

# Geometria odwzorowań inżynierskich

## Wykład 01

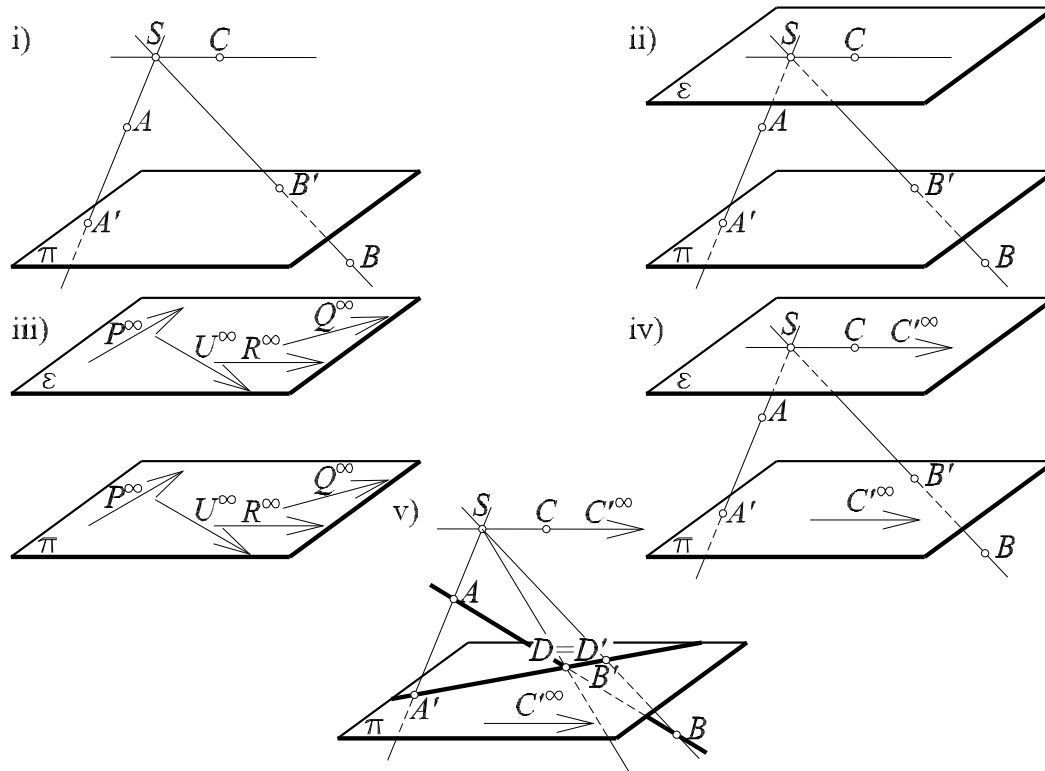
Edwin Koźniewski

*Zakład Informacji Przestrzennej*

### 1. O rzutach i elementach niewłaściwych w geometrii

Przy rzutowaniu przestrzeni euklidesowej  $E^3$  mamy do czynienia z *płaszczyzną*  $\pi$  zwaną *rzutnią* oraz *środkiem rzutowania*  $S$  lub *kierunkiem rzutowania*  $S^\infty$  nie leżącym na płaszczyźnie  $\pi$ . *Rzutem* punktu  $X$ , różnego od  $S$ , z punktu  $S$  na płaszczyznę  $\pi$  nazywamy punkt  $X'$  przecięcia tej płaszczyzny prostą  $SX$ . Prostą  $SX$  nazywamy *prostą rzutującą* lub *promieniem rzutującym* punktu  $X$ . Rzut jest więc przekształceniem postaci:  $f : E^3 - \{S\} \mapsto \pi$ . Dokładniej jest to przekształcenie  $f : E^3 - \varepsilon \rightarrow \pi$ , gdzie  $\varepsilon$  jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt  $S$  i równoległą do płaszczyzny  $\pi$ . Rzutem punktu  $A$  jest punkt  $A'$ , punktu  $B$  jest punkt  $B'$ , zaś punkt  $C$  nie ma rzutu ponieważ  $C \in \varepsilon$  (rys. 1-01). Promień  $SC$  nie przecina płaszczyzny  $\pi$ . Wygodniej byłoby jednak, gdyby wszystkie punkty, oprócz punktu  $S$  miały swoje rzuty. Musimy więc umówić się, że prosta  $SC \parallel \pi$  ma z rzutnią punkt wspólny. "Punkt" taki, a w rzeczywistości kierunek, nazywać będziemy *punktem w nieskończoności* lub *punktem niewłaściwym* w odróżnieniu od dotychczasowych punktów, które nazywać będziemy *punktami właściwymi* lub krótko *punktami*. Punkty niewłaściwe oznaczать będziemy przez  $A^\infty, B^\infty, \dots$ . Dlaczego takie punkty nazywane punktami w nieskończoności o tym przekonują nas fotografie i rysunki (rys. 1-02, 1-03). Równoległe krawędzie korony drogi, krawędzie ścian budynku lub innego obiektu budowlanego "przecinają się" gdzieś bardzo daleko. Jest to zresztą jedna z własności rzutu środkowego na którego zasadzie oparte jest nasze widzenie. Punkty niewłaściwe mają te same własności geometryczne co punkty euklidesowe i w związku z tym nic nie stoi na przeszkodzie, by uznać je za "normalne" punkty. Na dowolnej prostej leży zatem dokładnie jeden punkt niewłaściwy (kierunek tej prostej). Prostą uzupełnioną punktem niewłaściwym nazywać będziemy *prostą rzutową*. Zbiór wszystkich punktów niewłaściwych (kierunków w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ ) nazywać będziemy *płaszczyzną niewłaściwą* i oznaczać przez  $\omega^\infty$ . Przestrzeń euklidesową uzupełnioną wszystkimi punktami niewłaściwymi nazywać będziemy *przestrzenią rzutową z wyróżnionymi elementami niewłaściwymi* i oznaczać będziemy przez  $P^3$  (t.j.  $P^3 = E^3 \cup \omega^\infty$ ). Wówczas rzut  $g$  przestrzeni rzutowej  $P^3$  na płaszczyznę właściwą  $\pi$  zapiszemy w postaci  $g : P^3 - \{S\} \mapsto \pi$

Po przyjęciu powyższej umowy na płaszczyźnie, i w przestrzeni geometrycznej, spełnione są na przykład takie własności: *każde dwie proste na płaszczyźnie przecinają się* lub *każda prosta w przestrzeni ma punkt wspólny z dowolną płaszczyzną*. Pozostają prawdziwe takie zdania



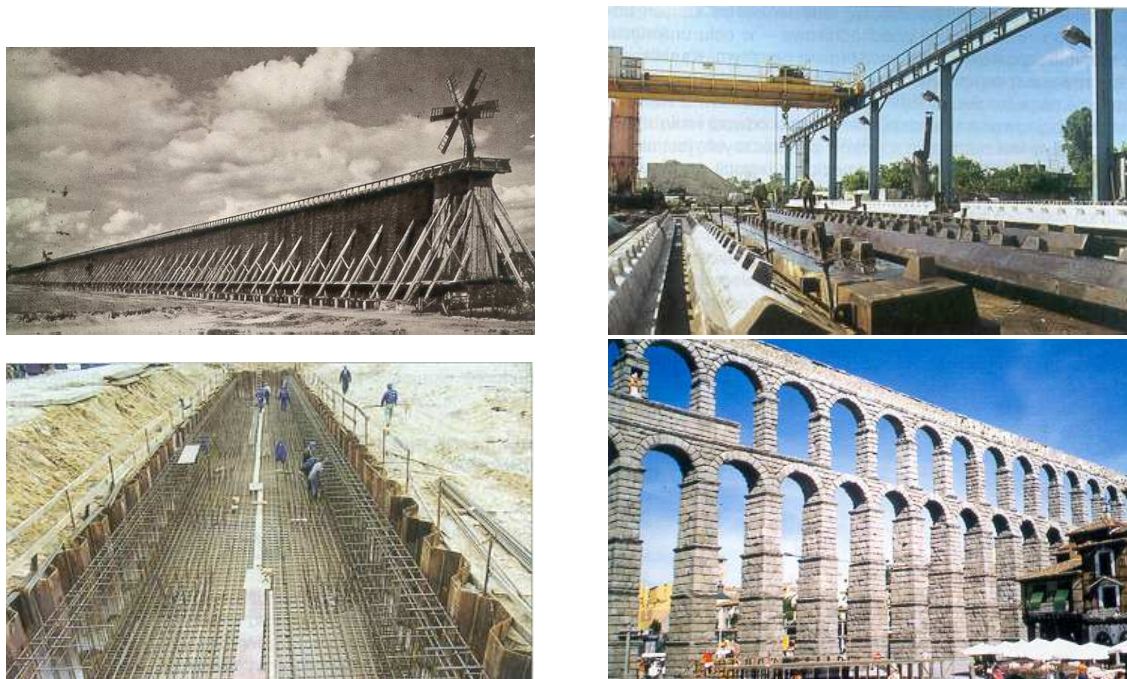
Rys. 1-01: W przestrzeni euklidesowej  $E^3$ : i) punkt  $C$  nie ma rzutu, ii) płaszczyzna  $\varepsilon$  jest zbiorem wszystkich punktów, które nie mają rzutów; w przestrzeni rzutowej  $P^3$ : iii) dwie płaszczyzny równoległe mają nieskończenie wiele wspólnych punktów niewłaściwych, mają więc wspólną prostą niewłaściwą (zbiór wszystkich kierunków równoległych do płaszczyzny), iv), v) rzutem punktu  $C$  jest punkt niewłaściwy  $C'^{\infty}$

jak: *przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta*. Co więcej, jeżeli zdanie, które mówi o punktach i prostych na płaszczyźnie (punktach i płaszczyznach w przestrzeni) jest prawdziwe, to również prawdziwe jest zdanie, gdy zamienimy punkty na proste, proste na punkty (punkty na płaszczyźnie, płaszczyzny na punkty w przestrzeni), zaś relację "przechodzi" na "leży na" i odwrotnie. Zasadę tę nazywamy *dualnością* a pary elementów (punkt, prosta) na płaszczyźnie, (punkt, płaszczyzna) w przestrzeni nazywamy *dualnymi*. Obiekty dualne na płaszczyźnie - to *trójkąt - trójbok, czworokąt - czworobok*. Jak wytłumaczyć analitycznie pojęcie punktu w nieskończoności? Czy proste równoległe mają wspólny punkt? <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Rozważmy układ równań przedstawiający dwie proste równoległe a następnie przekształćmy go wprowadzając dla punktu  $(x, y)$  o współrzędnych  $x, y$  współrzędne jednorodne  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x, y) & \leftrightarrow & (x_1, x_2, x_3) \\ x = \frac{x_1}{x_3}, & y = \frac{x_2}{x_3}, & x_3 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = x_3 \end{cases}$$

Układ powyższy ma rozwiązanie, jeżeli jedną z dwu pierwszych zmiennych potraktujemy jako parametr. Otrzymujemy wówczas rozwiązanie postaci  $(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 1, 0)$ , gdzie  $t = x_2, t \in R$ . Rozwiązanie to (nieskończenie wiele trójek liczb we współrzędnych jednorodnych) interpretujemy jako punkt niewłaściwy (trzecia współrzędna równa zero).



Rys. 1-02: Uzupelnienie przestrzeni elementami niewłaściwymi uzasadnia obserwacja powyższych fotografii przedstawiających: tężnię w Ciechocinku (1824-33), wytwórnię prefabrykatów struno-betonowych, wykonywanie fundamentu podpory Mostu Siekierskiego w Warszawie, akwedukt z czasów rzymskich w Seville (Hiszpania). Proste równoległe widzimy jako przecinające się w nieskończoności

## 2. Aparat rzutujący

Po tak przyjętych umowach *aparat rzutujący* stanowi para obiektów: (*punkt, płaszczyzna*) czyli (*środek rzutowania, rzutnia*), symbolicznie:  $(S, \pi)$ . W przypadku, gdy punkt  $S$  jest niewłaściwy ( $S = K^\infty$  (rys. 1-06)), otrzymujemy aparat *rzutu równoległego*  $(K^\infty, \pi)$ , zaś w przypadku, gdy punkt  $S$  jest właściwy otrzymujemy aparat *rzutu środkowego*  $(S, \pi)$ . W przyrodzie spotykamy w zasadzie modele rzutu środkowego. Są to m.in.: proces powstawania obrazu w oku, w aparacie fotograficznym, cień rzucony przez przedmiot przy oświetleniu punktowym (żarówka); natomiast uproszczonym modelem rzutu równoległego jest (w zadawalającym nas przybliżeniu) światło słoneczne.

Tak określony rzut

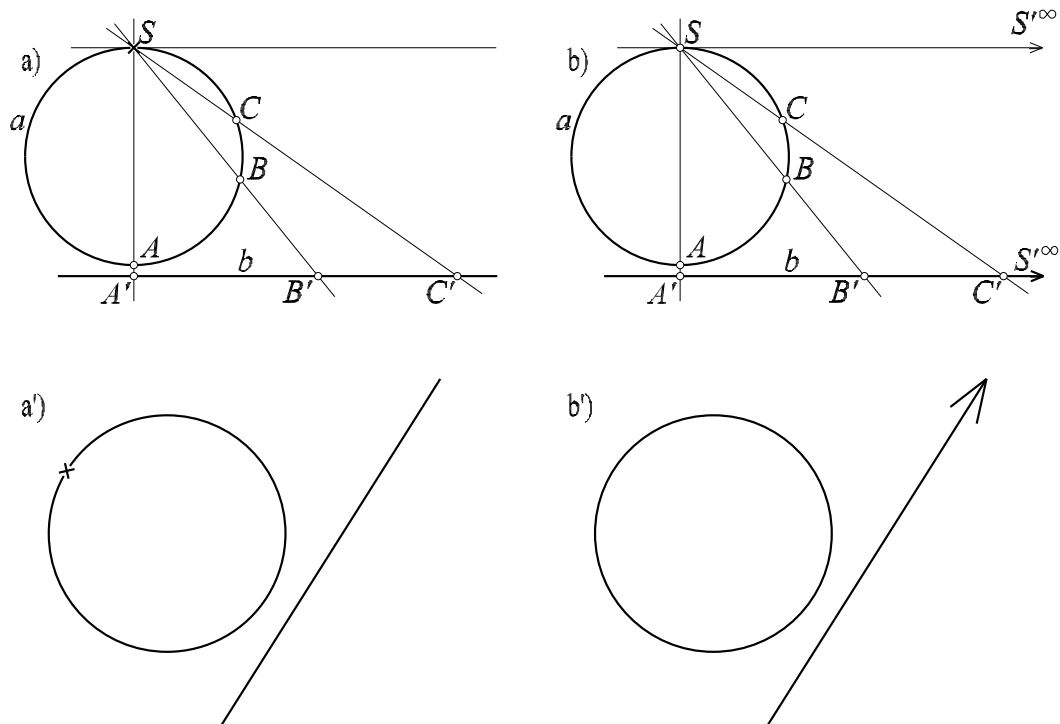
$$g : P^3 - \{S\} \mapsto \pi$$

jest przekształceniem przestrzeni  $P^3$  z wyłączeniem punktu  $S$ , na płaszczyznę  $\pi$ . Obowiązują więc wszystkie, znane z matematyki, własności odwzorowań. W teorii rzutowania interesującymi są dwie następujące własności:

$$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G} \mapsto g(\mathbb{F}) \subseteq g(\mathbb{G}) \quad (1)$$

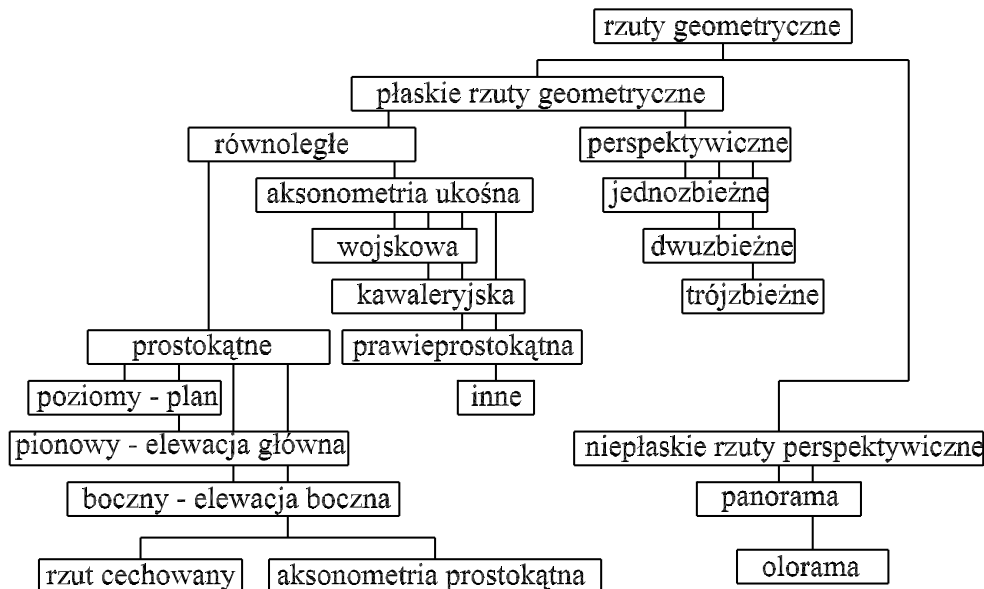
$$A \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \mapsto g(A) \in g(\mathbb{F}) \cap g(\mathbb{G}) \quad (2)$$

Warunek (1) oznacza w szczególności **przynależność rzutu punktu należącego do figury do rzutu tej figury**, warunek (2) oznacza **przecinanie się rzutów figur przecinających się**.



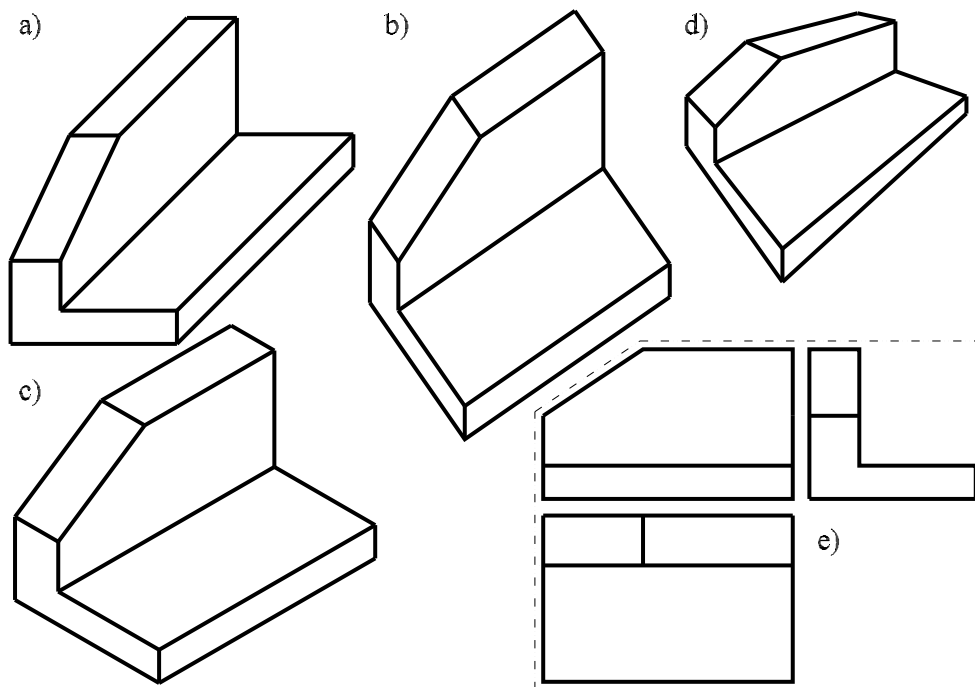
Rys. 1-03: Proste: euklidesowa i rzutowa; a) odwzorowanie okręgu na prostą euklidesową - punkt  $S$  nie ma swojego obrazu, a) prosta euklidesowa ma o jeden punkt mniej niż okrąg; b) odwzorowanie okręgu na prostą rzutową - obrazem punktu  $S$  jest punkt  $S'^{\infty}$ , b) prosta rzutowa ma tyle samo punktów co okrąg

### 3. Klasyfikacja rzutów



Rys. 1-04: Jeden z przykładów klasyfikacji rzutów

Na początku założyliśmy, że rzutnia jest płaszczyzną i takie rzuty (rzutowania) nazywamy *rzutami (rzutowaniami) płaskimi*. W przyrodzie i praktycznej działalności człowieka spotykamy rzuty (rzutowania), gdzie rzutnią jest pewna powierzchnia, np. powierzchnia walca,



Rys. 1-05: Przykłady różnych rzutów tego samego obiektu: a) aksonometria ukośna, b) dimetria wojskowa, c) izometria równokątna, d) perspektywa (dwuzbieżna), e) trzy rzuty prostokątne

powierzchnia sfery. O rzutach takich mówi się zwłaszcza w kontekście rzutu środkowego. Rzut środkowy na sferze (gdy sfera jest rzutnią) nazywamy *oloramą*, rzut środkowy na walcu (gdy rzutnią jest powierzchnia walca) nazywamy *panoramą*. Jedną z możliwych klasyfikacji rzutów płaskich najczęściej stosowanych w technice przedstawia rys. 1-04.

### 3.1. Rzut równoległy - niezmienniki

Aby osiąść umiejętności: wykonywania rzutów zadanych figur geometrycznych, odtwarzania (restytucji) tych figur na podstawie rzutów oraz dokonywania analizy własności figur na podstawie ich rzutów wygodnie jest znać własności, które nie zmieniają się przy rzutowaniu równoległym. Własności takie nazywać będziemy *niezmiennikami*. Niezmiennikami rzutu równoległego są:

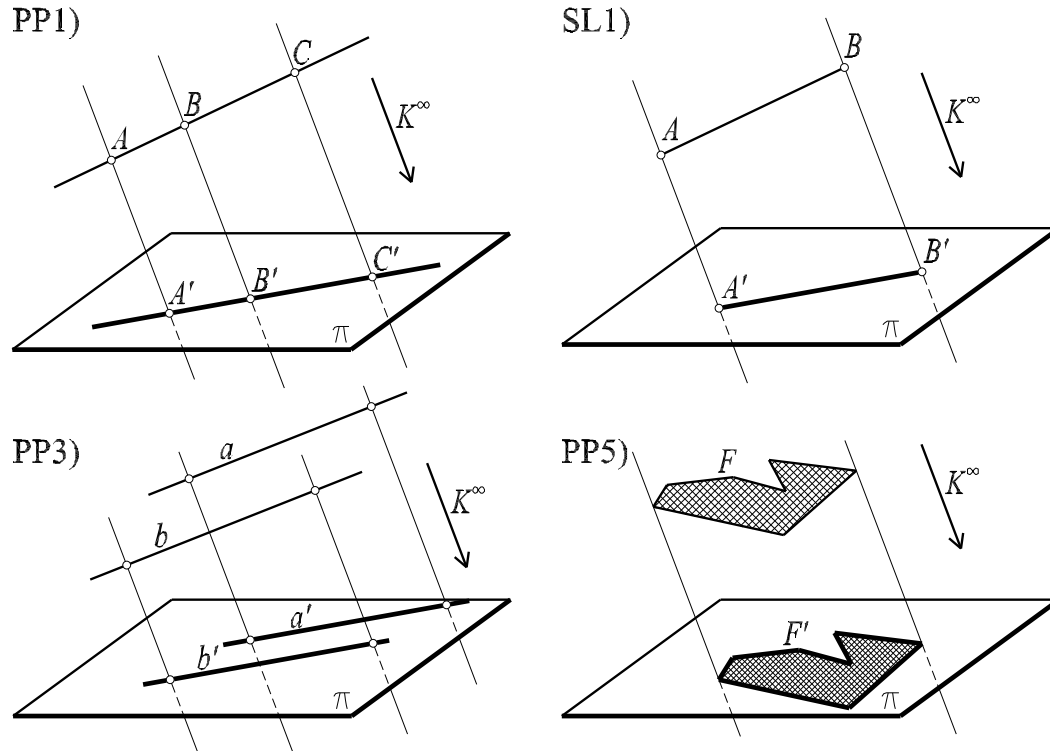
(N1) *współliniowość punktów*, czyli fakt: *w rzucie równoległym rzuty trzech punktów leżących na jednej prostej leżą na jednej prostej* (rys. 1-06).

Zanim sformułujemy drugi niezmiennik wprowadzimy wcześniej pojęcie *stosunku podziału odcinka*.

Niech dany będzie odcinek  $[AB]$  oraz punkt  $C \neq B$ . Stosunkiem podziału odcinka  $[AB]$  punktem  $C$  nazywamy liczbę  $^2(AB, C) = \begin{cases} \frac{AC}{BC} & \text{gdy } \neg \mathbf{B}(ACB), \\ -\frac{AC}{BC} & \text{gdy } \mathbf{B}(ACB), \end{cases}$  gdzie symbol  $\mathbf{B}(ACB)$  oznacza, że punkt  $C$  leży między punktami  $A$  i  $B$ ,  $\neg$  jest symbolem negacji.

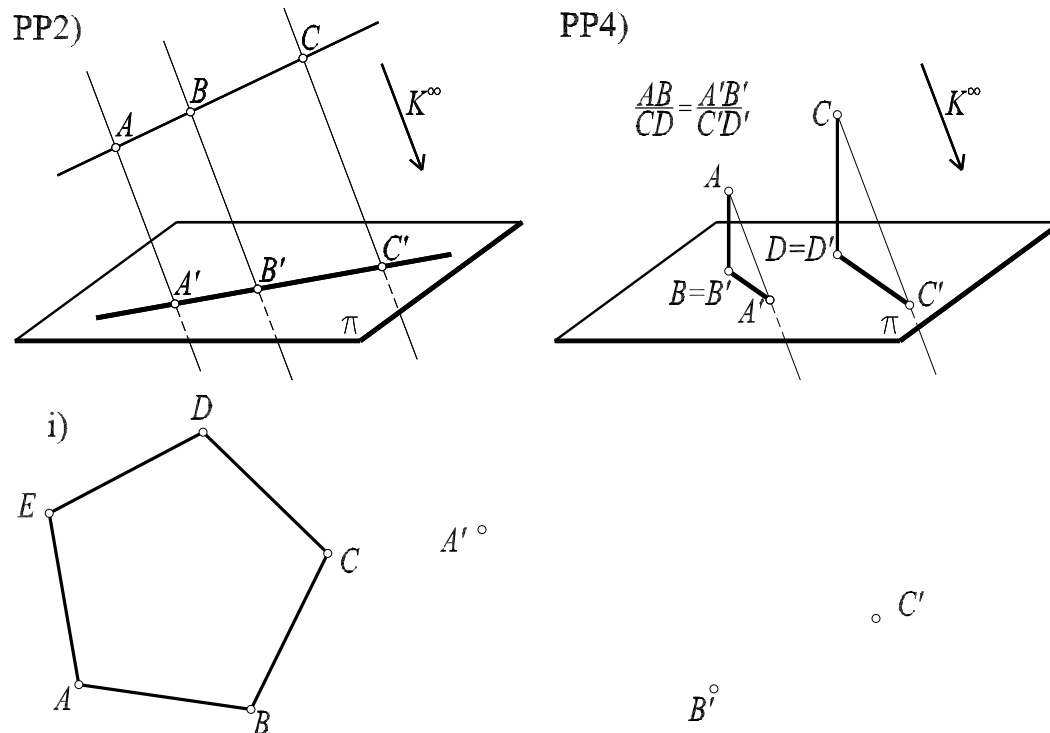
(N2) *stosunek podziału odcinka*, czyli fakt: *rzut równoległy zachowuje stosunek podziału odcinka*, czyli  $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$  (rys. 1-07).

<sup>2</sup>Definicja stosunku podziału odcinka ma swoje źródło w interpretacji wektorowej. Mianowicie stosunek podziału  $(AB, C)$  odcinka  $[AB]$  punktem  $C (C \neq B)$  określa się jako liczbę  $\lambda$  taką, że  $\vec{AC} = \lambda \vec{BC}$ . Stąd właśnie wynika, że stosunek podziału  $\lambda = (AB, C)$  odcinka  $[AB]$  punktem  $C$  leżącym między punktami  $A, B$  jest liczbą ujemną. Wszak wektory  $\vec{AC}, \vec{BC}$  mają wtedy przeciwne zwroty.

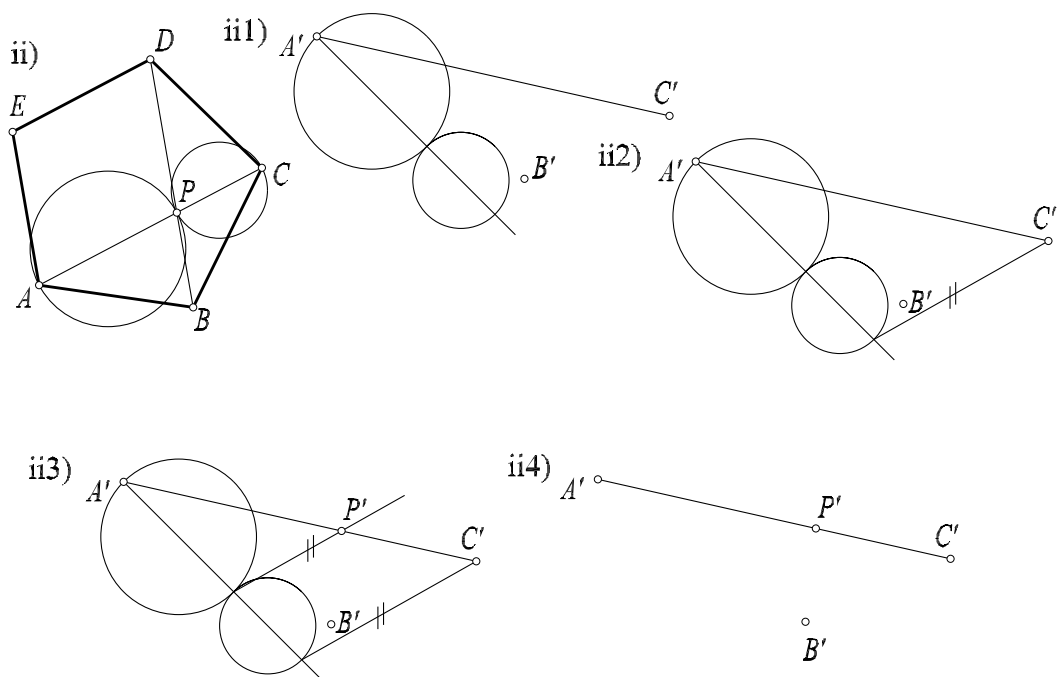


Rys. 1-06: Niezmienniki rzutu równoległego

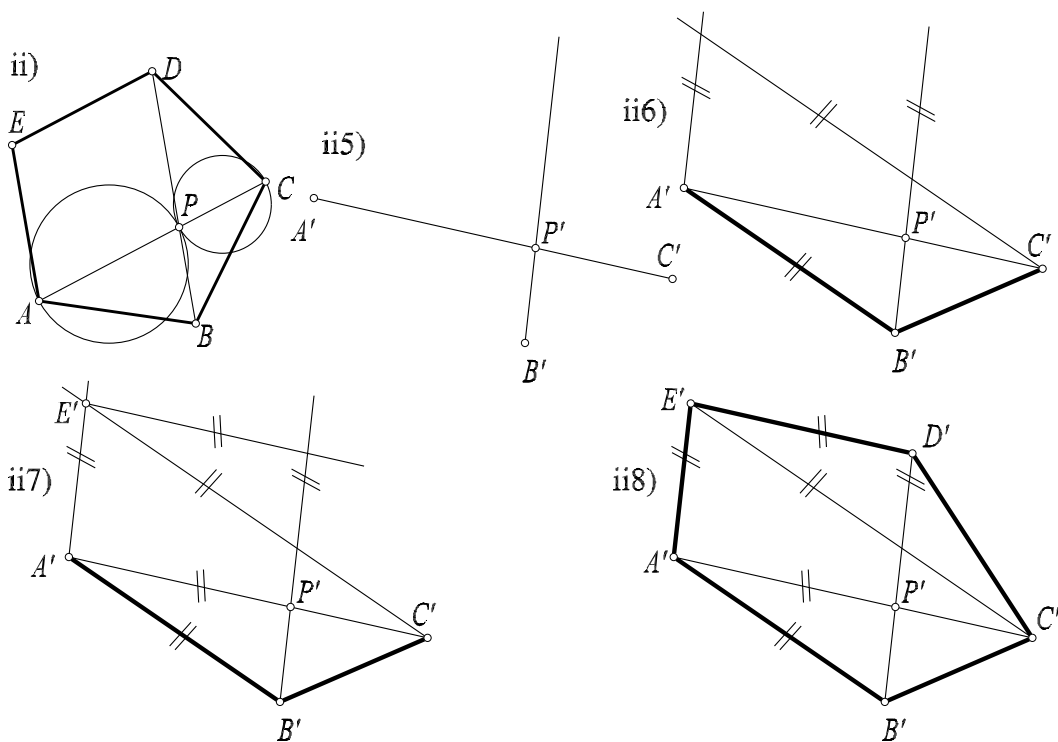
Niezmiennik (N2) w połączeniu z (N1) mówi w szczególności o tym, że



Rys. 1-07: Niezmienniki rzutu równoległego. Założenia do **Zadania 1**: Skonstruować rzut równoległy pięciokąta foremnego [ABCDE], gdy dane są obrazy,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  trzech jego wierzchołków A, B, C w tym rzucie



Rys. 1-08: Konstrukcja rzutu pięciokąta foremnego - przykład wykorzystania niezmiennika N2 - podział odcinka  $[A'C']$  w stosunku  $(AC, P)$ . Okręgi o środkach na odcinkach wskazują na równość odpowiednich odcinków



Rys. 1-09: Konstrukcja rzutu równoległego pięciokąta foremnego (cd.) - przykład trzykrotnego wykorzystania niezmiennika N3

(W1) rzutem równoległym prostej jest prosta, odcinka - odcinek (rys. 1-06).

(N3) równoległość prostych, tj. rzuty dwu prostych równoległych są prostymi równoległymi (rys. 1-06).

(N4) stosunek długości odcinków równoległych do siebie, nierównoległych do kierunku rzutu jest zachowany w rzucie równoległym (rys. 1-07).

(N5) związki miarowe figury płaskiej równoległej do rzutni, t.zn. rzutem równoległym figury płaskiej równoległej do rzutni jest figura do niej przystająca (rys. 1-06).

Rysunki (rys. 1-07i, 1-08, 1-09) ilustrują konstrukcję pięciokąta foremnego w rzucie równoległym na podstawie danych trzech obrazów w tym rzucie, tj. rozwiązanie następującego zadania:

**Zadanie 1** Dany jest rzut równoległy trzech wierzchołków pięciokąta foremnego. Uzupełnić obrazy pozostałych (dwóch) wierzchołków w tym rzucie.

#### 4. Twierdzenie o punkcie węzłowym

Przy kreśleniu przekrojów figur przestrzennych płaszczyznami wygodnie jest posługiwać się prostym twierdzeniem

**Twierdzenie 1** W danej trójce płaszczyzn krawędzie poszczególnych par tych płaszczyzn pokrywają się lub są trzema różnymi prostymi przecinającymi się w jednym punkcie.

Rozwiążmy następujące

**Zadanie 2** Dany jest ostrosłup czworokątny  $[ABCDW]$  o podstawie  $[ABCD]$  na płaszczyźnie  $\alpha$  oraz płaszczyzna  $\beta(KLM)$  określona przez punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na krawędziach  $[AW], [BW], [CW]$ . Wyznaczyć przekrój  $[ABCDW] \cap \beta$ .

*Rozwiązanie:* Rozważmy kolejno trzy trójki płaszczyzn  $\alpha, \beta, \gamma_1(ABW)$ ;  $\alpha, \beta, \gamma_2(BCW)$ ;  $\alpha,$

$\beta, \gamma_3(CDW)$  oraz odpowiednie diagramy. Diagram  $\underbrace{\gamma_1}_{(AB)} \alpha \xleftarrow{k(??) \rightarrow 1} \beta$  pokazuje, że proste

$(AB)$  i  $(KL)$  mają wspólny punkt 1 oraz szukana krawędź  $k(??)$  (symbole  $?, ?$  - oznaczają dwa nieznanne punkty szukanej prostej) przechodzi przez punkt 1 (rys. 1-10a1). Diagram

$\underbrace{\gamma_2}_{(BC)} \alpha \xleftarrow{k(1?) \rightarrow 2} \beta$  pokazuje, że proste  $(BC)$  i  $(LM)$  mają wspólny punkt 2 więc szukana

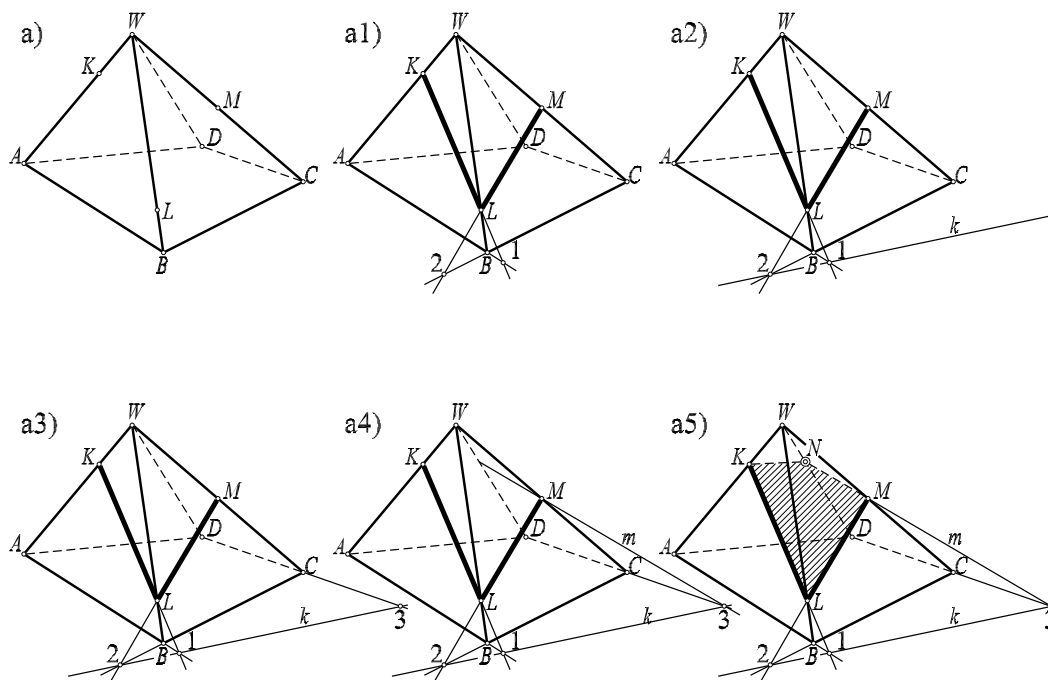
krawędź  $k$  przechodzi również przez punkt 2 (rys. 1-10a2). Diagram  $\underbrace{\alpha \beta}_{k} \xleftarrow{m(M?) \rightarrow 3} \gamma_3$

pokazuje, że proste  $k$  i  $(CD)$  mają wspólny punkt 3 oraz szukana krawędź  $m$  przechodząca przez punkt  $M$  przechodzi również przez punkt 3 (rys. 1-10a3, 1-10a4). Przecięcie  $(DW) \cap m = \{N\}$  prostych  $(DW), m$  daje szukany punkt  $N$  (rys. 1-10a4, 10a5).

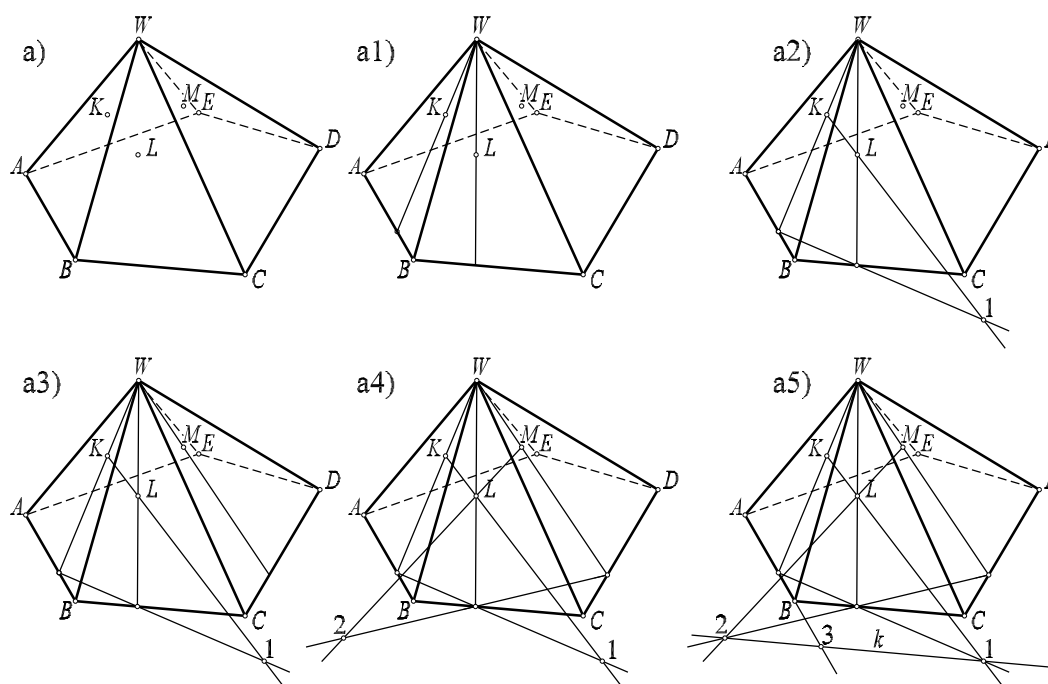
**Zadanie 3** Dany jest ostrosłup pięciokątny  $[ABCDEW]$  o podstawie  $[ABCDE]$  na płaszczyźnie  $\alpha$  oraz płaszczyzna  $\beta(KLM)$  określona przez punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na ścianach  $[ABW], [BCW], [CDW]$ . Wyznaczyć przekrój  $[ABCDEW] \cap \beta$ .

*Rozwiązanie:* W celu wyznaczenia pomocniczej prostej  $k$ , wcześniej punktów 1, 2, wyznaczamy płaszczyzny pomocnicze  $[KLW], [LMW]$ . Łącząc punkty 3,  $K$  kontynuujemy jak w zadaniu poprzednim (rys. 1-10)





Rys. 1-10: Konstrukcja przekroju ostrosłupa  $[ABCDW]$  płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na krawędziach bocznych  $[AW], [BW], [CW]$



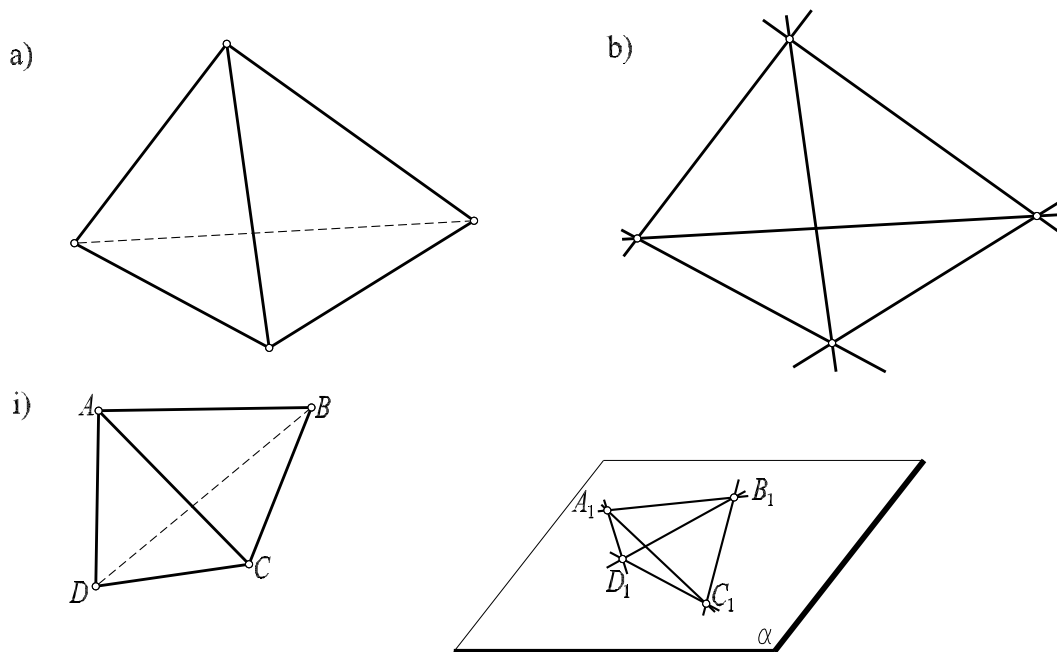
Rys. 1-11: Konstrukcja przekroju ostrosłupa  $[ABCDW]$  płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na ścianach  $[ABW], [BCW], [CDW]$

## 5. Twierdzenie Pohlke'go

Szkicując odręcznie lub za pomocą przyrządów obiekty przestrzenne być nie zastanawialiśmy się na ile dowolnie można wykonać to zadanie. Jakie zasady należy zachować, by np. odwzorowana figura mogła być uznana za rzut równoległy sześcianu? Odpowiemy teraz na to pytanie. Okazuje się, że przy tworzeniu rysunków - jak to często mówimy - poglądowych

mamy dość dużą swobodę. Prawdziwe jest następujące

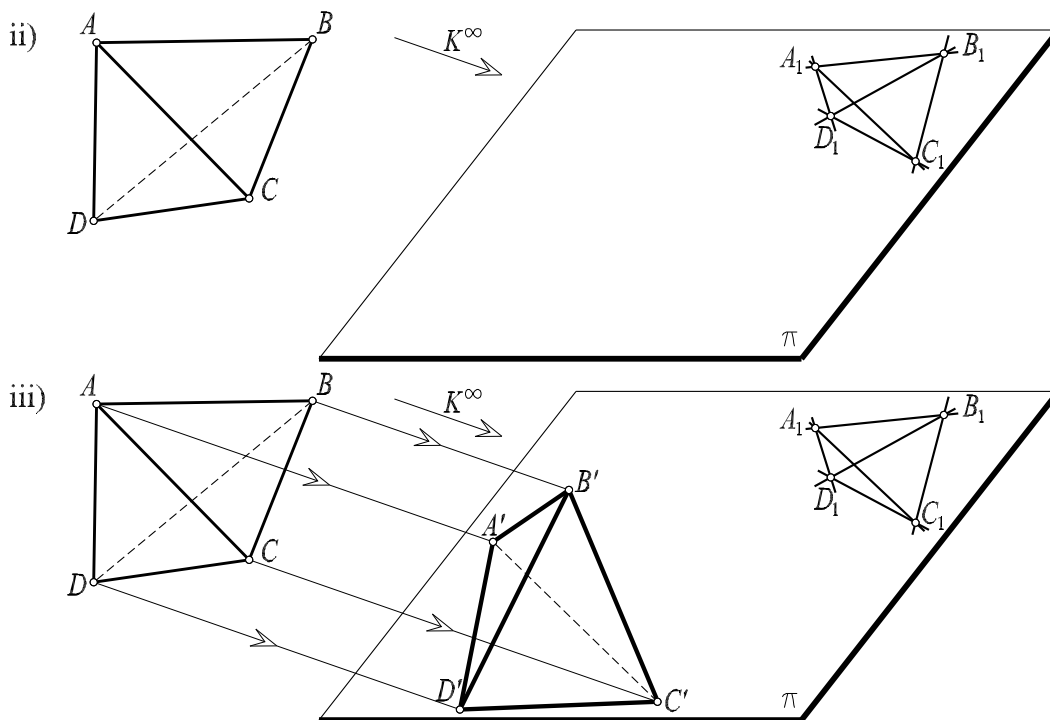
**Twierdzenie 2 (Pohlke'go)** *Każdy czworościan można rzutować równoległe na czworokąt zupełny podobny do z góry danego czworokąta zupełnego.*



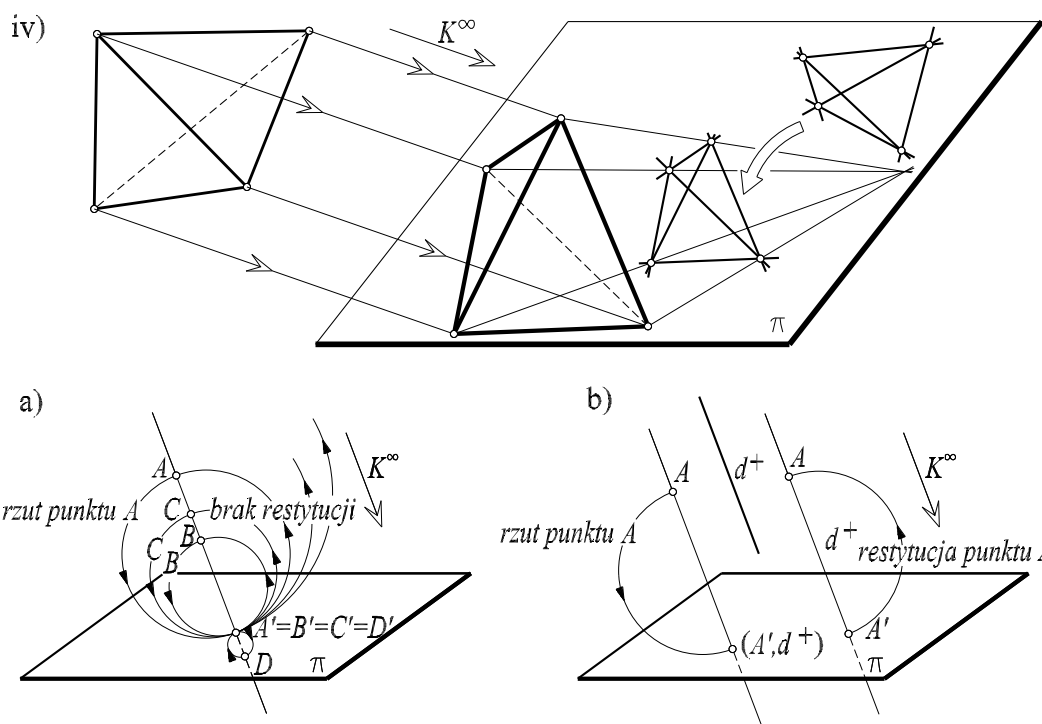
Rys. 1-12: a) Czworoscian przedstawiony w pewnym rzucie, b) czworokąt zupełny - zbiór czterech punktów, z których każde trzy są niewspółliniowe, i sześciu prostych przechodzących przez te punkty, i) założenia do twierdzenia Pohlke'go: dla dowolnego czworoscianu i czworokąta zupełnego zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$

Inaczej, każdy czworokąt zupełny może być uważany, przy pominięciu skali, za rzut równoległy danego czworoscianu. Dowód tego faktu oparty jest na własności: *Dowolny graniastostup można przeciąć płaszczyzną w trójkącie podobnym do z góry danego trójkąta* (dowody obu twierdzeń podane są w ostatniej części książki (Dodatek A)). Ilustrację twierdzenia Pohlke'go zawierają rysunki: rys. 1-12i, 1-13, 1-14iv. Zanim wykorzystamy tę własność do opisanie pewnej metody odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę zauważmy, że rzutem równoległym dowolnego punktu danego promienia rzutującego (prostej rzutującej) jest ten sam punkt. Rzut równoległy nie jest więc *odwzorowaniem odwracalnym (restytuowalnym)*, tzn. na podstawie rzutu  $A'$  punktu  $A$  nie można odtworzyć położenia samego punktu  $A$ . Ale wystarczy podać np. względną odległość w określonej skali i już punkt jest restytuowalny (rys. 1-14a, 1-14b). Oprócz rzutu równoległego potrzebna więc będzie jeszcze dodatkowa informacja. W zależności od tego jaka to będzie informacja otrzymamy różne metody odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę. Interesować nas będą te odwzorowania, które są użyteczne w pracy inżyniera. Pierwszą, którą omówimy jest *metoda aksonometryczna*. Metoda aksonometryczna polega na tym, że każdy punkt jest rzutowany wraz ze swoim środowiskiem, mianowicie z prostokątnym układem współrzędnych i swymi współrzędnymi.

Zauważmy, że układ współrzędnych  $Oxyz$  jest jednoznacznie określony, gdy znany jest początek układu  $O$  oraz trzy punkty jednostkowe osi:  $1_x, 1_y, 1_z$ . Układ współrzędnych jest więc określony, gdy dany jest czworoscian  $[O1_x1_y1_z]$ . Rzutując równoległe przestrzeń, czyli dowolny punkt  $P$  o współrzędnych geometrycznych (punktach)  $P_x, P_y, P_z$ , wraz z ustalonym układem

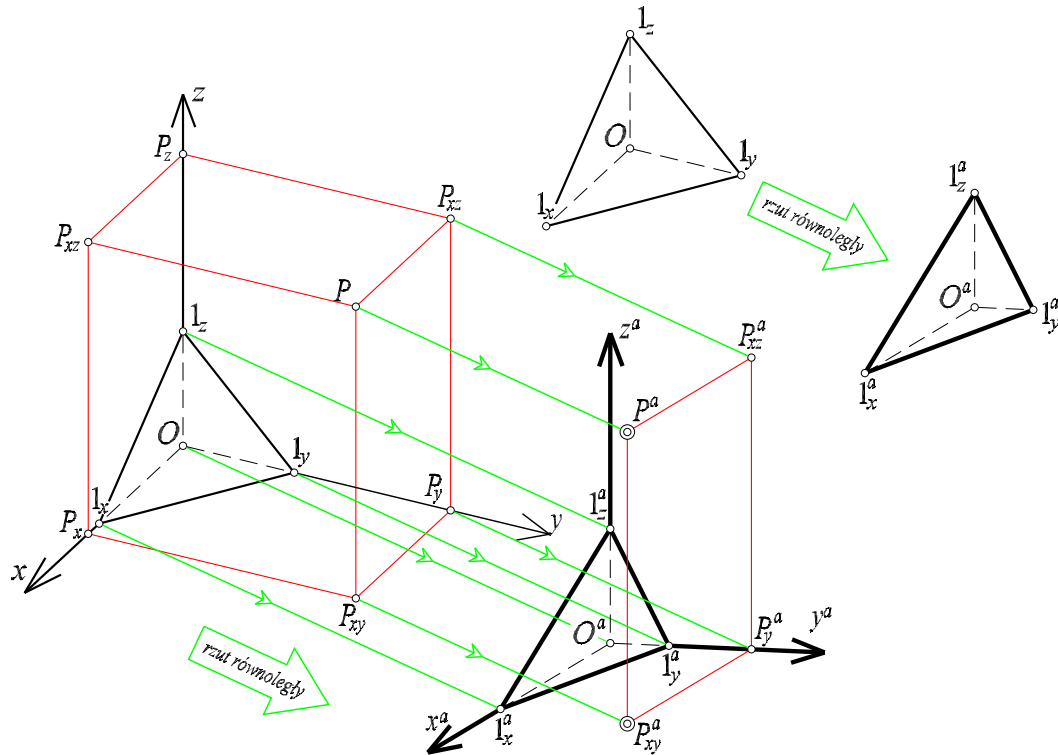


Rys. 1-13: Ilustracja twierdzenia Pohlke'go: ii) istnieją rzutnia  $\pi$  i kierunek  $K^\infty$ ..., iii) ...takie, że rzutem równoległym czworokąta jest czworokąt zupełny...

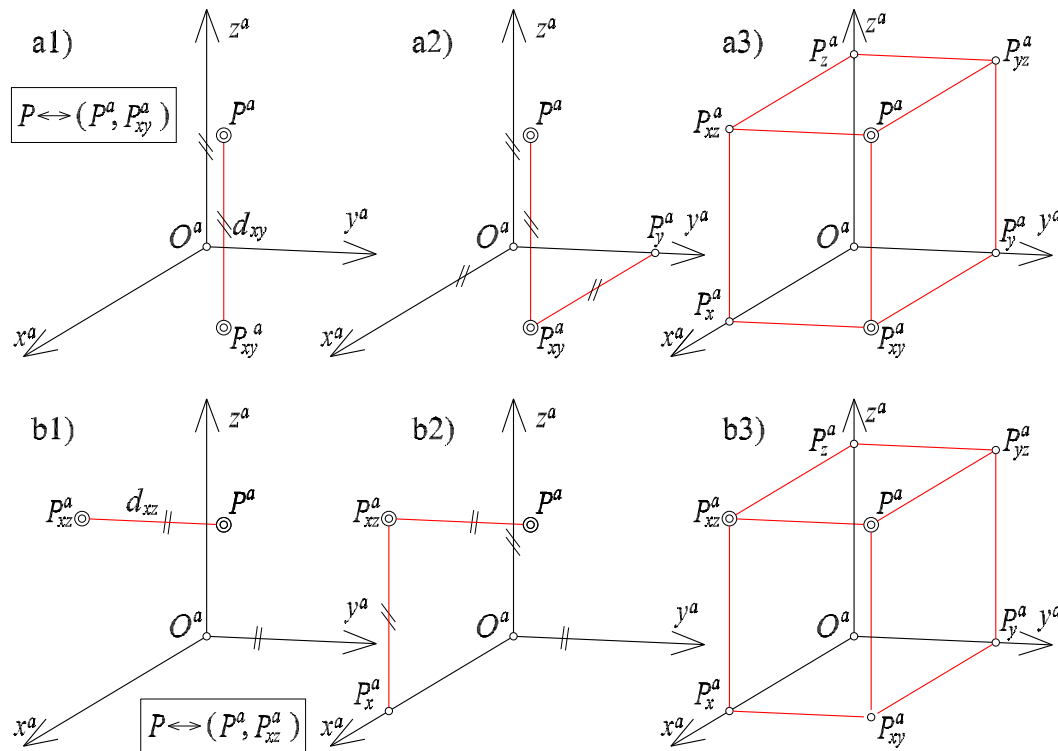


Rys. 1-14: Ilustracja twierdzenia Pohlke'go (cd.): iv) ...podobny do danego czworokąta zupełnego, a) rzut równoległy nie jest restytuowalny, b) restytucja punktu A jest możliwa, gdy oprócz rzutu  $A'$  znany jest odległość względną  $d^+$  punktu od rzutni mierzoną równoległe do kierunku rzutowania

współrzędnych w rzeczywistości rzutujemy trzy punkty  $P_x, P_y, P_z$  i czworokąt  $[O1_x1_y1_z]$ . Otrzymujemy, zgodnie z twierdzeniem Pohlke'go, czworokąt zupełny  $[O^a1_x^a1_y^a1_z]$  podobny do



Rys. 1-15: Ilustracja rzutu aksonometrycznego



Rys. 1-16: W aksonometrii punkt  $P$  identyfikowany jest przez parę punktów: rzut aksonometryczny  $P^a$  oraz rzut aksonometryczny  $P_r^a$  rzutu prostokątnego  $P_r$ , gdzie  $r = x, y, z, xy, yz, xz$ , punktu  $P$  na dowolną oś lub płaszczyznę układu aksonometrycznego: a)  $r = xy$ , b)  $r = xz$

dowolnie przyjętego czworokąta zupełnego oraz rzut równoległy  $P^a$  punktu  $P$ , czyli punkty

$P_x^a, P_y^a, P_z^a$ . Dowolność kształtu czworokąta zupełnego  $[O^a 1_x^a 1_y^a 1_z^a]$  indukuje tzw. *wektor zniekształcenia (deformacji)*  $[s_x, s_y, s_z]$ , którego współrzędne wyrażają następująco:

$$s_x = \frac{O^a 1_x^a}{O 1_x}, s_y = \frac{O^a 1_y^a}{O 1_y}, s_z = \frac{O^a 1_z^a}{O 1_z}. \quad (3)$$

Rzut równoległy zachowuje stosunek podziału odcinka. Zatem między współrzędnymi punktu  $P$  i współrzędnymi jego rzutu aksonometrycznego  $P^a$  zachodzą równości  $O^a P_x^a = s_x O P_x$ ,  $O^a P_y^a = s_y O P_y$ ,  $O^a P_z^a = s_z O P_z$  z uwzględnieniem uporządkowania punktów (rys. 1-15). Zauważmy ponadto, że aby wyznaczyć współrzędne dowolnego punktu  $P$  wystarczy znać położenie rzutu układu współrzędnych  $[O^a 1_x^a 1_y^a 1_z^a]$  i dwa punkty: rzut aksonometryczny  $P^a$  punktu  $P$  i rzut aksonometryczny  $P_r^a$  rzutu prostokątnego  $P_r$  punktu  $P$  na dowolną oś lub płaszczyznę układu. Mamy zatem wzajemnie jednoznaczność

$$P \longleftrightarrow (P^a, P_r^a), \quad (4)$$

gdzie  $r \in \{x, y, z, xy, yz, xz\}$  (rys. 1-16). Ponadto warto zauważyć, że parę  $(P^a, P_r^a)$  możemy równoważnie przedstawić jako parę  $(P^a, d_{r*})$ , co symbolicznie możemy zapisać

$$(P^a, P_r^a) \longleftrightarrow (P^a, d_{r*}), \quad (5)$$

gdzie  $r \in \{x, y, z, xy, yz, xz\}$  zaś  $* \in \{x, y, z\} - \{r\}$  dla  $r \in \{x, y, z\}$  oraz  $* = "$  (znak pusty), gdy  $r \in \{xy, xz, yz\}$ . Stąd położenie dowolnego punktu jest określone, gdy mamy jego rzut i odległość od pewnej płaszczyzny układu współrzędnych (dokładniej rzutu równoległego płaszczyzny układu współrzędnych).

Podobnie odcinek, prosta, półprosta w aksonometrii będą reprezentowane przez dwa swoje rzuty. I tak prosta  $p$  może być reprezentowana przez parę  $(p^a, p_r^a)$ , odcinek  $[AB]$  - przez parę  $([A^a B^a], [A_r^a B_r^a])$

Aparat rzutu aksonometrycznego określony jest przez układ osi  $O^a x^a y^a z^a$  oraz wektor zniekształceń (deformacji)  $[s_x, s_y, s_z]$ . Zgodnie z twierdzeniem Pohlke'go układ osi możemy przyjąć dowolnie, podobnie jak wektor zniekształceń. Pewne aparaty rzutu aksonometrycznego mają swój praktyczny sens i historyczne nazwy. Rozróżniamy aksonometrie:

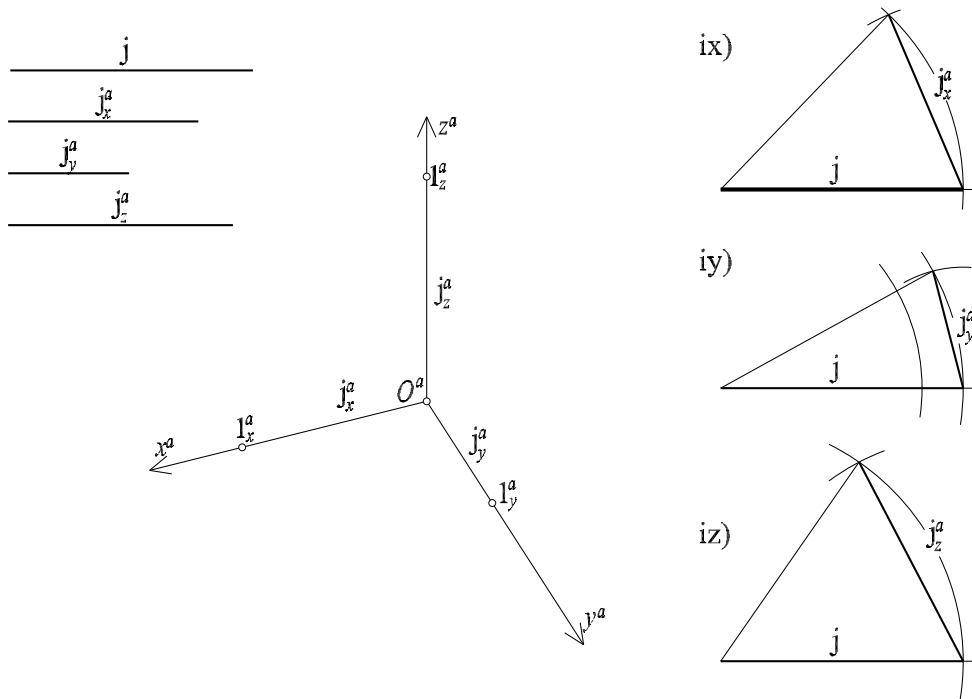
### 5.1. Rodzaje aksonometrii

**IR.** *Izometria równokątna.* Osie układu tworzą równe kąty ( $120^\circ$ ), stosunki skrótów są jednakowe i równe 1, tzn.  $s_x = s_y = s_z = 1$  (przy każdej oś oznaczamy wtedy symbolem "1:1" mówiąc, że skrót jest "jeden do jeden") (rys. 1-21i).

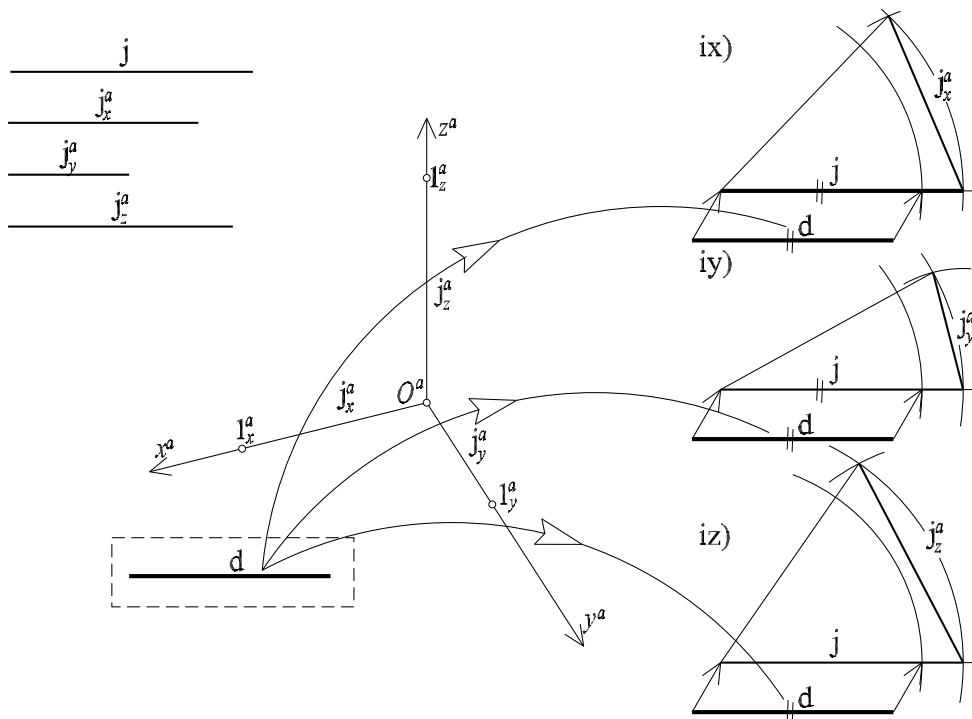
**IW.** *Izometria wojskowa.* Osie  $Ox, Oy$  są wzajemnie prostopadłe, stosunki skrótów są jednakowe i równe 1, tzn.  $s_x = s_y = s_z = 1$  (Rys. 1-21ii). Płaszczyzna  $Oxy$  jest izometryczna co jest konsekwencją równoległości płaszczyzn  $Oxy \parallel O^a x^a y^a$ .

**DK.** *Dimetria kawalerska.* Osie  $Oy, Oz$  są wzajemnie prostopadłe, oś  $Ox$  tworzy z pozostałymi kątami o mierze  $135^\circ$ , stosunki skrótów są  $s_y = s_z = 1, s_x = 1 : 2$  lub  $s_x = 2 : 3$  (rys. 1-21iii). Płaszczyzna  $Oyz$  jest izometryczna co jest konsekwencją równoległości płaszczyzn  $Oyz \parallel O^a y^a z^a$ .

**APP.** *Aksonometria prawieprostokątna.* Konstrukcje układu osi objaśnia rys. 1-21iv, stosunki skrótów przyjmuje się  $s_y = s_z = 1, s_x = 2 : 3$  lub  $s_x = 3 : 4$ .



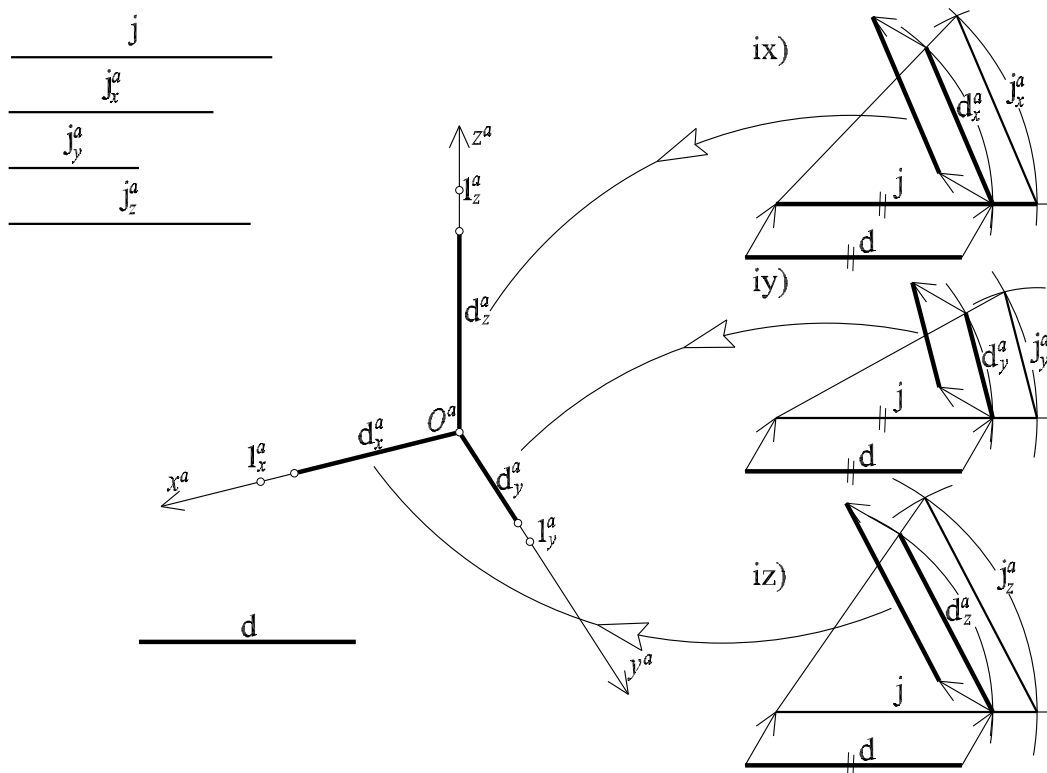
Rys. 1-17: Konstrukcja trójkątów skrótów dla poszczególnych osi przy danych obrazach odcinka jednostkowego w rzucie równoległym definiującym aksonometrię



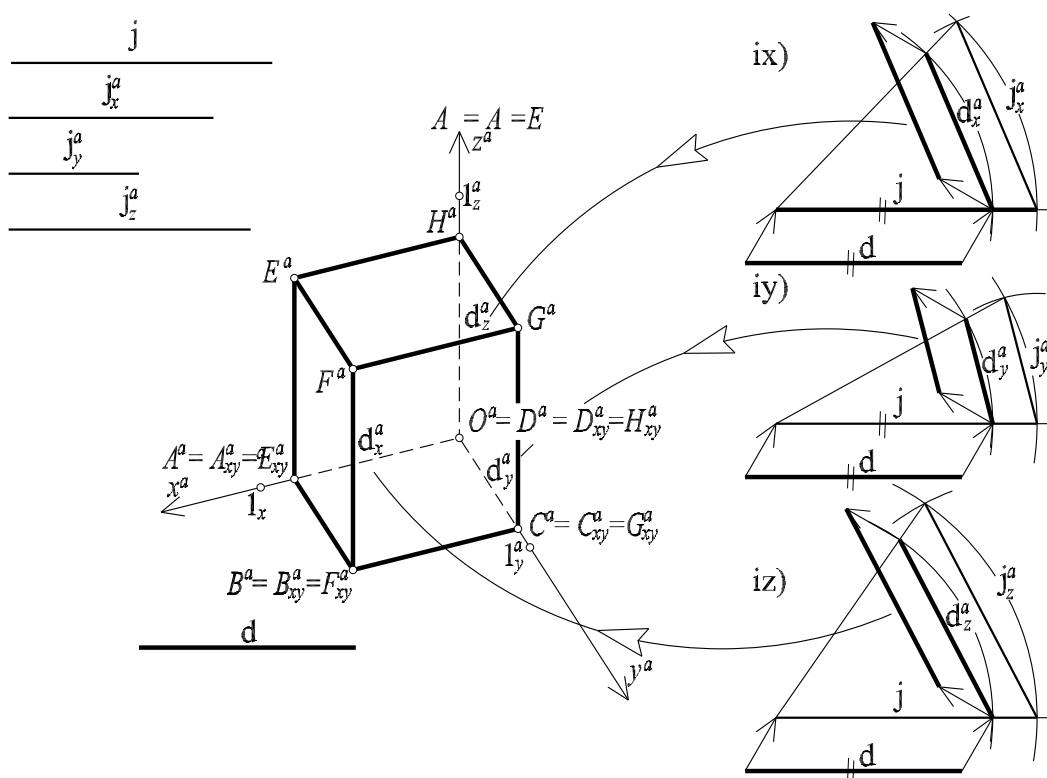
Rys. 1-18: Konstrukcja aksonometrii sześcianu o krawędzi równej odcinkowi o długości  $d$  przy użyciu skonstruowanych wcześniej trójkątów skrótów poszczególnych osi (cdn)

**5.1.1. (A\*) Aksonometria prostokątna**

*AP. Aksonometria prostokątna.* Osie układu aksonometrycznego są wysokościami z góry danego trójkąta  $[1_x^a 1_y^a 1_z^a]$  (ostrokątnego). Zasada aparatu rzutującego aksonometrii pros-

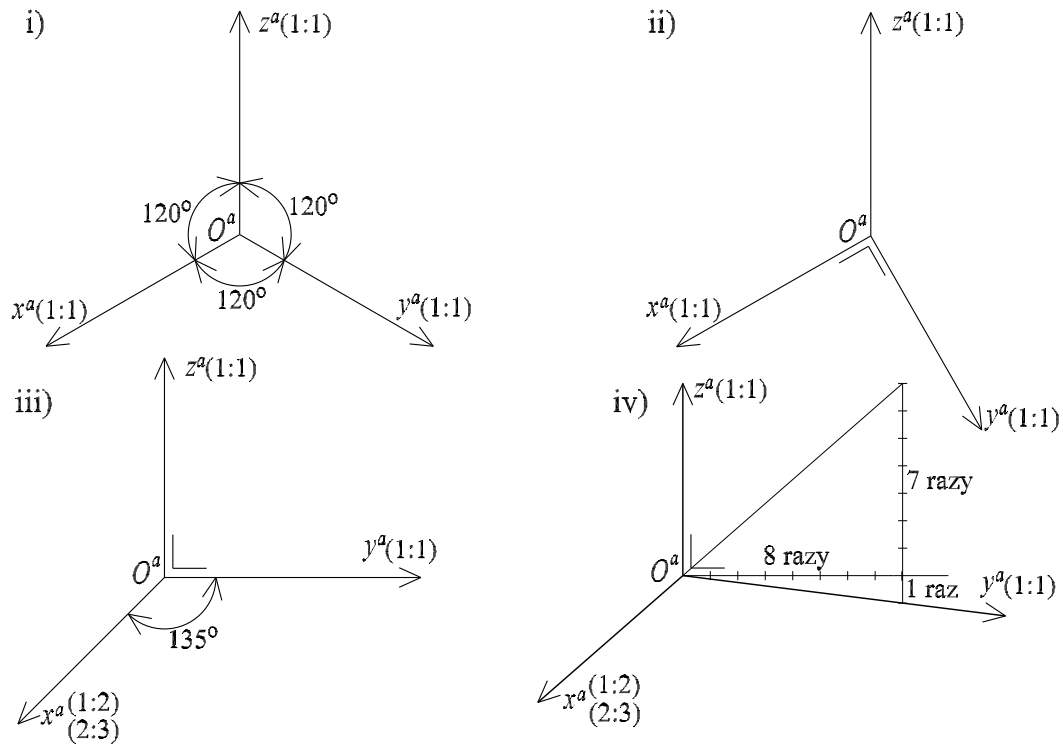


Rys. 1-19: Konstrukcja aksonometrii sześcianu (cdn)

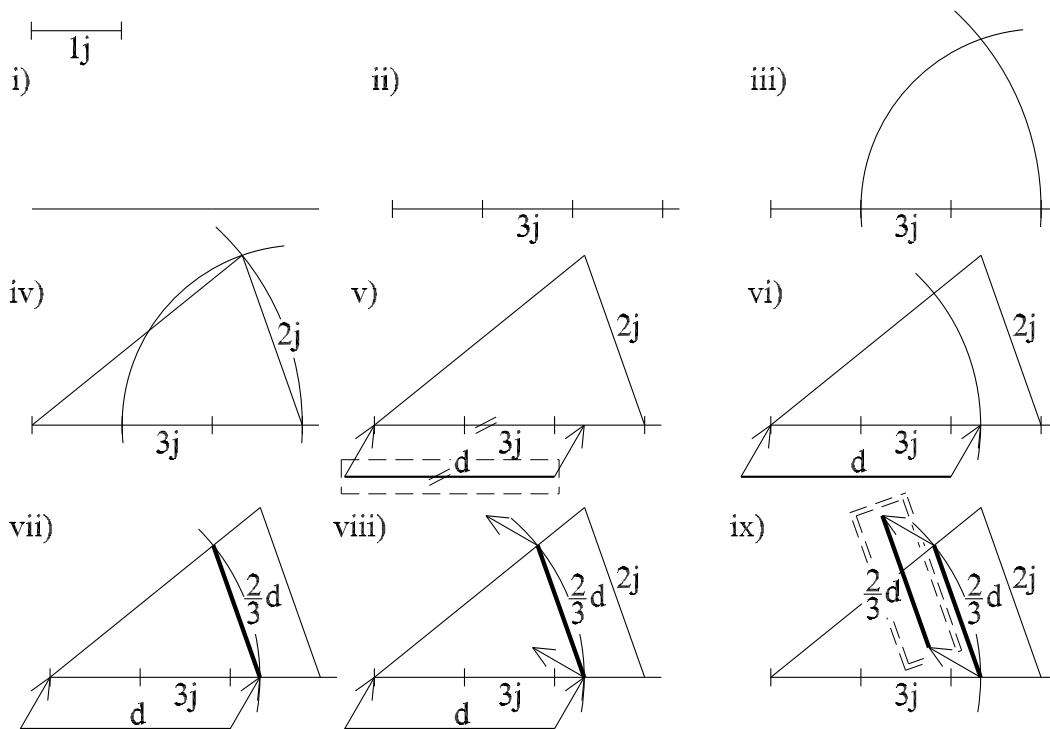


Rys. 1-20: Konstrukcja aksonometrii sześcianu

tokątnej opiera się na dwóch następujących własnościach (twierdzeniach) geometrycznych.  
**APW1** Trzy parami prostopadłe półproste o wspólnym początku można przeciąć płaszczyzną



Rys. 1-21: Rodzaje aksonometrii (sposób określania osi układu i skrótów na osiach): i) izometria równokątna, ii) izometria wojskowa, iii) dimetria kawalerska, iv) aksonometria prawieprostokątna

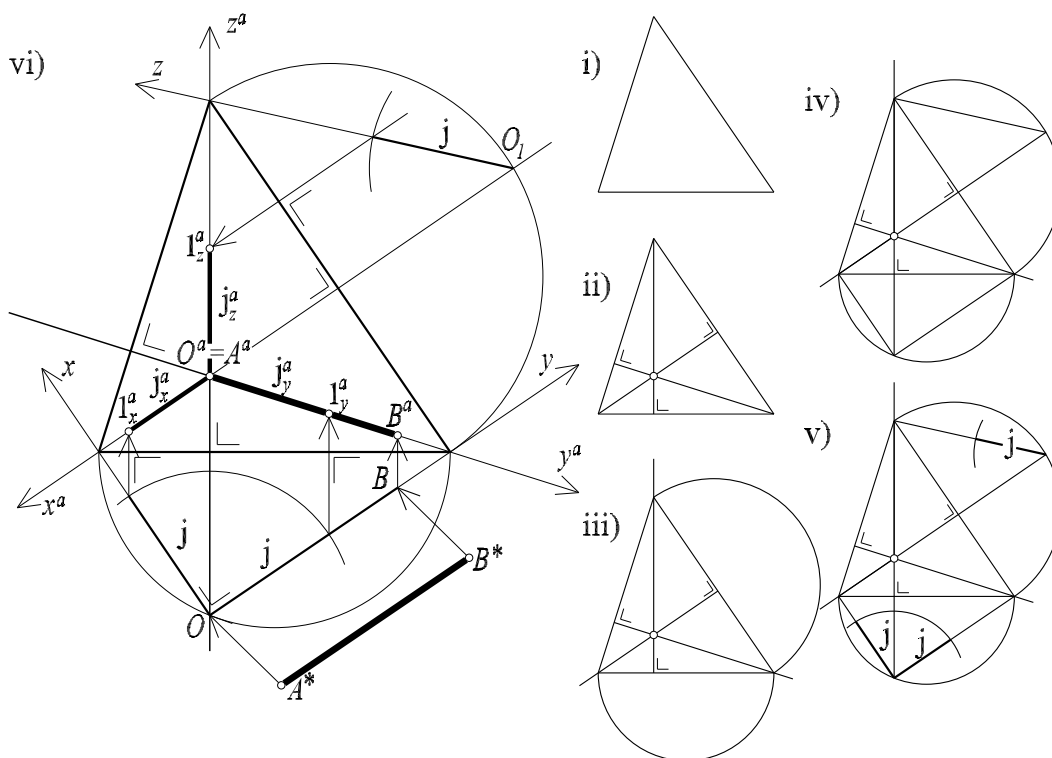


Rys. 1-22: Konstrukcja trójkąta skrótów dla skrótu 2:3 ( $s_x = \frac{2}{3}$ )

w dowolnym, z góry zadany trójkącie ostrokątnym. **APW2** Jeżeli trzy parami prostopadłe półproste  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  o wspólnym początku  $O$  przetniemy płaszczyzną  $\pi$  trójkącie  $[XYZ]$  (ostrokątnym), to rzutem prostokątnym punktu  $O$  na płaszczyznę  $\pi$  jest punkt przecięcia się



wysokości trójkąta  $[XYZ]$ . W aksonometrii prostokątnej kierunek rzutowania jest prostopadły



Rys. 1-23: Tworzenie układu osi i zasady skrótów na osiach aksonometrii prostokątnej

do rzutni aksonometrycznej. Osie i skrótory dla kierunków osi, tzn. układ aksonometryczny przyjmujemy w następujący sposób:

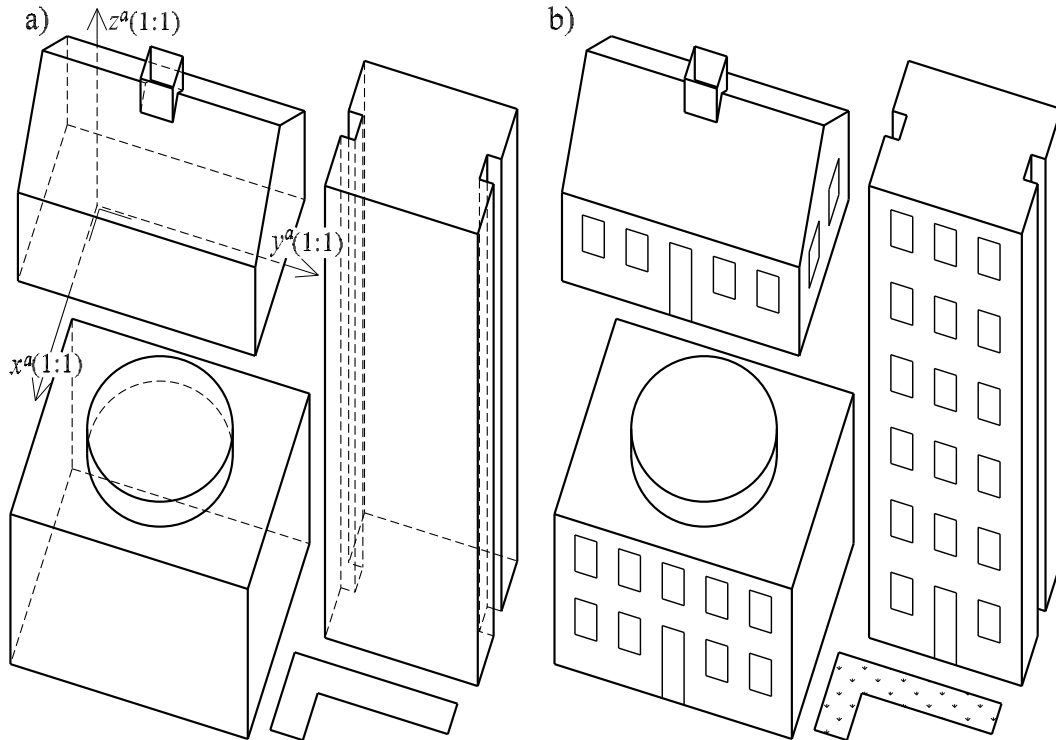
1. Przyjmujemy dowolny trójkąt zwany *trójkątem śladów aksonometrycznych* (rys. 1-23i). Można przyjąć, że są to faktycznie ślady osi układu rzeczywistego na rzutni. Konstruujemy osie aksonometryczne zawierające wysokości tego trójkąta (rys. 1-23ii, 1-23iii).

2. Mechanizm wyznaczania skrótów dla odpowiednich kierunków osi obrazuje rys. 1-23iv. Cięciwy półokręgów są kładami osi aksonometrycznych. Na nich odkładamy rzeczywiste długości odcinków na osiach. Skrócone odcinki otrzymujemy odpowiadając rzutując te pierwsze na proste zawierające wysokości trójkąta (rys. 1-23iv).

Na rys. 1-23iv pokazano ponadto sposób odkładania dowolnego odcinka w aksonometrii prostokątnej wzdłuż określonej osi, czyli konstrukcji punktu o określonym położeniu. Na osi  $Oy$  odłożono odcinek  $[A^*B^*]$  konstruując na tej osi punkt  $B^a$  odległy od początku układu  $O$  o odcinek  $[A^*B^*]$ .

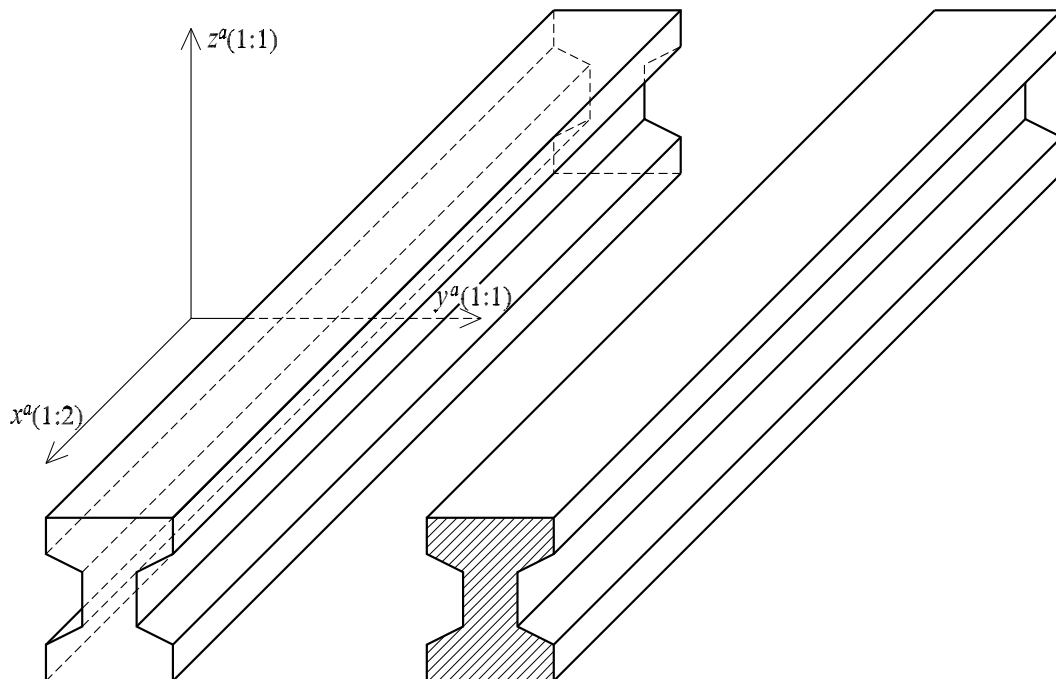
## 5.2. Przykłady rysunków aksonometrycznych

Powyższe rozróżnienie rodzajów aksonometrii ma dziś, w dobie systemów CAD, już znacznie bardziej historyczne niż praktyczne. Za pomocą techniki komputerowej (np. w AutoCADzie) otrzymuje się dowolną wizualizację obiektu odwzorowanego w przestrzeni wirtualnej środowiska AutoCAD'a. Warto jednak pamiętać, że wizualizacja obiektu zależy od kierunku rzutowania i położenia obiektu względem rzutni. Pewne aksonometrie dają dobrą wizualizację, inne słabą. W szczególności izometria wojskowa jest użyteczna, jeżeli chcemy, by plan obiektu był w naturalnej wielkości, zaś aksonometria kawalerska jest użyteczna wtedy, gdy



Rys. 1-24: "Osiedle w izometrii wojskowej". Płaszczyzna  $xy$  jest izometryczna. Podstawy (plany) budynków mają naturalny kształt. Podobnie w naturalnym kształcie i wymiarach (oczywiście w pewnej skali) odwzorowany jest plan zagospodarowania terenu

chcemy, by przekrój poprzeczny (w budynku elewacja) był w naturalnej wielkości i kształcie. rys. 1-24 przedstawia fragment makiety osiedla w izometrii wojskowej. Rys. 1-25 pokazuje



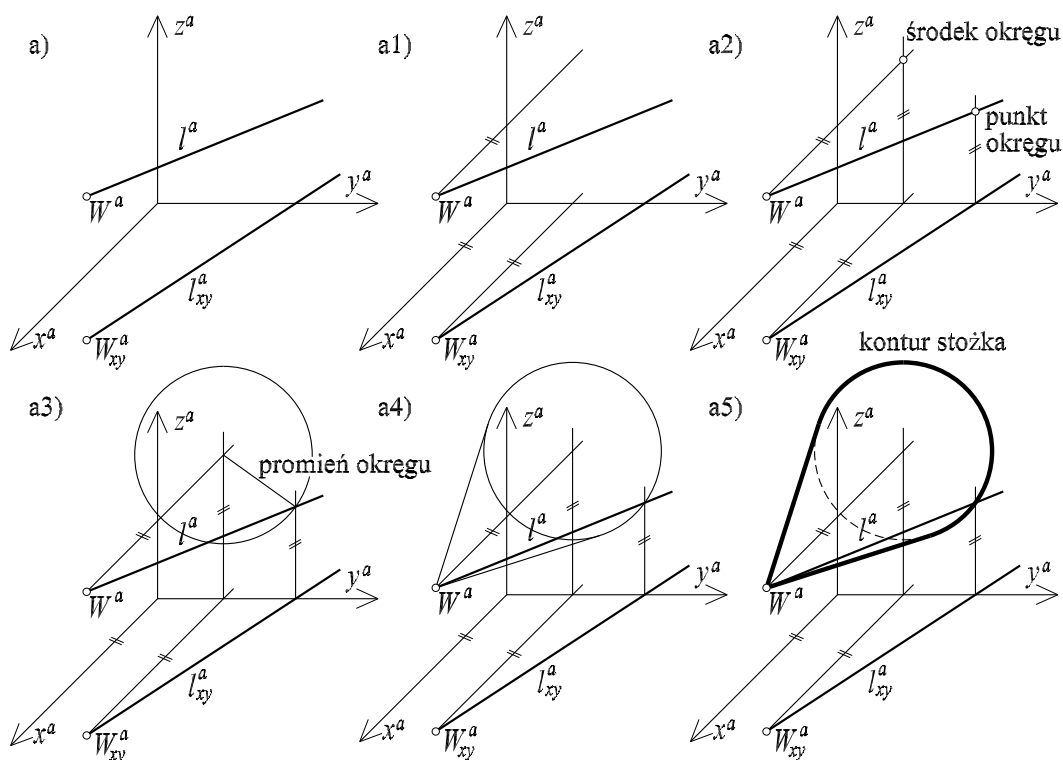
Rys. 1-25: Dimetria kawalerska dwuteownika

schematycznie (w sposób uproszczony) belkę w kształcie dwuteownika.

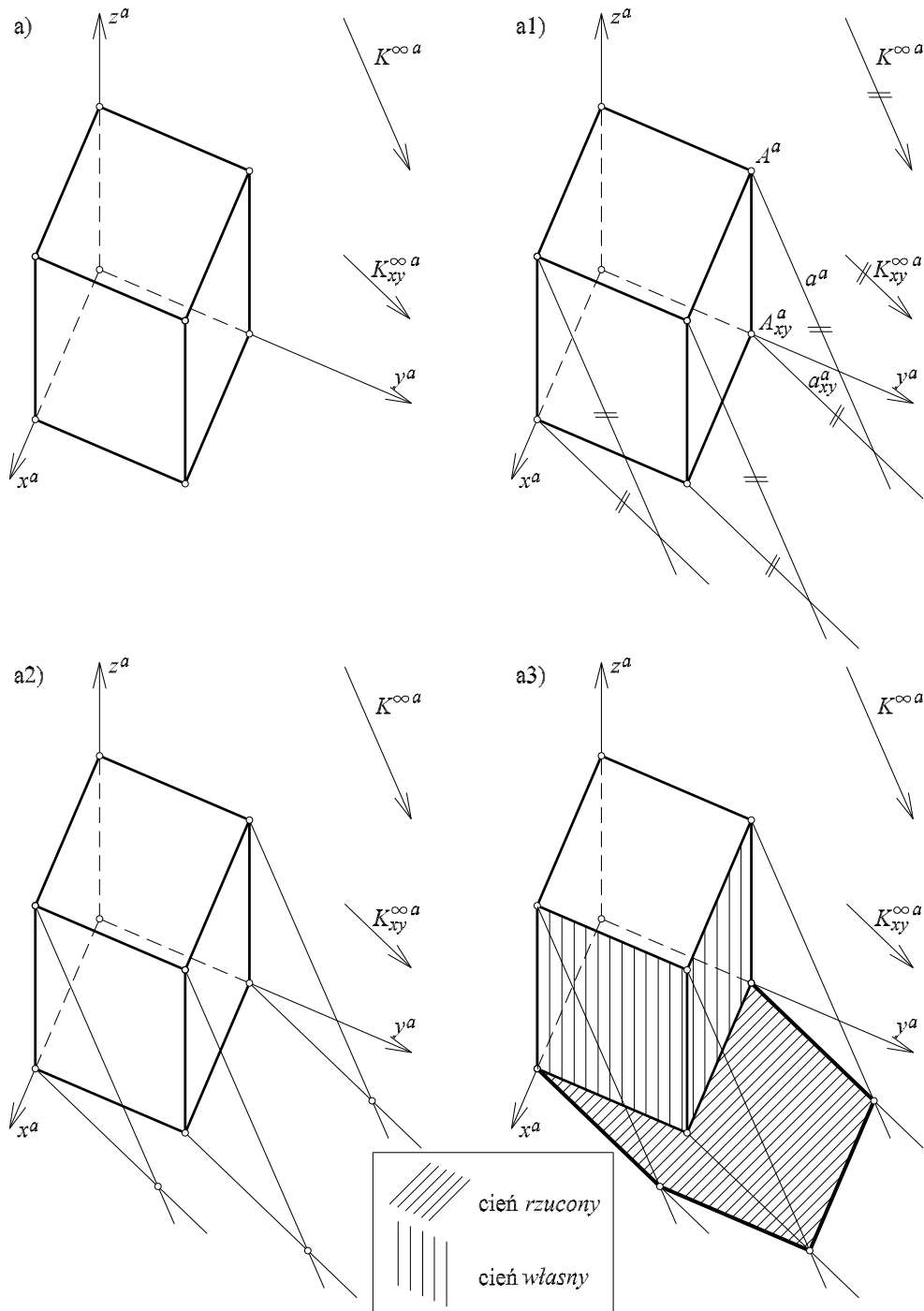
### 5.3. Konstrukcje w aksonometrii

**Zadanie 4** Dany jest rzut aksonometryczny półprostej  $l(l^a, l_{xy}^a)$  o początku  $W(W^a, W_{xy}^a)$  w dimetrii kawalerskiej (rys. 1-26a). Narysować dimetrię kawalerską stożka obrotowego o wierzchołku  $W$  i osi prostopadłej do płaszczyzny  $Oyz$  (równoległej do osi  $Ox$ ) i podstawie (koło) leżącej na płaszczyźnie  $Oyz$ .

Na płaszczyźnie  $Oyz$ , jako na jedynej w dimetrii kawalerskiej, zachowane są związki miarowe (w określonej skali). Stąd koło - podstawa stożka odwzoruje się na koło. Tworzące konturowe stożka <sup>3</sup> będą styczne do okręgu podstawy. Środek koła podstawy jest punktem przecięcia osi stożka z płaszczyzną  $Oyz$ . Promień wyznaczymy znajdując punkt przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  $Oyz$ . W prostej  $l$  zawiera się jedna z tworzących stożka. Na rys. 1-26 przedstawiono w etapach konstrukcję dimetrii kawalerskiej stożka.



Rys. 1-26: Konstrukcja dimetrii kawalerskiej stożka obrotowego o podstawie (okręgu) na płaszczyźnie  $Oxy$ , którego tworzącą jest dana prosta  $l \longleftrightarrow (l^a, l_{xy}^a)$  o wierzchołku  $W$ , ( $W \in l$ ): a) dane prosta  $l$  z wierzchołkiem  $W$  odwzorowana w aksonometrii, a1) konstruujemy oś symetrii stożka prostopadłą do płaszczyzny  $Oxy$ , a2) znajdujemy punkty przebiecia płaszczyzny  $Oxy$  obydwoma prostymi, a3) konstruujemy okrąg podstawy stożka o środku w jednym z punktów przechodzący przez drugi punkt), a4) stożek przedstawiony jest w postaci konturowej (rzut określony jest przez okrąg i dwa odcinki styczne), a5) pogrubienie linii konturowych



Rys. 1-27: Konstrukcja cieni sześcianu: a) kierunku światła  $K^{\infty}$  jest określony przez swój rzut aksonometryczny  $K^{\infty a}$  oraz rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego  $K_{xy}^{\infty a}$  na płaszczyznę  $Oxy$ ; a1) prowadzimy przez punkt  $A^a$  prostą (promień) o kierunku  $K^{\infty a}$ , zaś przez  $A_{xy}^a$  prostą (promień) o kierunku  $K_{xy}^{\infty a}$ , podobnie postępujemy w odniesieniu do pozostałych punktów; a2) znajdujemy punkty przebiecia tych promieni z płaszczyzną  $Oxy$ , są punkty w których rzut aksonometryczny pokrywa się z rzutem aksonometrycznym rzutu prostokątnego; a3) zważywszy, że cienie punktów leżących na płaszczyźnie  $Oxy$  pokrywają się z tymi punktami zaznaczamy cień rzucony i cień własny sześcianu

## 6. Cień rzucony i własny bryły w aksonometrii

Rozróżniamy dwa rodzaje oświetlenia: *centralne* i *równoległe*. Pierwsze odpowiada takiemu oświetleniu, w którym źródło światła da się sprowadzić do jednego punktu. Drugie odpowiada

<sup>3</sup>Stożek odwzorowany jest w postaci konturowej. Kontur stożka stanowią: łuk okręgu i dwa odcinki stycznych (rys. 1-26a5). Figura ograniczona, której brzegiem jest kontur, jest rzutem stożka. Dla porównania

oświetleniu słonecznemu. Wobec prostoliniowego rozchodzenia się światła, promienie świetlne tworzą w przypadku oświetlenia centralnego - wiązkę prostych o środku znajdującym się w źródle światła, a w przypadku oświetlenia równoległego - wiązkę prostych równoległą o środku niewłaściwym. Geometryczna charakteryzacja procesu oświetlenia przedmiotu prowadzi do określenia *stożka światła* oświetlanego przedmiotu, czyli zbioru wszystkich prostych wiązek oświetlającej które przecinają ten przedmiot (jest to oczywiście ogólniejsze pojęcie niż znane ze szkoły pojęcie stożka). Pełny opis zasad wyznaczania cieni z ewentualnym wykorzystaniem do tworzenia algorytmów komputerowych jest dość skomplikowany. Pewne elementy problematyki związanej z wyznaczaniem cieni omówimy w następnych wykładach. Tymczasem przedstawimy pierwsze zadanie na konstrukcję cienia.

**Zadanie 5** *Dany jest rzut aksonometryczny sześcianu oraz kierunku oświetlenia równoległego (rys. 1-27a). Wyznaczyć cień własny i rzucony sześcianu na płaszczyznę  $Oxy$ .*

*Cieniem rzuconym* punktu będzie punkt przecięcia promienia świetlnego z najbliższą napotkaną płaszczyzną lub powierzchnią nie będącą elementem innego obiektu oświetlanego obiektu (rys. 1-27), *ciemieniem własnym* będzie ta część i strona brzegu figury znajdująca się w stożku lub walcu świetlnym, z której "wychodzi" <sup>4</sup> promień świetlny. *Z cieniem wzajemnym* lub *ciemieniem do wnętrza* mamy do czynienia wówczas, gdy promień świetlny wielokrotnie przecina brzeg figury. Do konstrukcji cieni jeszcze będziemy powracać.

## Literatura

- [Fol95] J. D. FOLEY I INNI: *Wprowadzenie do grafiki komputerowej* (Introduction to Computer Graphics). Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa 1995.
- [Gro95] B. GROCHOWSKI: *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 1995.
- [Jan90] M. JANKOWSKI: *Elementy grafiki komputerowej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa 1990.
- [Lew95] Z. LEWANDOWSKI: *Geometria wykreślna*. PWN. Warszawa 1987.
- [Ott94] F. OTTO, E. OTTO: *Podręcznik geometrii wykreślnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 1994.
- [Prz82] S. PRZEWŁOCKI: *Geometria wykreślna w budownictwie*. Arkady. Warszawa 1982.
- [Prz00] S. PRZEWŁOCKI: *Geometria wykreślna w zastosowaniach dla budownictwa i architektury*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego. Olsztyn 2000.

---

sześcián inaczej jest odwzorowany. Na rys. 1-20 sześcián jest odwzorowany w postaci szkieletowej.

<sup>4</sup>W przypadku cieni wygodnie jest mówić o stronach płaszczyzny lub powierzchni dwustronnej. Płaszczyzna i powierzchnia dwustronna rozcinają co najmniej lokalnie przestrzeń na dwie strony. W odniesieniu do strony brzegu przedmiotu oświetlanego, w której znajduje się źródło światła mówimy, że promień "wchodzi", w odniesieniu do strony przeciwnej mówimy, że promień "wychodzi". Punkt niewłaściwy w odniesieniu do procesu oświetlania traktujemy jako wektor swobodny.