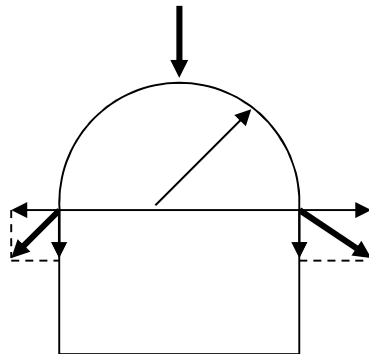


## Bögen, Gewölbe, Kuppeln – Teil 2



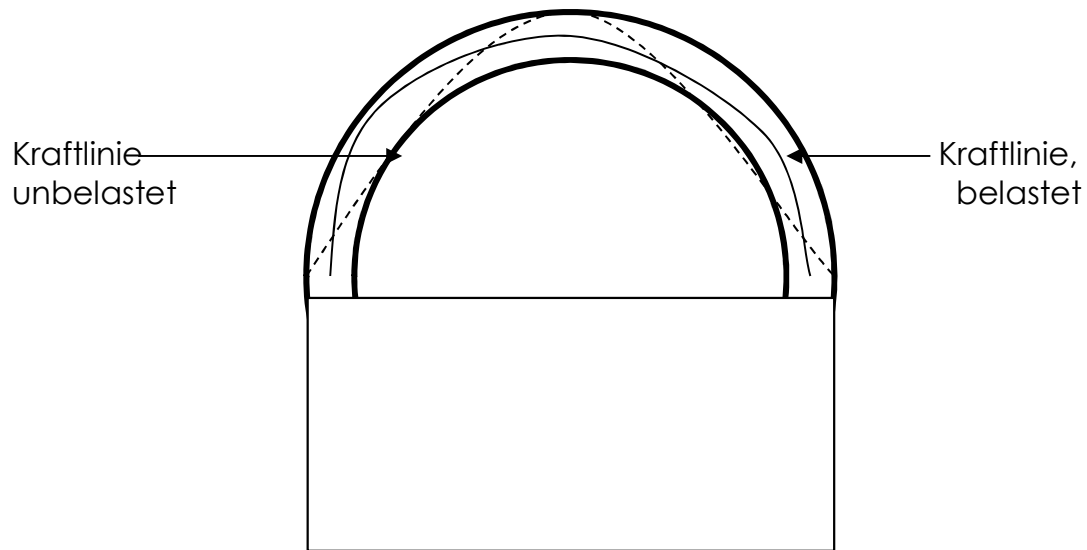
## Einige Grundlagen zum Kräfteverlauf in Bögen

Bogenkonstruktionen werden bestimmt durch die Kraft, die im Bogen herrscht und den Winkel, mit dem diese Kraft im Auflagerbereich in eine horizontale und eine vertikale Komponente gesplittet wird.



Die resultierende Kraft entsteht durch das Eigengewicht des Bogens und auf ihn wirkende horizontale und vertikale Kräfte. Die Kräfte verlaufen im Bogen in einer parabelförmigen Linie, der Stützlinie. Im Idealfall liegt diese Stützlinie deckungsgleich mit der geometrischen Achse des Bogens, also etwa in der Mitte. Damit ist gesichert, dass im Bogen nur Normalkräfte auftreten, also Druckkräfte senkrecht zu den Lagerfugen. Praktisch reicht eine Überdeckung der Stützlinie mit dem mittleren Drittel des Bogens aus. So können die Kräfte gleichmäßig über das Material des Bogens aufgenommen werden. Liegt die Stützlinie nicht in der Mitte, werden Teile des Bogenmaterials stärker belastet, andere schwächer. Bei Überlastung eines Teils des Materials kommt es zum punktuellen und damit zum gesamten Versagen der Konstruktion. Bei teilweiser Lage der Stützlinie außerhalb des Bogens treten Zugkräfte im Bogen auf, was zum sofortigen Versagen der Konstruktion führt.

Durch Belastung des Bogens kann die Kraftlinie in Richtung der Mittellinie des Bogens verschoben werden.

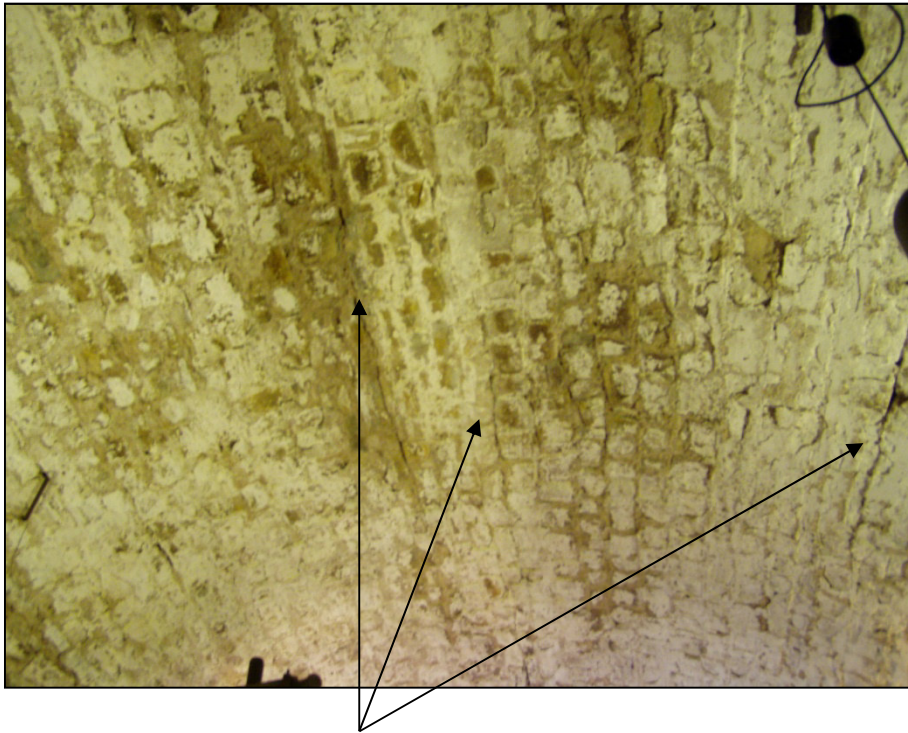


Was bedeutet diese Erkenntnis für die Sanierung von Gewölbekonstruktionen?

Die Entfernung von Bauteilen, wie Auflasten oder Auffüllungen oberhalb des Auflagerbereiches kann zur Verschiebung der Kraftlinie und zum Versagen des Gewölbes führen, obwohl die Auflast verringert wurde!



Spreizung eines als Weinkeller genutzten Tonnengewölbes, sichtbar in einem Bogen einer Zwischenwand



*Risse in der Decke des Gewölbes*



Ursache der Risse: im vorderen, rechten Teil des Tonnengewölbes ist die Überschüttung am Rand und damit die Auflast geringer.

## Einfluss der Bogendicke auf die Stabilität

Ein dickerer Bogen gewährleistet größere Sicherheit im Hinblick der Lage der Schublinie im inneren Drittel. Dies ist besonders bei Rundbögen wichtig, deren Verlauf nicht mit der parabolischen Kraftlinie übereinstimmt.

Als Faustregel gilt bei Kreisbögen:

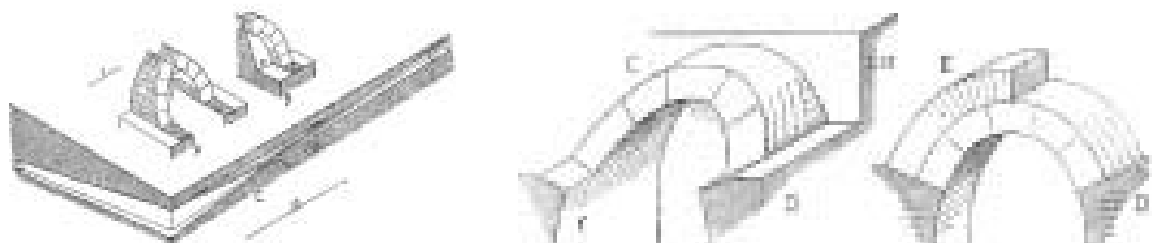
$$t \geq S/5 \quad (\text{hier für CEB, Trockenlehmsteine})$$

Dabei ist  $t$  die Dicke des Bogens und  $S$  die Spannweite. Bezogen auf ein 0,5 Stein dickes Gewölbe (11,5cm) ergibt sich damit eine maximale Spannweite eines Tonnengewölbes von 57,5cm, also max. 60cm!

Das widerspricht unseren Erfahrungen mit gotischen Kreuzgewölben, wo mit filigranen Materialstärken große Spannweiten erzielt werden. Dies wurde auch mit besserem Material erzielt, welches höhere Druckbelastungen und Schubkräfte aufnehmen konnte.

Es zeigt aber auch die statisch ungünstige Form eines unbelasteten Rundbogens.

Schon die Ägypter wussten das und haben ihren „ägyptischen“ Bogen aus dem Rundbogen weiterentwickelt.

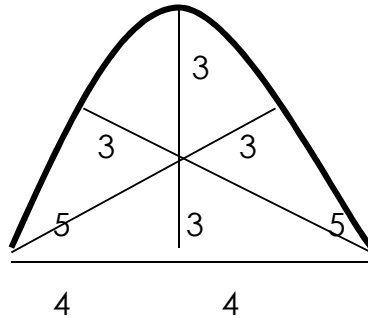


Bildquelle: Internet

Dieses „nubische“ Gewölbe kann durch seine Form frei ohne Lehrgerüst erbaut werden. Die Form basiert auf dem Satz des Pythagoras und dem

Verhältnis 3 : 4 : 5 und lässt ein Verhältnis von  $t = S/7$  zu, bei 1/Stein Dicke sind das 84 cm statt 60 cm Spannweite.

Bei äußerer Belastung des Rundbogens in einer Wand kann die Dicke durch die aussteifende Wirkung auf das Verhältnis  $t = S/10$  vergrößert werden.



Für unseren  $\frac{1}{2}$ - Stein Rundbogen bedeutet das eine Spannweite von 1,20m statt 0,60m, also eine Verdoppelung. Bei entsprechender Druckfestigkeit des Materials und die Verschiebung der Stützlinie durch Auflast kann die Schlankheit noch weiter vergrößert werden.

Was bedeutet das für die Sanierung von Gewölbekonstruktionen:

**Durch Aussteifung von Gewölbeschalen kann die Tragfähigkeit vorhandener Gewölbe erhöht werden, wenn die Stützlinie im äußeren Drittel der Schale liegt.**

**Liegt die Stützlinie im inneren Drittel der Schale, kann die zusätzliche Belastung der Aussteifung zum Bruch des Gewölbes führen!**

**Merke: Spitze Bögen durch Verstärkung der Auflager und Verringerung der Auflast sichern, runde bzw. flache Bögen durch Aussteifung und Auflast sichern!**

## Zur Berechnung der Kräfte in einem Bogen

Die Berechnung der inneren Kräfte in einem Bogen ist nicht einfach und bedürfen daher einiger grundlegender Erläuterungen.

Statisch gesehen muss man einen Bogen als mehrfach statisch unbestimmtes System betrachten. Was bedeutet das?

Die Berechnung der äußeren Auflagerkräfte in einem Bogen ist sehr einfach. Als Schubwinkel wird der Winkel angenommen, der sich am Auflager senkrecht zur letzten geneigten Lagerfuge ergibt.

Wo genau letztendlich und in welchem Winkel die Stützkraft angreift, beruht also auf einer überschläglichen Annahme.

Die Auflagerkräfte werden durch eine Momentengleichung ermittelt, die Kräfte werden dann pro Auflager in eine waagerechte und eine senkrechte Komponente geteilt.

Die Berechnung der Form der Stützlinie und der im Bogen auftretenden Kräfte bedarf anderer Berechnungsmethoden.

Es gilt bei gemauerten Gewölben, deren Lagerfugen zwar Druck und Schub, aber so gut wie keinen Zug aufnehmen können, folgende 3 Gleichgewichtsbedingungen einzuhalten:

1. Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf Verdrehung:

Das Druckzentrum darf an keiner Stelle des Bogens außerhalb des Querschnitts liegen.

2. Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf Verschiebung:

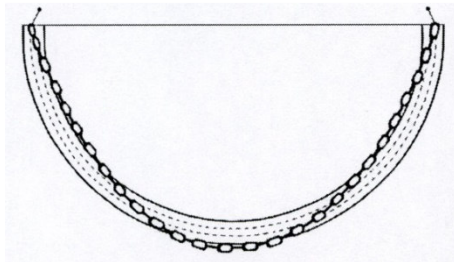
Der Winkel zwischen Stützlinie bzw. Wirkungsgeraden der Kraft und der Lotrechten zur Lagerfuge darf nicht größer sein als der Reibungswinkel des Materials.

Bei Mauerwerk auf feuchtem Mörtel beträgt dieser Winkel ca.  $22,5^\circ$ , für trockenes Mauerwerk annähernd  $37^\circ$ .

### 3. Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf die sichere Festigkeit:

Nach dieser Bedingung darf in keinem Teil des Materials die zulässige Druckfestigkeit überschritten werden. Grundvoraussetzung zur Überprüfung der Einhaltung dieser 3 Gleichgewichtsbedingungen ist die Ermittlung der Lage der Stützlinie im Bogen.

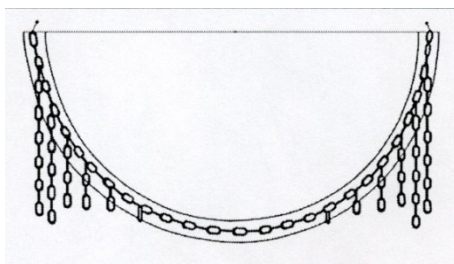
Eine Methode stammt vom englischen Ingenieur und Mathematiker Robert Hooke, der sich 1675 Gedanken über Kräfte in einem Bogen machte. Um die Stützlinie darstellen zu können, wählte er ein einfaches physikalisches Analogon: Er drehte den Bogen um und machte aus Druckkräften Zugkräfte. Das Material des Bogens stellte er durch eine Kette dar, die an den Auflagerpunkten aufgehängt wurde. Die Länge der Kette stellte die Länge der Stützlinie und ihre Form dar.



unbelasteter Kraftverlauf (nur Eigenlast)

Zusätzliche Auflasten stellte er durch kleine Kettenstücke, die an den jeweiligen Kräfteintragspunkten an die Kette gehängt wurden, dar.

So ergab sich die annähernde Form der Stützlinie unter Auflast und Eigengewicht des Bogens:



Die Stützlinie verläuft als Kreisbogen





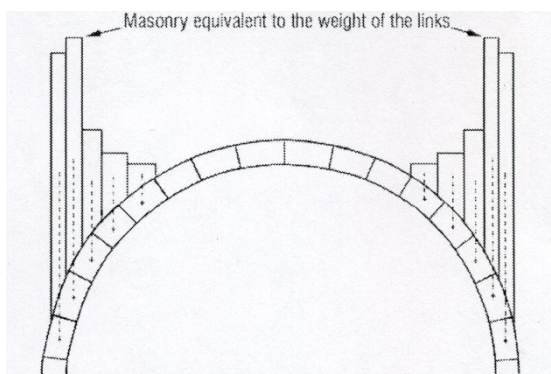
Bildquelle: Internet

Modell zur Darstellung der Stützlinien  
von Gewölbekonstruktionen Gaudis



Detail mit Gewichten als  
Kraftmodelle

Die im Bogen wirkenden Kräfte konnten damit nicht dargestellt werden. Das schaffte erstmals im 19. Jh. der französische Ingenieur Mery, der eine grafische Methode zur Bestimmung der Kräfte in einem Bogen entwickelte. Als Grundlage nahm er dazu die Gewichtskräfte aus jedem einzelnen Stein einer Bogenhälfte und der sich aus der Form des Bogens ergebenden Resultierenden.



Damit konnte man den Kräfteverlauf und die Stützlinie eines Bogens bestimmen. Was man nicht konnte, war anhand der Kräfte den Bogen so zu optimieren, dass er an die Stützlinie und vom Material her an die Kräfte angepasst werden konnte. Dazu wurde

aus der grafischen Methode Merys und der physikalischen Methode Hookes ein Kombinationsverfahren entwickelt. Auf einer ähnlichen Basis arbeiten heute Rechnerprogramme zur Bemessung gekrümmter räumlicher Tragwerke, wie sie Bögen, Schalen, Gewölbe und Kuppeln darstellen. Die phantastischen

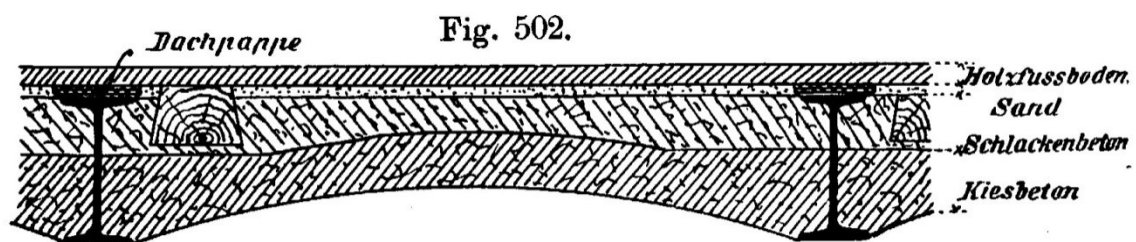
Formen der Bauwerke Gaudis sind auch Ergebnis des ermittelten Kraftlinienflusses nach den obigen Verfahren:



Bildquelle: Internet

Sowohl im Mittelalter als auch bis in das 20. Jh. hinein kann man davon ausgehen, das Gewölbe in Bürgerhäusern nach empirischen grafischen Regeln konstruiert und bemessen wurden. Die Konstruktion erfolgte nach einfachen Formeln, die einen Zusammenhang zwischen Spannweite, Gewölbestich, Material und Dicke des Gewölbes herstellten.

Eine Weiterentwicklung der Wölbtechnik ergab sich mit Einführung von gewalzten Stahlprofilen ab etwa der Mitte des 19. Jh., als flache Segmentgewölbedecke zwischen Stahlträgern als (angeblich) feuersichere und haltbare Kellerdecken im Geschosswohnungsbau Einzug fanden. Damit waren flache, massive Kellerdecken möglich wie z.B. die Berliner Kappe, die eine Nutzung der Keller zu Gewerbezwecken, z.B. Backstuben, möglich machten. Der Endschub der Gewölbe konnte durch Zugglieder aus Stahl abgefangen werden.

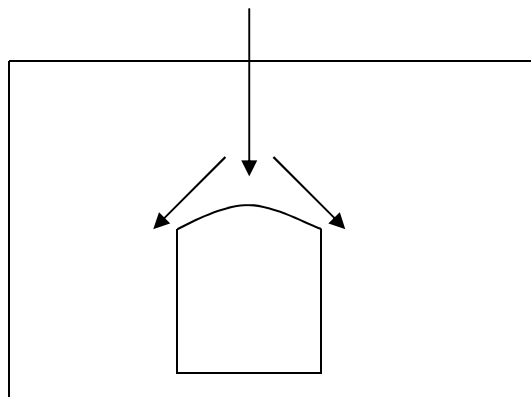


Bei der Bemessung wurde von empirischen Größen und Formen ausgegangen und dann die Annahme rechnerisch überprüft.

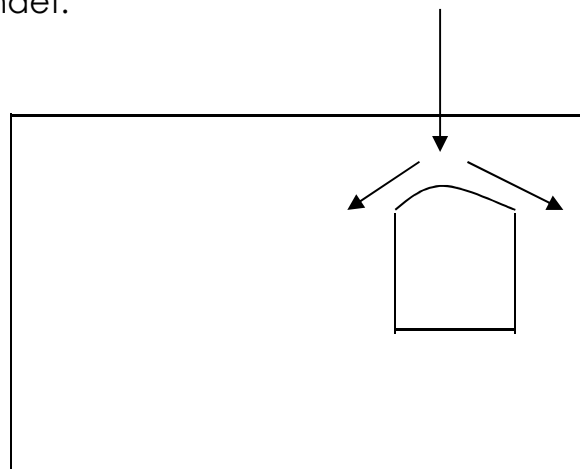
Für die im Wohnungsbau des 19. und Anfang des 20. Jh. üblichen Gewölbeformen gab es einfache überschlägliche Berechnungstabellen, die auf Belastungsversuchen und Musterberechnungen basierten.

### Wie fange ich den Schub am Auflager eines bogenförmigen Bauteils ab?

Die einfachste Möglichkeit besteht bei Bögen in Wänden. Die rechts und links liegenden Wandteile können in ihrer Schwereachse waagerechte Kräfte aufnehmen, wenn sie entsprechend massiv und damit steif sind. Der waagerechte Schub aus den Bögen verteilt sich im Winkel von ca.  $60^\circ$  und darüber in der Wand über die schubfesten Lagerfugen. Je höher die Wand, je mehr Gewicht und je mehr Reibung in den Lagerfugen.

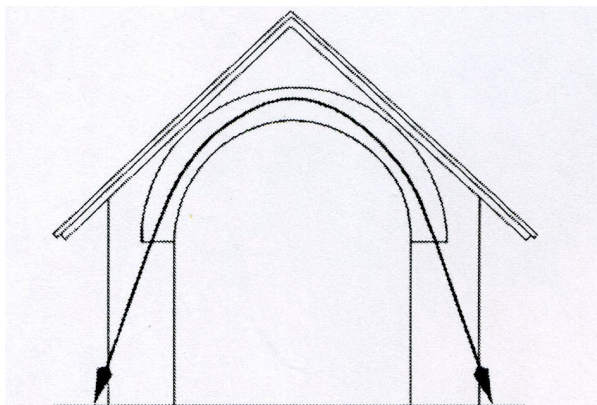


Ein Problem kann nur entstehen, wenn sich der Bogen im Bereich eines freien Mauerendes befindet:

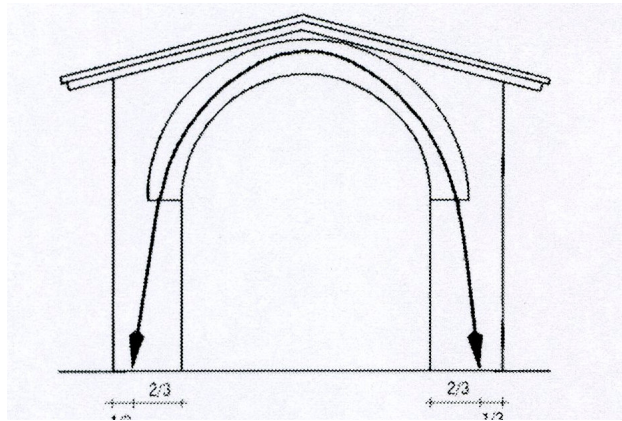




Anders ist das Problem bei Gewölben. Hier wirkt das Widerlager senkrecht zur Schwereachse der Wand, der Gewölbeschub bewirkt ein Kippen der Wand. Um dies zu verhindern, muss die Wand entweder sehr breit und schwer sein oder senkrecht zu ihrer Achse mit weiteren Bauteilen ausgesteift werden.



*Konstruktion ist einsturzgefährdet*



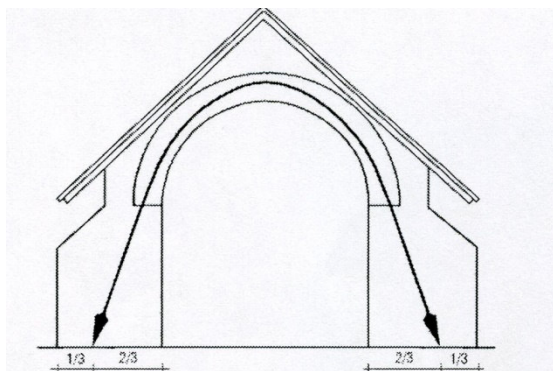
*Sicherung durch Auflast*



Der Schub des Gewölbes würde den Pfeiler rechts ausknicken, da durch die Tür eine Materialschwächung eingetreten ist. Nur die Reibung in den Pfeilerfugen durch die Auflast von oben verhindert den Einsturz. Eine gewisse Verschiebung fand bereits statt, wie aus dem abgesackten rechten Bogenstein oben zu erkennen.



Hier das Prinzip Auflast mit dem die Widerlager von Kreisbögen gesichert werden.



Sicherung durch Strebpfeiler

Die schwere und breite, massige Wand war charakteristisch für die Romanik.

In der Gotik wurden die Wände aufgelöst; die waagerechten Kräfte wurden auf außen liegenden Strebpfeiler abgeleitet, die zusätzlich mit Türmchen (Pialen) beschwert wurden.

Auf dem nächsten Bild ist eine typische gotische Gewölbe-Wandkonstruktion mit aufgelösten Wänden und nach außen gezogenen Strebpfeilern zu erkennen, die mit Fialen beschwert wurden.

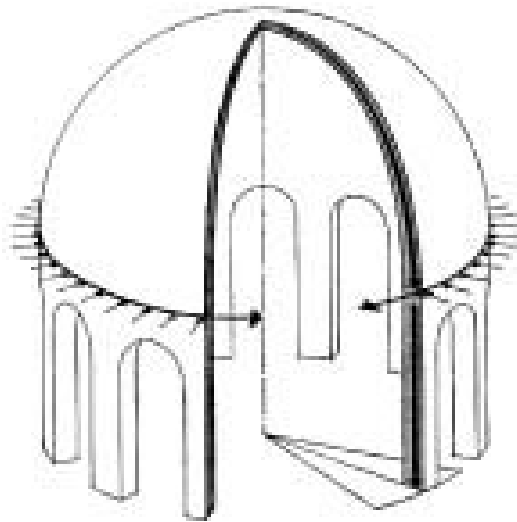


Dieses Prinzip hatten nicht alle Baumeister verstanden, es gab immer wieder Einstürze und schwere Bauschäden an Mittelschiffen da der Kräfteverlauf falsch eingeschätzt wurde und die Strebpfeiler zu hoch angesetzt wurden:



Die zu hoch angesetzten Strebpfeiler knicken die Wand der Obergaden nach innen, die nicht ausbalancierten Widerlager der gotischen Gewölbe knicken die Säulen nach außen.

Eine andere Möglichkeit ist, den waagerechten Schub innerhalb des Gewölbes durch Spannglieder am Auflager auszubalancieren:



*Ringförmiges Spannglied  
(Ringanker einer Kuppel)*

Schon im antiken Rom wurde versucht, mit Spanngliedern aus Stahl Zugkräfte z.B. in Brückenbögen abzufangen. Auch an einigen Kirchenkuppeln wurde das im 17. Jh. angewandt. Man wusste sehr wohl um die Wirkung des Schubes am Widerlager; hatte aber keine passenden Materialien, die den enormen Zug aufnehmen konnten. Stahl von entsprechend gleichbleibender hoher Qualität in großen Teilen herzustellen, gelang erst ab dem 18. Jh.. Im Zuge der nationalen Rückbesinnung im 19. Jh. wurden viele gotische Kirchen saniert bzw. fertig gebaut. Dazu wurde der neue Werkstoff Stahl eingesetzt. Auch bei historisierenden Bauwerken der Gründerzeit im neugotischen Stil finden sich in Gewölben oft verdeckte Zugglieder aus Stahl.





*Flaches Segmentgewölbe in Greve, Toscana mit Zugglied.*

## **Materialien für Gewölbekonstruktionen**

Als geeignetes Material wurden gebrannte Ziegel eingesetzt. Nur für besonders hoch belastete und sichtbare Gewölbe wurden zugerichtete Werksteinquader verwendet.

Der Ziegel bot den Vorteil seiner Kleinmassigkeit und seines niedrigeren Gewichtes im Vergleich zum Naturstein. Für untergeordnete Kellergewölbe im kleinstädtischen Wohnungsbau wurden grob zugerichtete oder Abbruchsteine eingesetzt; die Verarbeitung erfolgte als rundes Tonnengewölbe auf einer Schalung. Die Zwickel (Bereiche zwischen Gewölbe und Widerlager) wurden mit Bauschutt und Lehm aufgefüllt.

Mörtel wird bei Gewölben nur zur Verteilung der Kräfte und zur Vermeidung von Spannungsspitzen eingesetzt. Ein ausbalanciertes Gewölbe trägt auch ohne Mörtel, wie die römischen Baumeister am Pont du Gard eindrucksvoll unter Beweis stellen:



Als Mörtel kam und kommt Kalk- Sandmörtel zum Einsatz, der den Vorteil eines niedrigeren E- Moduls als Zementmörtel hat. So können Spannungsspitzen in Gewölben besser durch Verformung im Mörtel abgebaut werden.

In südlicheren Ländern wurde und wird Lehm bzw. Adobe als Baumaterial eingesetzt. Um die Tragfähigkeit zu erhöhen und die Witterungsbeständigkeit zu verbessern, erfolgt der Einsatz des Lehms in Verbindung einer Kalk- bzw. Zementstabilisierung. Hierbei werden den Lehmsteinen 3 – 10% Kalk oder Zement zugesetzt, bevor die Steine in Handpressen geformt und getrocknet werden. (CSEB, compressed stabilised earth blocks).

Unbewehrter bzw. bewehrter Beton hat sich für Gewölbe nicht bewährt, ebenso zu harte und zu starre Fugenmörtel. Durch diese Materialien kann der Gewölbebogen auch Zug bzw. Biegezugkräfte aufnehmen, die Folge sind nicht vorhergesehene Kräfteverläufe und in der Regel Risse.

*fecit Georg Böttcher im Januar 2016*