теория поля. М. : Мир, 1977. 272 с. 5. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, вып. 3, с. 292—338. 6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с. 7. *Гаврилик А. М.* О коэффициентах Клебша—Гордана групп $SO(n)$ и $U(n)$. Препринт ИТФ-73-104Р. Киев, 1973, 28 с. 8. *Wong E.* Homogeneous Gauss—Markov random fields.— Ann. Math. Stat., 1969, 40, N 5, p. 1625—1635. 9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. М. : Наука, 1970. Т. 2. 328 с. 10. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 2, с. 123—151. 11. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg N.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II.— Commun. Pure Appl. Math., 1964, 17, N 1, p. 35—92.

Поступила в редколлегию 02.02.83

УДК 519.21

С. О. ОМАРОВ, асп.
Киевский университет

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В настоящей работе для некоторых классов случайных процессов и полей приведено обобщение классической интерполяционной формулы Котельникова — Шеннона на тот случай, когда в узлах интерполяции известны значения процесса (или поля) и его производных до определенного порядка. Методом Ю. А. Беляева [1] получена оценка скорости сходимости в соответствующих интерполяционных формулах. Результаты настоящей статьи обобщают результаты [2, 3]. Отметим, что обширный обзор исследований по теореме Котельникова—Шеннона приведен в статье [4].

Обозначим через $H_{\alpha,\beta}$ класс функций $H_q(z)$, удовлетворяющих условиям:

1) $H_q(z)$ — целая функция конечной степени $q \leqslant \frac{\alpha}{N} - \beta$, где $N \in Z_+$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такое, что $\frac{\alpha}{N} - \beta > 0$;

2) $H_q(0) = 1$.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — целая ограниченная на вещественной оси функция экспоненциального типа с показателем $\sigma < \alpha$.

Тогда имеет место следующее разложение:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(a_k)}{m!} (z-a_k)^m \right] \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{\alpha}{N}(z-a_k)}{\frac{\alpha}{N}(z-a_k)} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(z-a_k)}{\frac{\beta}{N}(z-a_k)} \right]^N H_q(z-a_k), \tag{1}$$

где $\beta \leqslant \frac{\alpha}{N} - \sigma - q$, $a_k = k\frac{\pi N}{\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для любого фиксированного $z = u + iv$ при всех достаточно больших n

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(a_k)}{m!} (z - a_k)^m \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin \frac{\alpha}{N}(z - a_k)}{\frac{\alpha}{N}(z - a_k)} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(z - a_k)}{\frac{\beta}{N}(z - a_k)} \right]^N H_q(z - a_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8N}{\pi} \varphi(z) \left(\frac{\alpha}{N\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right) n} + 2\pi e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} \right), \qquad (2)$$

где

$$\varphi(z) = \max_{i=1,2,\ldots,N} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^i C_f C_H \left(\frac{N}{\beta}\right)^N \left| \sin \frac{\alpha}{N} z \right| e^{(\beta+q)|\operatorname{Im} z|} \frac{\sigma^{N-i}}{(N-i)!} \frac{1}{N^i},$$

$$C_f = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|, \quad C_H = \sup_{-\infty < t < \infty} |H_q(t)|.$$

Доказательство. Применив теорему Коши о вычетах к интегралу

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{N} z}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} (z - \xi)^m}{\sin \frac{\alpha}{N} \xi} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(z - \xi)}{\frac{\beta}{N}(z - \xi)} \right]^N H_q(z - \xi) \frac{d\xi}{\xi - z}, \qquad (3)$$

где C_n — контур квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат (длина стороны равна $2\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}$), получим

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{N} z}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} (z - \xi)^m}{\sin \frac{\alpha}{N} \xi} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(z - \xi)}{\frac{\beta}{N}(z - \xi)} \right]^N \times$$

$$\times H_q(z - \xi) \frac{d\xi}{\xi - z} = f(z) - \sum_{k=-n}^{n} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(a_k)}{m!} (z - a_k)^m \right] \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{\alpha}{N}(z - a_k)}{\frac{\alpha}{N}(z - a_k)} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N} z - a_k)}{\frac{\beta}{N}(z - a_k)} \right]^N H_q(z - a_k). \qquad (4)$$

Для того чтобы получить представление (1) и оценку (2), необходимо оценить модуль интеграла (3):

$$\left| \frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(z-\xi)^m}{\sin\frac{\alpha}{N}\xi} \left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N \times\right.$$

$$\left.\times H_q(z-\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{Y} \int\limits_{C_{in}} \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}\left|\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\right| |z-\xi|^m}{\left|\sin\frac{\alpha}{N}\xi\right|} \times$$

$$\times \frac{\left|\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)\right|^N}{\left|\frac{\beta}{N}(z-\xi)\right|^N} |H_q(z-\xi)| \frac{|d\xi|}{|\xi-z|}, \qquad (5)$$

где C_{1n} и C_{2n} — стороны квадрата, параллельные мнимой оси, а C_{3n} и C_{4n} — стороны квадрата, параллельные действительной оси. Оценим отдельно каждый интеграл в (5).

Приведем некоторые известные неравенства, которые понадобятся в дальнейшем.

Если $\xi = x + iy$, то $|\sin\alpha\xi| \leqslant \operatorname{ch}\alpha y$. На C_{1n} и C_{2n} $\xi = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right) \times \times \frac{\pi N}{\alpha} + iy$ и, следовательно, $|\sin\alpha\xi| = \operatorname{ch}\alpha y$. На C_{3n} и C_{4n} $\xi = x \pm \pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}$ и, следовательно, $|\sin\alpha\xi| \geqslant \left|\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right|$.

Как известно [5], если $f(\xi)$, $\xi = x + iy$ — целая функция экспоненциального типа, ограниченная на вещественной оси, $\sup\limits_{-\infty<t<\infty} |f(t)| = = C_f < \infty$, то $|f(\xi)| \leqslant C_f e^{\sigma|y|}$ и $|f^{(k)}(\xi)| \leqslant C_f \sigma^k e^{\sigma|y|}$, $k = 1, 2, \ldots$. Используя вышеприведенные неравенства, легко получить

$$\left| \frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i} \int\limits_{C_{1n}} \frac{\frac{f^{(N-m)}(\xi)}{(N-m)!}(z-\xi)^{N-m}}{\sin\frac{\alpha}{N}\xi} \left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N \times\right.$$

$$\left.\times H_q(z-\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\right| \leqslant \frac{4\alpha}{\pi^2 N}\varphi(z)\frac{1}{n\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}, \quad m = 1, 2, \ldots, N.$$

И, следовательно,

$$\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i}\int\limits_{C_{1n}}\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(z-\xi)^m}{\sin\frac{\alpha}{N}}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N\times\right.$$

$$\left.\times H_q(z-\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\right|\leqslant\frac{4a}{\pi^2}\varphi(z)\frac{1}{n\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)},\qquad(6)$$

где $\varphi(z)=C_fC_H\left(\frac{N}{\beta}\right)^N\left|\sin\frac{\alpha}{N}z\right|e^{(\beta+q)|\operatorname{Im} z|}\max\limits_{i=1,2,\ldots,N}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^i\frac{\sigma^{N-i}}{(N-i)!}\frac{1}{N^2}$ —функция, ограниченная в любой ограниченной области изменения z.

Для второго интеграла получим такую же оценку, как и для первого. Далее,

$$\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i}\int\limits_{C_{3n}}\frac{\frac{f^{(N-m)}(\xi)}{(N-m)!}(z-\xi)^{N-m}}{\sin\frac{\alpha}{N}\xi}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N\times\right.$$

$$\left.\times H_q(z-\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\right|\leqslant\frac{8}{\pi}\varphi(z)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i}\int\limits_{C_{3n}}\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(z-\xi)^m}{\sin\frac{\alpha}{N}\xi}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N\times\right.$$

$$\left.\times H_q(z-\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\right|\leqslant\frac{8N}{\pi}\varphi(z)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}.\qquad(7)$$

Для четвертого слагаемого получаем такую же оценку, как и для третьего. Тогда окончательно

$$\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{N}z}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(z-\xi)^m}{\sin\frac{\alpha}{N}\xi}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(z-\xi)}{\frac{\beta}{N}(z-\xi)}\right]^N H_q(z-\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\xi}{\xi-z}\right|\leqslant\frac{8N}{\pi^2}\varphi(z)\left(\frac{\alpha}{nN\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}+2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}\right).\qquad(8)$$

Из неравенства (8) следует, что ряд, стоящий в правой части формулы (1), сходится к $f(z)$ равномерно в любой ограниченной области изменения z.

Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t) = 0$ и функцией ковариации, представимой в виде

$$B(t, s) = \int_\Lambda \int_\Lambda f(t, \lambda) \overline{f(s, \mu)} F(d\lambda, d\mu), \tag{9}$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $F(A, A')$ — комплексная функция множеств, аддитивная по общим аргументам, положительно-определенная и такая, что $\int_\Lambda \int_\Lambda | F(d\lambda, d\mu) | < \infty$.

Предположим, что функция $f(t, \lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции такой, что

$$C_f = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{-\infty < t < \infty} | f(t, \lambda) | < \infty,$$

$$\sigma = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left| \frac{\partial^n f(t, \lambda)}{\partial t^n} \right|_{t=0}} < \infty.$$

Теорема 2. Если $\sigma = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) < \infty$, то почти для всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\xi^{(m)}(a_k)}{m!} (t - a_k)^m \right] \times$$
$$\times \frac{\sin \frac{\alpha}{N}(t - a_k)}{\frac{\alpha}{N}(t - a_k)} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(t - a_k)}{\frac{\beta}{N}(t - a_k)} \right]^N H_q(t - a_k) \tag{10}$$

при любом фиксированном α, $\beta \leqslant \frac{\alpha}{N} - \sigma - q$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \frac{f^{(m)}(a_k, \lambda)}{m!} (t - a_k)^m \right] \times$$
$$\times \frac{\sin \frac{\alpha}{N}(t - a_k)}{\frac{\alpha}{N}(t - a_k)} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{N}(t - a_k)}{\frac{\beta}{N}(t - a_k)} \right]^N H_q(t - a_k)$$

при всех λ, удовлетворяющих условию $\beta \leqslant \frac{\alpha}{N} - c(\lambda) - q$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_n(t) = \sum_{k=-n}^{h}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\xi^{(m)}(a_k)}{m!}(t-a_k)^m\right]\frac{\sin\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}{\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(t-a_k)}{\frac{\beta}{N}(t-a_k)}\right]^N H_q(t-a_k).$$

Используя теорему о спектральном представлении случайных функций [6], находим

$$M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2 = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}\left[f(t,\lambda)-\sum_{k=-n}^{n}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\frac{f^{(m)}(a_k,\lambda)}{m!}\times\right.\right.$$

$$\left.\times(t-a_k)^m\,\frac{\sin\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}{\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(t-a_k)}{\frac{\beta}{N}(t-a_k)}\right]^N H_q(t-a_k)\right]\times$$

$$\times\left[\overline{f(t,\mu)}-\sum_{k=-h}^{n}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\overline{\frac{f^{(m)}(a_k,\mu)}{m!}}(t-a_k)^m\right]\times\right.$$

$$\times\frac{\sin\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}{\frac{\alpha}{N}(t-a_k)}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{N}(t-a_k)}{\frac{\beta}{N}(t-a_k)}\right]^N\overline{H_q(t-a_k)}\,F(d\lambda, d\mu).$$

Из неравенства (2) следует, что

$$M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2 < \left(\frac{8N}{\pi^2}\right)\varphi^2(t)\left[\frac{\alpha}{nN\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}+\right.$$

$$\left.+\,2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N}-\sigma-\beta-q\right)}\right]^2\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}|\,F(d\lambda, d\mu)\,|.$$

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2 < \infty$. Поэтому ряд (10) сходится с вероятностью 1 при любом фиксированном t, причем эта сходимость равномерна в любом ограниченном интервале изменения t. Поскольку в рассматриваемом нами случае почти все выборочные функции непрерывны [7], то отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Если $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с функцией ковариацией $B(t, s)$, представимой в виде (представление Карунена)

$$B(t,s) = \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda)\,\overline{f(s,\lambda)}\,F(d\lambda), \tag{11}$$

где $\int\limits_{\Lambda} F(d\lambda) < \infty$, то почти для всех выборочных функций справедлива формула (10), в которой $\alpha > \sigma = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)$, $\beta \leqslant \frac{\alpha}{N} - \sigma - q$.

Справедливость следствия 1 очевидна, поскольку (11) является частным случаем представления (9).

Следствие 2. Если $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный гармонизуемый случайный процесс с функцией ковариации $B(t, s)$, представимой в виде (представление Лоэва)

$$B(t, s) = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} e^{i(t\lambda - s\lambda)} F(d\lambda, d\mu), \tag{12}$$

где $F(A, A')$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а Λ — ограниченное множество вещественных чисел,то почти для всех выборочных функций справедлива формула (10), в которой $\alpha > \sigma = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|$.

Следствие 3. Если $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный стационарный в широком смысле процесс с функцией ковариации

$$B(t - s) = \int\limits_{\Lambda} e^{i(t-s)\lambda} F(d\lambda), \tag{13}$$

где Λ — ограниченное множество вещественных чисел, то почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула (10), в которой $\alpha > \sup\limits_{\lambda \in} |\lambda|$.

Справедливость ледствия 3 очевидна, так как в этом случае $c(\lambda) = \lambda, \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} F(d\lambda, d\mu) = \int\limits_{\Lambda} F(d\lambda) = B(0) = \mathbf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$.

Аналог теоремы 2 может быть установлен и для случайных полей, допускающих представление

$$\xi(t_1, \ldots, t_m) = \int\limits_{\Lambda^m} \prod_{k=1}^{m} f_k(t_k, \lambda_k)\, z(d\lambda),$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $d\lambda = (d\lambda_1, \ldots, d\lambda_m)$, $\Lambda^m = \Lambda \times \ldots \times \Lambda$, $z(d\lambda)$ — случайная функция множеств на Λ^m такая, что $Mz(A_1, \ldots, A_m)\overline{z(B_1, \ldots, B_m)} = F(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m)$ — комплексная функция множеств, аддитивная по всем аргументам, положительно-определенная и такая, что $\int\limits_{\Lambda^m}\int\limits_{\Lambda^m} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty$.

Предположим, что функции $f_k(t_k, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ могут быть доопределены в плоскости комплексного переменного (относительно t_k) до целых функций экспоненциального типа с конечными показателями и $\sup\limits_{\lambda_k \in \Lambda} \sup\limits_{-\infty < t_k < \infty} |f_k(t_k, \lambda_k)| = C_{f_k} < \infty$.

Пусть $c_k(\lambda_k)$ — показатели функции $f_k(t_k, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ соответственно, причем $\sup\limits_{\lambda_k \in \Lambda} c_k(\lambda_k) = \sigma_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Для простоты будем считать, что $m = 2$.

Теорема 3. Если $\sigma_k < \alpha_k$, $\beta_k < \frac{\alpha_k}{N_k} - \sigma_k - q_k$, $k = 1, 2$, то почти для всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t_1, t_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{N_2-1} \frac{1}{s!} \left(\sum_{k=0}^{N_1-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+s} \xi(a_{k_1}, a_{k_2})}{\partial t_1^k \partial t_2^s} (t_1 - a_{k_1})^k \right) \times \right. \tag{14}$$

$$\left. \times (t_2 - a_{k_2})^s \right] \prod_{i=1}^{2} \frac{\sin \frac{\alpha_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})}{\frac{\alpha_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})} \left[\frac{\sin \frac{\beta_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})}{\frac{\beta_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})} \right]^{N_i} H_{q_i}(t_i - a_{k_i}),$$

где $a_{k_i} = k_i \frac{\pi N_i}{\alpha_i}$, $i = 1, 2$.

Изучим оценки скорости сходимости. Сперва оценим скорость сходимости $\xi_n(t)$ к $\xi(t)$. Очевидно,

$$P\{|\xi(t) - \xi_n(t)| > f(n) \text{ хотя бы для одного } n \geqslant n_0\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \geqslant n_0} \frac{M|\xi(t) - \xi_n(t)|^2}{f^2(n)} \leqslant \left(\frac{8N}{\pi^2}\right)^2 \varphi^2(t) \int_\Lambda \int_\Lambda |F(d\lambda, d\mu)| \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{f^2(n)} \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha}{nN\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} \right]^2.$$

Для того чтобы с вероятностью 1 существовало такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi(t) - \xi_n(t)| < f(n)$ для всех $n > n_0(\omega)$, достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f^2(n)} \left[\frac{\alpha}{nN\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} \right]^2 < \infty.$$

Однако

$$\frac{\alpha}{nN\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{N} - \sigma - \beta - q\right)} = \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит, для того чтобы с вероятностью 1 существовало такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi_n(t) - \xi(t)| < f(n)$ $\forall n \geqslant n_0(\omega)$, достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 f^2(n)} < \infty$. Если взять $f(n) = \frac{\ln^{\frac{1+\sigma}{2}} n}{\sqrt{n}}$, $\sigma > 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 f^2(n)} < \infty$. Следовательно, с вероятностью 1 для всех $n \geqslant n_0(\omega)$ $|\xi(t) - \xi_n(t)| < \frac{\ln^{\frac{1+\sigma}{2}} n}{\sqrt{n}}$.

Теперь оценим скорость сходимости в теореме 3. Пусть

$$\xi_n(t_1, t_2) = \sum_{k_1=-n}^{n} \sum_{k_2=-n}^{n} \left[\sum_{s=0}^{N_2-1} \frac{1}{s!} \left(\sum_{k=0}^{N_1-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+s}\xi(a_{k_1}, a_{k_2})}{\partial t_1^k \partial t_2^s} (t_1 - -a_{k_1})^k \right) (t_2 - a_{k_2})^s \right] \prod_{i=1}^{2} \frac{\sin \frac{\alpha_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})}{\frac{\alpha_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})} \left[\frac{\sin \frac{\beta_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})}{\frac{\beta_i}{N_i}(t_i - a_{k_i})} \right]^{N_i} H_{q_i}(t_i - a_{k_i}).$$

Очевидно, $P\{|\xi(t_1, t_2) - \xi_n(t_1, t_2)| > f(n)$ хотя бы для одного $n \geqslant \geqslant n_0\} \leqslant \int\limits_{\Lambda^2} \int\limits_{\Lambda^2} |F(d\lambda, d\mu)| \sum\limits_{n \geqslant n_0} \frac{\partial_n^2(t_1, t_2)}{f^2(n)}$, где

$$D_n(t_1, t_2) = \prod_{k=1}^{2} \frac{8N_k}{\pi^2} \varphi_k(t_k) \left(\frac{\alpha_k}{nN_k\left(\frac{\alpha_k}{N_k} - \sigma_k - \beta_k - q_k\right)} + \right.$$

$$\left. + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N_k}{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_k}{N_k} - \sigma_k - \beta_k - q_k\right)} \right) + \frac{8N_1}{\pi} \varphi_i(t_1) \left(\frac{\alpha_1}{nN_1\left(\frac{\alpha_1}{N_1} - \sigma_1 - \beta_1 - q_1\right)} + \right.$$

$$\left. + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N_1}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_1}{N_1} - \sigma_1 - \beta_1 - q_1\right)} \right) \left[C_{f_2} + \frac{8N_2}{\pi} \varphi_2(t_2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\alpha_2}{nN_2\left(\frac{\alpha_2}{N_2} - \sigma_2 - \beta_2 - q_2\right)} + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N_2}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2}{N_2} - \sigma_2 - \beta_2 - q_2\right)} \right) \right] +$$

$$+ \frac{8N_2}{\pi} \varphi_2(t_2) \left(\frac{\alpha_2}{nN_2\left(\frac{\alpha_2}{N_2} - \sigma_2 - \beta_2 - q_2\right)} + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N_2}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2}{N_2} - \sigma_2 - \beta_2 - q_2\right)} \right) \times$$

$$\times \left[C_{f_1} + \frac{8N_1\varphi_1(t_1)}{\pi} \left(\frac{\alpha_1}{nN_1\left(\frac{\alpha_1}{N_1} - \sigma_1 - \beta_1 - q_1\right)} + \right. \right.$$

$$\left. + 2\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N_1}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_1}{N_1} - \sigma_1 - \beta_1 - q_1\right)} \right) = \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Итак, для того чтобы с вероятностью 1 существовало такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi(t_1, t_2) - \xi_n(t_1, t_2)| < f(n)$, для всех $n \geqslant n_0(\omega)$ достаточно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 f^2(n)} < \infty$. Это возможно, например, при $f(n) = \frac{\ln^{\frac{1+\sigma}{2}} n}{\sqrt{n}}$, $\sigma > 0$. Значит, с вероятностью 1 для всех $n \geqslant n_0(\omega)$

$$|\xi(t_1, t_2) - \xi_n(t_1, t_2)| < \frac{\ln^{\frac{1+\sigma}{2}} n}{\sqrt{n}}.$$

1. *Беляев Ю. К.* Аналитические случайные процессы.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, вып. 4, с. 437—444. 2. *Нагорний В. Н.* Про інтерполяцію випадкових полів.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 4, с. 319—323. 3. *Худайберганов Р.* Об интерполяции случайных полей.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1974, вып. 10. с. 154—165. 4. *Джерри Дж. А.* Теорема Шеннона, ее различные обобщения и приложения (Обзор).— Тр. Ин-та инженеров электротехники и радиотехники, 1977, **65**, № 11, с. 53—89. 5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: ГИТТЛ, 1947. 323 с. 6. *Розанов Ю. А.* Спектральный анализ абстрактных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, вып. 4, с. 291—310. 7. *Пиранашвили З. А.* К вопросу об интерполяции случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, **12**, вып. 4, с. 708—717.

Поступила в редколлегию 22.09.82

УДК 519.2

М. Я. ПЕНСКАЯ, инж.
Пермский университет

ПРОЕКЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ АПРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ НЕЕ

Настоящая статья посвящена построению проекционных оценок плотности априорного распределения. При этом используются идеи, развитые Н. Н. Ченцовым [1] применительно к другой статистической задаче. Исследуется асимптотическое поведение полученных оценок.

Пусть на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, A)$ условными плотностями вероятностей $p(x/\theta)$, $x \in \mathfrak{X}$ задано семейство случайных величин $X\{P_\theta^X, \theta \in \Omega\}$, $\nu\{dx\}$ — мера на A. Вид $p(x/\theta)$ известен, а параметр θ является случайной величиной со значениями в абстрактном измеримом пространстве (Ω, U), $\mu\{d\theta\}$ — данная мера на Ω, G — неизвестное вероятностное распределение, $g(\theta) = (dG/d\mu)(\theta)$ — плотность распределения вероятностей величины θ относительно меры μ. Если P — безусловное вероятностное распределение на $\mathfrak{X}$, то безусловная плотность $p(x) = (dP/d\nu)(x)$ случайной величины X дается соотношением

$$p(x) = \int_\Omega p(x/\theta)\, g(\theta)\, \mu\{d\theta\}, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{1}$$

Пусть независимая выборка $(X_1, \theta_1), \ldots, (X_N, \theta_N)$, у которой значения первой компоненты X_i известны, а θ_i, $i = \overline{1, N}$ неизвестны, соответствует априорному распределению $g(\theta)$ и условному распределению $p(x/\theta)$. Требуется на основе $X_1, X_2, \ldots, X_N$ оценить неизвестную априорную плотность $g(\theta)$.

Если известны $p(x/\theta)$ и $p(x)$, то в соответствии с формулой (1) априорная плотность $g(\theta)$ ищется как решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода следующего вида:

$$\int_\Omega p(x/\theta)\, g(\theta)\, \mu\{d\theta\} = p(x). \tag{2}$$

Задачу нахождения неизвестной априорной плотности $g(\theta)$ можно ре-