{Im } \omega = -v. \quad (16,15)$$

В отличие от поперечных волн, дисперсия продольных волн является аномальной, т. е. их частота убывает с ростом k . На рис. 7 пунктирными линиями показан спектр продольной волны.

Обязательным условием существования всех трех волн является строгая перпендикулярность векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} :

$$|k_z v| < |\omega - N\Omega|. \quad (16,16)$$

Если неравенство (16,16) нарушается, то появляется большое черенковское поглощение. При этом циклотронный резонанс «размывается», а слабо затухающие волны исчезают.

В заключение раздела приведем сводную табл. II характеристик слабо затухающих волн, длина которых значительно меньше ларморовского радиуса.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957, § 46.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
3. G. Reuter, E. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. A195, 336 (1948).
4. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ 38, 161 (1960).
5. P. Agrain, Proc. Int. Conf. on Semicond. Phys., Prague, 1960, стр. 224.
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, 1960, гл. III.
7. R. Chambers, B. Jones, Proc. Roy. Soc. A270, 417 (1962).
8. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, М. И. Каганов, ЖЭТФ 45, 1081 (1963).
9. S. Buchsbaum, J. Galt, Phys. Fluids 4, 1514 (1961).
10. А. А. Веденов, УФН 84, 533 (1964).
11. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 63 (1956).
12. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ЖЭТФ 45, 610 (1963).
13. В. Г. Скобов, ФТТ 6, 2297 (1964).
14. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ФТТ 6, 1104 (1964).
15. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ЖЭТФ 46, 1106 (1964).
16. R. Dingle, Physica 19, 311 (1953).
17. Л. А. Фальковский, ЖЭТФ 46, 1820 (1964).
18. R. Bowers, C. Legendy, F. Rose, Phys. Rev. Letts. 7, 339 (1961).
19. F. Rose, M. Taylor, R. Bowers, Phys. Rev. 127, 1122 (1962).
20. M. Taylor, J. Merrill, R. Bowers, Phys. Rev. 129, 2525 (1963).
21. J. Merrill, M. Taylor, J. Goodman, Phys. Rev. 131, 2499 (1963).
22. P. Gotti, P. Wyder, A. Quattronani, Phys. Letts. 1, 50 (1962).
23. A. Libchaber, R. Veilex, Phys. Rev. 127, 774 (1962).
24. J. Aubrey, R. Chambers, J. Phys. Chem. Solids 3, 128 (1958).
25. J. Galt, M. Yager, F. Merritt, B. Getlin, Phys. Rev. 114, 1396 (1959).
26. М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Р. Т. Мина, ЖЭТФ 44, 2190 (1963).
27. В. С. Эдельман, М. С. Хайкин, ЖЭТФ 45, 826 (1963).
28. М. С. Хайкин, Л. А. Фальковский, В. С. Эдельман, Р. Т. Мина, ЖЭТФ 45, 1704 (1963).

29. T. Kirsch, Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, 8, 205 (1963).
 30. G. Williams, Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, 7, 409 (1962); 8, 205 (1963).
 31. G. Smith, L. Gebel, S. Buchsbaum, Phys. Rev. **129**, 154 (1963).
 32. Г. С. Абылов, В. В. Веселаго, А. М. Прохоров, ДАН СССР **156**, 298 (1964).
 33. A. B. Pirard, Phil. Mag. **2**, 1147 (1957).
 34. Э. А. Канер, В. Г. Песчанский, И. А. Привороцкий, ЖЭТФ **40**, 214 (1961).
 35. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, Международный журнал «Физика» («Physics») **2** (1966).
 36. Э. А. Канер, ЖЭТФ **44**, 1036 (1963).
 37. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **32**, 896 (1957).
 38. В. П. Демидов, ДАН СССР **139**, 1342 (1961).
-