Раздел II: ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ЛЕКТОРИЙ

ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ – ВАЖНЫЙ ЭТАП ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ ШКОЛЬНИКА

А.Г. А С Л А Н Я Н

Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики МИРЭА (т/у)

Ю.И. Х У Д А К

Доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедры высшей математики МИРЭА (т/у)

Среди важнейших проблем образования одной из самых важных является проблема обеспечения высокого качества “передаваемых” знаний.

При обучении **математике** необходимое качество знаний предмета обеспечивается и одновременно проверяется, в первую очередь, в процессе решения различных задач.

Однако, даже хорошо подготовленные в теоретическом плане школьники часто допускают при решении задач самые разнообразные ошибки, что, на самом деле, вполне естественно и даже неизбежно: “ведь не ошибается лишь тот, кто ничего не делает”.

Поэтому принципиально важным является такое положение дел, когда процесс решения **каждой** задачи должен заканчиваться проверкой **ответа** и **хода** её решения.

Но школьники довольно часто либо вообще не делают никакой проверки полученных ими результатов, либо ограничиваются лишь самыми необходимыми из таких проверок, что, в итоге, не позволяет выявить **все** допущенные ошибки, исправить их и дать, в результате, правильное решение задачи.

Сложившееся положение дел порождено, в основном, следующими причинами:

- во-первых, сами школьники недооценивают роль и место проверки в процессе решения задач и поэтому не уделяют этому вопросу должного внимания, а учителя, как правило, не учат этому;

- во-вторых, проверка решения – трудоемкая и сложная, “дополнительная” и, даже, в некотором смысле, “самостоятельная” задача, требующая специальных знаний, особенного усердия и терпения, умения логически мыслить и анализировать ситуацию;

- и, наконец, в-третьих, к большому сожалению, приходится констатировать, что в существующей общедоступной методической литературе обучению способам и методам проверки хода и правильности решения задач не уделено должного внимания – ни в одной известной авторам книге для школьников нет раздела, посвященного этому сложному и важному вопросу.

Главная цель настоящей статьи как раз и заключается в том, чтобы привлечь внимание к этой проблеме, важность которой в наш техногенный век далеко не ограничивается рамками школьного образования.

Любой квалифицированный специалист (инженер, экономист, ученый, политик, врач или военный) должен уметь выявлять и исправлять ошибки, по возможности, задолго до их **проявления**, которые часто ведут к **катастрофическим** последствиям.

Обучение **искусству** обнаружения ошибок должно **начинаться** со школьной скамьи и математические задачи представляют собой весьма естественную и благоприятную среду для выработки и развития важнейших навыков **критического осмысления** полученных в ходе решения задачи и ее проверки **результатов –** благодатное поле для воспитания соответствующих навыков для любой профессиональной деятельности.

Вообще говоря, не существует универсального способа проверки, пригодного ко всем задачам и дающего стопроцентную гарантию успеха.

К каждой конкретной задаче требуется свой подход, а в сложных ситуациях обычно приходится комбинировать различные способы проверки.

Основные, наиболее известные способы проверки решений алгебраических и геометрических задач перечислены ниже.

1. Проверка выкладок, включая подстановку данных задачи.

2. Проверка алгоритма и хода решения задачи на обоснованность выводов и равносильность преобразований, т.е. не потеряны ли решения или не приобретены ли лишние.

3. Непосредственная подстановка полученного ответа в условие задачи.

4. Проверка ответа на соответствие области допустимых значений.

5. Проверка на размерность.
6. Проверка на соответствие структуры решения структуре данных задачи (симметрия, периодичность, четность и т.д.).
7. Использование для иллюстрации и анализа решений графического представления функций, входящих в условие задачи.
8. Тестовая (выборочная) проверка полученных в ответе интервалов значений переменной подстановкой отдельных представителей этих интервалов.
9. Исследование граничных точек интервалов значений на их правильность с использованием идеи непрерывности элементарных функций.
10. Проверка ответа на предельные, частные, более простые случаи.
11. Решение задачи в более общем виде и получение ответа исходной задачи как частного её случая.
12. Решение задачи двумя способами.

По поводу **вошедших** в приведенный ограниченный список способов проверки решения задач заметим, что его не следует рассматривать с позиций полной формальной классификации всех существующих методов, т.к. попытка создания чего-либо подобного обязательно потребует значительно больших ресурсов, чем у нас есть в настоящий момент.

Необходимо также иметь в виду, что все указанные в списке способы проверки теснейшим образом связаны между собой многими тончайшими нитями идей, лежащих в их основе.

Умение выбрать метод проверки для конкретной задачи, а также реализовать его в каждой данной реальной ситуации — все это требует развитого логического мышления, большого трудолюбия, терпения и обязательно творческого подхода к рассматриваемой проблеме.

Ученик должен учиться понимать прагматическое, научно-техническое и философское значение правильного решения задачи.

Задача учителя — систематически работать с учениками над этой важной проблемой.

За недостатком места, в качестве иллюстрации, рассмотрим на нескольких примерах применение некоторых из указанных выше способов проверки решения задач.

1. Проверка всех выкладок.

Проверку всех выкладок (включая проверку правильности записи условия задачи), а также проверку алгоритма, хода решения, обоснованности всех выводов рекомендуется делать во всех задачах. Это должно стать неотъемлемой частью решения любой задачи.

Систематическое применение этой рекомендации повысит культуру выкладок, разовьет технику преобразований, способность логически рассуждать и обосновывать выводы, а также сведет к минимуму технические ошибки при решении задач.

Собственно говоря, если бы можно было выполнять эту рекомендацию **всегда** и в **полном объеме**, а также ещё и избежать ошибок при самих этих проверках, то надобность в других способах проверки отпала бы сама собой.

2. Непосредственная подстановка ответа в условие задачи.

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt[3]{2-x} = 1-\sqrt{x-1}$. **Ответ** в этой задаче: x = 1, 2, 10. Подстановка всех найденных значений x в исходное уравнение показывает, что все корни найдены верно. Однако, этот, казалось бы универсальный, способ проверки обладает и рядом недостатков. Так, например, этим способом невозможно установить, все ли корни найдены. И кроме того, этот способ неприменим при решении неравенств, геометрических задач, а также в случаях, когда ответы очень громоздки, содержат радикалы, логарифмы и т.д.

3. Проверка ответа на соответствие области допустимых значений.

Пример 2. Решить уравнение: $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0$. При формальном решении легко получить: x = –1, 3, 4. Однако, проверка показывает, что x = 4 не входит в ОДЗ и, следовательно, не является корнем данного уравнения. Казалось бы, эта проблема не возникнет, если сразу найти ОДЗ. Но, при решении уравнений, это не всегда целесообразно, так как нахождение ОДЗ иногда может оказаться достаточно сложной задачей, сравнимой по объему вычислений или даже превосходящей исходную. Обычно бывает гораздо проще, несколько уже найденных значений переменной x подставить в исходное уравнение и проверить на принадлежность ОДЗ **исходного** уравнения лишь их.

4. Проверка ответа на предельные, более простые случаи.

Это очень интересный и плодотворный метод, широко используемый физиками.

Пример 3. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и углу φ между ними. **Ответ** известен:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi \quad (1).$$

Рассмотрим два предельных случая: **А). φ = 0** и **Б).** $\varphi=\frac{\pi}{2}$**.** В первом случае треугольник вырождается в отрезок, а его площадь — (площадь “треугольника”), очевидно, равна нулю. Во втором случае треугольник прямоугольный и его площадь легко вычисляется по двум известным катетам. Формула (1) оказывается справедливой в обоих предельных случаях, и требуемая проверка состоялась.

Заметим, что исследовать поведение уже полученного или только предполагаемого решения в различных предельных случаях очень полезно в процессе решения очень обширного класса **задач с параметрами.**

Пример 4. Рассмотрим уравнение с параметром $(a-1)\,x^2+3x-6=0$. Предположим, что найдены корни x_1 ($\underline{a}$) и x_2 (a), с которыми необходимо работать дальше. Предварительно хотелось бы проверить, что корни найдены правильно. Положим a=1. Тогда исходное уравнение примет вид: $3x–6=0$, откуда находится лишь один корень x=2. Отсюда следует, что при $a\to 1$, $x_1(a)\to 2$, а $x_2(a)\to\infty$. Если найденные корни не удовлетворяют этим условиям, то заведомо допущена ошибка при их нахождении.

Можно также исходное уравнение поделить на (a – 1) и устремить a к ∞. При этом оба корня должны стремиться к нулю, что дает еще одну возможность их проверки.

5. Проверка на размерность.

В примере 3, a и b имеют размерность длины и, из формулы (1), S имеет размерность квадрата длины, что, очевидно, верно, и, таким образом, проверка состоялась.

Этот способ проверки ответа особенно плодотворен в геометрии (а также в физике).

6. Проверка на соответствие структуры решения структуре данных задачи (симметрия, четность, периодичность и т.д. и т.п.)

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+xy+y^2=7\end{cases}$. Данная система симметрична относительно вхождения в неё переменных x и y. Следовательно, вместе с решением (x = 1, y = 2) она должна иметь также и решение (x = 2, y = 1).

Заметим здесь, что такое же “наследование” свойств происходит обычно и с другими свойствами исходной задачи — четность, периодичность и многие другие **свойства исходной задачи** обязательно **присутствуют и в решении такой задачи, автоматически переносятся на него.**

Пример 6. Решить уравнение: $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$. Легко видеть, что уравнение не изменится, если заменить x на $–x$, т.е. уравнение обладает свойством четности, а также уравнение не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$, т.е. уравнение обладает ещё и свойством **возвратности: не изменяться при замене неизвестной *x*** на обратную к ней величину.

Поэтому, вместе с решением x = 2 рассматриваемое уравнение имеет также решения x = –2 (ввиду свойства четности), $x = 1/2$ (ввиду свойства возвратности) и $x = –1/2$ (ввиду свойства четности и свойства возвратности, “присутствующих” одновременно).

7. Использование и анализ графического представления функций, входящих в условие задачи.

Пример 7. Решить уравнение: $x^3 - 5x - 6\sqrt{2} = 0$. Предположим, что ученик ошибся и кроме корня $x = 2\sqrt{2}$, отвечающего условиям задачи, нашел еще два ложных корня, "спровоцированных", например, выкладками. Запишем исходное уравнение в виде: $x^3 = 5x + 6\sqrt{2}$ и нарисуем графики функций: $y_1 = x^3$ и $y_2 = 5x + 6\sqrt{2}$ на общем для них чертеже.

Из графического представления (которое мы здесь не приводим), с использованием свойства **монотонности** обеих рассматриваемых в данном примере функций, сразу следует, что данное уравнение имеет только **один** корень.

Заметим, что и в общем случае, графическое представление функций, входящих в условие задачи, т.е. иллюстрирующий рисунок — чрезвычайно важное подспорье как на этапе предварительного анализа и решения задачи, так и на этапе её проверки.

По-видимому, даже полезно высказать следующее **правило** — математический афоризм: "Если к задаче **можно** сделать рисунок, то его обязательно **нужно** сделать**!"**

8. Тестовая проверка и исследование граничных значений решений.

Эти способы проверки особенно полезны и эффективны при решении неравенств.

Пример 8. Решить неравенство: $\frac{9 - x^2}{3x + 1} \geq \frac{2}{x}$. **Ответ:** $(-\infty, -2] \cup (-\frac{1}{3}, 0) \cup \{1\}$. Полезно взять выборочные значения из ответа (например, $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{4}$) и убедиться в том, что эти значения x удовлетворяют исходному неравенству. Далее, можно взять значения x, не входящие в ответ (например, $x_3 = -1, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 2$), и убедиться, что они не удовлетворяют исходному неравенству.

Такой способ проверки позволяет избежать **грубых** ошибок.

Рассмотрим теперь более деликатный вопрос о проверке "граничных" точек ответа: $(x_6 = -2,\ x_7 = -\frac{1}{3},\ x_8 = 0,\ x_9 = 1)$. Часть этих точек: (-1/3 и 0), не входит в ОДЗ и именно поэтому они и не включены в ответ. А для остальных двух точек: (-2 и 1), в исходном неравенстве имеет место (**достигается**) знак **равенства**, и, так как неравенство нестрогое, то именно поэтому указанные точки и включены в ответ.

Это очень важный момент. Принципиально ситуация выглядит так:

"Если некоторое значение x_0 входит в некоторый интервал ОДЗ таким образом, что для него выполняется строгое неравенство, т.е. x_0 не является граничным значением ОДЗ, то можно "чуть" продвинуться влево, не выходя из ОДЗ, и "чуть" — вправо, также не выходя из ОДЗ, и для всех таких значений переменной неравенство (притом **строгое**) будет, по-прежнему, выполняться (свойство непрерывности элементарных функций в области их определения). И именно по этой причине указанное значение x_0 не может служить граничной точкой ответа".

9. Решение задачи в общем виде и решение двумя способами.

Второй способ решения (если его удастся найти), основанный на какой-либо принципиально другой, отличной от первой идеи решения задачи— весьма эффективный способ проверки первого решения. В частности, при этом удается избежать так называемых "шаблонных" ошибок, допущенных в выкладках и рассуждениях при первом способе решения задачи, т.к. стандартная, "простая" проверка выкладок и последовательности действий не всегда эффективна именно потому, что допустив ошибку при первом выполнении действий или рассуждений, зачастую, ту же самую ошибку ученики допускают и при повторных выкладках.

Пример 9. Решить уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$. Можно дважды возвести в квадрат и получить решение $x = 0$. При таком способе решения этой задачи проверка просто обязательна, так как при возведении в квадрат могли появиться лишние корни.

В качестве проверки можно решить задачу другим способом. Например, положить $\mathbf{\sqrt{x + 1} = a}$, $\mathbf{\sqrt{x} = b}$ и решить каким-либо способом систему уравнений: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$, первое из которых есть иная запись исходного уравнения, а второе – возникает при возведении данных обозначений в квадрат.

Непосредственно к этому способу проверки примыкает и другой, основанный на решении более общей задачи, чем данная. Такой способ проверки, обычно, для краткости речи, часто называют решением задачи в общем виде и он нередко используется при решении, например, геометрических задач, где проверка является традиционно более трудной проблемой.

Пример 10. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, а медиана боковой стороны равна 5 см. Найти длину основания.

Рассмотрим задачу в общем виде: Пусть боковая сторона треугольника равна $2a$, а медиана боковой стороны равна b. Решив задачу в общем виде, найдем x — длину основания треугольника: $x = \sqrt{2b^2 - 2a^2}$. Эту формулу можно проверить на размерность и на предельные случаи. Очевидно, что с размерностью все в порядке.

Пусть угол $\angle ABC \to 0$. Тогда $b \to a$ и $x \to 0$, что следует из общей формулы для x.

Пусть теперь угол $\angle$ ABC $\to \pi$. Тогда $b \to 3a$ и $x \to 4a$, что также следует из формулы для x. После такой проверки подставляем в выражение для x значения $a = 3$, $b = 5$ и находим решение исходной конкретной задачи: $x = 4\sqrt{2}$.

Мы рассмотрели выше простые модельные примеры. На практике при решении сложных задач, проверка, как уже отмечалось, может оказаться нетривиальным делом, требующим от ученика творческого подхода, глубоких знаний, умения анализировать и логически мыслить. Но за большой труд, связанный с проверкой, и награда будет соответствующей — “знак качества”: решил — значит решил **верно** и тебе положена— **отличная оценка**.

А в более широком плане – вчерашний школьник, привыкший к постоянной проверке решения разнообразных задач, становится, как правило, значительно более ценным сотрудником любой фирмы (вне зависимости от сферы деятельности) и тем самым более полезным и сознательным гражданином своей страны.

ASSESSING SKILLS IN DOING SUMS AS A PART OF TEACHING STRATEGY

A.G. Aslanjan, J.I. Chudak

An urgent problem of mathematical education – the checking of the correctness of solving problems has been considered.

The importance of this task problem is being settled down not only for school mathematical education, but for forming the personality of school and Institute student: any qualified specialist must be able to reveal and correct mistakes long before their revealing (not rarely catastrophic ones)

The conclusion of the necessity to teach this art by mathematical means since school bench is being made.

The twelve most famous means of checking algebraic and geometric tasks are being discussed.