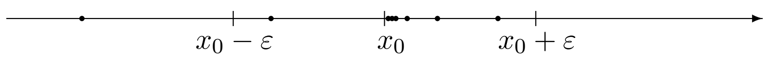
IV. Granica i ciągłość funkcji

1. Granica funkcji

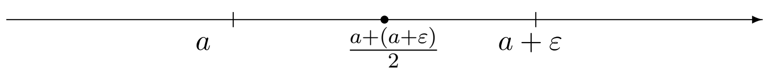
Definicja 1. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia zbioru* X, gdy w każdym jego sąsiedztwie[1] $S(x_0, \varepsilon)$ istnieją punkty ze zbioru X. Dokładniej, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} S(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing.$$



Przykład 1. Punkt a jest punktem skupienia zbioru $X = (a, +\infty)$. Istotnie, dla każdego sąsiedztwa $S(a, \varepsilon)$ punktu a liczba

$$\frac{a + (a + \varepsilon)}{2} \in (a, +\infty) \cap S(x_0, \varepsilon).$$



Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru X.

Definicja 2 (Heinego)**.** Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy *granicą* (*właściwą*) *funkcji* f *w punkcie* x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do g. Zdanie: "liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0" zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \qquad \textit{lub} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g.$$

Przykład 2. Granica funkcji

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}, \qquad x \in (0, +\infty)$$

[1] Przypomnijmy, że sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy sumę przedziałów $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$.

w punkcie $x_0 = 0$ jest równa 0. Istotnie, dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (0, +\infty)$, zbieżnego do 0 mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{0} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Przykład 3. Niech

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Weźmy dwa ciągi

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście $x_n \neq 0$ i $y_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Dalej mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 0.$$

Ponieważ ciągi $\big(f(x_n)\big)$ i $\big(f(y_n)\big)$ są zbieżne do różnych granic, więc zgodnie z definicją – nie istnieje granica

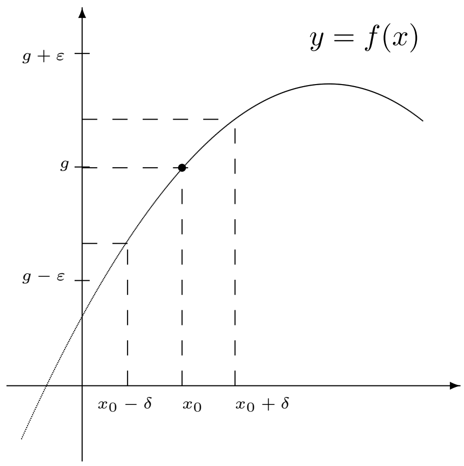
$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Definicja 3 (Cauchy'ego)**.** Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego otoczenia $U(g, \varepsilon)$ punktu g istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, \delta)$ punktu x_0, że

$$\forall_{x \in S(x_0,\delta)\cap X} \quad f(x) \in U(g, \varepsilon).$$

Inaczej mówiąc:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x\in X} \ \big(0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - g| < \varepsilon\big).$$



Twierdzenie 1. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie są równoważne.*

Uwaga 1. Zamieniając w powyższych definicjach punkt x_0 na $+\infty$ lub $-\infty$ dostajemy definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w $+\infty$ i $-\infty$. Przyjmujemy, że sąsiedztwem $+\infty$ jest każdy przedział $(\varepsilon, +\infty)$, a sąsiedztwem $-\infty$ – każdy przedział $(-\infty, -\varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$.

Definicja 4. Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę *niewłaściwą* $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$), gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 o wyrazach $x_n \in X$, różnych od x_0,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty, \qquad \text{(odpowiednio } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty).$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad \text{(odpowiednio } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty).$$

Definicja 5. *Granicą lewostronną* i *prawostronną* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy odpowiednio:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f^-(x), \qquad \text{gdzie} \quad f^-(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X \cap (-\infty, x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f^+(x), \qquad \text{gdzie} \quad f^+(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X \cap (x_0, +\infty).$$

Przykład 4. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wprost z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej oraz własności wartości bezwzględnej wynika, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1,$$

ponieważ przy $x \to 0^-$ wielkość x jest liczba ujemną. Podobnie

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Twierdzenie 2.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g.$$

Przykład 5. Funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{dla } x < 1, \\ 2^x & \text{dla } x > 1, \end{cases}$$

ma w punkcie $x_0 = 1$ granicę równą 2. Istotnie, wystarczy stwierdzić, że obie granice jednostronne tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$ wynoszą 2. Mamy:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2^x = 2.$$

Przykład 6. Obliczmy granice jednostronne funkcji

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu zauważmy najpierw, że

$$x \to 0^- \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} \to -\infty.$$

Stąd

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Podobnie

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Stąd na podstawie twierdzenia 2 granica $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ nie istnieje.

Przykład 7. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Otrzymujemy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem granica $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcje $f : X \to \mathbb{R}$ i $g : X \to \mathbb{R}$ posiadają granice w punkcie x_0, to*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$
4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$*, o ile* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ *i* $g(x) \neq 0$ *dla* $x \in S(x_0, \delta)$*.*

Twierdzenie 4 (o granicy złożenia funkcji)**.** *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$. Jeśli:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0,$
2) $f(x) \neq y_0$ *dla* $x \in S(x_0, \delta)$*, gdzie* $S(x_0, \delta)$ *jest pewnym sąsiedztwem punktu* x_0*,*
3) *istnieje granica* $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$*,*

to istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$*.*

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcja f jest określona i monotoniczna na przedziale (a, b), to dla każdego $x_0 \in (a, b)$ istnieją skończone granice jednostronne*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \textit{oraz} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Co więcej istnieją również granice $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ *ale nie zawsze są skończone.*

Własność 3. *Niech $a > 0$ i $x_0 \geqslant 0$.*

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad a > 1, \\ 1 & \textit{dla} \quad a = 1, \\ +\infty & \textit{dla} \quad a \in (0,1), \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad a \in (0,1), \\ 1 & \textit{dla} \quad a = 1, \\ +\infty & \textit{dla} \quad a > 1, \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1,$
4) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0},$
5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$
6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
7) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e.$

2. Asymptoty funkcji

Z niektórymi krzywymi (a więc także z krzywą $y = f(x)$ będącą wykresem funkcji f) związane są pewne proste, które pozwalają wyobrazić sobie kształt tych krzywych. Prosta nazywa się asymptotą krzywej $y = f(x)$, jeśli odległość punktu M leżacego na krzywej od tej prostej dąży do zera przy ruchu punktu M wzdłuż krzywej w nieskończoność.

Rozróżniamy trzy rodzaje asymptot: pionowe, poziome i ukośne (pochyłe).

Definicja 6. Jeśli w punkcie x_0 funkcja f ma nieskończoną granicę jednostronną, to prosta $x = x_0$ nazywa się *asymptotą pionową funkcji* f.

Definicja 7. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = a,$$

to prosta $y = a$ nazywa się *asymptotą poziomą funkcji* f.

Definicja 8. Jeśli

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0,$$

to prosta $y = ax + b$ nazywa się *asymptotą ukośną funkcji* f.

Wśród asymptot wyróżniamy jeszcze asymptoty obustronne i jednostronne. Mówiąc niedokładnie, asymptota będzie dwustronna jeśli będzie asymptotą w swoich dwóch "końcach" (lewym i prawym), w przeciwnym przypadku będzie to asymptota jednostronna.

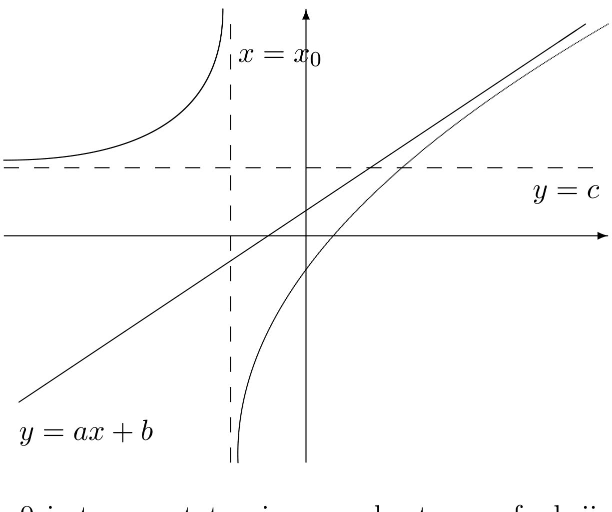
Twierdzenie 6. *Jeżeli funkcja f jest określona w sąsiedztwie $-\infty$ (odpowiednio $+\infty$) oraz istnieją skończone granice*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad i \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax\big) = b,$$

odpowiednio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad i \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b,$$

to prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ (odpowiednio w $+\infty$).



Przykład 8. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $y = \frac{1}{x}$. Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą tej w funkcji w $+\infty$ i w $-\infty$. Prosta $y = 2x + 3$ jest asymptotą ukośną funkcji $y = 2x + 3 + \frac{1}{x}$ w $+\infty$ i w $-\infty$.

3. Ciągłość funkcji

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze X i niech $x_0 \in X$. Istnieją, tak jak poprzednio, dwie równoważne definicje ciągłości funkcji w punkcie.

Definicja 9 (Heinego)**.** Funkcję f nazywamy ciągłą w punkcie x_0, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in X$, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji f jest zbieżny do $f(x_0)$.

Definicja 10 (Cauchy'ego)**.** Funkcję f nazywamy ciągłą w punkcie x_0, jeżeli dla każdego otoczenia $U\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ punktu $f(x_0)$ istnieje takie otoczenie $U(x_0, \delta)$ punktu x_0, że

$$\underset{x \in U(x_0,\delta)\cap X}{\forall} f(x) \in U\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

Inaczej mówiąc:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in X}{\forall} \big(|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

Istnieje głęboki związek miedzy pojęciem granicy a pojęciem ciągłości funkcji w punkcie opisany w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 7. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru X. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jej granica w tym punkcie i*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicja 11. Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest ciągła (w zbiorze X), gdy jest ona ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$.

Twierdzenie 8. *Dowolna funkcja wielomianowa, funkcja potęgowa, funkcja wykladnicza, logarytmiczna, funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzinie.*

Twierdzenie 9. *Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe, to funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ są ciągłe w zbiorze X. Funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w zbiorze $X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\}$.*

Twierdzenie 10 (o ciągłości funkcji złożonej)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Twierdzenie 11 (o ciągłości funkcji odwrotnej)**.** *Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest ciągła.*

Twierdzenie 12 (własność Darboux)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz*

1) $f(a) < f(b)$, *ewentualnie* $f(b) < f(a)$,
2) $y_0 \in (f(a), f(b))$, *odpowiednio* $y_0 \in (f(b), f(a))$,

to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $y_0 = f(x_0)$.

Wniosek 2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$ (to znaczy liczby rzeczywiste $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków), to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że $f(x_0) = 0$.*

Przykład 9. Ciągłość funkcji często służy do stwierdzenia czy dane równanie posiada rozwiązanie. Na przykład równania

$$2^x = x^2$$

nie da się rozwikłać dostępnymi środkami. Jednak funkcja $f(x) = 2^x - x^2$ jest ciągła w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ jako różnica funkcji ciągłych. Ponadto $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ oraz $f(1) = 2 - 1 = 1 > 0$. Zatem z powyższego wniosku istnieje $x_0 \in (-1, 1)$ takie, że $f(x_0) = 0$, czyli

$$2^{x_0} = (x_0)^2,$$

co oznacza, że dane równanie ma co najmniej jedno rozwiazanie. Rozwiązanie to mieści się w przedziale $(-1, 1)$. Istnieją metody pozwalające wyznaczyć przybliżoną wartość x_0 z dowolną dokładnością.

Twierdzenie 13 (Weierstrassa)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jest w nim ograniczona i przyjmuje swoje kresy, tzn. istnieją punkty $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ takie, że*

$$f(x_1) = \inf f\big(\langle a, b\rangle\big) \qquad i \qquad f(x_2) = \sup f\big(\langle a, b\rangle\big).$$

Twierdzenie 14 (o lokalnym zachowaniu znaku)**.** *Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 oraz $f(x_0) > 0$, to istnieje takie otoczenie $U(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0, że $f(x) > 0$ dla każdego $x \in U(x_0, \varepsilon) \cap X$. Analogiczna teza zachodzi przy założeniu, że $f(x_0) < 0$.*

Twierdzenie 15 (o przechodzeniu do granicy pod znakiem funkcji ciągłej)**.** *Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ i funkcja h jest ciągła w punkcie y_0, to*

$$\lim_{x\to x_0} h\big(f(x)\big) = h\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big).$$

Przykład 10. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla} \quad x \leqslant -2, \\ 2^{-x} + 1 & \text{dla} \quad -2 < x \leqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ -\frac{2}{2x-3} & \text{dla} \quad x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Na podstawie twierdzenia 8 i twierdzenia o ciągłości funkcji złożonej funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, \frac{3}{2}\}$.

1) Ponieważ $f(-2) = 5$ i

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} 5 = 5 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (2^{-x} + 1) = 5,$$

więc -2 jest punktem ciągłości funkcji f.

2) Ponieważ $f(0) = 2^0 + 1 = 2$ i

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2^{-x} + 1) = 2 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}}\big(x + \frac{1}{2}\big) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1,$$

więc 0 jest punktem nieciągłości funkcji f.

3) Ponieważ $f(\frac{3}{2}) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-1} = -1$ i

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \log_{\frac{1}{2}}\big(x + \frac{1}{2}\big) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \big(-\frac{2}{2x-3}\big) = -\infty,$$

więc $\frac{3}{2}$ jest punktem nieciągłości funkcji f.

Podsumowując funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$.