

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, k -характеры Фробениуса и n -кольцевые гомоморфизмы, УМН, 1997, том 52, выпуск 2(314), 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm830>

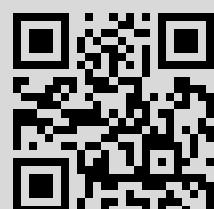
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 207.241.231.81

24 июля 2018 г., 05:38:14



***k*-ХАРАКТЕРЫ ФРОБЕНИУСА И *n*-КОЛЬЦЕВЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ**

В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис

Пусть A и B некоторые \mathbf{Q} -алгебры с единицей 1, причем B – коммутативная алгебра, где \mathbf{Q} – поле рациональных чисел. Для каждого линейного отображения $f: A \rightarrow B$ определим *полилинейные* отображения $\Phi_k(f): A^k \rightarrow B$, $k \geq 1$, при помощи рекуррентной формулы:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Phi_{k+1}(f)(a_1, \dots, a_{k+1}) &= f(a_1)\Phi_k(f)(a_2, \dots, a_{k+1}) \\ &\quad - \sum_{i=2}^{k+1} \Phi_k(f)(a_2, \dots, a_1 a_i, \dots, a_{k+1}), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(f)(a) = f(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное отображение $f: A \rightarrow B$ называется *фробениусовым n-гомоморфизмом* (кратко, Φ -*n*-гомоморфизмом), если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

В случае, когда A – групповая алгебра $C(G)$ группы G и $B = \mathbf{C}$ – поле комплексных чисел, формула (1) для f , определяемого характером n -мерного комплексного представления группы G задает классический $(k+1)$ -характер Фробениуса этого представления, причем $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$ (см. [1]).

ЛЕММА 1. Пусть $f: A \rightarrow B$ – некоторый Φ -*n*-гомоморфизм, причем B не имеет делителей нуля. Тогда, если $\Phi_n(f) \neq 0$, то $f(1) = n$. Следовательно, в общем случае $f(1) \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Более трудным является следующий результат.

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1

$$f(a_1 a_2) = f(a_2 a_1) \quad \text{для любых } a_1, a_2 \in A.$$

Запишем перестановку $\sigma \in \Sigma_{k+1}$ в виде произведения попарно независимых циклов $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_r$, включая и циклы длины 1. Для каждого цикла $\gamma = (i_1, \dots, i_q)$ введем отображение $f_\gamma(a_1, \dots, a_{k+1}) = f(a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_q})$ и положим $f_\sigma = f_{\gamma_1} f_{\gamma_2} \cdots f_{\gamma_r}$.

ТЕОРЕМА 1. Если f является Φ -*n*-гомоморфизмом для некоторого n и $f(a_1 a_2) = f(a_2 a_1)$ (см. лемму 2), то

$$(2) \quad \Phi_{k+1}(f)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+1}} \text{sign}(\sigma) f_\sigma(a_1, \dots, a_{k+1}).$$

Для классических k -характеров Фробениуса формула (2) была получена в [2].

Наши исследования по теории многозначных групп (см. [3]–[5]) привели к следующему понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (ср. с [5]). Линейное отображение $g: A \rightarrow B$ называется

- *алгебраическим степенем n* в $a \in A$, если существует полином

$$p(a, t) = t^n - \beta_1(a)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \beta_n(a), \quad \beta_q(a) \in B,$$

такой что

$$\sum_{q \geq 0} \frac{g(a^q)}{t^{q+1}} = \frac{1}{n} \frac{d}{dt} \ln p(a, t);$$

- *n-кольцевым гомоморфизмом*, если оно алгебраическое степени n для всех $a \in A$.

Непосредственно из определения 2 вытекает:

- если отображение является алгебраическим степенем 1 в $1 \in A$, то $g(1) = 1$.
- если отображения g_1 и g_2 являются n_1 - и n_2 -алгебраическими в $a \in A$, то отображение $g = \frac{1}{n_1 + n_2}(n_1 g_1 + n_2 g_2)$ является $(n_1 + n_2)$ -алгебраическим в $a \in A$.

ЛЕММА 3. Если g является 1 -кольцевым гомоморфизмом, то

$$(g(ab) - g(a)g(b))^2 = 0.$$

ЛЕММА 4. Следующие условия на линейные отображения $g: A \rightarrow B$ являются эквивалентными:

- 1) g – алгебраическое степени n в $a \in A$;
- 2) $g(1) = 1$ и для отображения $f = ng$ имеет место тождество
 $\Phi_{n+1}(f)(a^m, a, \dots, a) \equiv 0$ для всех $m \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если линейное отображение $f: A \rightarrow B$ является Φ - n -гомоморфизмом и $f(1) = n$, то отображение $g = f/n$ является n -кольцевым гомоморфизмом.

Для каждого линейного отображения $g: A \rightarrow B$, такого что $g(1) = 1$ введем отображения $\Psi_k(g): A^k \rightarrow B$ следующим образом: $\Psi_1(g) = g$ и $\Psi_{k+1}(g)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum \sigma \in \Sigma_{k+1} \det M(\sigma)$, где $M(\sigma) = (m_{r,s}(\sigma))$ и $m_{r,s}(\sigma) = 0$ для всех $s > r + 1$, $m_{r,r+1}(\sigma) = r/n$, $m_{s+t,s}(\sigma) = g(a_{\sigma(s)}a_{\sigma(s+1)} \cdots a_{\sigma(s+t)})$ для $t \geq 0$. Непосредственная проверка показывает, что $\Psi_k(g)$ являются полилинейными отображениями для всех $k \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Линейное отображение $g: A \rightarrow B$ с $g(1) = 1$ является n -кольцевым тогда и только тогда, когда $\Psi_{n+1}(g) \equiv 0$.

Из теорем 1 и 2 вытекает важный результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если линейное отображение $g: A \rightarrow B$ является n -кольцевым и $g(ab) = g(ba)$ для всех $a, b \in A$, то отображение $f = ng$ является Φ - n -гомоморфизмом.

Множество всех n -кольцевых гомоморфизмов из A в B обозначим через $R^{(n)}(A, B)$. Аналогично классическому случаю $n = 1$, задача вычисления $R^{(n)}(A, B)$ для $n > 1$ лежит в основе теории двойственности n -алгебр Хопфа, введенных в [3], [5].

Пусть $(X)^n = X \times \cdots \times X/\Sigma_n$ – n -я симметрическая степень множества X . Для $X = R^{(1)}(A, B)$ определено вложение

$$i_X: (X)^n \rightarrow R^{(n)}(A, B) : [g_1, \dots, g_n] \rightarrow \frac{1}{n} \sum g_k.$$

Приведем первые следствия приведенных выше результатов: вложение i_X является взаимно однозначным для $B = \mathbf{C}$ и

- 1) $A = \mathbf{C}[t]$, $X = \mathbf{C}$, т.е. $R^{(n)}(\mathbf{C}[t], \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^n$;
- 2) $A = \mathbf{C}[t_1, \dots, t_m]$, $X = \mathbf{C}^m$, $n = 2$, т.е. $R^{(2)}(\mathbf{C}[t_1, \dots, t_m], \mathbf{C}) \cong (\mathbf{C}^m)^2$;
- 3) $A = \mathbf{C}^m$ – кольцо кольца функций на конечном множестве $X = (x_1, \dots, x_m)$, т.е. $R^{(n)}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}) \cong (X)^n$.

Мы благодарим John McKay, который обратил наше внимание на классические k -характеры Фробениуса при обсуждении результатов [3] об n -кольцевых гомоморфизмах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Frobenius G. Sitzungber // Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1896. P. 1343–1382. [2] Formanek E. The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices // Regional Conferences. 1991. V. 78. [3] Buchstaber V., Rees E. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Preprint MS-96-013: University of Edinburgh, 1996. [4] Buchstaber V., Rees E. Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms // Preprint MS-96-017: University of Edinburgh, 1996. [5] Бухштабер В., Рис Е. // УМН. 1996. Т. 52. № 4. С. 149–150.