EXEMPLES DE VARIÉTÉS PROJECTIVES EN CARACTÉRISTIQUE p NON RELEVABLES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

By Jean-Pierre Serre

COLLÈGE DE FRANCE, PARIS, FRANCE

Communicated by Oscar Zariski, November 23, 1960

1. *Position du problème.*—La *théorie des schémas* de Grothendieck[1] permet de définir avec précision le terme de "relèvement":

Soit X_0 une variété projective non singulière, définie sur un corps k; soit A un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. Un *relèvement de X_0 sur A* est un schéma X propre et plat sur A, tel que $X \otimes_A k$ soit isomorphe à X_0 (cf. Grothendieck[2]). Le cas qui nous intéresse ici est celui où k est de caractéristique p et A de caractéristique zéro. On pose la question suivante:

(1) *Peut-on toujours relever X_0 sur A?*

D'après Grothendieck,[2] la réponse est affirmative si X_0 est une courbe, ou, plus généralement, si certains groupes de cohomologie de X_0 sont nuls.

On peut également poser une question plus faible:

(2) *Pour une variété X_0 donnée, existe-t-il toujours un anneau A de caractéristique zéro sur lequel X_0 se relève?*

Nous allons montrer que *ces deux questions admettent une réponse negative, même si k est algébriquement clos.*

2. *Construction du contre-exemple.*—Soit n un entier $\geqslant 1$. Si R est un anneau local, nous noterons $\mathbf{GL}_n(R)$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans R, et $\mathbf{PGL}_n(R)$ le groupe quotient de $\mathbf{GL}_n(R)$ par le sous-groupe R^* des matrices scalaires.

Soit G un groupe fini, et soit r_0 un homomorphisme de G dans le groupe $\mathbf{PGL}_n(k)$. Le groupe G opère sur l'espace projectif $\mathbf{P}_{n-1}(k)$ au moyen de r_0. Nous ferons l'hypothèse suivante:

(D)—Pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, l'ensemble F_σ des points de $\mathbf{P}_{n-1}(k)$ invariants par σ est de codimension $\geqslant 4$.

Un raisonnement classique, dû essentiellement à Godeaux,[3] montre qu'il existe une sous-variété non singulière Y_0 de $\mathbf{P}_{n-1}(k)$, stable par G, qui est une intersection complète, et qui ne rencontre aucun des F_σ, $\sigma \neq 1$; l'hypothèse (D) permet en outre de supposer que $\dim (Y_0) \geqslant 3$. Le groupe G opère librement (c'est-à-dire "sans points fixes") sur Y_0 et le quotient $X_0 = Y_0/G$ est une variété projective non singulière.

Lemme. *Si X_0 se relève sur A, l'homomorphisme $r_0 : G \to \mathbf{PGL}_n(k)$ se relève en un homomorphisme $r : G \to \mathbf{PGL}_n(A)$.*

Admettons provisoirement ce lemme. Pour obtenir un contre-exemple aux questions (1) et (2) du n^0 1, il suffit donc de construire un groupe G et un homomorphisme $r_0 : G \to \mathbf{PGL}_n(k)$ qui vérifie (D) et qui ne se relève à aucun anneau de caractéristique zéro. C'est là un problème de pure théorie des groupes, qui ne présente aucune difficulté. Supposons par exemple $p \geqslant 7$, et soit G un groupe de type $(p, \ldots, p)$. Prenons $n = 5$. Soit $N = (u_{ij})$ la matrice nilpotente d'ordre 5 définie par $u_{ij} = 1$ si $j = i + 1$, $u_{ij} = 0$ sinon; soit h un isomorphisme de G sur un sous-groupe du groupe additif de k, et soit $s(\sigma) = \exp(1 + h(\sigma)N)$. L'application $\sigma \to s(\sigma)$ est un homomorphisme de G dans $\mathbf{GL}_5(k)$. Si $r_0(\sigma)$ désigne l'image de $s(\sigma)$ dans $\mathbf{PGL}_5(k)$, l'application $r_0 : G \to \mathbf{PGL}_5(k)$ est un homomorphisme. Si $\sigma \neq 1$, l'ensemble F_σ est réduit à un point, ce qui montre que (D) est satisfaite. Enfin, si r_0 se relevait en $r : G \to \mathbf{PGL}_5(A)$, on pourrait supposer A intègre (quitte à le remplacer par $A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier ne contenant pas le nombre p); on en déduirait l'existence d'un corps K de caractéristique zéro tel que $\mathbf{PGL}_5(K)$ contienne un sous-groupe isomorphe à G, ce que l'on voit facilement être impossible si l'ordre de G est $\geqslant p^5$.

3. *Démonstration du lemme.*—Soit X un schéma sur A relevant X_0. D'après un résultat de Grothendieck,[2] le groupe fondamental de X s'identifie à celui de X_0. Comme Y_0 est un revêtement étale ("non ramifié" dans l'ancienne terminologie) de X_0, galoisien et de groupe de Galois G, on en conclut qu'il existe un revêtement étale Y de X, jouissant des mêmes propriétés, et tel que $Y \otimes_A k = Y_0$. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau d'anneaux de Y, et soit $\mathcal{O}_0$ celui de Y_0. D'après FAC n° 78, on a $H^0(Y_0, \mathcal{O}_0) = k$ et $H^1(Y_0, \mathcal{O}_0) = 0$. Il en résulte[4] que $H^0(Y, \mathcal{O}) = A$.

Soit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_0(1)$ le faisceau localement libre de rang 1 défini sur Y_0 par le plongement projectif $Y_0 \to \mathbf{P}_{n-1}(k)$. Comme dim $(Y_0) \geqslant 3$, on a $H^2(Y_0, \mathcal{O}_0) = 0$ (FAC, *loc. cit.*) et un théorème de Grothendieck[2] montre qu'il existe sur Y un faisceau $\mathcal{E}$, localement libre de rang 1, et tel que $\mathcal{E} \otimes_A k = \mathcal{E}_0$; comme $H^1(Y_0, \mathcal{O}_0) = 0$, ce faisceau est unique, à un isomorphisme près.[2] D'autre part, d'après FAC, *loc. cit.*, on a $H^0(Y_0, \mathcal{E}_0) = k^n$ et $H^1(Y_0, \mathcal{E}_0) = 0$. Il en résulte[4] que $H^0(Y, \mathcal{E})$ est un A-module libre de rang n, et que $H^0(Y, \mathcal{E}) \otimes_A k$ s'identifie à $H^0(Y_0, \mathcal{E}_0) = k^n$. Si σ est un élément de G, l'unicité de $\mathcal{E}$ montre l'existence d'un isomorphisme $a(\sigma) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ compatible avec $\sigma : Y \to Y$; cet isomorphisme définit un automorphisme de $H^0(Y, \mathcal{C}) = A^n$; de plus, $a(\sigma)$ est déterminé à la multiplication prés par un automorphisme de $\mathcal{Q}$, par un élément de A^*. On obtient donc ainsi un élément bien déterminé $r(\sigma)$ de $\mathbf{PGL}_n(A)$, et il est clair que l'application $r : G \to \mathbf{PGL}_n(A)$ est un homomorphisme qui relève r_0, cqfd.

4. *Compléments.*—(*a*) Si X_0 est la variété définie ci-dessus, on peut montrer qu'il existe un entier n tel que tout anneau sur lequel X_0 se relève soit annulé par p^n. En d'autres termes, *l'anneau local de la variété formelle des modules*[5] *de* X_0 *est annulé par* p^n. (*b*) On peut considérer X_0 comme un *cycle* dans un certain espace projectif. Le fait que X_0 ne se relève pas en tant que schéma montre qu'il ne se relève pas non plus comme cycle (au sens de la *réduction des cycles* de Shimura[6]).

[1] Grothendieck, A., et J. Dieudonné, "Eléments de Géométrie Algébrique," *Publ. Math. Inst. Htes. et Sci.* (Paris).

[2] Grothendieck, A., "Géométrie formelle et géométrie algébrique," *Sém. Bourbaki,* Mai 1959, no. 182.

[3] Voir par exemple J-P. Serre, "Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p," *Symp. Top. Mexico,* 1956, pp. 24–53.

[4] Lorsque A est un anneau de valuation discrète, il suffit d'appliquer la *formule de Künneth* (cf. W. L. Chow et J. I. Igusa, "Cohomology theory of varieties over local rings," these PROCEEDINGS, **44,** 1958, pp. 1244–1248). Dans le cas général, il faut recourir au *théorème des fonctions holomorphes,* sous la forme cohomologique que lui a donnée Grothendieck (cf. le Chapitre III des "Eléments").

[5] Grothendieck, A., "Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II: Le théorème d'existence en théorie formelle des modules," *Sém. Bourbaki,* Février 1960, no. 195.

[6] Shimura, G., "Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field," *Amer. J. of Math.,* **77,** 134–176 (1955).