ボーイ・サーフェス設計書

–ハサミ、紙、セロテープで工作可能–

小笠　英志

本稿は、ボーイ・サーフェスというものの設計図です。

ボーイという数学者が、「$\mathbb{R}P^2$ の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込み」という図形を発見して、1901 年に発表しました（[1]）。この図形をボーイに敬意を表し、ボーイ曲面（Boy surface、ボーイ・サーフェス）と言います。

ボーイ・サーフェスは Figure 0.1 のような感じです。

ボーイ・サーフェスについては初心者向けの解説は拙著 [6] を御覧下さい。厳密な解説は [3] を御覧下さい。[3] の P121 に [1] が引用されています。
本稿は、拙記事 [7] の和訳です。

Giller と言う人がボーイ・サーフェスを彼の論文 [2] で使いました。著者は、拙論文 [4, 5] で、[2] を引用し、ボーイサーフェスを使いました。それが、拙記事 [7] 並びに、本稿を執筆したきっかけです。

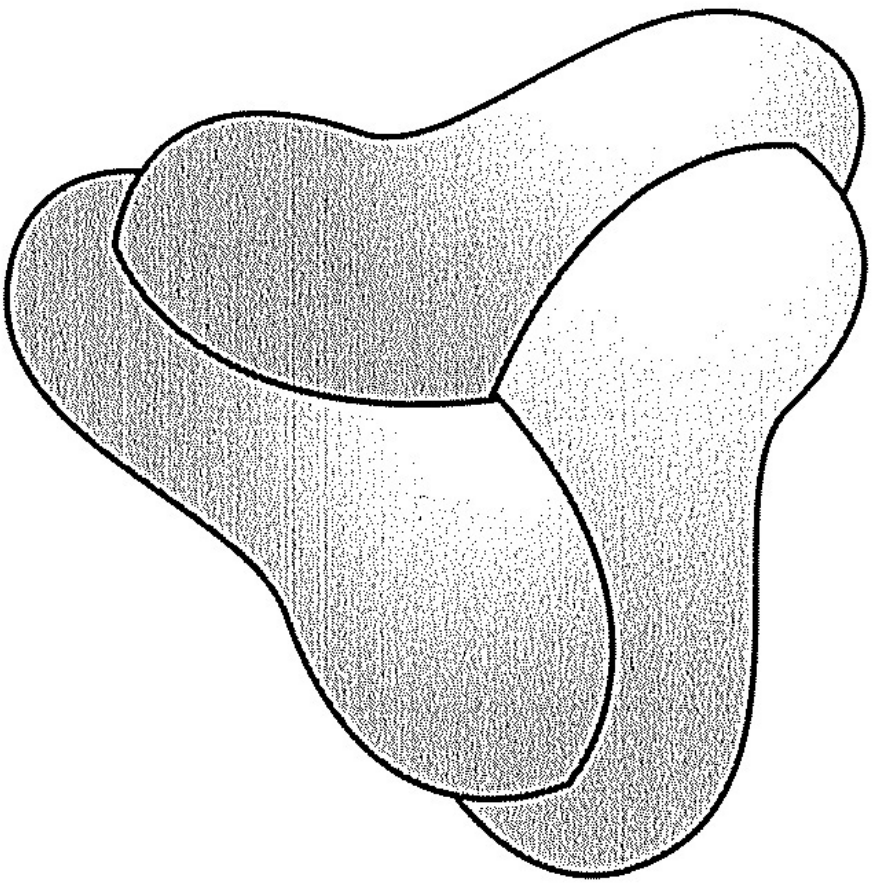


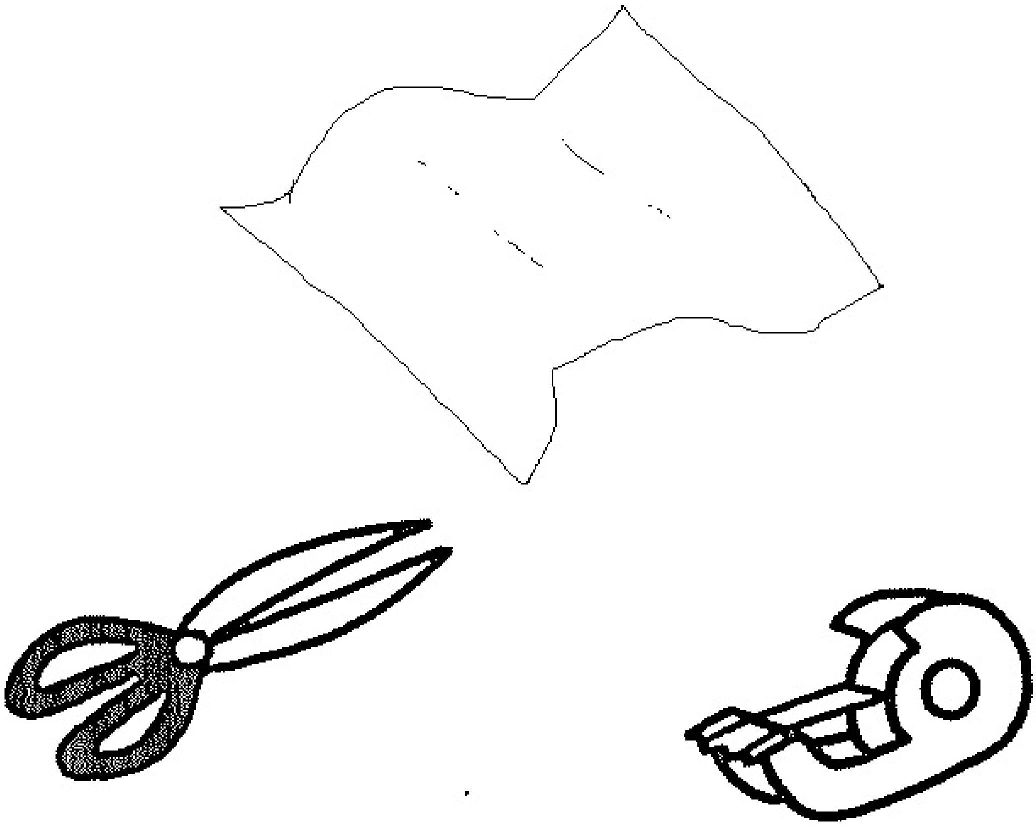
Figure 0.1. ボーイサーフェス

ウェブ検索すると別の向きから見た絵なども見つかります。しかし、絵をいろいろ見ても、多くの初心者には、どのような形か、なかなか実感が湧かないのではないでしょうか。R^3 の中の図形であるにもかかわらず、です。

ボーイ・サーフェスは数学において重要なものなのですが、数学以外の一般では、それほど、有名ではないようです。

その理由は、おそらく、ボーイサーフェスは絵を見ても、どのような形か、なかなかイメージが頭に浮かばないからだと思います。

しかるに、本稿では、実際にボーイ・サーフェスを作ってみます。今から、ボーイ・サーフェスをハサミ、紙、セロテープを使って簡単に工作する方法を紹介します。実際に作ってみればどんな形か実感が湧くでしょう。



これから紹介する工作を実際にするのを撮影した動画を以下に置きました。

http://www.geocities.jp/n_dimension_n_dimension/MakeyourBoysurface.html

_が3個有る事に注意してください。このウェブサイトは以下の拙ウェブサイトからも行けます。

http://www.geocities.jp/n_dimension_n_dimension/list.html

検索エンジンで、おがさえいじ か Eiji Ogasa か 小笠英志 でも見つかります。また、この動画の解説記事'Eiji Ogasa: Make your Boy surface' を

http://arxiv.org/pdf/1303.6448v1.pdf

に置きました。このウェブサイトは検索エンジンで、Make your Boy surface でも見つかります。

Figure 0.2 と 0.3 にある図 I, II, III を見て下さい。図 Iのコピーを3個とってください。もしくは上記の、'ウェブ上の拙記事'から印刷して下さい。その後、図 IIを1個、図 IIIを3個以下のように用意してください。図 Iの各正方形の一辺の長さを、図 II, IIIの各正方形の一辺の長さの半分になるようにして下さい。まず図 Iを用意して、図 II, IIIの各正方形の一辺の長さがそうなるように、定規と鉛筆で書いてください。

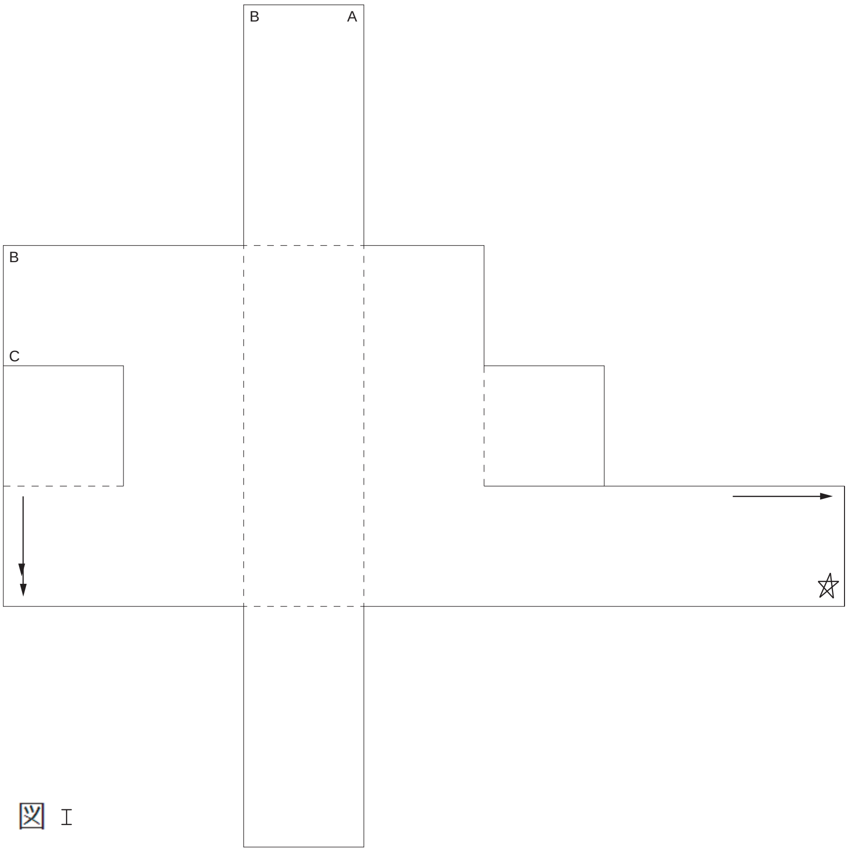


FIGURE 0.2.

図III

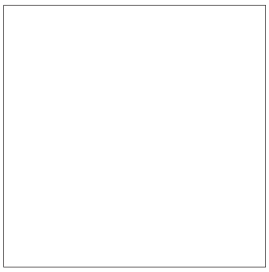


図 II

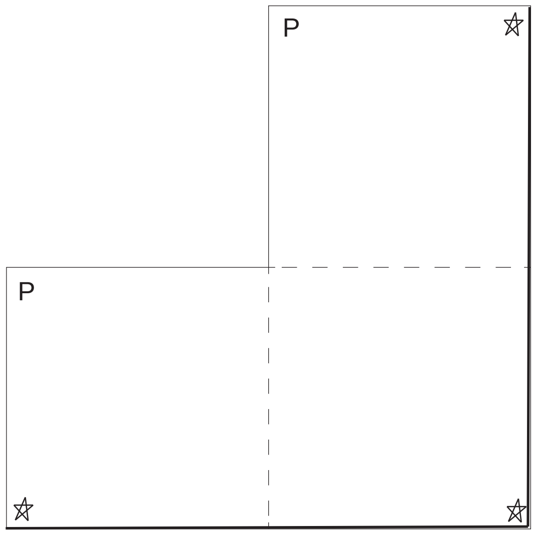


FIGURE 0.3.

Figure 0.4 の図 IV のものを図 III のコピー3個から作ってください。できたものをパーツ IV と呼びます。(注意: パーツ IV を作るときに図 III のコピー3個を何回かはさみで、切らなければなりません。必要なら、いったん2つか3つに切り分け、その後、セロテープでとめてください。)

次に、パーツ IV 上の点で、Figure 0.4 の図 V の点 A, B, C, A', B', C', A", B", C" にあたるところに、そう書き込んで下さい。すぐ、あとで使います。

立体座標の得意な人向け。パーツ IV は xyz-座標を用いると、以下の3個を合わせたものです。

$\{(x,y,z)| -1 \leqq x \leqq 1, \quad -1 \leqq y \leqq 1, \quad z=0\}$

$\{(x,y,z)| -1 \leqq y \leqq 1, \quad -1 \leqq z \leqq 1, \quad x=0\}$

$\{(x,y,z)| -1 \leqq z \leqq 1, \quad -1 \leqq x \leqq 1, \quad y=0\}$.

すると、点 A, B, C, A', B', C の座標は以下です。

$A(-1,0,0), \quad B(-1,0,1), \quad C(0,0,1)$

$A'(0,-1,0), \quad B'(1,-1,0), \quad C'(1,0,0)$

$A''(0,0,-1), \quad B''(0,1,-1), \quad C''(0,1,0)$

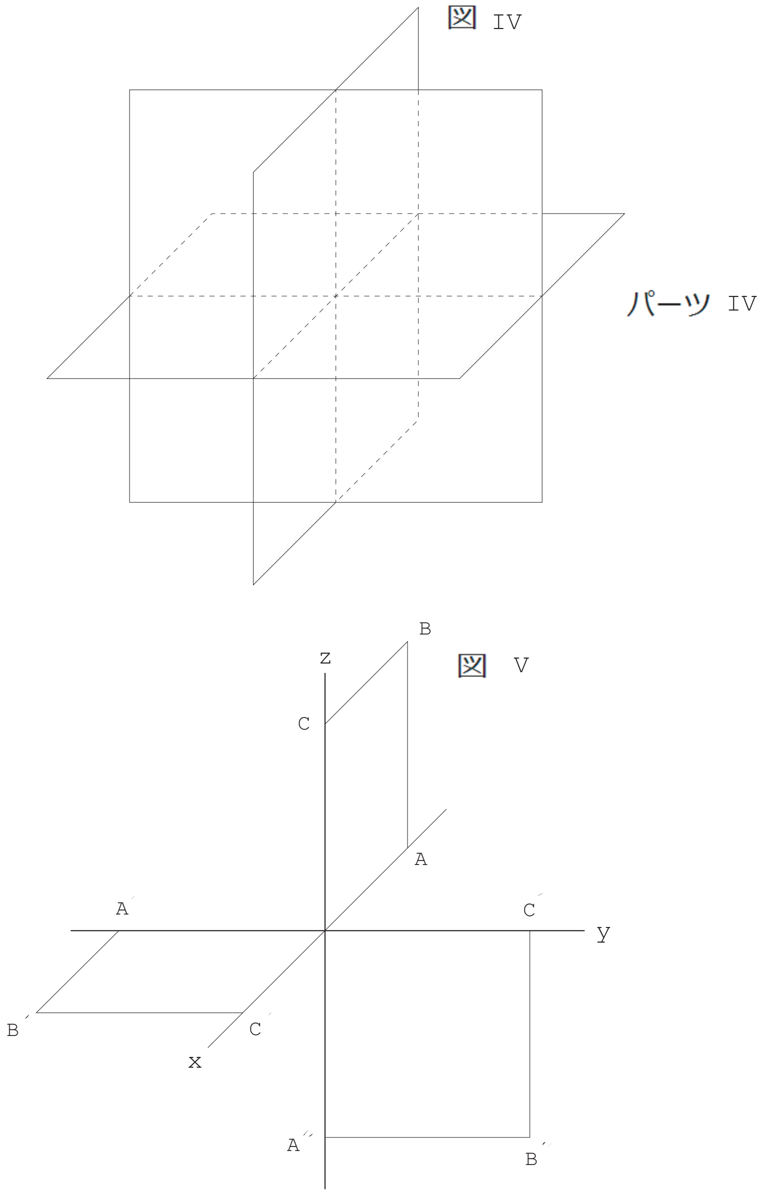
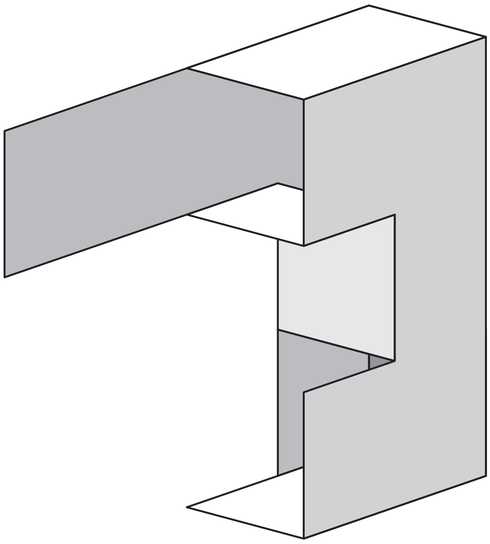


FIGURE 0.4.

図Iの各コピーを実線に沿って切ります。図の中にある実線も切り込みを入れます。切り込みを入れたあとのものをパーツI’と呼ぶことにします。今、パーツI’が3個有ります。

各パーツＩ’を、点線に沿って折ります。点線が内側になるように９０度に折ってください。セロテープを使って、辺と辺が合うところを貼って下さい。このとき２個のＢが合うことに注意してください。Figure 0.5 の図形が得られました。この図形を パーツＩと呼びます。



パーツ Ｉ

Figure 0.5.

パーツ I が 3 個用意できました。それぞれ、パーツ I 其の壱, パーツ I 其の弐, パーツ I 其の参と呼ぶことにします。A, B, C が各パーツに書き込まれています。

パーツ I 其の壱を　パーツ IV にセロテープを使って貼ります。その際、

パーツ I 其の壱の A が パーツ IV の A に、

パーツ I 其の壱の B が パーツ IV の B に、

パーツ I 其の壱の C が パーツ IV の C に、合うようにします。Figure 0.6 のものを得ました。

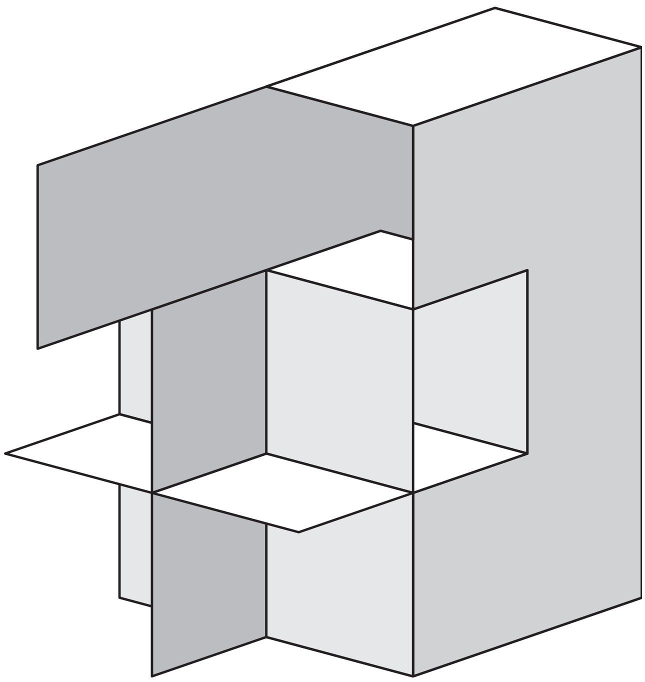


Figure 0.6.

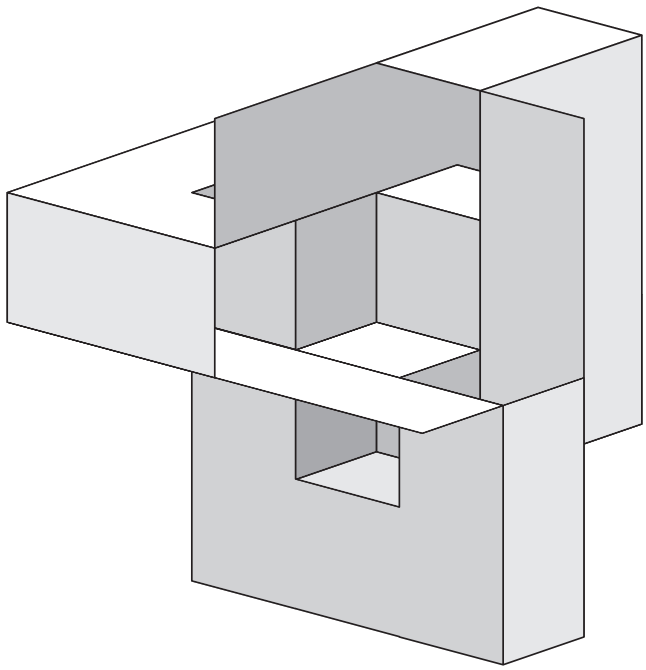
パーツ I 其の弐 (其の参) に書き込んである A, B, C を A', B', C' (A'', B'', C''). と呼ぶことにします。

パーツ I 其の弐を ‘ パーツ IV と　パーツ I 其の壱の合体したもの’ にセロテープを使って貼ります。その際、A' が A' に、B' が B' に、 C' が C' に、合うようにします。

パーツ I 其の参を ‘ パーツ IV と　パーツ I 其の壱とパーツ I 其の弐との合体したもの’ にセロテープを使って貼ります。その際、A'' が A'' に、 B'' が B'' に、 C'' が C'' に、合うようにします。

Figure 0.7 のような図形を得ます。これを パーツ VI と呼びます。

このとき、パーツIのひとつに書かれている矢印は、別のパーツ I に書かれている二重矢印に合います。



パーツ VI

Figure 0.7.

図 II　のコピーを実線に沿って切ります。できたものを パーツ II' と呼びます。

　パーツ II' を、点線に沿って、点線が内側になるように９０度に折ります。

セロテープを使って、貼って Figure 0.8 のような図形を作ります。その際、二個の　P　が一致します。

この図形を パーツ II と呼びます。

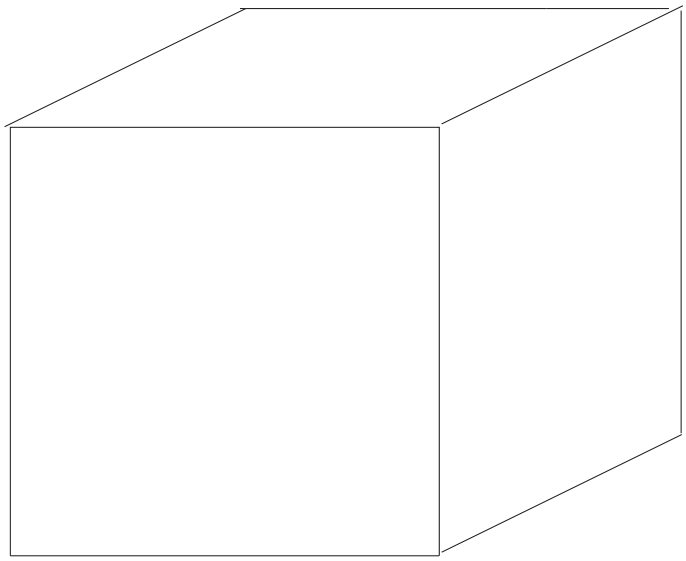


Figure 0.8.

さて、あと少しでボーイ・サーフェスが完成です。

パーツIIをパーツIVにセロテープで貼ります。その際、パーツ II に描かれた各星が、パーツVIに描かれた各星に合うようにします。すると Figure 0.9 のものが得られます。これが、ボーイ・サーフェスです。

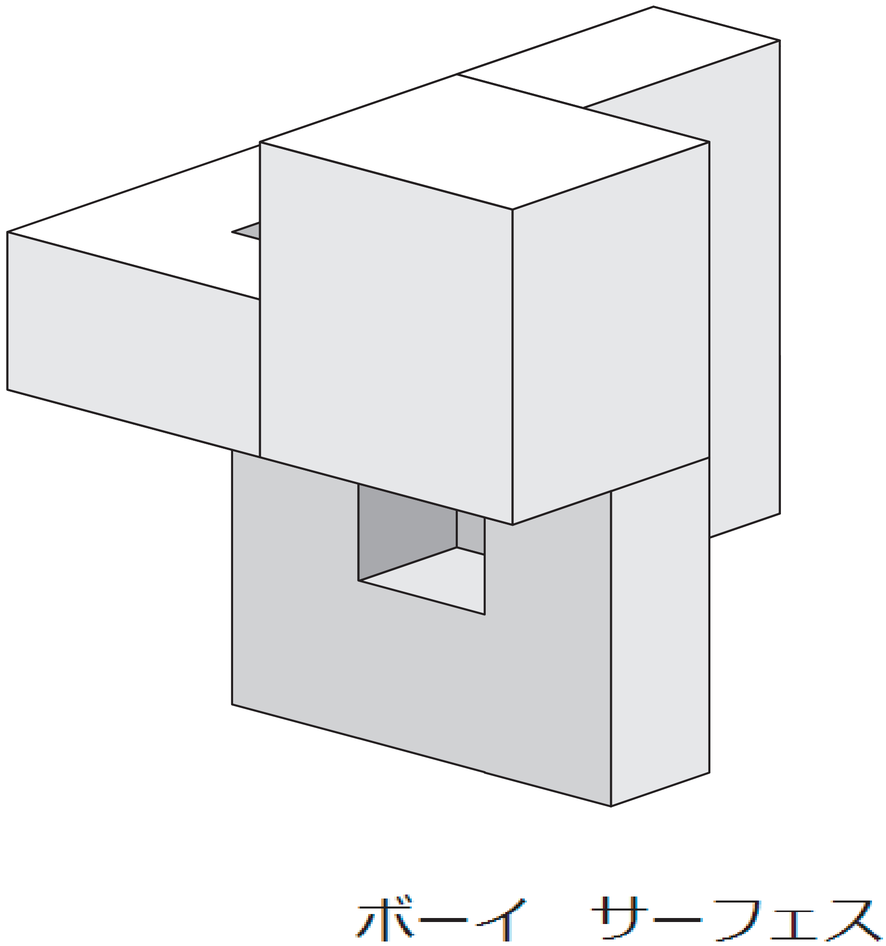


Figure 0.9.

Figure 0.10 は、Figure 0.9 の図を別の角度から見た図です。

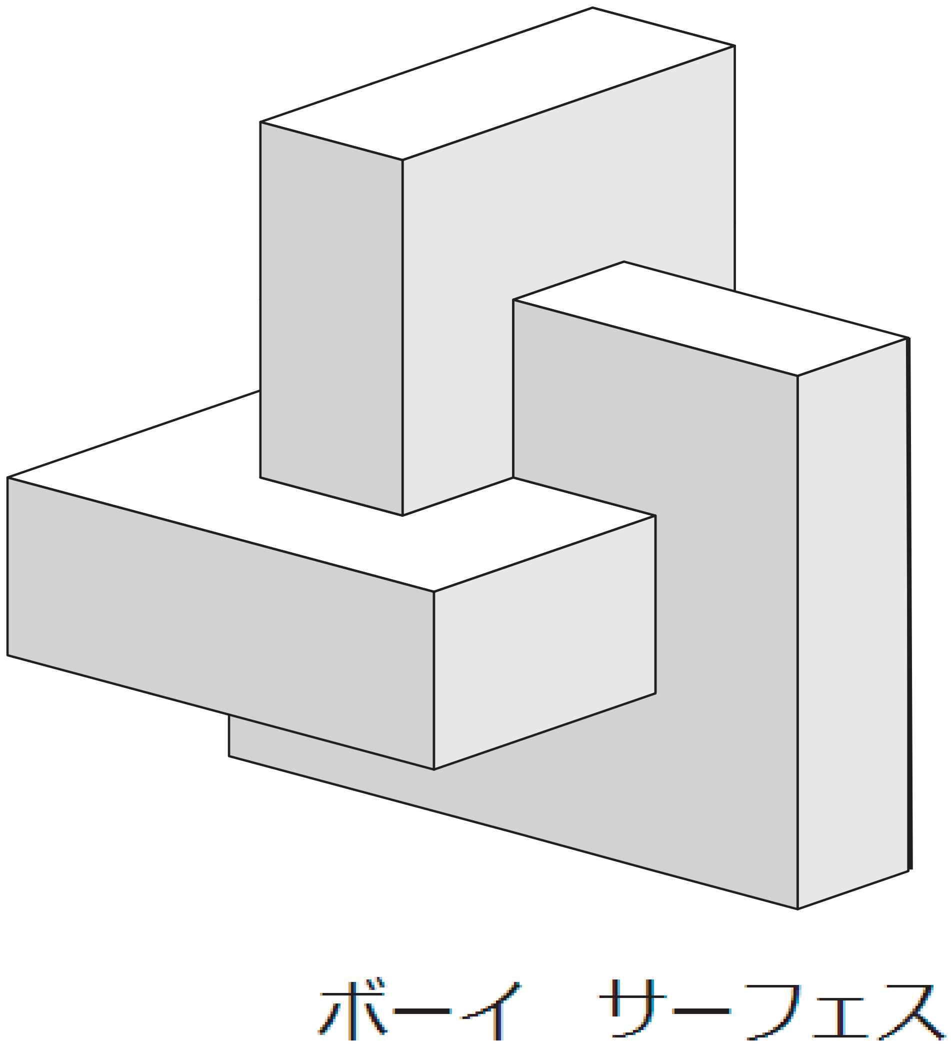


Figure 0.10.

今、われわれの作ったボーイ・サーフェスはFigure 0.11 のような角を持っています。

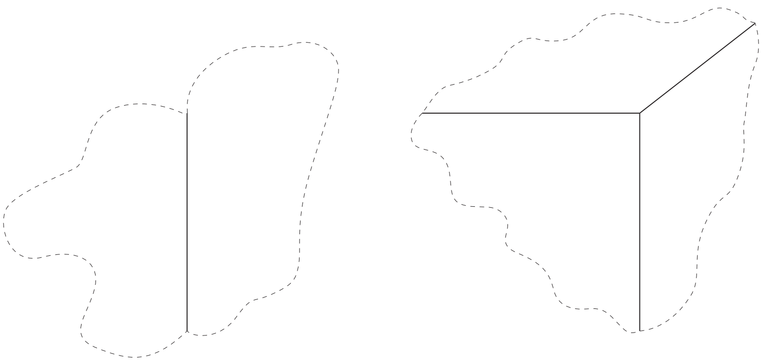


FIGURE 0.11.

もしも、角のない方がお好きでしたら、角のないものを想像してみて下さい。もしくは角を曲げたものを作ってみて下さい。Figure 0.1 のもののようになります。

References

[1] W. Boy: Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flchen, *Math. Ann.* 57 (1903) 151-184.
[2] C. Giller: Towards a classical knot theory for surfaces in $\mathbb{R}^4$ *Illinois. J. Math.* 26 (1982) 591-631.
[3] J. W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic classes. *Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press* 1974.
[4] E. Ogasa: The projections of n-knots which are not the projection of any unknotted knot *Journal of knot theory and its ramifications, 10 (2001) 121–132* UTMS 97-34, math.GT/0003088
[5] E. Ogasa: Singularities of projections of n-dimensional knots *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society 126 (1999) 511-519* UTMS96-39
[6] E. Ogasa: 異次元への扉 Ijigen e no tobira (In Japanese) *Nippon Hyoron Sha Co., Ltd.* 2009
[7] E.Ogasa: Make your Boy surface, arXiv:1303.6448