на правах рукописи

АЗИЗОВ МУЗАФАР

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

01.01.01. - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е - 2 0 0 9

Работа выполнена в Таджикском государственном педагогическом университете имени Садриддина Айни

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАНТЫ: доктор физико-математических наук, академик АН Республики Таджикистан Шабозов Мирганд Шабозович,

доктор физико-математических наук, профессор Переверзев Сергей Вячеславович,

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физ.-мат.наук, профессор Иванов Валерий Иванович,

доктор физ.-мат.наук, профессор Вакарчук Сергей Борисович

доктор физ.-мат.наук, профессор Исхоков Сулаймон Абунасрович

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Российско - Таджикский Славянский Университет

Защита состоится "____" 2009 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета ДМ 047.007.01 при Институте математики АН Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни 299/4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН Республики Таджикистан

Автореферат разослан "___"______________ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета **Халилов Ш.Б.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В середине прошлого столетия на стыке функционального анализа, теория приближения и вычислительной математики начала формироваться новая математическая дисциплина, которую сейчас иногда называют общей теорией оптимальных алгоритмов или теорией оптимизиции приближенных методов. Для теории приближения эта новая дисциплина явилась естественным этапом дальнейшего развития. Дело в том, что к моменту формирования указанной дисциплины теория приближения прошла три этапа своего становления. На первых двух этапах исследовалась аппроксимация с помощью фиксированного приближающего множества, а на третьем этапе центральной стала проблема выбора такого приближающего множества, которое было бы оптимальным в том или ином смысле. С началом формирования теории оптимальных алгоритмов интерес исследователей постепенно начал смещаться в сторону принциально новой для теории приближения ситуации, когда аппроксимирующие элементы различаются не по принадлежности тому или иному прибилженному множеству, а по условию сложности их построения. При этом под сложностью понимается, как правило, либо информационная сложность, измеримая объемом дискретной информации, требуемой для определения аппроксимирующего элемента, либо алгоритмическая сложность, равная минимальному числу элементарных операций, необходимых для его построения.

У истоков теории оптимальных алгоритмов стоял А.Н.Колмогоров, который в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 году фактически изложил программу развития новой математической дисциплины. Ее методологией стала теория экстремальных задач аппроксимации, разработанная С.М.Никольским, Н.П.Корнейчуком, В.К.Дзядыком, В.М.Тихомировым и их последователями.

Идеи из упомянутого выше доклада А.Н.Колмогорова нашли свое развитие и конкретизацию в работах Н.С.Бахвалова, К.И.Бабенко, В.В.Иванова, Дж.Трауба, Х.Вожьняковского, Г.Васильковского, С.В.Переверзева, В.К.Задирака, Ш.Хейнриха, их учеников и последователей, в которых рассматривались оптимизация по сложности алгоритмов приближенного решения различных задач теории дифференциальных и интегральных уравнений. При этом были выявлены неожиданные эффекты, свидетельствующие, например, о принципиальном отличии традиционной для теории приближения ситуации аппроксимации функции с помощью того или иного аппарата приближения в случае, когда нам доступна информация непосредственно об объекте приближения (так называемая непосредственная аппроксимация), от ситуации, когда мы приближаем эту же функцию, но как решение некоторого функционального уравнения, и нам доступна лишь информация о его коэффициентах. Так в 1985 году С.В.Переверзевым было установлено, что не существует оптимального по сложности алгоритма приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами из соболевских классов дифференцируемых функций, который бы использовал только их значения в отдельных точках. С другой стороны из теории приближения хорошо известно, что располагая значениями решений указанных уравнений в некоторых точках, мы можем построить их приближения, которые окажутся оптимальными среди всех способов аппроксимаций, использующих дискретную информацию.

Выявленный эффект привлек внимание исследователей. В 1986 году Х.Вожьняковский поставил вопрос о точном порядке информационной и алгоритмической сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами из соболевских классов. Ответ на этот вопрос был получен С.В.Переверзевым в 1988 году. Позже, в совместной работе С.В.Переверзева, Ш.Хейнриха и К.Франк, этот ответ был уточнен в том смысле, что был указан не только точный порядок в степенной шкале, но и правильная степень логарифмического множителя в оценке указанной сложности.

В настоящее время благодаря усилиям С.В.Переверзева, С.Г.Солодкого, немецких математиков Ш.Хейнриха и К.Франк, а также китайского математика Тен-Дзи-Янга прояснена ситуация, связанная с оценками сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами, имеющими конечную гладкость. Установлено, что в смысле порядка в степенной шкале информационная и алгоритмическая сложность приближенного решения этих уравнений не выше сложности непосредственной аппроксимации их решений. Иными словами, структура уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами конечной гладкости позволяет получить дискретную информацию об этих уравнениях, достаточную для приближенного решения с той же по порядку точностью, которая может быть гарантирована при оптимальной непосредственной аппроксимации при использовании того же объема информации, но уже непосредственно о приближенном элементе.

В свете указанных выше результатов представляется совершенно естественным продолжить исследования сложности интегральных уравнений Фредгольма второго рода и рассмотреть классы таких уравнений с бесконечнодифференцируемыми, например, аналитическими и гармоническими коэффициентами. На важность изучения бесконечнодифференцируемых коэффициентов указывалось и в обзорной статье К.И.Бабенко, посвященной взаимосвязи задач теории приближения и численного анализа. Уравнения Фредгольма с бесконечно дифференцируемыми ядрами естественно возникают в качестве граничных интегральных уравнений для краевых задач математической физики в областях, ограниченных замкнутыми аналитическими или бесконечно гладкими кривыми. Все это делает весьма актуальным рассмотрение задачи об информационной и алгоритмической сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма с бесконечнодифференцируемыми коэффициентами. Именно этому и посвящена настоящая диссертация.

Цели диссертации.

- исследование информационной сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с периодическими бесконечнодифференцируемыми ядрами и свободными членами;
- исследования информационной сложности локального решения указанных выше уравнений, то есть приближенного вычисления значений фиксированного функционала на решениях этих уравнений;
- получение порядковых оценок информационной сложности приближенного решения слабо - сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с бесконечнодифференцируемыми коэффициентами при сингулярностях.

Методика исследования. Методическую основу работы составляют современные способы анализа приближенных методов и методы оценки s - чисел интегральных операторов.

Следует отметить что элементы методологии современной теории приближенных методов и теории s - чисел плодотворно использовались для построения, исследования и оптимизации алгоритмов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в работах В.К.Дзядыка, В.Л.Макарова, Г.В.Радзиевского, А.Ю.Лучки, С.В,Переверзева, Ш.Хейнриха, Б.Г.Габдулхаева и Г.Д.Велева, Ю,Саранена, Г.Вайникко и других.

Так Ш.Хейнрихом установлена глубокая связь между информационной сложностью приближенного решения операторных уравнений второго рода и числами Гельфанда некоторого специального оператора. Однако в известных нам работах эта связь применялась для исследования информационной сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода лишь в случае конечной гладкости ядер и свободных членов. Вместе с тем следует отметить, что полученные при этом точные в степенной шкале порядке информационной сложности полного (то есть не локального) решения уравнений Фредгольма могли быть установлены, по крайне мере в случае одномерных интегральных уравнений и без применения техники, связанной с числами Гельфанда (достаточно сравнить, например, работу С.В.Переверзева и результаты К.Франк).

В то же время при исследовании информационной сложности в случае бесконечнодифференцируемых ядер и свободных членов указанная выше связь играет чрезвычайно важную роль, поскольку, как будет показано, методы получения нижних оценок информационной сложности из работы С.В.Переверзева дают слишком заниженный результат для рассматриваемых классов уравнений. Применение же упомянутой связи между информационной сложностью и числами Гельфанда в случае уравнений с бесконечнодифференцируемыми коэффициентами отличается рядом принципиальных моментов от ее применения в случае конечной гладкости. Эти моменты и были разработаны по ходу проведения исследования диссертации. Что же касается полученных в третей главе оценок информационной и алгоритмической сложности приближенного решения слабо - сингулярных уравнений с бесконечнодифференцируемыми коэффициентами при сингулярности, то здесь основные методологические трудности были связаны с получением верхних оценок, а нижние оценки установлены с помощью приема из упомянутой выше работы С.В.Переверзева.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость.

Основные результаты работы являются новыми и в определенном смысле неулучшаемы. Эти результаты состоят в следующем:

- найден точный в логарифмической шкале порядок информационной сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с периодическими ядрами и свободными членами, допускающими по каждой переменной аналитическое продолжение в некоторую полосу комплексной плоскости;

- выявлен весьма неожиданный и не имеющий места в случае конечной гладкости эффект, состоящий в том, что с точки зрения информационной сложности задача приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с периодическими, аналитическими коэффициентами является более сложной по сравнению с задачей непосредственной аппроксимации множества их решений;

- для упомянутых выше классов интегральных уравнений найден точный в логарифмической шкале порядок информационной сложности локального решения;

- получены аналоги перечисленных выше результатов для интегральных уравнений с ядрами и свободными членами, зависящими от произвольного конечного числа переменных, а также для уравнений с дифференцируемыми ядрами и свободными членами при $\psi(u) = e^{-u^{\nu}}$;

- указан точный в степенной шкале порядок информационной и алгоритмической сложности приближенного решения слабо-сингулярных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами при логарифмической особенности;

- для класса уравнений со сглаживающими операторами, содержащего указанные слабо-сингулярные уравнения, найден оптимальный порядок скорости сходимости проекционно-итеративного метода и некоторых его обобщений.

- найден оптимальный порядок точности прямых методов приближенного решения интегральных уравнений, возникающих, а рамках так называемого метода функции краевых условий при решении периодических краевых задач для линейных дифференциальных уравнений, указаны прямые методы, реализующие оптимальный порядок и даны оценки скорости сходимости аппроксимационно - итеративных методов типа метода Шмидта и метода Соколова, построенных на базе этих прямых методов;

Работа носит в основном теоретический характер. Установленные в ней факты могут быть использованы при построении и анализе эффективности методов решения прикладных задач, связанных с интегральными уравнениями.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и опубликованы в тезисах: Республиканских научно-технических конференциях "Интегральные уравнения в прикладном моделировании"(Киев, 1986, Одесса, 1989), Всесоюзной конференции "Теория функций, функциональный анализ и дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами"(Душанбе, 1987), Всесоюзной школе "Теория приближения функций"(Луцк - Киев, 1989), Республиканской конференции "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения"(Киев, 1990), на семестре по теории приближения и оптимизации алгоритмов в Международном математическом центре имени С.Банаха (Варшава, 1995), Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ"(Москва,1995), на Международной конференции памяти академика М.Кравчука (Киев,1995), Международной конференции по теории приближения функций, посвященной памяти профессора П.П.Коровкина (Калуга, 1996), Международной конференции "Теория приближения и численные методы", посвященной 100-летию со дня рождения Е.Я.Ремеза (Ровно, 1996), вторая школа "Ряды Фурье: теория и применение"(Каменец-Подольск-Киев, 1997), Межународной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами (Душанбе, 2003), Республиканской конференции по современным проблемам математики (Душанбе, 2003), Научная конференция современной проблеме теории функций дифференциальных уравнений и их приложения (Душанбе, 2007), Международная конференция по математике и информатике (Душанбе, 2009)..

По материалам работы были сделаны доклады на семинаре "Оптимизация методов приближения"руководимом академиком НАН Украины Н.П.Корнейчуком (Институт математики НАН Украины), на семинаре кафедры численных методов математической физики, руководимом профессором В.Л.Макаровым (Киевский национальный Университет имени Т.Г.Шевченко) на семинаре "Оптимизация методов решения задач вычислительной математики", руководимом проессором В.К.Задиракой (Институт кибернетики НАН Украины), на семинарах "Теория приближения"руководимом академиком АН Республики Таджикистан, профессором, Шабозовым М.Ш.(Институт математики АН Республики Таджикистан), на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Национального университета Таджикистана, руководимом профессором

Г.Джангибековым (ТГНУ), на семинарах кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета, руководимом профессором Каримовой М.М(ТГПУ им.Садриддина Айни).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в статьях [1]-[33]. В работе [7], выполненной в соавторстве с С.В.Переверзевым, последнему принадлежит поставка задачи и выбор объекта исследований.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка цитируемой литературы из 118 работ. Объем работы - 203 страниц машинописного текста.

Содержание работы. Первая глава диссертации посвящена исследованию информационной сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с периодическими аналитическими и гармоническими ядрами и свободными членами.

В §1 приводится общая постановка задачи об информационной сложности, определяется понятие минимального радиуса информации и обсуждается взаимосвязь этой величины с другим метрическим инвариантом - предтабличным поперечником, введенным К.И.Бабенко и играющим существенную роль в современной теории приближения и численном анализе.

Пусть V, E и K - линейные нормированные пространства. Причем V вложено в E с константой вложения единица. Кроме того, предполагается, что существует линейный непрерывный оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in K$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(E)$, где $\mathcal{L}(E)$ - нормированное пространство линейных ограниченных операторов из E в E.

Пусть еще множество $K_o \subset K$ таково, что для любого $k \in K_o$ резольвента оператора T_k ограничена, то есть $(I - T_k)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Тогда при фиксированном множестве $V_o \subset V$ через $X_o = K_o \times V_o$ будем обозначать класс операторных уравнений второго рода

$$u - T_k u = f,\ k \in K_o, f \in V_o. \tag{1}$$

Оператор $S : X_o \to E$, определяемый соотношением

$$S(k, f) = (I - T_k)^{-1} f$$

называется оператором решения для уравнений (0.1). При этом множество

$$S(X_o) := \{u :\ u \in E,\ u = (I - T_k)^{-1} f, k \in K_o, f \in V_o\}$$

состоит из решений уравнений (1) из класса X_o.

Под способом задания информации об уравнениях (1) понимается совокупность $N = (N_1, N_2)$ двух произвольных наборов N_1 и N_2 линейных непрерывных функционалов

$$N_1k = (\lambda_1(k), \lambda_2(k), ..., \lambda_{n_1}(k)), \lambda_i \in K^*, i = 1, 2, ..., n_1$$
$$N_2f = (\sigma_1(f), \sigma_2(f), ..., \sigma_{n_2}(f)), \sigma_j \in V^*, j = 1, 2, ..., n_2, \tag{2}$$

Положим $\text{card}(N) = n_1 + n_2$.

В первых двух главах диссертации под алгоритмом φ приближенного решения уравнения (1) по информации (2) понимается произвольное непрерывное отображение $(n_1 + n_2)$ - мерного пространства $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ в E, при котором каждому информационному вектору $N(k, f) = (N_1k, N_2f)$ в качестве приближенного решения (1) ставится элемент $\varphi(N(k, f)) \in E$. Погрешностью алгоритма φ на классе X_o называется величина

$$e(X_o, \varphi) = \sup_{(k,f)\in X_o} \|S(k, f) - \varphi(N(k, f))\|_E.$$

При фиксированном способе задания информации N через $\Phi(N)$ будем обозначать множество всех алгоритмов, использующих в качестве информации значения функционалов входящих в совокупность $N = (N_1, N_2)$.

Задача об информационной сложности приближенного решения уравнений из класса X_o состоит, по сути дела в исследовании величины

$$r_n(X_o) = \inf_{N:\text{card}(N)\leq n} \inf_{\varphi\in\Phi(N)} e(X_o, \varphi),$$

которая носит название минимального радиуса информации и равна минимальной погрешности, которую можно достигнуть на классе X_o, используя не более чем n значений информационных функционалов.

Понятие минимального радиуса информации было введено в теорию информационной сложности Дж.Траубом и Х.Вожьняковским. В разделах же численного анализа, посвященных решению операторных уравнений, принята несколько иная терминология. Так, например, способ задания информации $N = (N_1, N_2)$ рассматривается как метод дискретизации, набор значений функционалов (2) называется предтаблицей, а число $\text{card}(N)$ - объемом предтаблицы. Эффективность метода дискретизации характеризуется в численном анализе величиной предтабличного поперечника, введенного К.И.Бабаенко. Предтабличным поперечником множества решений $S(X_o)$

называется величина

$$\Delta_n(S(X_o), E) = \inf_{\pi : S(X_o) \to \mathbb{R}^n} \sup_{u \in S(X_o)} \mathrm{diam}_E \pi^{-1} \circ \pi(u),$$

где inf берется по всем методам дискретизации, проводящим к предтаблицам фиксированного объема n, то есть по всем непрерывным отображениям π из $S(X_o)$ в n - мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. При этом допускается получение дискретной информации непосредственно о приближаемом элементе. Таким образом, величина $\Delta_n(S(X_o), E)$ характеризует информационную сложность непосредственной аппроксимации элементов множество решений.

Отображение $\pi_o : S(X_o) \to \mathbb{R}^n$, для которого

$$\sup_{u \in S(X_o)} diam_E \pi_o^{-1} \circ \pi_o(u) \asymp \Delta_n(S(X_o), E)$$

называется оптимальной аппроксимацией относительно предтабличного поперечника $\Delta_n(S(X_o), E)$ и определяет оптимальный метод дискретизации элементов из $S(X_o)$.

В силу однозначной разрешимости уравнения (1) из класса X_o каждый способ задания информации $N = (N_1, N_2), \mathrm{card}(N) = n$, определяет отображение π_N множества $S(X_o)$ в $\mathbb{R}^n$, а именно, для

$$u = S(k, f) \in S(X_o), \quad \pi_N(u) = (N_1 k, N_2 f) \in \mathbb{R}^n.$$

Но тогда с точки зрения оптимизации способов задания информации при решении операторных уравнений (1) основным является следующий вопрос: "Существует ли для класса уравнений X_o способ задания информации, определяющий оптимальный метод дискретизации класса решений $S(X_o)$?". Положительный ответ на этот вопрос означал бы, что с точки зрения требуемого объема предтаблиц задача приближенного решения уравнений (1) из класса X_o не сложнее (по порядку) задачи непосредственной аппроксимации их решений.

Для операторных уравнений второго рода (1) исследование этого вопроса было начато С.В.Переверзевым в 1991 году. Им был получен положительный ответ на указанный выше основной вопрос оптимизации способов задания информации для интегральных уравнения Фредгольма второго рода. В наших обозначениях им исследовано ситуация $E = L_2, V = W_2^\nu, K = DW_2^{\nu,\mu}$ и $T_k : L_2 \to L_2$, где

$$T_k g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau) g(\tau) d\tau, \tag{3}$$

L_2 - гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на $(-\pi,\pi), W_2^\nu$ - соболевское пространство 2π - периодических функций, производные которых до ν - го порядка включительно принадлежат L_2, а $DW_2^{\nu,\mu}$ - пространство 2π - периодически по каждой переменной функций $k(t,\tau)$, имеющий суммируемые с квадратом на $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \tau^j} k(t,\tau), i=0,1,...,\nu, j=0,1,...,\mu.$$

Пусть $\mathcal{K}_{\nu,\mu}(\alpha)$ - подмножество функций $k(t,\tau)$ из $DW_2^{\nu,\mu}$ таких, что

$$\|K\|_{DW_2^{\nu,\mu}} \le \alpha_1,$$

и

$$\|(I-T_k)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \alpha_2 \qquad (4)$$

а $B_{W_2^\nu}$ - шар единичного радиуса с центром в нуле из соболевского пространство W_2^ν. Класс

$$X^{\nu,\mu} = \mathcal{K}_{\nu,\mu}(\alpha) \times B_{W_2^\nu}$$

состоит из уравнений Фредгольма второго рода

$$u(t) - T_k u(t) := u(t) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau) u(\tau) d\tau = f(t) \qquad (5)$$

с ядрами из $\mathcal{K}_{\nu,\mu}(\alpha)$ и свободными членами из $B_{W_2^\nu}$.

Положительный ответ на сформулированный выше основной вопрос оптимизации способов задания информации был получен С.В.Переверзевым для класса $X^{\nu,\mu}$ при $\nu = \mu$. Позднее К.Франк обобщила результат С.В.Переверзева на многомерный случай, а С.Г.Солодкий - на случай ядер из анизотропных классов $\mathcal{K}_{\nu,\mu}(\alpha), \nu \ne \mu$. Таким образом, в настоящее время установлено, например, что

$$r_n(X^{\nu,\mu}) \asymp \Delta_n(S(X^{\nu,\mu}), L_2) \asymp n^{-\nu}, \nu,\mu = 1,2,....$$

Иными словами, для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с периодическими ядрами и свободными членами конечной гладкости объемы предтаблиц, требуемых для приближенного решения этих уравнений совпадают по порядку в степенной шкале с объемами предтаблиц, необходимых для непосредственной аппроксимации их решений с той же точностью. Таким образом, в случае конечной гладкости коэффициентов, уравнения Фредгольма имеют ту же по порядку информационную сложность, что и задача непосредственной аппроксимации их решений.

Естественно спросить: "А какова ситуация в случае бесконечно дифференцируемых коэффициентов?". Для аналитических и гармонических ядер и свободных членов ответ на этот вопрос получен в первой главе работы.

В §2 этой главы приводится вспомогательный материал, связанный главным образом с теорией s-чисел. Наиболее важной для дальнейшего здесь является теорема, доказанная Ш.Хейнрихом, которая устанавливает связь между минимальным радиусом информации $r_n(X_o)$ и числами Гельфанда некоторых специальных операторов.

Напомним, что n-ым числом Гельфанда линейного ограниченного оператора D, действующего из нормированного пространства Y в нормированное пространство Z, называется величина

$$G_n(D : Y \to Z) = \inf_{\substack{a_i \in Y^* \\ i=1,2,\dots,n-1}} \sup_{\substack{f \in Y, \|f\|_Y \le 1 \\ a_i(f)=0, i=1,2,\dots,n-1}} \|Df\|_Z .$$

Пусть J_V - оператор вложения V в E, а $\mathcal{L}(V, E)$ - пространство линейных ограниченных операторов из V в E. Рассмотрим оператор $\Psi : K \to \mathcal{L}(V, E)$, ставящий в соответствие каждому $k \in K$ линейный непрерывный оператор $\Psi_k \in \mathcal{L}(V, E)$, определяемый равенством $\Psi_k = T_k J_V$.

Ш.Хенрихом показано, что при некоторых довольно общих предположениях относительно X_o, которые справедливы для рассматриваемых в диссертации классов уравнений, имеет место соотношение:

$$r_n(X_o) \asymp \inf_{n_1+n_2 \le n} \{G_{n_1}(\Psi : K \to \mathcal{L}(V, E)) + G_{n_2}(J_V : V \to E)\}. \qquad (6)$$

В §3 найден точный в логарифмической шкале порядок минимального радиуса информации для класса уравнений Фредгольма (5) с аналитическими ядрами и свободными членами.

Рассмотрим следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$A^h = \left\{ f : f \in L_2, \|f\|_h := \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(mh) \cdot \hat{f}^2(m) \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{A}^h = \left\{ k : k \in L_2(Q), \|k\|_{2,h} := \left(\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(lh) \operatorname{ch}^2(mh) \cdot \hat{k}^2(l,m) \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

где $h > 0$, а $\operatorname{ch}(\cdot)$- гиперболический косинус, а $\hat{f}(m), \hat{k}(l,m)$ - коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $k(t,\tau)$ по тригонометрическим системам одной и двух переменных, отвечающие гармоникам с номерами m и (l,m) соответственно.

Известно что пространства A^h и $\mathcal{A}^h$ состоят из 2π - периодических функций одной и двух переменных, допускающих по каждой переменной аналитическое продолжение в полосу $\{z = x + iy, -h < y < h\}$ комплексной плоскости.

В рамках введенных выше обозначений положим $E = L_2, V = A^h$, $K = \mathcal{A}^h$. Кроме того, оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in \mathcal{A}^h$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(L_2)$, определим в виде (3), и рассмотрим множество $\mathcal{K}_h = \mathcal{K}_h(\alpha)$ ядер $k \in \mathcal{A}^h$, для которых выполнено условие (4) и $\|k\|_{2,h} \leq \alpha_1$. Тогда класс

$$X^h = X^h(\alpha) = \mathcal{K}_h(\alpha) \times B_{A^h}$$

состоит из интегральных уравнений Фредгольма второго рода (5) с ядрами $k \in \mathcal{K}_h(\alpha)$ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара пространства A^h с центром в нуле.

В §3 отмечается, что класс X^h является достаточно содержательным. Ему принадлежат, например, граничные интегральные уравнения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области, граница Γ которой есть замкнутая кривая, задаваемая посредством параметрических уравнений

$$\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [0, 2\pi]\},$$

в которых функции $x(t), y(t)$ принадлежат некоторому пространству A^{h_1}.

Центральным результатом главы 1 является

Теорема 3.2.

$$\frac{c}{\sqrt{n}} \exp(-\sqrt{n}h) \leq r_n(X^h) \leq c_1 \exp(-\sqrt{n}h).$$

Оптимальным по порядку в логарифмической шкале для класса X^h является способ задания информации $N_{Q_\nu} = (N_{1,\nu}, N_{2,\mu})$, определяемый следующими наборами информационных функционалов

$$N_{1,\nu}k = \left(\lambda_{l,m}(k) = \hat{k}(l, m), (l, m) \in Q_\nu\right),$$

$$N_{2,\nu}f = (\sigma_m(f) = \hat{f}(m), m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm \nu).$$

где $\nu = [\sqrt{n}] - 2$, а $Q_\nu = \{(l, m) : l, m \in \mathbb{Z}, |l| + 2|m| \leq \nu\}$.

При доказательстве теоремы 3.2 установлен факт, который вероятно представляет самостоятельный интерес. А именно, было показано (лемма 3.1), что для чисел Гельфанда, введенного выше оператора Ψ справедливо неравенство

$$G_n(\Psi : \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)) \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \exp(-\sqrt{n}h).$$

Следует сказать, что впервые оценки числа Гельфанда $G_n(\Psi : K \to \mathcal{L}(V, E))$, фигурирующих в первой части (6), были получены Ш.Хейнрихом и К.Франк. При этом использовалась следующая схема. Пусть K, V, E - гильбертовы пространства. Поставим в соответствие оператору Ψ оператор

$$D = U\Psi W : l_2^m \to l_\infty^m,$$

где l_2^m, l_∞^m стандартные пространства m-мерных векторов с соответствующими нормами, а операторы $W : l_2^m \to K$ и $U : \mathcal{L}(V, E) \to l_\infty^m$ выбираются так, чтобы D был эквивалентен оператору Id вложения l_2^m в l_∞^m. Тогда в силу свойства чисел Гельфанда имеем оценку

$$G_n(\Psi) \geq \|W\|^{-1}\|U\|^{-1} G_n(Id : l_2^m \to l_\infty^m) =$$

$$= \left(\frac{m-n+1}{m}\right)^{1/2} \|W\|^{-1}\|U\|^{-1}.$$

Следование этой схеме в случае бесконечной гладкости, когда $K = \mathcal{A}^h, V = A^h$, приводит к оценке

$$G_n(\Psi : \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)) \geq c \cdot \exp(-3nh),$$

которая значительна хуже оценки из Леммы 3.1. Эта установленная в диссертации оценка является асимптотически не улучшаемой в логарифмической шкале и для ее получения пришлось усложнить приведенную схему, отказавшись, во-первых, от конечномерности пространств l_2^m, l_∞^m и заменив их пространствами последовательностей l_2, l_∞, а во-вторых, выбрав W и U так, чтобы оператор $U\Psi W$ был лишь диагональным. При этом, вместо использования известного значения числа Гельфанда оператора вложения нужно получить оценку для соответствующих чисел диагональных операторов, привлекая теорию s - чисел таких операторов, изложенную например, в монографии А.Пича "Операторные идеалы".

Заметим теперь, что для множества $S(X^h)$ решений уравнений из класса X^h имеет место включение

$$\gamma_1 \cdot B_{A^h} \subset S(X^h) \subset \gamma_2 \cdot B_{A^h}, \tag{7}$$

где постоянные γ_1, γ_2, зависят лишь от α_1, α_2 и h. Но тогда, используя полученную В.М.Тихомировым оценку поперечника Александрова и связь этого поперечника с предтабличным поперечником, имеем

$$\Delta_n(S(X^h), L_2) \asymp \Delta_n(B_{A^h, L_2}) \asymp \exp(-\sqrt{n}h/2).$$

Сравнивая эту оценку с теоремой 3.2, убеждаемся в том, что для класса X^h имеет место отрицательный ответ на сформулированной выше основой вопрос оптимизации способов задания информации. Иными словами, информационная сложность уравнений Фредгольма второго рода с периодическими аналитическими коэффициентами по порядку выше сложности непосредственной аппроксимации их решений. Это обстоятельство коренным образом отличает аналитический случай от случая конечной гладкости.

В §4, получен аналог теоремы 3.2 для интегральных уравнений Фредгольма II рода с ядрами и свободными членами, зависящими от $2d$ и d переменных соответственно и являющихся по каждой из переменных следом некоторой гармонической в единичном круге $\{(x, y): \ x^2 + y^2 < 1\}$ функции на окружности радиуса $\rho \in (0, 1)$. Для класса $X^{\rho,d}$ таких уравнений доказана

Теорема 4.1. *Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n*

$$c_1 \rho^{\sqrt[2d]{(2d)! n(1+\varepsilon)/\sqrt{2}}} \leq r_n(X^{\rho,d}) \leq c_2 \rho^{\sqrt[2d]{(2d)!(1-\varepsilon)/\sqrt{2}}},$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от d и n.

Содержание §5 связано с ответом на вопрос, как изменится скорость убывания к нулю величины $r_n(X_o), n \to \infty$, для класса $X_o = X^r_{\exp}$ уравнений (5) с периодическими ядрами и свободными членами, имеющими по каждой переменной суммируемые в квадрате Ψ - производные, при $\Psi(u) = \exp(-u^r)$. Имеет место

Теорема 5.1. *Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при $r > 0$ и достаточно больших n*

$$c_1 \exp\left\{-\left(\frac{n(1+\varepsilon)}{d_r}\right)^{r/2}\right\} \leq r_n(X^r_{\exp}) \leq c_2 exp\left\{-\left(\frac{n(1-\varepsilon)}{d_r}\right)^{r/2}\right\},$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от n, а d_r постоянная, зависящая лишь от r. При $r = 1$ $d_r = 1$, а при $r = 2, 3,$ $\quad d_r = 2^{\frac{2r-1}{r}} \frac{\pi}{r \sin \frac{\pi}{r}}$.

Вторая глава диссертации посвящена получению точных в логарифмической шкале оценок информационной сложности приближенного вычисления значений фиксированного функционала на решениях интегральных уравнений. Следуя Ш.Хейнриху, мы будем говорить в этом случае об информационной сложности локального решения.

Следует сказать, что задача приближенного вычисления значения функционала от решения операторного уравнения не менее актуальна, чем задача построения полного решения этого уравнения. Так, например, известный в численном анализе метод Монте-Карло ориентирован главным образом именно на приближенное вычисление значений некоторых функционалов и, в частности, интегралов от решений интегральных уравнений Фредгольма.

В §6 приводится общая постановка задачи об информационной сложности локального решения уравнений (1).

Пусть χ - некоторый фиксированный линейный непрерывный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве E, в котором мы рассматриваем уравнения (1) из класса $X_o = K_o \times V_o$. Рассмотрим задачу о приближенном вычислении значения $< \chi, u >$ этого функционала на решении u уравнения (1). Оператор

$$S_\chi : X_o \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty),$$

определяемый равенством

$$S_\chi(k, f) =< \chi, (I - T_k)^{-1} f >$$

называется оператором локального решения для уравнения (1).

Предположим, что нам доступна лишь дискретная информация вида (2) об уравнении (1).

Под алгоритмом приближенного вычисления значения (χ, u) функционала χ на решении уравнения (1) по информации (2) будем понимать любое правило φ, по которому числовому вектору $N(k, f) = (N_1 k, N_2 f)$ ставится в соответствие число $\varphi(N(k, f)) \in (-\infty, \infty)$, рассматриваемое в качестве приближенного значения $< \chi, u >$.

Как и ранее, при фиксированном способе задания информации N через $\Phi(N)$ будем обозначать множество всевозможных алгоритмов φ, использующих в качестве информации значения функционалов (2) из набора $N = (N_1, N_2)$.

Информационная сложность локального решения уравнений из класса X_o может быть охарактеризована минимальным радиусом информации

$$r_n(X_o, \chi) = \inf_{n:\mathrm{card}(N) \le n} \inf_{\varphi \in \Phi(N)} \sup_{(k,f) \in X_o} |S_\chi(k, f) - \varphi(N(k, f))|$$

и величиной

$$\mathrm{comp}_\varepsilon(X_o,\chi) = \inf\{n : r_n(X_o,\chi) \le \varepsilon\},$$

равной минимальному объему предтаблиц вида (2), позволяющей вычислить с точностью ε приближенное значение функционала χ на решении любого уравнения из класса X_o.

Первые результаты о точных порядках величин $r_n(X_o,\chi), \mathrm{comp}_\varepsilon(X_o,\chi)$ были получены Ш.Хейнрихом и К.Франк для уравнений Фредгольма второго рода (5) с периодическими ядрами и свободными членами конечной гладкости. При этом был выявлен интересный эффект, который для случая приближенного вычисления интеграла по периоду от решения (5) состоит в следующем. Известно, что если $u(t)$ принадлежит соболевскому пространству W_2^ν, то для нахождения с точностью ε интеграла от этой функции требуется, вообще говоря, порядка $\varepsilon^{-1/\nu}$ значений $u(t)$. Если же $u(t)$ является решением уравнения Фредгольма из класса $X^{\nu,\mu}$ (ясно, что в этом случае $u(t) \in W_2^\nu$), то для нахождения интеграла от $u(t)$ с точностью ε достаточно задать порядка $\varepsilon^{-1/2\nu} \times \log(\frac{1}{\varepsilon})$ значений коэффициентов Фурье ядра и свободного члена. Таким образом, установлено, что информационная сложность нахождения интегралов от решений уравнений Фредгольма с ядрами и свободными членами конечной гладкости ниже информационной сложности непосредственного приближенного вычисления этих интегралов с помощью квадратурной формулы. Во второй главе показано, что для уравнений Фредгольма с аналитическими и гармоническими коэффициентами имеет место противоположный эффект.

Рассмотрим способ задания информации $\bar N_{Q_\nu} = (\bar N_{1,\nu}, \bar N_{2,\nu})$, определяемый следующими наборами информационных функционалов

$$\bar N_{1,\nu} = \left(\lambda_j(k) =< \chi, T_k e_j >, |j| \le \nu, \lambda_{i,j}(k) = \hat k(i,j), (i,j) \in \bar Q_\nu\right),$$

$$\bar N_{2,\nu} = \left(\sigma_i(f) = \hat f(i), |i| \le \nu, \sigma_{\nu+1}(f) =< \chi, f >\right).$$

где $\{e_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ - ортонормированный тригонометрический базис, а

$$\bar Q_\nu = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{Z}, |i| + |j| \le \nu\}.$$

Для случая, когда функционал χ задается с помощью скалярного произведения в L_2, т.е. $< \chi, u >= (\chi, u)$, имеет место

Теорема 8.2.

$$\frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \exp(-\sqrt{2n}h) \le r_n(X^h,\chi) \le c \cdot \exp(-\sqrt{2n}h),$$

$$comp_{\varepsilon}(X^h, \chi) \asymp \log^2(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Оптимальным по порядку в логарифмической шкале для класса X^h *является способ задания информации* $\bar{N}_{Q_\nu}$ при $\nu = [(\sqrt{2n-1} - 3)/2]$.

Из (7) следует, что множество решений уравнений из класса X^h содержится в шаре γB_{A^h} некоторого радиуса γ из пространства A^h. Известно, что при фиксированной точности ε для приближенного вычисления интеграла от функции из этого шара с помощью квадратурной формулы достаточно знать порядка $\log(\frac{1}{\varepsilon})$ значений этой функции. С другой стороны, из теоремы 8.2 следует, что в отличие от случая конечной гладкости, для приближенного вычисления интеграла от решения интегрального уравнения из класса X^h (то есть при $\chi \equiv 1$) с фиксированной точностью требуется предтаблица существенно большего объема $\mathrm{comp}_{\varepsilon}(X^h, \chi) \asymp \log^2(\frac{1}{\varepsilon})$ чем при непосредственном вычислении интеграла с помощью квадратурной формулы.

В §9 получен многомерный аналог теоремы 8.2 для случая уравнений из введенного выше класса $X^{\rho,d}$.

Теорема 9.1. *Для сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно больших* n

$$c_1 \rho^{\sqrt[2d]{(2d)!n(1+\varepsilon)}} \le r_n(X^{\rho,d}, \chi) \le c_2 \rho^{\sqrt[2d]{(2d)!n(1-\varepsilon)}},$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* n *и* d.

Если первая половина диссертации посвящена оценкам информационной сложности решения интегральных уравнения, то во второй половине работы акцент делается на исследовании алгоритмической сложности, т. е. минимального числа элементарных операций, требуемых для достижения заданной точности.

Глава 3 диссертации посвящена получению точных порядковых оценок информационной сложности приближенного решения слабо сингулярных интегральных уравнений вида

$$z(t) = Hz(t) + f(t) :=$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-a(t,\tau)}{\pi} \cdot \ln \left| 2 \sin \frac{t-\tau}{2} \right| + \frac{b(t,\tau)}{2\pi} \right) z(\tau) d\tau + f(t) \tag{8}$$

с периодическими аналитическими и гармоническими коэффициентами $a(t,\tau), b(t,\tau)$, и свободными членами $f(t)$ конечной гладкости. Такие уравнения относятся к типу операторных уравнений второго рода со сглаживающими операторами. Поэтому в §10 приводится формальное описание этого типа уравнений и указываются некоторые примеры задач, приводящих к подобным уравнениям.

Пусть X - гильбертово пространство, а

$$Y_0 = X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset ... \supset Y_\nu \supset ...$$

-шкала банаховых пространств, вложенных друг в друга с константой вложения единица.

Будем называть H сглаживающим оператором поряда q, если для любого $\nu = 0, 1, 2, ...,\ H \in \mathcal{L}(Y_\nu, Y_{\nu+q})$.

Из одного результата Г.Вайнико и Ю.Саранена следует, что при $a, b \in \mathcal{A}^h$ интегральный оператор H из уравнения (8) является сглаживающим оператором порядка 1 по отношению к шкале соболевских пространств W_2^ν.

Кроме того, отмечается, что слабо-сингулярные уравнения (8) с коэфициентами $a, b \in \mathcal{A}^h$ возникают в качестве граничных интегральных уравнений внешних краевых задач для двумерных уравнений Гельмгольца и Лапласа.

В §11 приводится постановка задачи об алгоритмической сложности приближенного решения операторных уравнений. Принципиальное отличие этой постановки от приведенной в первой главе постановки задачи об информационной сложности состоит в детализации понятия алгоритма. Такие детализированные алгоритмы в теории информационной сложности иногда называют реализуемыми.

Имеется ввиду, что с каждым алгоритмом $\varphi \in \Phi(N)$ связано параметрическое семейство K_φ элементов, определяемых значениями числовых параметров $b_1, b_2, ..., b_l$. При таком алгоритме φ приближенное решение уравнения (1) является элементом $\eta(b_1, b_2, ..., b_l) \in K_\varphi$, а значения b_i находятся в результате выполнения элементарных арифметических операций над компонентами вектора информации (2). Число таких операций, требуемых при алгоритме φ, для определения приближенного решения $\eta(b_1, b_2, ..., b_i) \in K_\varphi$ обозначим через $cost\{\varphi(N, H, f)\}$.

Положим

$$\Phi_L(N) = \{\varphi :\ \varphi \in \Phi(N), cost(\varphi) \leq L\}.$$

Рассматривая алгоритмы из $\Phi_L(N)$ естественно полагать, что $\mathrm{card}(N) \leq L$. В противном случае алгоритмы из $\Phi_L(N)$ не используют всю информацию, представленную компонентами вектора (2).

Величина

$$E_L(X_o) = \inf_{N:\mathrm{card}(N)\le L} \inf_{\varphi\in\Phi_L(N)} e(X_o,\varphi)$$

является минимальной погрешностью, которую мы можем гарантировать при приближенном решении уравнений из класса X_o с помощью всевозможных алгоритмов, требующих для своей реализации выполнения не более чем L элементарных арифметических операций над значениями функционалов, определяющих различные способы задания информации.

Под ε - сложностью (алгоритмической сложностью) задачи приближенного решения уравнений из класса X_o понимается величина

$$\mathrm{comp}(\varepsilon, X_o) \inf\{L : E_L(X_o) \le \varepsilon\},$$

равная минимальному числу элементарных операций, необходимых для достижения точности ε на классе X_o.

Обозначим через $\Psi^{h,r}$ класс однозначно разрешимых слабо-сингулярных интегральных уравнений (8) с коэффициентами $a(t,\tau), b(t,\tau)$ соответственно из шаров $\alpha B_{\mathcal{A}^h}, \beta B_{\mathcal{A}^h}$ пространства $\mathcal{A}^h$ с радиусами α, β и свободными членами $f(t)$ из шара $\eta B_{W_2^r}$ соболевского пространства W_2^r с радиусом η.

Для слабо-сингулярных интегральных уравнений вопрос об ε -сложности (алгоритмической сложности) их приближенного решения был в 1989 году поставлен Г.М.Вайникко. В случае малой гладкости коэффициентов при логарифмической и степенной особенностях двусторонние оценки ε - сложности таких уравнений, отличающиеся по порядку на логарифмический множитель, были получены С.В.Переверзевым, К.Шариповым и К.Махкамовым. При этом использовались способы задания информации, применение которых, например, к уравнениям вида (8) состояло в их замене уравнениями с конечномерными операторами. Построенные на базе таких способов задания информации алгоритмы приближенного решения фактически состояло в экономном решении систем линейных алгебраических уравнений, соответствующих упомянутым уравнениям с конечномерными операторами.

Здесь следует отметить, что в рассмотренном указанными выше авторами случае малой гладкости коэффициентов $a(t,\tau), b(t,\tau)$ слабо - сингулярные интегральные операторы уравнений вида (8) не являются сглаживающими. Кроме того, всякий переход от уравнения (8) к уравнению с конечномерным оператором означает, что к (8) применяется тот или иной прямой метод приближенного решения. С другой стороны, из результатов одной работы

С.В.Переверзева и С.Г.Солодкого следует, что оптимальная погрешность прямых методов размерности n на классе уравнений со сглаживающими операторами порядка 1, каковыми являются и интегральные операторы из (8) в случае аналитических или гармонических коэффициентов, имеет порядок n^{-r-1}, где r - гладкость свободных членов из (8). Поскольку прямой метод размерности n сводится, вообще говоря, к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $n \times n$, то реализация алгоритма, построенного на базе прямого метода, требует выполнения по крайней мере n^2 операций. Это означает, что такой алгоритм принадлежит некоторому множеству $\Phi_L(N)$ при $L \geq n^2$ и, с учетом упомянутого результата С.В.Переверзева и С.Г,Солодкого, обеспечивает на классе $\Psi^{h,r}$ точность порядка $O(n^{-r-1}) = O(L^{-(r-1)/2})$.

С другой стороны, для предтабличного поперечника класса решений $\Delta_L(S(\Psi^{h,r}), L_2)$, оценивающего величину $E_L(\Psi^{h,r})$ снизу, в диссертации установлено, что

$$\Delta_L(S(\Psi^{h,r}), L_2) \asymp L^{-r}.$$

Таким образом, способы задания информации и алгоритмы, позволившие указать точный в степенной шкале порядок ε - сложности слабо - сингулярных уравнений в случае малой гладкости коэффициентов $a(t,\tau), b(t,\tau)$, вообще говоря, не могут быть использованы для определения порядка сложности уравнений (8) с бесконечнодифференцируемыми коэффициентами.

Поэтому в третьей главе предлагается другой подход, состоящий в том, что от уравнения (8) мы переходим к уравнению

$$\tilde{z}(t) = H_n\tilde{z}(t) + S_L f(t) :=$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-a_n(t,\tau)}{\pi} \cdot \ln \left| 2 \sin \frac{t-\tau}{2} \right| + \frac{b_n(t,\tau)}{2\pi} \right) \tilde{z}(\tau) d\tau + S_L f(t), \qquad (9)$$

где $S_L f(t)$ - частная сумма порядка L ряда Фурье функции $f(t)$ по тригонометрической системе, а $a_n(t,\tau)$ и $b_n(t,\tau)$ - частные суммы двумерных рядов Фурье функций $a(t,\tau), b(t,\tau)$ с номерами гармоник из определенного в главе II множества $\bar{Q}_n$. Заметим, что если уравнение (8) принадлежало классу $\Psi^{h,r}$, то и (9) также принадлежит этому классу и является уравнением со сглаживающим оператором.

Хотя (9) не является уравнением с конечномерным оператором, для перехода от (8) к (9) требуется знание лишь конечного числа значений коэффициентов Фурье функций $a(t,\tau), b(t,\tau)$ и $f(t)$. Способ задания информации, определяемый набором этих коэффициентов, обозначим через $N_{n,L}$.

В §13 изучается вопрос об оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративного метода и некоторых его обобщений на классе уравнений со сглаживающими операторами. Полученные здесь результаты дополняют исследования проекционно-итеративного метода, выполненные ранее А.Ю.Лучкой, Н.С.Курпелем, С.В.Переверзевым, их учениками и последователями. Применительно к уравнениям вида $z = Hz + f$ обобщенный проекционно-итеративный метод состоит в итерационном построении последовательности приближенных решений $z_0 = f, z_1, z_2, ..., z_k, ...$ согласно формулам

$$z_k = z_{k-1} + B(Hz_{k-1} - z_{k-1} + f), \tag{10}$$

где

$$B = B_m(P, H) = \sum_{j=0}^{m} H^j + H^{m+1}(I - PH)^{-1}P,$$

а P - проектор на некоторое n-мерное подпространство.

Основным результатом §13 является теорема 13.2, в которой показано, что для классов уравнений второго рода, операторы которых являются сглаживающими операторами порядка q по отношению к шкале соболевских пространств W_2^ν, оптимальная скорость сходимости обобщенных проекционно-итеративных методов, построенных на базе всевозможных n-мерных проекторов, совпадает со скоростью сходимости к нулю геометрической прогрессии со знаменателем $\mu \asymp n^{-(m+1)q}$, где m - параметр, определяющий вид оператора $B_m(P, H)$. Отмечается также, что при больших m применение обобщенных проекционно- итеративных методов для уравнений со сглаживающими операторами дает выигрыш по числу так называемых P -операций в сравнении со случаем $m = 0$, который соответствует обычной схеме проекционно-итеративного метода.

Для построения алгоритма $\varphi^r_{n,M}$, который является оптимальным по порядку для класса $\Psi^{h,r}$ в смысле сложности, используются результаты §13 о скорости сходимости аппроксимационно - итеративных методов для уравнений со сглаживающими операторами. При алгоритме $\varphi^r_{m,M}$ приближенного решения уравнений (8), (9) определяем после $3r$ итераций по формулам

$$z_0 = 0,\ z_k = z_{k-1} + (I - S_m H_n S_M)^{-1}(H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_L f),$$

$$k = 1, 2, ..., 3r.$$

Центральным результатом главы III является

Теорема 14.1.

$$comp(\varepsilon, \Psi^{h,r}) \asymp \varepsilon^{-1/r}$$

Способ задания информации $N_{n,L}$ *и алгоритм* $\varphi^r_{m,M}$ *реализуют оптимальные порядки информационной и алгоритмической сложности класса* $\Psi^{h,r}$ *при*

$$L \asymp \varepsilon^{-1/r}, M \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)}, n \asymp h^{-1} \cdot \log(\varepsilon^{-1}), m \asymp \varepsilon^{-1/3r}.$$

Эта теорема является ответом на упомянутый выше вопрос Г.М.Вайникко для слабо - сингулярных интегральных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами при логарифмической сингулярности. Более того, для класса $\Psi^{h,r}$ теорема 14.1 содержит положительный ответ на основной вопрос оптимизации способов задания информации, сформулированный в главе 1.

Отметим, что результаты исследований которые приведены в главе 4 связаны (в том числе) с теми методами приближенных решений операторных уравнений второго рода, о которых речь идет в параграфе 13 главы III.

Основным результатом §15 является нахождение оптимального порядка погрешности прямых методов приближенного решения интегральных уравнений, возникающих в рамках так называемого метода функций краевых условий при решении периодических краевых задач вида

$$\begin{gathered} y^{(r)} + \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) y^{(i)} = f(t). \\ y^{(i)}(0) = y^{(i)}(2\pi),\ i = 1, 2, ..., r-1. \end{gathered} \tag{11}$$

Метод функции краевых условий состоит в том, что решение (11) ищется в виде свертки неизвестной функции $u(t)$ с функцией Бернулли $D_r(t)$. При этом $u(t)$ определяется из интегрального уравнения

$$u(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} - c\rho_0(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) D_{r-t}(t-\tau) \right] u(t) d\tau + f(t), \tag{12}$$

где c - некоторая постоянная.

Предположим, что в дифференциальном уравнении задачи (11) отсутствуют производные $y^{(r-j)}, j = 1, 2, ..., s$, т.е. $p_{r-j}(t) \equiv 0, j = 1, 2, ..., s$, а остальные коэффициенты $p_i(t)$ и свободный член $f(t)$ имеют на $[0, 2\pi]$ непрерывные и ограниченные некоторыми фиксированными константами β_i производные до порядка ν включительно. Класс однозначно разрешимых и соответствующих этому предположению уравнений (12) обозначим через $\Psi^{r,s,\nu}_\beta$.

Пусть $\theta_N(\Psi_\beta^{r,s,\nu})$ - минимальная погрешность, которую можно гарантировать при приближенном решении произвольного уравнения из класса $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$ с помощью прямых методов, состоящих в замене интегральных операторов из (12) всевозможными операторами фиксированного ранга N. Отметим, что для различных классов интегральных уравнений Ψ величина $\theta_N(\Psi)$ исследовалась ранее в работах С.В.Переверзева, Ш.Хейнриха, Э.Шока, С.Г.Солодкого, А.Урумбаева и др.

В §15 установлена (Теорема 15.2.), что при $r = 2, 3, \ldots, s = 1, 2, \ldots, r - 1, \nu = 0, 1, 2, \ldots, s + 1$

$$\theta_N(\Psi_\beta^{r,s,\nu}) \asymp N^{-s-\nu-1}$$

и указан прямой метод, реализующий оптимальный порядок погрешности. Отметим, что ранее из работ по методу функции краевых условий для прямых методов, при которых интегральный оператор из (0.12) заменяется оператором ранга N, были известны оценки погрешности лишь порядка $O(N^{-s-1})$. Кроме того, в §15 показано (Теорема 15.3, 15.4), что если использовать упомянутый оптимальный по порядку прямой метод в рамках аппроксимационно-итеративных методов типа метода Шмидта и метода Соколова, то первый будет сходиться к решениям уравнений из класса $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$ как геометрическая прогрессия со знаменателем $O(N^{-s-1})$, а второй - $O(N^{-s-\nu-1})$.

В §16 рассмотрен некоторый специальный класс интегральных уравнений со сглаживающими операторами, возникающих при описании линейных колебательных систем. Используя структурные особенности наших уравнений, удается показать, что для них скорость сходимости итерационного процесса (10) может быть увеличена по сравнению со скоростью, указанной в теореме 13.2, если несколько изменить схему обобщенного проекционно-итеративного метода. А именно, если вместо определенного ранее оператора $B_m(P, H)$ в (0.10) положить

$$B = \bar{B}_m(P, H) = \sum_{j=0}^{m} H^j + H^{m+1}(I - PH)^{-1},$$

то полученный итерационный процесс будет сходиться как геометрическая прогрессия со знаменателем порядка $O(n^{-(m+2)q})$.

В §17 рассматривается прямой метод приближения собственных значений задачи $\lambda u - Hu = 0$, при котором оператор H заменяется оператором конечного ранга $H_{2n} = PH + HP - PHP$. Для некоторых классов вполне непрерывных самосопряженных операторов H упомянутый метод исследовался в работах С.В.Переверзева и Ж.Мырзанова. В §17 результаты этих исследований обобщаются на случай несамосопряженных операторов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Азизов М. Аппроксимационный метод решения периодической краевой задачи для линейного дифференциального уравнения// ДАН Тадж.ССР, т.28, №3, 1985, с. 129-132
2. Азизов М. Аппроксимационный метод решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами// Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. с.47.
3. Азизов М. О приближении решения интегральных уравнений теории потенциала// Труды мат. Ин-т АН СССР, т.180, 1987, с.24-25.
4. Азизов М. Об одном методе приближенного решения проблемы собственных значений для вполне непрерывных операторов// ДАН Тадж.ССР, т.32, №5, 1989, с.289-292.
5. Азизов М. Приближение a- методом решении одной краевой задачи для уравнения гиперболического типа // Тезисы докладов Всесоюзной школы "Теория приближения функции", посвященной 70-летию В.К.Дзядыка. Луцк - Киев, 1989, с.4.
6. Азизов М. Об одном применение аппроксимационного метода// ДАН Тадж.ССР, т.33, №5, 1990, с.283-286.
7. Азизов М., Переверзев С.В. Блендинг -сплайны в модифицированном методе сингулярного разложения// Экстремальные задачи теории приближения и их приложения. Тезисы докладов Республиканской научной конференции посвященной 70-летию Н.П.Корнейчука. -Киев, 1990, с.5.
8. Азизов М., Раджаббеков Р. Приближение а- методом решении одной краевой задачи для уравнения гиперболического типа// Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения. - Душанбе, 1991, с.3-9
9. Азизов М. О приближенном решении одной краевой задачи// ДАН Тадж.ССР, т.34, №11, 1991, с.605-609.

10. Азизов М. Оптимизация задания информации при решении уравнении Фредгольма с гармоническими коэффициентами// Изв.АН РТ, - отделение физ-мат., хим. и геолог.наук, т.124, №3-4, 1994, с.15-24
11. Азизов М. Информационная сложность уравнении Фредгольма с аналитическими ядрами и свободными членами// Тезисы докладов Международной конференции "Функциональные пространства. Теория приближений. Нелинейный анализ", посвященной 90-летию С.М.Никольского. - Москва, 1995, с.7
12. Азизов М. Информационная сложность приближенного решения уравнении Фредгольма с гармоническими ядрами и свободными членами// Доклады НАН Украины, №5, 1996, с.24-28
13. Переверзев С.В., Азизов М. Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с аналитическими коэффицентами // Укр.матжурн. т.48, №5, 1996, с.656-665
14. Азизов М. Информационная сложность локального решения уравнении Фредгольма с аналитическими ядрами и свободными членами// ДАН России, т.352, №2, 1996, с.235-239.
15. Азизов М. О сложности граничных интегральных уравнений с аналитическими коэффициентами при логарифмической сингулярности// Укр.матем.журн. т.48, №10, 1996, с.1299-1311.
16. Азизов М. Об оценке информационной сложности слабо -сингулярных интегральных уравнений// Тезисы докладов Международной конференции "Теория приближения и численные методы", посвященной 100-летию со дня рождения Е.Я.Ремеза. -Ровно. 1996, с.13.
17. Азизов М. Об оптимальной скорости сходимости проекционно - итеративного метода и некоторых его обобщений на классе уравнений со сглаживающими ядрами// Укр.матем.журн. т.48, №11, 1996, с.1448-1456.
18. Азизов М. О сложности граничных интегральных уравнений с гармоническими коэффициентами при логарифмической сингулярности // Доклады НАН Украины, №11, 1996, с.24-27.
19. Азизов М. Информационная сложность граничных интегральных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами// ДАН РТ, т.34, №9-10, 1996, с.106-111.
20. Азизов М. Приближение a-методом решений краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений// ДАН РТ, т.34, №9-10, 1996, с.19-26.

21. Азизов М. О сложности приближенного решения слабо-сингулярных интегральных уравнений// Тезисы докладов Международной конференции по теория приближений посвященной памяти профессора П.П. Коровкина. -Калуга. 1996. с.9.
22. Азизов М. Точный порядок информационной сложности слабо сингулярных интегральных уравнений с периодическими коэффициента Мат.заметки. т.62, вып.5, 1997, с.643-656.
23. Азизов М. Об одном прямом методе приближенного решения периодической краевой задачи// Укр.матем.журн. т.49, №11, 1997, с.1157-1161.
24. Азизов М. Информационная сложность многомерных уравнений Фредгольма II рода с гармоническими коэффициентами // Укр.мат.журн. т.52, №7, 2000, с.805-816.
25. Азизов М. Оценка минимального радиуса информаций локального решения многомерных уравнений Фредгольма с гармоническими коэффициентами // ДАН РТ, т.39, №3-4, 2001, с.52-57.
26. Азизов М. Оптимизация задания информации при решении уравнений Фредгольиа для случая ψ дифференцируемых коэффициентов //ДАН РТ, т.40, №5-6, 2002, с.61-65.
27. Азизов М. Оптимальный способ задания информации при решении уравнений Фредгольма с ψ - дифференцируемыми ядрами и свободными членами // Труды Международной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 2003, с.33-34.
28. Азизов М. Оптимальные способы задания информации для локального решения уравнений Фредгольма с коэффициентами бесконечной гладкости // Вестник ХоГУ, серия 1, 2004, с.3-20.
29. Азизов М. Об одной оценке числа Гельфанда // ДАН РТ, т.50, №3, 2007, с.3-7
30. Азизов М. О приближенном решении периодической краевой задачи // Вестник ХоГУ, №8, 2008, с.3-21
31. Азизов М. Информационная сложность локального решения интегральных уравнений Фредгольма с аналитическими коэффициентами //Изв.АН РТ, отделение физ.-мат., хим. и геолог. и тех.наук, т.131, №2, 2008, с.15-26.
32. Азизов М. Об оценке числа Гельфонда в пространстве аналитических функций // Вестник ТГПУ, 2009, с.8-12.

33. Азизов М. О скорости сходимости методов проекционно-итеративного типа для уравнений со сглаживающими операторами // Труды международной конференции "Методическая система обучения. Математика, физика, информатика, технология и методика их обучения", АОТ ТГПУ, Душанбе, 2009, стр.3-8