[計測自動制御学会論文集
Vol. 30, No. 6, 694/701 (1994)]

共有資源付きタイム・ペトリネットの即時発火活性について†

太田　淳*・久村富持*

On Liveness of Timed Petri Nets with Shared Resources Under the Earliest Firing Rule

Atsushi OHTA* and Tomiji HISAMURA*

Liveness is one of the most important properties in Petri net, which is a powerful tool for modeling of discrete event systems.

As an extended class of Petri nets, timed Petri nets with finite firing duration of transitions have a wide range of applications, such as scheduling problems in FMS, parallel computing systems and so on. The earliest firing rule for timed Petri net model offers an easy and effective way for solving sub-optimization problems. On the other hand, it is often the case in practical problems that some tasks share processors with other tasks. Such processors can be modeled by 'resource places' in Petri net.

In this paper, we treat liveness problems of the timed Petri nets which have shared resource places and obey the earliest firing rule. In general, liveness of a usual Petri net is neither necessary nor sufficient condition for liveness of the Petri net with shared resource places under the earliest firing rule. The relations between above two cases are clarified for some subclasses.

First, considering timed Petri nets with uniform firing durations, we show that if the net has a POC (partially ordered condition) structure and if the net is live, the net with arbitrary resource places is live under the earliest firing rule. The converse is not always true, but if the underlying net is SMA net, the two notions of liveness are equivalent.

For timed Petri nets with arbitrary firing durations, providing some additional conditions on resource places and the underlying net, we show that liveness is preserved under the earliest firing rule (1) if addition of resource places preserves POC structure, or (2) if resource places are connected to "fair" transitions. Some typical models in scheduling problems satisfy these conditions.

Key Words: timed Petri nets, liveness, the earliest firing rule, shared resources

1. はじめに

並列，非同期な離散事象システムの有効なモデルであるペトリネット[1)~4)]の重要な解析問題の一つに活性問題がある．これは，ペトリネット・モデル中のすべてのトランジションが，初期状態から遷移可能などの状態からでも潜在的に発火可能であるか否かを問う問題であり，現実には目的とする事象発生の検証，デッドロックの回避，構成要素の有効利用などに関連する．この活性問題については，これまでに多くの研究がなされており，ペトリネットのいくつかのサブクラス，たとえばマークグラフ[5)]，(拡張)自由選択ネット[2)]，非対称選択ネット[6)]，SMA ネット[3),15)]などについては，活性のための必要十分条件が得られている．また，これらのクラスの活性の検証のための計算アルゴリズムも提案されている[7)]．

一方，ペトリネットのトランジションに即時発火規則，すなわち，発火可能になったトランジションは即刻発火しなければならないという発火規則，を導入した即時発火ペトリネットは，スケジューリング問題などへの応用が考えられてきた．具体的には，トランジションに発火継続時間を導入したタイム・ペトリネット[8)]を用いてスケジューリング問題の準最適(遅れなし)解が即時発火ペトリネットモデルの下で比較的容易に求められ[9)]，特に

† 第7回離散事象システム研究会で一部発表(1991・5)

* 早稲田大学理工学部　東京都新宿区大久保 3-4-1
* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received December 21, 1992)
(Revised September 6, 1993)

ペトリネットがマークグラフとなるとき，最適解が得られることが知られている[10]．さらにスケジューリング問題では，ジョブ共通の機械，すなわち，共有資源の有効利用を扱うことが多く，これらの抽象化である共有資源プレースを設けたペトリネットの解析は，多品種少量生産のためのFMS，コンピュータ群による並列処理などの多くの応用面を考えるとき，重要な現実的意義をもつ．

さて一般的には，普通のペトリネットの活性は，発火可能になったトランジションに発火を強制しないので，共有資源の有無に全く影響されないが，即時発火規則を導入した場合には，共有資源は同時進行性を制限することがあるので，活性に影響を及ぼす場合が生ずる．特に発火継続時間がトランジションによって異なるタイム・ペトリネットにおいては，活性問題は大きな影響を受ける．

本報告では，文献11)～13)の結果の拡張として，上のような現実的応用面の広い共有資源付きタイム・ペトリネットを対象に，これにさらに即時発火規則を導入した「共有資源付き即時発火タイム・ペトリネット」の活性と，通常のペトリネットの(レベル4の[1])活性との間の関係を考察する．特に，ペトリネットのいくつかのサブクラスに対して，共有資源に対応するプレースの付加の影響と，そのときの即時発火規則の下での活性のための条件を検討する．

2. 諸定義

2.1 ペトリネット

以下にペトリネットに関する主な諸定義および記号を記す．詳細は文献4)などに準ずるものとする．

- 非負整数の集合を $Z^+=\{0,1,2,3,\cdots\}$ で表わす．
- 有限集合 X に対して，その要素数を $|X|$ で表わす．
- ペトリネット；$N=(P,T,F,m_0)$．ただし，

$$\begin{cases} P,T\text{；プレース，トランジションの有限集合．} \\ F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)\text{；アークの集合．} \\ m:P\to Z^+\text{；マーキング} \\ \quad m_0\text{；初期マーキング．} \\ \quad m(p)\text{；プレース}\ p\ \text{のトークン数．} \end{cases}$$

以下では各アークの重みが1であるような正規ペトリネット[1]のみを考える．

- 接続行列；$A^+=\{a_{ij}^+\}, A^-=\{a_{ij}^-\}, A=A^+-A^-$

$$a_{ij}^+=\begin{cases}1 & (t_j,p_i)\in F\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

$$a_{ij}^-=\begin{cases}1 & (p_i,t_j)\in F\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

- 前提集合，後提集合；$X\subseteq T\cup P$ に対して，

$$^{\cdot}X=\bigcup_{x\in X}\{y\in T\cup P\mid(y,x)\in F\},$$

$$X^{\cdot}=\bigcup_{x\in X}\{y\in T\cup P\mid(x,y)\in F\}.$$

特に，$^{\cdot}x={}^{\cdot}\{x\}, x^{\cdot}=\{x\}^{\cdot}$ とする．

- マーキング m におけるトランジション t の発火規則．
発火可能性；$m[t\rangle\Leftrightarrow m(p)\geqq 1\quad\forall p\in{}^{\cdot}t$.
発火可能なトランジション t が発火した結果のマーキングを m' とするとき，$m[t\rangle m'$ で表わす．ただし，

$$m'(p)=\begin{cases}m(p)-1\text{；}p\in{}^{\cdot}t-t^{\cdot}\\ m(p)+1\text{；}p\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t\\ m(p)\quad\ \text{；その他}\end{cases}$$

発火可能なトランジションは必ずしも発火しなくてもよい．以上をここでは「通常の発火規則」という．

- 発火系列；T^* をトランジションの有限列の集合とする．トランジション列 $w\in T^*$ の各トランジションがマーキング m から順次発火可能なとき，$m[w\rangle$ と表わし，結果のマーキングが m' のとき，$m[w\rangle m'$ と書く．
- 可達集合；$R(m)=\{m'\mid\exists w\in T^*, m[w\rangle m'\}$.
- 活性；トランジション t がマーキング m で(レベル4[1])活性$\Leftrightarrow\forall m'\in R(m)$；$\exists w\in T^*, m'[wt\rangle$．ペトリネット N が活性$\Leftrightarrow N$ のすべてのトランジションが初期マーキング m_0 で活性．
- プレース活性；プレース p がマーキング m でプレース活性$\Leftrightarrow\forall m'\in R(m)$；$\exists m''\in R(m'), m''(p)\geqq 1$．ペトリネット N がプレース活性$\Leftrightarrow N$ のすべてのプレースが m_0 でプレース活性．
- 有界性；プレース p が有界$\Leftrightarrow\forall m\in R(m_0)$；$m(p)<+\infty$，ペトリネット N が有界$\Leftrightarrow N$ のすべてのプレースが有界．
- 公平性[14]；発火系列 w におけるトランジション t の出現回数を $\#(t,w)$ と表わす．トランジション t,t' が公平$\Leftrightarrow\forall w$ s.t. $\exists m\in R(m_0), m[w\rangle$；$\#(t,w)=0\Rightarrow\#(t',w)<+\infty$，かつ，$\#(t',w)=0\Rightarrow\#(t,w)<+\infty$ (s.t.はsuch thatの略である)．
- サイフォン(デッドロック)；${}^{\cdot}S\subseteq S^{\cdot}$ となるような，プレースの空集合でない部分集合．$S'\subsetneqq S$ なるサイフォン S' が存在しないとき，サイフォン S は極小であるという．また，サイフォン S において，S と ${}^{\cdot}S$ から定まる部分ネットが強連結であるとき，S は閉路(あるいは，強連結)サイフォンであるという．
- トラップ；$S^{\cdot}\subseteq{}^{\cdot}S$ となるような，プレースの空集合でない部分集合．

2.2 共有資源付きペトリネット

たとえば，ジョブ J_1 とジョブ J_2 が同一の機械 M を使用するとき，M が1台のみであれば，J_1 と J_2 とを同時に処理することはできない．このペトリネットモデルを

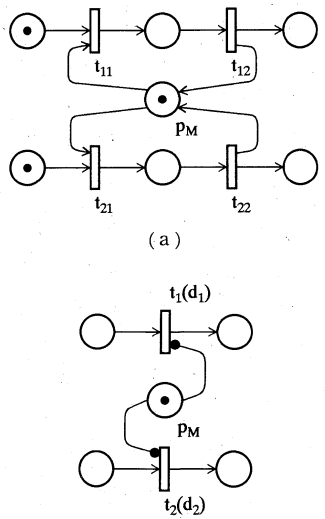

Fig. 1 Examples of a resource place, where (—●) denotes (⇄)

Fig. 1 に示す．Fig. 1(a)でトランジション $t_{11}(t_{21})$ の発火はジョブ $J_1(J_2)$ の開始，$t_{12}(t_{22})$ の発火はその終了にそれぞれ対応している．また，プレース p_M は共有資源である機械 M の状態を示し，p_M 中のトークンの有無が M の待機中，使用中をそれぞれ表わす．また，$J_1(J_2)$ の処理自体を $t_1(t_2)$ で表記するとき，Fig. 1(a)は Fig. 1(b)のようにも表わせる．なお，図中の黒丸つきのアーク(—●)は，往復アーク(⇄)を表わす．

【定義 1】 共有資源付きペトリネット；ペトリネット $N=(P, T, F, m_0)$ に共有資源プレースを付加したペトリネット $N^R=(P\cup R, T, F\cup F^R, m_0^R)$ を共有資源付きペトリネットという．ただし，

$$\begin{cases} R：\text{共有資源プレース}(P\cap R=\phi) \\ F^R\subseteq(R\times T)\cup(T\times R)： \\ \quad (p, t)\in F^R\Leftrightarrow(t, p)\in F^R \\ m_0^R(p)=m_0(p)；p\in P \\ m_0^R(p)\geqq 1 \quad ；p\in R \end{cases}$$

$p\in R$ の各プレースのトークン数は「資源の数」を表わす．

2.3 タイム・ペトリネットと即時発火規則

【定義 2】 タイム・ペトリネット；各トランジション t_j に正整数の発火継続時間 d_j を割り当てたペトリネット．時刻 k に発火を開始した t_j はその入力プレースからトークンを取り去り，時刻 $k+d_j$ に発火を終了してその出力プレースにトークンを与える．このトークンは時刻 $k+d_j$ よりトランジションの発火のために用いることができる．以下では，すべてのトランジションの発火継続時間が 1 であるタイム・ペトリネットを「1-PN」，一般の発火継続時間のタイム・ペトリネットを「TPN」と略すことにする．

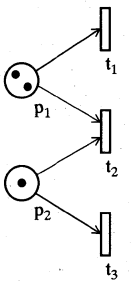

Fig. 2 An example of conflict under the earliest firing rule

【定義 3】 即時発火規則と自由発火；ペトリネットに離散時間 $0, 1, 2, \cdots, k, \cdots (k\in Z^+)$ を導入する．トランジションの発火は，時刻 k に起こらなければならない．更に，発火可能なトランジションは，発火可能になった時刻で必ず発火しなければならない．

このとき，トランジションの同時発火の可否によって，二つの場合が考えられる．その一つは，トランジションは可能であれば同時に何回発火してよいし，発火中に再び発火を開始してもよい場合で，無限サーバという．これに対して，トランジションが同時に 2 回以上発火できない場合を単一サーバとよび，応用上重要である．しかし，単一サーバのトランジションは無限サーバのトランジションを用いて表現できる．それには，無限サーバのトランジション t に対して，1 個のトークンをもつプレース p_t とアーク $(t, p_t), (p_t, t)$ を付加すればよい．プレース p_t は(広い意味で)共有資源とみなすことができるので，以下ではとくに断らない限り，トランジションは無限サーバであると仮定する．

また，競合が生じた場合には，発火すべきトランジションの集合(無限サーバのときは多重集合)は，集合の包含に関して極大なものから選ぶものとする．以上を「即時発火規則」という．

たとえば，**Fig. 2** のネットで発火可能なトランジションの組合せを列挙すれば，$\{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \{t_1, t_1\}, \{t_1, t_2\}, \{t_1, t_3\}, \{t_1, t_1, t_3\}$ であるが，即時発火規則の下では，単一サーバの場合 $\{t_1, t_2\}$ または $\{t_1, t_3\}$ が，多重サーバの場合 $\{t_1, t_2\}$ または $\{t_1, t_1, t_3\}$ が発火可能である．

即時発火規則の下で，競合が生じない場合を「自由発火」という．

上記の定義によれば，即時発火規則の下では発火は離散時間にしか起こらないとしたために，トランジションに陽に発火継続時間を導入しないペトリネットは，暗黙

のうちにそれが1-PNであると仮定したことと等価になる．なぜならば，仮に連続時間の下で即時発火規則を導入しようとすると，すべての事象(トランジションの発火)が無限小時間の間に起きることになり，「発火可能になった時刻」を定義できなくなるからである．

即時発火規則の下で実行可能な発火系列は，通常の発火規則でも実行可能である．ただし，即時発火規則の下で同時に二つ以上のトランジションが発火する場合は，それらを任意の順に並べて考えるものとする．たとえば，上記の例の1回の発火 $\{t_1, t_1, t_3\}$ には，通常の発火規則で実行可能な三つの列，$t_1t_1t_3, t_1t_3t_1, t_3t_1t_1$ のいずれかを対応させる．したがって，即時発火規則で可達なマーキングは通常の発火規則でも可達である．

2.4 ペトリネットのサブクラス

【定義4】 自由選択(FC)ネット[4]；$\forall p \in P$；$|p^{\cdot}|=1 \vee {}^{\cdot}(p^{\cdot})=\{p\}$ が成り立つペトリネット．

【定義5】 拡張自由選択(EFC)ネット[4]；$\forall p, p' \in P$ s.t. $p^{\cdot} \cap p'^{\cdot} \neq \phi$；$p^{\cdot}=p'^{\cdot}$ が成り立つペトリネット．

【定義6】 非対称選択(AC)ネット[4),6)]；$\forall p, p' \in P$ s.t. $p^{\cdot} \cap p'^{\cdot} \neq \phi$；$p^{\cdot} \subseteq p'^{\cdot} \vee p^{\cdot} \supseteq p'^{\cdot}$ が成り立つペトリネット．

【定義8】 POC(partially ordered condition)ネット[12),13)]；$\forall p, p' \in P$ s.t. $p^{\cdot} \cap p'^{\cdot} \neq \phi$；$p^{\cdot} \subseteq p'^{\cdot} \vee p^{\cdot} \supseteq p'^{\cdot} \vee {}^{\cdot}p \subseteq {}^{\cdot}p' \vee {}^{\cdot}p \supseteq {}^{\cdot}p'$ が成り立つペトリネット．

POCネットのクラスは，FC，EFC，ACの各クラスを包含しているので，以下では，主にPOCネットについて議論を進める．

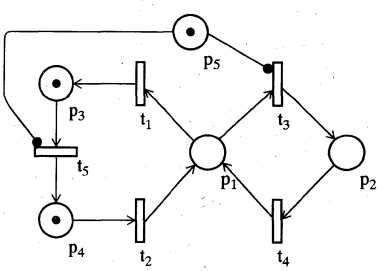

Fig. 3 A strongly connected state machine with a resource place

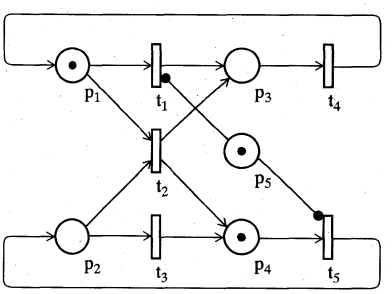

Fig. 4 A live Petri net with a resource place under the earliest firing rule

以上の準備の下に，共有資源付き(タイム)ペトリネットの即時発火規則の下における活性について考察する．一般に，通常のペトリネットの活性と，上記の構造と発火規則を付加したペトリネットの活性とは等価ではない．

たとえば，**Fig. 3** の共有資源(p_5)付きネット N^R を考える．これから共有資源を除いたネットは活性な強連結状態機械となる．一方，N^R でトランジションの発火継続時間が t_5 のみ3で残りはすべて1であるとき，即時発火規則の下では，以下の発火系列に示すように t_3, t_4 は活性ではない．

$$\{t_2, t_5\}(k=0) \rightarrow \{t_1\}(k=1) \rightarrow \{t_2, t_5\}(k=3) \rightarrow \cdots$$

また，**Fig. 4** のネット N^R では，共有資源(p_5)のないネット N は活性であるが，N を1-PNとしたとき，即時発火規則の下では，t_2 は発火できない．しかし，共有資源(p_5)を付けたネット N^R は，即時発火規則の下で活性である．

以上のような例をふまえて，以下では上記の両者の関係について考察する．

3. 共有資源付き1-PNの即時発火活性

ここでは，ペトリネット N の(レベル4)活性と，その共有資源付きペトリネット N^R の即時発火規則の下での活性(以下,「即時発火活性」と略す)との関係を考察する．本章では1-PNを主に取り扱い，次章ではTPNを取り扱う．即時発火規則を導入しない場合，通常のペトリネットでもTPNでも，明らかに共有資源はトランジションの発火および発火系列に全く影響を及ぼさない．なぜならば，共有資源プレース p_R 以外の入力プレースにトークンがあるが p_R にトークンがないために発火できない(タイム)トランジションは，p_R にトークンが戻ってくるのを待って発火できるからである．

さて，共有資源付き1-PNでは各時刻において共有資源プレースに必ず1個以上のトークンが存在する．したがって，共有資源プレースは一つのトランジションの発火には影響を及ぼさない(ただし,同時発火の可能性を制限するので，発火系列には影響を及ぼす)．よって，共有資源なしの場合の即時発火活性[12),13)]と同様の議論が可能であり，以下の結果を得る．

《定理1》 POCネット N が活性ならば，(任意の共有資源の設定に対して)共有資源付き1-PN N^R は即時発火活性である．

(証明) POCネット N では，トランジション t が活性であるための必要十分条件は，そのすべての入力プレー

スがプレース活性であることであり，これは即時発火規則の下でも成り立つ(付録参照)．1-PN では，上述のように各時刻に N^R の各共有資源プレースがトークンをもつので，トランジション t が即時発火活性であるための必要十分条件は，やはり，そのすべての入力プレースのプレース活性である．したがって，共有資源のない場合(付録)と同様の議論により，N^R が即時発火活性でなければ，N^R のある可達なマーキングでトークンなしサイフォン S が生じる．R の各プレースはトークンをもつことに注意すれば，S は P のプレースのみからなるので，S は N でもサイフォンである．

このときの発火系列は通常の発火規則の下での N でも実現可能であり，N にトークンなしサイフォンを生じるので，N は活性ではない． □

《定理 2》 ペトリネット N が POC ネットであり，かつ，N のすべての極小サイフォンがトラップであるならば，N の活性と共有資源付き 1-PN N^R の即時発火活性は等価である．

(証明) POC ネット N がこの条件をみたすとき，もし m_0 でトークンなしサイフォンが存在しないならば，いいかえれば，各極小サイフォンがトークンをもつならば，任意の可達マーキングで各極小サイフォンは(トラップでもあるので)トークンをもち，N は活性である．よって，N が活性でなければ，N^R に初期マーキングにおいてトークンなしサイフォンが存在する．ゆえに N^R は活性でない． □

4. 共有資源付き TPN の即時発火活性

発火継続時間が 1 とは限らない TPN の場合には，各時刻で共有資源プレース上に必ずしもトークンが存在するとは限らないので，上記の議論は当てはまらない．しかし，共有資源の設定に制限を加えれば，活性と即時発火活性の間に関係を見いだすことができる．

《定理 3》 共有資源付きペトリネット N^R が POC ネットとなるとき，N が活性ならば，N^R は任意の発火継続時間に対して即時発火活性である．

(証明) N^R が POC ネットなので，N が活性⇒N^R が活性⇒N^R が即時発火活性である(付録参照)． □

活性であるための必要十分条件が「m_0 でトークンなしサイフォンが存在しないこと」であるようなサブクラス(たとえば SMA ネット)では，明らかに，N が活性でなければ N^R も活性でないので，以下の系が成り立つ．

系3.1：N が無競合ネットであり，かつ，$\forall t$；$|{}^{\cdot}t \cap R| \leqq 1$ であれば，N の活性と任意の発火継続時間の下での N^R の活性は等価である．

(証明) このとき，N^R はACネットである．実際，$p \neq p'$ で，$p^{\cdot} \cap p'^{\cdot} \neq \phi$ ならば，一般性を失うことなく，$p \in P, p' \in R$ であるので，$p^{\cdot} \subseteq p'^{\cdot}$ である． □

なお，この系の結果は文献 9) の繰返し工程スケジューリング問題に適用可能である．

《定理 4》 N が POC ネットであり，かつ，共有資源付きペトリネット N^R について，以下の条件が成り立つものとする．

$\forall p \in R, \forall t, t' \in p^{\cdot}$；$t, t'$ は，N で任意の初期マーキングに対して公平(構造的に公平[4] という)である．

このとき，N が活性であれば，N^R は任意の発火継続時間に対して即時発火活性である．

(証明) 即時発火規則の下での発火系列は，通常の発火規則でも発火可能であるので，即時発火規則の下で公平でないトランジションの組は通常の発火規則の下でも公平でないことに注意する(公平性は任意の発火系列について成立しなければならないからである)．

N^R が即時発火活性ではないものとし，t を即時発火活性でないトランジションとする．活性の定義よりある可達なマーキング m で t が不活性となる．$R_1 = {}^{\cdot}t \cap R$, $T_1 = R_1^{\cdot} (= {}^{\cdot}R_1)$ とすれば，公平性の仮定より，マーキング m から T_1 の各トランジションが発火できるのは高々有限回である．したがって，m から可達なあるマーキング m' で T_1 の各トランジションが不活性であるものが存在する．R_1, T_1 の定義より，m' および m' から可達な任意のマーキングで R_1 のすべてのプレースがトークンをもつ．さて，マーキング m' において，もし ${}^{\cdot}t \cap P$ のすべてのプレースがプレース活性であったとすれば，POC ネットの性質より，m' から可達なあるマーキングで t が発火可能となり，t が不活性であることに矛盾する．以上より，N^R のあるトランジション t が活性であるための(必要)十分条件はその入力プレースがすべてプレース活性である(R のプレースはすべてプレース活性であることに注意)こととなる．

したがって，定理 1 の証明の場合と同様の議論によって，本定理が証明される． □

系 4.1：N が強連結マークグラフであれば，N の活性と任意の共有資源，発火継続時間の下での N^R の活性は等価である．

(証明) 強連結マークグラフでは，すべてのトランジションが任意の初期マーキングに対して公平である． □

以下の定理は，構造的な公平性はネット構造と初期マーキングから検証可能であり，その計算量が決定性多項式時間であることを示す．文献 14) では，この定理は構造的に有界な場合のみを議論しているが，そうでなくても成り立つ．

《定理5》 二つのトランジション t_j と t_k が構造的に公平であるための必要十分条件は，

$$\forall x \gneqq 0 \text{ s.t. } Ax \geqq 0 ; x_j=0 \Leftrightarrow x_k=0 \qquad (1)$$

である．

(証明) もし，$\exists x \gneqq 0$ s.t. $Ax \geqq 0$；$x_j>0 \wedge x_k=0$ ならば，初期マーキング $m_0=A^- x$ に対して，発火回数ベクトル x に対応する任意の発火系列 w は無限回繰返し発火可能であり，公平性が成り立たない．

逆に，たとえばある初期マーキング m_0 から，t_1 を1回も発火させずに，t_2 が無限回発火できるものと仮定する．このとき，以下のように書くことができる．

$$m_0[w_1 t_2\rangle m_1[w_2 t_2\rangle m_2[w_3 t_2\rangle \cdots,\ w \in T^*$$

ただし，w_i は t_1 も t_2 も含まない．このとき，$m_j \leqq m_k (j<k)$ なる j, k が存在する[1]．m_j から m_k に至る発火系列 w に対応する発火回数ベクトルを x とすれば，$Ax=m_k-m_j \geqq 0$ であり，$x_2>0 \wedge x_1=0$ を満たす．□

定理5の条件式(1)の否定は，

$$\exists x \gneqq 0 \text{ s.t. } Ax \geqq 0 ; x_j>0 \wedge x_k=0 \qquad (2)$$

または，

$$\exists x \gneqq 0 \text{ s.t. } Ax \geqq 0 ; x_j=0 \wedge x_k>0 \qquad (2')$$

が成り立つことであるので，(1)式が成り立つための必要十分条件は，二つの線形計画問題，

$$Ax \geqq 0,\ x_j=1,\ x_k=0,\ x \geqq 0 \qquad (3)$$

および，

$$Ax \geqq 0,\ x_j=0,\ x_k=1,\ x \geqq 0 \qquad (3')$$

にともに解が存在しないことである．線形計画問題は決定性多項式時間で解けるので，定理5の条件の検証も決定性多項式時間で可能である．

5. おわりに

スケジューリング問題などに応用範囲の広い共有資源付きペトリネットに，即時発火規則を導入したときの活性(即時発火活性)について考察した．トランジションの発火に時間を入れない場合(定理1，2)と，時間を入れた場合(定理3，4)のそれぞれについて，即時発火活性と共有資源のないネットの(通常の意味での)活性との間に成り立つ関係を調べた．今後の課題としては，共有資源付きTPNの即時発火活性と，対応するペトリネットの通常の発火規則の下での活性との間の関係をより広いサブクラス，あるいは，より応用範囲の広いサブクラスなどについて考えること，などが挙げられる．

参考文献

1) J. L. Peterson: Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall (1981)
市川，小林訳：ペトリネット入門，共立出版(1983)
2) W. Reisig: Petri Nets, Springer-Verlag (1985)
長谷川，高橋訳：ペトリネット理論入門，シュプリンガー・フェアラーク東京(1988)
3) M. Jantzen and R. Vack: Formal Properties of Place/Transition Nets, Lecture Notes in Computer Science, **84**, 165/212, Springer-Verlag (1980)
4) T. Murata: Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proc. IEEE, **77**-4, 541/580 (1989)
5) F. Commoner, A. W. Holt, S. Even and A. Pnueli: Marked Directed Graphs, J. Comput. & Syst. Sci., **5**, 511/523 (1971)
6) E. Best: Structure Theory of Petri Nets: the Free Choice Hiatus, Lecture Notes in Computer Science, **254**, 168/205, Springer-Verlag (1987)
7) J. Esparza and M. Silva: A polynomial-time algorithm to decide liveness of bounded free choice nets, Theoretical Computer Science, **102**, 185/205 (1992)
8) C. V. Ramamoothy and G. S. Ho: Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets, IEEE Trans., **SE-6**-5, 440/449 (1980)
9) 新井，藤森，久村：繰返し工程スケジューリング問題へのタイム・ペトリネットの応用と緊急停止時の復旧方策，計測自動制御学会論文集，**22**-9, 955/961 (1986)
10) J. Carlier, P. Chretienne, and C. Girault: Modelling Scheduling Problems with Timed Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science, **188**, 62/82, Springer-Verlag (1984)
11) P. H. Starke: Some Properties of Timed Nets under the Earliest Firing Rule, Lecture Notes in Computer Science, **424**, 418/432, Springer-Verlag (1989)
12) 太田，久村：プレース活性が活性のための必要十分条件となるサブクラスとそのタイムペトリネットへの応用，計測自動制御学会第7回離散事象システム研究会講演論文集，7/14 (1991)
13) A. Ohta and T. Hisamura: POC net, a subclass of Petri net, and its application to timed Petri nets, Int. J. Systems Science, **24**-3, 539/552 (1993)
14) T. Murata and Z. Wu: Fair Relation and Modified Synchronic Distances in a Petri Net, J. Franklin Institute, **320**-2, 63/82 (1985)
15) D. I. Lee, S. Kumagai and S. Kodama: A Necessary and Sufficient Condition for SMA Nets, 計測自動制御学会第7回離散事象システム研究会講演論文集，57/63 (1991)

《付録　POCネットの即時発火活性》[12),13)]

以下にPOCネットの活性がプレース活性と等価であることを示す．まず，以下の補題を考える．

[補題1] POCネットでは，一つのトランジション t の入力プレースに ${}^{\cdot}t=\{p^1, p^2, \cdots, p^{|{}^{\cdot}t|}\}$，かつ，$j<k \Rightarrow p^{j\cdot} \supseteq p^{k\cdot} \vee {}^{\cdot}p^j \subseteq {}^{\cdot}p^k$ を満たすように順序をつけることができる．

このことを示すためにPOCネットのトランジション t に対して，以下のように有向グラフ $G_t=(V_t, E_t)$ を定義し，G_t に有向閉路が存在しないことを示す．

$$V_t={}^{\cdot}t$$

$$E_t=E_t'-E_t''$$

$$E_t'=\{(p, p') \mid p^{\cdot} \supseteq p'^{\cdot} \vee {}^{\cdot}p \subseteq {}^{\cdot}p'\}$$

$$E_t''=\{(p, p'), (p', p) \mid (p, p') \in E_t' \wedge (p', p) \in E_t'\}$$

[補題 2] POC ネットでは，有向グラフ G_t には有向閉路が存在しない．

(証明) G_t に有向閉路が存在すると仮定して，矛盾を導く．有向閉路が存在するとして，そのうち枝の数が最小値 k をとるものを $L=p_1p_2\cdots p_kp_1$ とする(番号は適当に付け替えるものとする)．G_t(とくに E_t'')の定義により，$k\geqq 3$ である．

まず，$k=3$ とする．このとき，p_1 となるプレースを適当に選ぶことにより，$p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}$，または，${}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_2\subseteq{}^{\cdot}p_3$ が仮定できるが，それぞれ，$p_1^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}$，${}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_3$ が結論され，$(p_1, p_3)\in E_t'$ より，$(p_3, p_1)\in E_t$ とはなり得ない．

つぎに，$k\geqq 4$ とする．このとき，$p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}\supseteq\cdots$，あるいは，${}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_2\subseteq{}^{\cdot}p_3\subseteq\cdots$ のどちらかが成り立ち，たとえば，$p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}\wedge{}^{\cdot}p_2\subseteq{}^{\cdot}p_3$ のような場合はあり得ないことを示す．

まず，$\{p_1, p_2, p_3\}$ について考える．有向閉路 L の枝数の最小性より，$(p_1, p_3)\notin E_t$，かつ，$(p_3, p_1)\notin E_t$ でなければならない．POC ネットの定義より，$(p_1, p_3)\in E_t'$，または，$(p_3, p_1)\in E_t'$ の少なくとも一方が成り立つことを考えあわせると，これらはともに E_t'' に属さなければならない．すなわち，$(p_1, p_3)\in E_t'$，かつ，$(p_3, p_1)\in E_t'$ である．ここで以下の二つの場合が考えられる．

1. $p_3^{\cdot}\supseteq p_1^{\cdot}$ の場合

もし，$p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}$ ならば，$p_3^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}$，すなわち，$(p_3, p_2)\in E_t'$ が結論され，$(p_2, p_3)\in E_t$ と矛盾する．よって，E_t' の定義により，${}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_2$ である．また，$p_2^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}$ ならば，$p_2^{\cdot}\supseteq p_1^{\cdot}$，すなわち，$(p_2, p_1)\in E_t'$ が結論され，$(p_1, p_2)\in E_t$ と矛盾するので，E_t' の定義により，${}^{\cdot}p_2\subseteq{}^{\cdot}p_3$ である．以上より，${}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_2\subseteq{}^{\cdot}p_3$ である．

2. ${}^{\cdot}p_3\subseteq{}^{\cdot}p_1$ の場合

上記と同様の議論によって，$p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}$ が導かれる．この議論を $\{p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \cdots, \{p_{k-1}, p_k, p_1\}$ について繰り返せば，途中で矛盾を生じる(たとえば，$p_2^{\cdot}\not\supseteq p_3^{\cdot}$，かつ，$p_2^{\cdot}\supseteq p_3^{\cdot}\supseteq p_4^{\cdot}$ が成り立たなければならなくなる)か，

$$ {}^{\cdot}p_1\subseteq{}^{\cdot}p_2\subseteq\cdots\subseteq{}^{\cdot}p_k\subseteq{}^{\cdot}p_1\Rightarrow{}^{\cdot}p_1={}^{\cdot}p_2=\cdots={}^{\cdot}p_k $$

または，

$$ p_1^{\cdot}\supseteq p_2^{\cdot}\supseteq\cdots\supseteq p_k^{\cdot}\supseteq p_1^{\cdot}\Rightarrow p_1^{\cdot}=p_2^{\cdot}=\cdots=p_k^{\cdot} $$

が成り立つので，L は存在し得ない． □

つぎに，この補題を用いて，t の入力プレースに順序付けを行う．

1. $G_1:=G_t$，$j:=1$
2. G_j において，入ってくる枝のないプレースを p^j とする．
3. G_j から，p^j および，そこから出て行く枝を取り除いたグラフを G_{j+1} とする．
4. $j:=j+1$，もし，$j\leqq|{}^{\cdot}t|$ であれば 2 へ．そうでなければ終り．

G_t に有向閉路が存在しないので，ステップ 2 で必ず p^j を選ぶことができる．$G_j-\{p^j\}$ の任意の節点を p とするとき，POC ネットの性質より，$(p^j, p)\in E_t'$，$(p, p^j)\in E_t'$ の少なくとも一方が成り立つが，$(p, p^j)\notin E_t$ なので，$(p^j, p)\in E_t'$ が成り立つことがわかる．すなわち，$j<k$ ならば，$(p^j, p^k)\in E_t'$ である．

[補題 3] POC ネット N のトランジション t が活性であるための必要十分条件は，t のすべての入力プレースがプレース活性であることである．

(証明) 活性なトランジションの入出力プレースはプレース活性なので，必要性は明らかである．十分性を示す．N の任意の可達なマーキング m におけるトランジション t の発火可能性を考える．まず，上記に従って ${}^{\cdot}t$ の各プレースに順序 $\{p^j\}$ を付ける．もし，$m(p)\geqq 1$；$\forall p\in{}^{\cdot}t$ ならば，t は m で発火可能である．そうでないときは，p^j を $m(p^i)=0$ なる添字 i が最大となるプレースとする．N がプレース活性であるので，m から可達なマーキングで p^j が(初めて)トークンをもつような m' が存在する．$k>j$ なる任意の k に対して，$p^{j\cdot}\supseteq p^{k\cdot}$ または，${}^{\cdot}p^j\subseteq{}^{\cdot}p^k$ が成り立つので，$m'(p^k)\geqq 1$ である．実際，$p^{j\cdot}\supseteq p^{k\cdot}$ ならば，p^j にトークンがない限り $p^{k\cdot}$ のトランジションは発火できないし，${}^{\cdot}p^j\subseteq{}^{\cdot}p^k$ ならば，p^j にトークンを投入するトランジションは p^k にもトークンを投入する．この m' を m とみなして以上の議論を繰り返せば，t が発火可能なマーキングを得ることができる． □

[補題 4] POC ネット N が活性であるための必要十分条件は N がプレース活性であることである．

(証明) 補題 3 を POC ネットの各トランジションについて適用すればよい． □

[補題 5] POC ネットが活性であるための必要十分条件は，任意の可達なマーキングで(もし存在すれば)各極小サイフォンがトークンをもつことである．

(証明) トークンのないサイフォンの出力トランジションは不活性なので必要性は明らかである．十分性のみを示す．

POC ネットが活性でなければ，プレース活性でもない．このとき，以下の手順でプレース全体をプレース活性なものと，「プレース不活性」なものに分割できる．

まず，$P_0=\phi$, $m=m_0$ とおく．もし，$P-P_0$ の各プレースが m でプレース活性ならば分割を終了する．そうでないならば，あるプレース $p\in P-P_0$ とマーキング $m'\in R(m)$ で，m' から可達な任意のマーキングで p にトークンがないものが存在する．$P_0=P_0\cup\{p\}$, $m=m'$ として以上を繰り返す．プレースの数は有限なので，この手続

きは必ず終了する．$P_1=P-P_0$ とおけば，P_1 の各プレースは m でプレース活性，P_0 の各プレースは m から可達な任意のマーキングでトークンをもたない．

P_0 がサイフォンであることを示そう．$t\in{}^{\cdot}P_0$ とする．P_0 は m から可達な任意のマーキングでトークンをもたないので，t は m で不活性である．したがって，t の入力プレースの少なくとも一つは m でプレース活性ではない．よって，$t\in P_0^{\cdot}$ となり，P_0 はサイフォンであり，m でトークンをもたない．□

以上の議論は即時発火規則の下でも成り立つので，もし，POC ネット N が即時発火活性でなければ，ある可達なマーキング m でトークンのないサイフォン S が存在する．m は通常の発火規則でも可達であるので，N は通常の発火規則の下でも活性ではない．

［著　者　紹　介］

太　田　　淳（正会員）

1988 年，早稲田大学理工学部物理学科卒業．90 年同大学大学院理工学研究科修士課程（制御工学研究）修了．94 年同研究科博士課程修了．同年同大学理工学部助手（応用物理学科）．ネット理論の制御への応用に関する研究に従事（工学博士）．

久　村　富　持（正会員）

1959 年，早稲田大学大学院工学研究科応用物理学専攻修士課程修了．同大学助手，専任講師，助教授を経て，71 年同大学教授（応用物理学科），現在に至る．適応制御，離散事象系の解析，設計，評価などの研究に従事（工学博士）．電子情報通信学会，情報処理学会などの会員．