3. Вектори

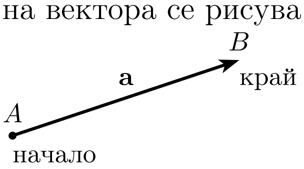
Някои физически величини като температура, маса, работа и др. се характеризират с едно число, което изразява отношението на дадената величина към съответната мерна единица. Такива величини се наричат **скаларни**.

Други величини като сила, скорост, ускорение се характеризират с число и посока. Такива величини се наричат **векторни**. За геометричното изобразяване на физическите векторни величини се използват **вектори**.

1. Основни понятия

Вектор се нарича насочена отсечка, на която единият край се счита за **начало** на вектора, а другият – за **край** на вектора.

Изобразяване: За указване на посоката в края на вектора се рисува стрелка.



Означение: Вектор с начало A и край B се означава $\overrightarrow{AB}$. Ще записваме вектора и с една (като правило, малка латинска) удебелена буква, например $\mathbf{a}$: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$.

Дължина на вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ се нарича дължината на отсечката AB и се означава $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Нулев вектор се нарича всеки вектор, чиито начало и край съвпадат, т.е. вектор от вида $\overrightarrow{AA}$.

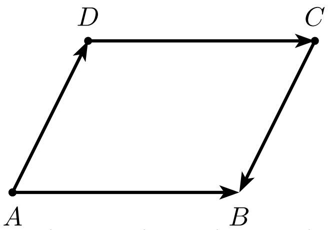
Означение: $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

Единичен вектор се нарича вектор, чиято дължина е единица.

Вектори, които лежат на успоредни прави, се наричат **колинеарни**.

Вектори, които са колинеарни и имат еднаква посока и равни дължини се наричат **равни**.

Коментар: за успоредното пренасяне



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$

Вектори, които имат противоположни посоки и равни дължини се наричат **противоположни**.

Векторът, който е противоположен на вектора $\mathbf{a}$, се отбелязва с $-\mathbf{a}$ и е в сила правилото: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

В горния пример $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$.

Вектори, лежащи в успоредни равнини (или в една равнина), се наричат **компланарни**.

Вектор, чието начало може да се избира произволно, се нарича **свободен**. Ще разглеждаме само свободни вектори.

В някои научни дисциплини се разглеждат вектори, които не са свободни. Например в механиката се използват също така **свързани** и **плъзгащи се** вектори.

2. Линейни операции с вектори

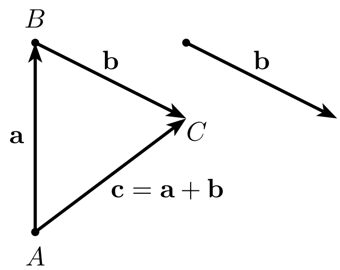
а) Събиране на вектори

На всеки два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ може да се съпостави трети вектор

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

който се нарича **сума** на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е се получава, като се приложи едно от следните две правила:

- Правило на триъгълника:



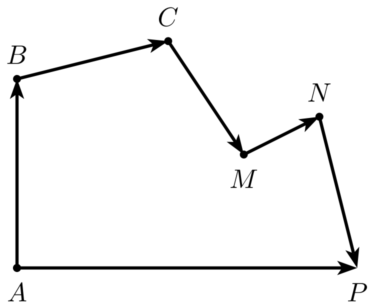
$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Неравенство на триъгълника:

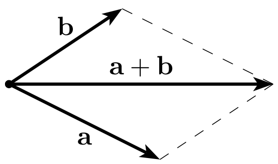
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Правилото на триъгълника е удобно да се прилага при последователно събиране на няколко вектора:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP}$



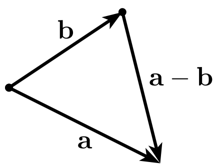
- Правило на успоредника:



Свойства:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,
2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{b}+(\mathbf{a}+\mathbf{c})$.
3) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$,
4) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

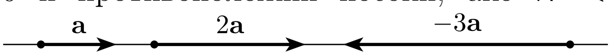
Разлика $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ на два вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ е векторът
$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.



б) **Произведение на вектор a с реално число** λ се нарича векторът $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, който удовлетворява условията:

1) $|\mathbf{b}|=|\lambda||\mathbf{a}|$;

2) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ имат еднаква посока, ако $\lambda>0$ и противоположни посоки, ако $\lambda<0$.



Свойства:

1) $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$,
2) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$,
3) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$.

в) Условие за колинеарност на два вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}. \tag{1}$$

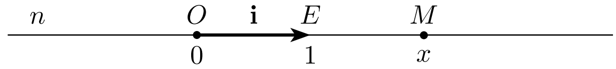
Забележка: Ако векторът $\mathbf{a}$ е ненулев, то числото λ от (1) се определя еднозначно.

3. Координатна ос

Нека е дадена права n. Правата n се превръща в **ос**, като върху нея се изберат две различни точки: точка O, която се нарича **начало** и точка E, която определя вектора $\mathbf{i}=\overrightarrow{OE}$. Приема се, че векторът $\mathbf{i}$ е единичен:

$$|\mathbf{i}|=|OE|=1.$$

По този начин върху правата се задават **мащаб** (определен от единичната отсечка) и **положителна посока** (определена от вектора $\mathbf{i}=\overrightarrow{OE}$).



Нека M е произволна точка върху правата n. Понеже векторите $\mathbf{i}$ и $\overrightarrow{OM}$ са колинеарни и векторът $\mathbf{i}$ е ненулев, то съществува единствено число xтакова, че

$$\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}. \tag{2}$$

Съотношението (2) задава взаимно-еднозначно съответствие между точките от оста n и множеството на реалните числа R.

Означения:
$\overrightarrow{OM}=(x)$ – вектор $\overrightarrow{OM}$ с координата x;
$M(x)$ – точка M с координата x.

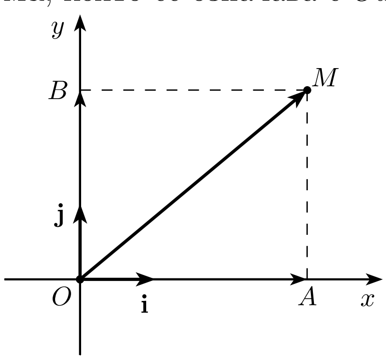
Освен това дължината r на вектора $\overrightarrow{OM}$ е равна на

$$r=|\overrightarrow{OM}|=|x|.$$

Прието е оста n да се нарича **координатна ос** и да се отбелязва с Ox.

4. Декартова координатна система в равнината

Нека в равнината са дадени две взаимноперпендикулярни прави, които се пресичат в точка O. Нека тези прави са превърнати в оси Ox и Oy, посредством избора на единичните вектори $\mathbf{i}$ – за оста Ox и $\mathbf{j}$ – за оста Oy (Фиг.()). По този начин в равнината се въвежда **декартова (правоъгълна) координатна система**, която се означава с Oxy.



Нека M е точка в равнината, която определя вектора $\overrightarrow{OM}$. Нека проекциите на точка

M върху осите Ox и Oy са съответно точките A и B. От правилото на успоредника следва, че

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Понеже съществуват единствени числа x и y, за които

$$\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\mathbf{j},$$

то векторът $\overrightarrow{OM}$ има единствено представяне във вида

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \qquad (3)$$

Означения:

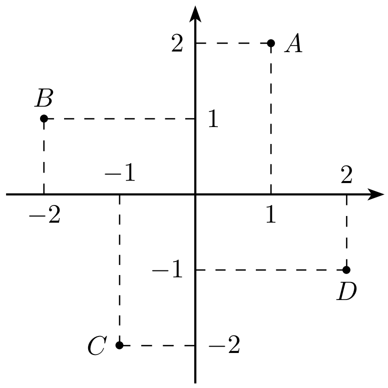
$\overrightarrow{OM} = (x, y)$ – вектор $\overrightarrow{OM}$ с координати (x, y);

$M(x, y)$ – точка M с координати (x, y).

Освен това дължината r на вектора $\overrightarrow{OM}$ е равна на

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (4)$$

Пример: На долната фигура са отбелязани точките $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, -2)$ и $D(2, -1)$.



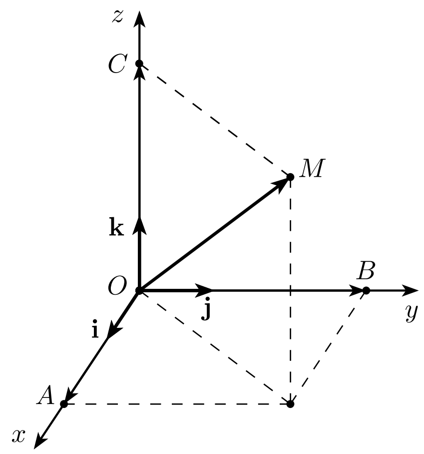
Ще отбележим още, че оста Ox се нарича **абсцисна ос**, оста Oy – **ординатна ос**, а съответните координати (x, y) на точката M – **абсциса** и **ордината** на точката M.

Оста Ox разделя равнината на две полуравнини – горна $(y > 0)$ и долна $(y < 0)$, а оста Oy разделя равнината на дясна $(x > 0)$ и лява $(x < 0)$ полуравнини. Двете оси разделят равнината на четири **квадранта**: I, II, II, IV. Знаците на абсцисата x и ординатата y на точка $M(x, y)$, лежаща в тези квадранти са посочени на следната таблица:

	x	y
I	$+$	$+$
II	$-$	$+$
III	$-$	$-$
IV	$+$	$-$

5. Декартова координатна система в пространството

Нека в пространството са дадени три взаимноперпендикулярни прави, които се пресичат в точка O. Нека тези прави са превърнати в оси Ox, Oy и Oz, посредством избора на единичните вектори $\mathbf{i}$ – за оста Ox, $\mathbf{j}$ – за оста Oy и $\mathbf{k}$ – за оста Oz (Фиг.()). По този начин в пространството се въвежда **декартова координатна система**, която се означава с $Oxyz$.



Нека M е точка в пространството, която определя вектора $\overrightarrow{OM}$. Нека проекциите на точка M върху осите Ox, Oy и Oz са съответно точките A, B и C. От правилото на успоредника следва, че

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Понеже съществуват единствени числа x, y и z, за които

$$\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\mathbf{k},$$

то векторът $\overrightarrow{OM}$ има единствено представяне във вида

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}. \qquad (5)$$

Означения:

$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ – вектор $\overrightarrow{OM}$ с координати (x, y, z);

$M(x, y, z)$ – точка M с координати (x, y, z).

Освен това дължината r на вектора $\overrightarrow{OM}$ е равна на

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (6)$$

6. Линейни операции с вектори (координатно)

Нека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са зададени със своите координати:

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a), \quad \mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b).$$

Тогава

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_a \pm x_b, y_a \pm y_b, z_a \pm z_b), \tag{7}$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a), \tag{8}$$

а условието за колинеарност на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ има вида:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} \cdot \tag{9}$$

7. Координати на вектор, зададен с две точки

Да намерим координатите на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, зададен с точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Имаме, че

$$\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2).$$

Тогава

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Следователно

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{10}$$

Правило: При намиране на координатите на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, от координатите на края M_2 се изваждат координатите на началото M_1.

От (6) и (10) следва формулата за дължината на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{11}$$

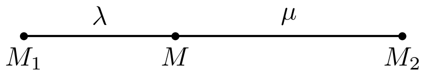
Пример: $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 4, 0)$. Тогава
$\overrightarrow{AB} = (-1-1, 4-(-2), 0-3) = (-2, 6, -3)$,
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+36+9} = 7$.

8. Разделяне на отсечка в дадено отношение

Нека са дадени точките

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \ M_2(x_2, y_2, z_2)$$

и положителните числа λ, μ.



Търси се точка $M(x, y, z) \in M_1M_2$, за която

$$|M_1M| : |MM_2| = \lambda : \mu .$$

Оказва се, че координатите на тази точка са:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \ y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \ z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu} \cdot \tag{12}$$

Частни случаи:

а) При $\lambda = \mu = 1$ точката M е среда на отсечката M_1M_2 и нейните координати са

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + x_2}{2} \cdot$$

б) Медицентърът $M(x, y, z)$ на триъгълника, определен от точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, има координати

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \cdot$$

9. Скаларно произведение

Скаларно произведение $\mathbf{ab}$ на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се нарича числото

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi, \tag{13}$$

където φ е ъгълът между векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Частен случай: Понеже

$$\mathbf{aa} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2,$$

то

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{aa}}. \tag{14}$$

Свойства:

1) $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$,
2) $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab}$,
3) $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$.
4) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{ab} = 0$.
(условие за перпендикулярност)

Приложение:

• От (13) следва, че косинусът на ъгъла φ между векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е равен на

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \cdot \tag{15}$$

• Във физиката с числото

$$w = \mathbf{F}\mathbf{s} = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\varphi$$

се изразява работата, извършена под действието на силата $\mathbf{F}$ за преместването на материална точка от началото до края на вектора $\mathbf{s}$.

Теорема 1. *Ако*

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a),\ \mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b),$$

то

$$\mathbf{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \qquad (16)$$

Следствие 1. *От* (14) *и* (16) *следва, че*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \qquad (17)$$

Следствие 2. *От* (15)*,* (16) *и* (17) *следва, че*

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \qquad (18)$$

Пример: $\mathbf{a} = (7, 2, -8),\ \mathbf{b} = (11, -8, -7)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= 7 \cdot 11 + 2(-8) + (-8)(-7) \\
&= 77 - 16 + 56 = 117, \\
|\mathbf{a}| &= \sqrt{49 + 4 + 64} = \sqrt{117}, \\
|\mathbf{b}| &= \sqrt{121 + 64 + 49} = \sqrt{234}, \\
\cos & \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{2 \cdot 117}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

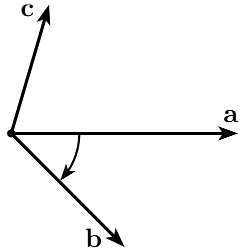
Следователно $\varphi = 45°$.

10. Десни и леви тройки вектори

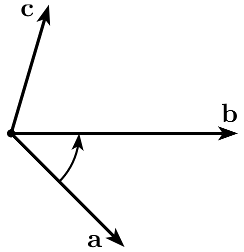
Нека са дадени три некомпланарни вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ с общо начало. Тези вектори, взети в същия ред, образуват **тройка вектори**

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$,

които ще наричаме „първи", „втори", „трети".



лява тройка



дясна тройка

Гледаме от края C на третия вектор $\mathbf{c}$ към равнината, определена от векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (Фиг.()). Ако най-краткото завъртане на вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ се извършва против часовата стрелка, то тройката $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се нарича **дясна**, а по часовата стрелка – **лява**.

Ако единичните вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуват дясна (лява) тройка, то те определят **дясна (лява) координатна система** $Oxyz$.

11. Векторно произведение

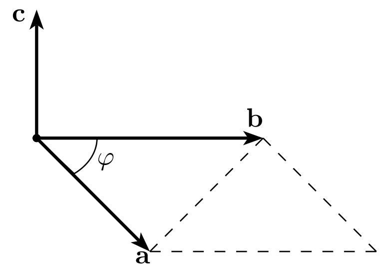
Векторно произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се нарича вектор $\mathbf{c}$, който удовлетворява условията:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, където φ е ъгълът между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) $\mathbf{c}$ е перпендикулярен на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуват дясна тройка.

Геометрично тълкуване:



$$S_{\text{усп}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$$
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Свойства:

1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ са колинеарни $\Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$;

2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;

3) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;

4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;
$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$.

Теорема 2. *Ако*

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a),\ \mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b),$$

то

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

По-подробно формула (19) изглежда така:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Пример: $\mathbf{a} = (7, -5, -6),\ \mathbf{b} = (1, -2, -3)$.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

Окончателно $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (3, 15, -9)$.

Приложение:

• Пресмятане на лице на успоредник;

• Пресмятане на лице на триъгълник;

• В механиката: пресмятане на момент на сила, въртящ момент;

• В механиката на непрекъснатите среди (електро –, аеро – и хидродинамика): пресмятане на ротацията на векторно поле.

Пример: Да се пресметне лицето $S_\triangle$ на триъгълника $\triangle ABC$, където $A = (-1, -1, 1)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (3, -1, -5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 3),\ \overrightarrow{AC} = (4, 0, -6),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (12, 24, 8),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = 4(3, 6, 2);$$

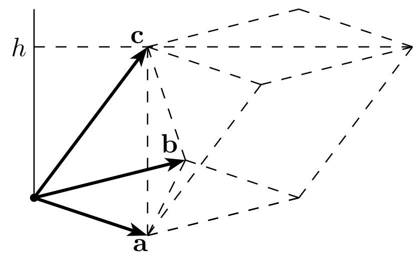
$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\cdot 4|(3, 6, 2)|$$
$$= 2\sqrt{9+36+4} = 2\cdot 7 = 14.$$

12. Смесено произведение

Смесено произведение на векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се нарича числото

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}. \qquad (21)$$

Геометрично тълкуване:



Ако означим с $V_{\text{пар}}$ обема на паралелепипеда, а с $V_{\text{тетр}}$ – обема на тетраедъра, то

$$V_{\text{пар}} = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|, \qquad (22)$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|. \qquad (23)$$

Теорема 3. *Ако*

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a),\ \mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b), \mathbf{c} = (x_c, y_c, z_c),$$

то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Приложение:

• Пресмятане на обем на паралелепипед;

• Пресмятане на обем на тетраедър;

• Условие за компланарност:

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Пример: Да се пресметне разстоянието h от точка $C(1, -5, 4)$ до равнината, определена от точките $A(-2, -4, 3)$, $B(4, 4, -2)$, $D(0, -3, 1)$.

Определяме векторите

$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA} = (-2, -1, 2)$,

$\mathbf{b} = \overrightarrow{DB} = (4, 7, -3)$,

$\mathbf{c} = \overrightarrow{DC} = (1, -2, 3)$.

Ще използваме равенството $V_{\text{пар}} = h\cdot S_{\text{усп}}$. За целта пресмятаме

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = (-11, 2, -10),$$

$S_{\text{усп}} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{121+4+100} = 15$,

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = -11 - 4 - 30 = -45$,

$V_{\text{пар}} = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |-45| = 45$.

Тогава $45 = h\cdot 15 \Rightarrow h = 3$.