Matemaattinen tutkimus Suomessa.

Kirjoittanut
ERNST LINDELÖF.

Kesti kauan, runsaan puolen vuosisataa, ennenkuin Newtonin ja Leibnizin koko matemaattista tiedettä mullistavien keksintöjen vaikutukset rupesivat tuntumaan kaukaisessa maassamme. Pitkälle 1700-lukua oli matemaattinen tutkimus ja etenkin matemaattinen opetus Turun Yliopistossa vielä melko alkeellisella kannalla. Vasta mainitun vuosisadan keskivaiheilla tuli differentiaali- ja integraalilasku, etupäässä Jakob Gadolinin ja Martin Walleniuksen ansiosta, yleisemmin tunnetuksi ja pääsi opetusohjelmassakin näkyviin. Vuosisadan jälkimmäisellä puoliskolla oli matemaattinen tutkimus maassamme jo kauniissa nousussa ja monet Turun yliopiston professoreista olivat tunnettuja taitavina matemaatikkoina ja astronoomeina. Näistä ansaitsevat JOHAN HENRIK LINDQVIST ja ANDREAS PLANMAN erityistä huomiota.

Mutta ennen muita on tältä aikakaudelta mainittava suomalainen matemaatikko ja astronoomi, joka saavutti huomattavan eurooppalaisen maineen, joskin valitettavan suuri osa hänen tieteellistä toimintaansa ja vaikutustansa lankeaa maamme rajojen ulkopuolelle. Tämä mies oli ANDERS JOHAN LEXELL, joka syntyi Turussa vuonna 1740. Jo yhdeksäntoistavuotiaana hän herätti huomiota terävästi kritikoimalla Leibnizin optiikkaa. Myöhemmin hän viiden vuoden ajan oli dosenttina Turussa, mutta pyrkien tieteellisen tutkimuksen keskuksiin hän vuonna 1768 haki tointa Pietarin Tiedeakatemiassa, jonka mainehikkaimpana jäsenenä tähän aikaan oli Leonhard Euler, kahdeksannentoista vuosisadan suurin matemaatikko. Tätä varten lähetti Lexell Akatemialle tutkimuksen, joka käsitteli erästä uutta differentiaaliyhtälöiden integroimismenettelyä. Tutkimus joutui Eulerin arvosteltavaksi, joka antoi siitä erittäin kiittävän lausunnon. Kun Akatemian esimies epäillen huomautti, että tutkimuksen kenties oli laatinut joku toinen matemaatikko, joka oli tahtonut Lexelliä auttaa, kerrotaan Eulerin tähän vastaneen, ettei tämä auttava käsi siinä tapauksessa voinut olla kenenkään muun kuin joko hänen omansa tai d'Alembertin, sillä kukaan muu ei siihen olisi kyennyt. Tulos oli, että

Lexell vuonna 1768 nimitettiin Akatemian apulaismatemaatikoksi ja tähtitieteelliseksi observaattoriksi. Tähän toimeen kuului lähinnä osanotto niihin laajoihin valmistustöihin, joihin oli ryhdytty havaintojen tekoa varten vuonna 1769 tapahtuvan Venus-ohikulun johdosta, sekä myöhemmin havaintojen laskeminen ja analyysi. — Lexell joutui läheisiin suhteisiin Eulerin kanssa, joka muutamia vuosia aikaisemmin oli täydellisesti menettänyt näkönsä. Hän avusti Euleriä tämän tutkimuksissa ja oli apuna niiden julkaisemisessa; m.m. hän aktiivisesti otti osaa Eulerin uuden kuuteorian kehittelyyn. Lexellin tieteellinen toiminta oli tänä aikana harvinaisen voimaperäistä ja tuottoisaa, mikä ilmenee siitäkin, että hän Akatemian sarjajulkaisuissa painatti kokonaista 65 eri tutkimusta. Nämä koskivat osaksi puhtaasti matemaattisia tehtäviä, etupäässä integraalilaskun, differentiaaliyhtälöiden sekä geometrian aloja, mutta etupäässä hän niissä kuitenkin käsitteli tähtitieteellisiä kysymyksiä: paikanmääräyksiä, auringonparallaksia, kuuteoriaa, planeettojen teoriaa (m.m. Uranuksen, joka vasta äskettäin oli löydetty), sekä etenkin komeettojen teoriaa. Erityisesti hän laajoissa tutkimuksissa käsitteli vuonna 1770 keksittyä komeettaa, jolle tämän perusteella onkin annettu nimi »Lexellin komeetta». Näillä tutkimuksillaan Lexell lyhyessä ajassa saavutti mainetta kautta Euroopan; niinpä hänet kutsuttiin Tukholman, Upsalan, Pariisin ja Torinon tieteellisten akatemiojen jäseneksi, ja myöskin Lontoon astronoomipiirien taholta hän sai osakseen huomattavan kunnianosoituksen. — Vuonna 1775 nimitettiin Lexell seitsemästä hakijasta ansiokkaimpana matematiikan professoriksi Turun Yliopistoon, mutta pyysi ja sai oikeuden vielä kolmeksi vuodeksi jäädä Pietariin. Myöhemmin hän vielä kaksi kertaa sai pidennettyä virkavapautta vuodeksi kerrallaan. Vuonna 1780 hän näyttää täydellä todella aikoneen siirtyä Turkuun, mutta Pietarin Akatemia sai hänet aikeestaan luopumaan tarjoamalla tilaisuuden vuoden kestävään ulkomaanmatkaan, jonka aikana hän oleskeli Saksassa, Ranskassa ja Englannissa. Eulerin kuoltua vuonna 1783 nimitettiin Lexell hänen seuraajakseen Akatemiassa. Mutta hänen kaunis uransa, kenties loistavin Suomen tieteen historiassa, katkesi äkkiä; jo seuraavana vuonna 1784 kuoli Lexell vajaan 44 vuoden ikäisenä.

Yliopistomme siirtyessä Helsinkiin oli matematiikan professorina Nathanael Gerhard af Schultén (1794—1860). Hän oli uuttera tutkija ja innokas opettaja, jonka sekä tieteellisessä että opetustyössä ilmenee huomattava pyrkimys loogilliseen tarkkuuteen. Lukuisissa julkaisuissaan hän käsitteli probleemoja mekaniikan ja optiikan alalta, peruskysymyksiä aritmetiikan, algebran ja infinitesimaalilaskun piiristä, edelleen yksityisluontoisempia kysymyksiä, kuten ketjumurtolukuja, joiden avulla Schultén näytti, että on olemassa lukuja, jotka eivät ole minkään kokonaisilla kertoimilla varustetun algebrallisen yhtälön juurina, sekä geometrian perusteita, erityisesti Euklideen paralelliaksiomaa ja sen kanssa yhtäpitäviä olettamuksia. Schultén oli Suomen Tiedeseuran perustajia ja sen ensimmäisenä sihteerinä. Hänen työnsä herättivät ulkomaillakin huomiota, mistä on todistuksena, että hän vuonna 1819 Ruotsin Tiedeakatemialta sai Fernerin palkinnon ja kutsuttiin Upsalan Tiedeseuran ja Pietarin Tiedeakatemian jäseneksi.

Lorenz Leonard Lindelöf (1827—1908), Schulténin seuraaja Yliopistossa, kohotti kotimaisen matematiikan tutkimuksen korkeammalle tasolle. Hän aloitti tieteellisen uransa astronoomina, mutta siirtyi pian matematiikkaan ja harrasti erityisesti variatiolaskua, josta hän valitsi aiheen professoriväitöskirjaansa varten. Vuonna 1861 hän Pariisissa julkaisi laajan esityksen variatiolaskusta, joka vuosikymmeniä säilyi eniten käytettynä tämän alan oppikirjana. Tässä teoksessa ansaitsee erityistä huomiota sen probleeman käsittely, joka koskee pyöräyspinnan määräämistä, jolla on mahdollisimman pieni pinta-ala, mikä edelleenkin on Jacobin teorian kaikkein kaunein sovellutus. Muista Lindelöfin analyysia ja sen sovellutuksia koskevista töistä on tässä mainittava tutkimus, jossa käsitellään pyöräyspintoja, joilla on vakinainen keskikaarevuus, ja toinen, jossa tutkitaan kappaleen rataa, joka maan pyörimisen vaikutuksen alaisena vapaasti liikkuu pitkin maapallon pintaa; viimemainittu tutkimus sisältää mielenkiintoisen sovellutuksen siihen ilmakehässä havaittuun aaltoon, jonka mahtava Krakatoan tulivuorenpurkaus vuonna 1883 aiheutti. — Geometrian alalta Lindelöf on julkaissut useita tutkimuksia. Eräässä, joka v. 1880 Berliinin Tiedeakatemialta sai Steinerin palkinnon, näytetään, että välttämätön ehto, jotta monitahokkaalla, jolla on määrätty pinta-ala, olisi mahdollisimman suuri tilavuus, on että sen sivutahkot painopisteissään sivuavat samaa palloa. Myöhemmässä työssä sovelletaan tämä tulos erityisiin monitahokasluokkiin, ja tutkitaan millä monitahokkaalla luokassaan todella on suurin tilavuus. Hänen viimeiset julkaisunsa käsittelevät ellipsin ympäri piirrettyjen monikulmioiden maksimi- ja minimiominaisuuksia ja Poncelet'n tätä koskevia tutkimuksia. — Lindelöfin töille on ominaista harvinainen selvyys ja erinomainen muotokauneus. Puhtaasti tieteellisen toimintansa ohella omisti Lindelöf paljon työtä maamme eläkekassoille ja kehitti niiden laskemismenetelmät korkealle tasolle. — Lindelöf oli neljäkymmentä vuotta Suomen Tiedeseuran sihteerinä, Pietarin Tiedeakatemian kirjeenvaihtajajäsen ja Moskovan Yliopiston kunniajäsen.

Yhdeksännellätoista vuosisadalla joutui matematiikan kehitys uuteen vaiheeseen, jonka tärkeimpänä tuloksena oli n.k. analyyttisten funktioiden teoria; mutta tämän ohella kiintyi huomio matematiikan peruskäsitteisiin ja menetelmiin, jotka saatettiin entistä täsmällisempään ja loogillisesti moitteettomaan muotoon. Mainitun teorian perusti Cauchy, joka useimmilla muillakin analyysin aloilla esiintyi reformaattorina, ja kaksi vuosikymmentä myöhemmin Riemann, kaikkien aikojen syvällisimpiä ajattelijoita, kehitti analyyttisten funktioiden teoriaa valtavan askeleen eteenpäin. Tällä teorialla oli kuitenkin alussa suuria vaikeuksia voitettavana, ja jotta se voisi nousta merkitystänsä vastaavaan asemaan, oli välttämätöntä esittää se yksinkertaisemmassa ja yhtenäisemmässä muodossa. Tämän suuren tehtävän suoritti Weierstrass, joka vuosina 1864—1897 toimi professorina Berliinin yliopistossa ja tänä aikana kokosi ympärilleen suuren määrän oppilaita kaikista sivistysmaista.

Meidän maassamme oli funktioteoreettisen harrastuksen herättäjänä ruotsinmaalainen G. Mittag-Leffler, joka vuosina 1877—1881 oli professorina Helsingin yliopistossa. Hän tuli maahamme heti päätettyään opintonsa Weierstrassin johdolla, jota hän rajattomasti ihaili ja jonka oppeja hän on levittänyt ja opettajansa hengessä kehittänyt enemmän kuin kukaan muu Weierstrassin oppilaista. Mittag-Lefflerin ajoilta on peräisin se keskeinen asema, mikä funktioteorialla maamme matemaattisessa tutkimuksessa sen jälkeen on ollut.

Ensimmäinen tämän alan kotimainen tutkija on Hj. Mellin, jonka laaja matemaattinen tuotanto kokonaan liikkuu funktioteorian piirissä. Vuonna 1881 ilmestyneessä väitöskirjassaan Mellin asetti tehtäväkseen »Weierstrassin teorian pohjalla kehittää tarkan algebrallisten funktioiden teorian ja täten samalla myötävaikuttaa Weierstrassin funktioteorian tunnetuksi tekemiseksi meillä». Mellinin seuraavat työt kohdistuvat Eulerin määrittelemään n.k. gammafunktioon, joka sitten punaisena lankana käy hänen myöhempienkin tutkimustensa läpi; tämän funktion suuren merkityksen on Mellin selvemmin kuin kukaan ennen häntä nähnyt ja selvittänyt. Hänen tärkeimpiä tuloksiaan on, että jokainen n.k. hypergeometrinen differentiaaliyhtälö täydellisesti voidaan integroida gammaosamäärien yli ulotetuilla määrätyillä integraaleilla, joissa riippumaton muuttuja yksinkertaisella tavalla esiintyy parametrinä. Toinen tärkeä tulos, jonka Mellin ja italialainen matemaatikko Pincherle toisistaan riippumatta saavuttivat, on läheinen yhteys, joka vallitsee eräiden lineaaristen differentiaali- ja differenssiyhtälötyyppien välillä. Edelleen on mainittava ne mielenkiintoiset ja muotokauniit lausekkeet, jotka Mellin johtaa algebrallisen yhtälön juurille, esittäessään ne gammaosamäärien yli ulotettuina moninkertaisina integraaleina, joissa yhtälön kertoimet esiintyvät parametreinä. Aikaisemmissa töissään nojautui Mellin yksinomaan Weierstrassin funktioteoriaan, mutta myöhemmin hän yhä suuremmassa määrässä otti avuksi Cauchyn integraalilauseet ja residylaskun, joiden merkitykseen hänen käsittelemällään alalla hän laajassa työssä erityisesti kiinnitti huomiota. Mellinin tutkimuksissa on tärkeänä apuneuvona eräitten funktioluokkien välinen merkillinen vastaavaisuus. Tämän vastaavaisuuden olivat Fourier, Cauchy ja myöhemmin Pincherle yksityistapauksissa jo huomanneet, mutta Mellin on tässä todistanut erään laajakantoisen ja hyvin yleisen lauseen, jota hän monipuolisesti soveltaa. M. m. hän täten on johtunut sangen yleisiin, funktioiden asymptoottisia ominaisuuksia ja niiden n.k. asymptoottisia sarjakehitelmiä koskeviin tuloksiin. Tutkimuksissaan joutui Mellin piankin tekemisiin n.k. Dirichlet'n sarjojen kanssa, joille hän myöhemmin omisti laajoja tutkimuksia. Nämä johtivat m.m. mielenkiintoisiin lukuteoreettisia funktioita koskeviin tuloksiin, joita usein näkee ulkomaisessa ammattikirjallisuudessa mainittavan.

Muista Mittag-Lefflerin oppilaista mainittakoon E. A. Stenberg (1858—1908) ja Evert Sjöblom, jotka niinikään hyvällä menestyksellä ovat suorittaneet tutkimuksia Weierstrassin funktioteorian alalta. Molemmat ovat käsitelleet kaksoisperioodisilla kertoimilla varustettujen lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa.

Sallittakoon allekirjoittaneen tässä kohdassa lyhyesti kosketella omia töitään. Aikaisemmista, jotka koskevat erilaisia differentiaaliyhtälöihin liittyviä kysymyksiä, mainittakoon lineaarisia osittaisia differentiaaliyhtälöitä käsittelevä työ, jossa tutkitaan integraalien muotoa erikoispisteen ympäristössä ja täydennetään eräitä aikaisempia Poincarén tuloksia. Seuraavat tutkimukset liikkuvat pääasiassa funktioteorian piirissä ja monet näistä käsittelevät tämän teorian yleisiä periaatteita ja näiden sovellutuksia erilaisiin kysymyksiin, kuten analyyttiseen jatkamiseen sekä kysymyksiin, jotka koskevat funktion suhtautumista erikoispisteen ympäristössä ja reunojen vastaavaisuutta konformikuvauksessa. Yksityisluontoisista tuloksista mainittakoon uusi, entistä yksinkertaisempi n.k. Picardin yleisen lauseen todistus. Eräässä E. Phragménin ja allekirjoittaneen yhdessä julkaisemassa tutkimuksessa käsitellään erästä n.k. moduliperiaatteen laajennusta, jota uudenaikaisessa funktioteoriassa paljon on käytetty ja jonka avulla allekirjoittanut m.m. johti eräitä uusia tuloksia, jotka koskevat Riemannin zetafunktion asymptoottisia ominaisuuksia. Toinen jakso tutkimuksia on omistettu kokonaisten funktioiden teorialle, rajoittumalla etupäässä sellaisiin, joiden laatu (»genre») on äärellinen. Näissä täydennetään aikaisempia tuloksia useissa suhteissa, nimenomaan sellaisiin funktioihin nähden, joiden »kertaluku» on kokonainen. Näille funktioille todistetaan m.m. entistä tarkemmassa muodossa Picardin ja Borelin lauseet, jotka koskevat funktioiden arvojen jakautumista. Edelleen voi aivan toiselta, nim. joukko-opin alalta, mainita Cantor-Bendixsonin lauseen uuden todistuksen, jolle on ominaista, että siinä vältetään transfiniittisten lukujen käyttämistä. — Vihdoin mainittakoon, että allekirjoittanut Borelin funktioteoreettisia monografioja käsittävässä sarjassa on julkaissut Cauchyn residylaskua ja sen sovellutuksia käsittelevän teoksen.

Jos edelleen puhumme tutkijoista, jotka etupäässä ovat työskennelleet funktioteorian alalla, on seuraavana mainittava Severin Johansson. Väitöskirjansa aiheeksi valitsi hän kysymyksen funktioiden »uniformisoimisesta» ja kiinnitti täten uudestaan matemaatikkojen huomion tähän perustavaan probleemaan, joka parin vuosikymmenen ajaksi oli jäänyt syrjään. Kun sitten Poincaré ja Koebe olivat sen täydellisesti ratkaisseet, palasi Johansson myöhemmässä työssä siihen ja sen yhteydessä esiintyviin konformista kuvausta koskeviin kysymyksiin. Parissa tutkimuksessa hän käsittelee automorfifunktioita, etenkin sellaisia, joiden ryhmällä on n.k. pääympyrä ja äärettömän monta perussijoitusta. Näytetään, että näille eräät aikaisemmin äärellisestä perussijoitusmäärästä syntyviin ryhmiin nähden todistetut, m.m. Poincarén sarjojen konvergenssia koskevat tulokset eivät enää yleisesti pidä paikkaansa. Analyyttisten töittensä ohella on Johansson tutkinut Lobatscheffskin eli n.k. hyperbolista geometriaa. Hän on uudella ja mielenkiintoisella tavalla esittänyt tämän geometrian järjestelmän ja lisäksi tutkinut niitä hyperbolisen avaruuden viivoja ja pintoja, jotka vastaavat traetrix-käyrää ja pseudopalloa euklidisessä avaruudessa.

Felix Iversen on useassa työssä perusteellisesti tutkinut analyyttisten, erityisesti meromorfifunktioiden käänteisfunktioita ja näiden erikoispisteitä. Tässä yhteydessä on hän saavuttanut uusia yleisiä lauseita, jotka koskevat analyyttisen funktion suhtautumista erikoispisteiden ympäristössä ja nimenomaan funktion n.k. asymptoottisia arvoja. Tutkimuksissaan Iversen oikaisee ja oleellisissa kohdissa täydentää ranskalaisen Boutroux'n vähäistä aikaisemmin saavuttamia tuloksia.

R. J. Backlund on tutkinut Riemannin zetafunktion nollakohtien asemaa, analyysin merkillisimpiä probleemoja. Nojaten luomaansa kokonaisten funktioiden teoriaan oli Hadamard todistanut, että tällä funktiolla on äärettömän monta kompleksi-nollakohtaa, ja samalla johtunut eräisiin niiden tiheyttä koskeviin tuloksiin, ja v. Mangoldt oli viimemainitussa suhteessa todistanut huomattavasti enemmän. Kaikki nämä tulokset saavutti Backlund alkeellisemmalla ja erittäin kauniilla tavalla, vieläpä oleellisesti täsmällisemmässä muodossa. Käyttämällä keksimäänsä menetelmää voi Backlund tämän ohella todeta, että mainitut nollakohdat, ainakin 200 yksikön pituisiin ordinaattoihin asti, todella sijaitsevat sillä suoralla, jolla Riemann oli olettanut kaikkien näiden nollakohtien olevan.

P. J. MYRBERG on suorittanut laajan ja monipuolisen tutkimustyön analyysin korkeimmilla aloilla. Hänen ensimmäiset työnsä käsittelevät yhden muuttujan automorfifunktioita. Näissä hän oleellisissa kohdissa täydentää Schottkyn tuloksia n.k. Schottkyn ryhmiin ja näihin kuuluviin automorfifunktioihin nähden, erityisesti kiinnittäen huomiota Poincarén sarjojen konvergenssikysymykseen. Eräässä työssä Myrberg kehittää muuatta Poincarén menettelyä algebrallisten funktioiden uniformisoimiseksi, päästen tässä niin pitkälle, että menetelmää voidaan soveltaa käytännössäkin. — Myrberg siirtyi tämän jälkeen huomattavasti yleisempiin kysymyksiin, joita vain harvat ennen häntä ovat tutkineet, nimittäin useammasta muuttujasta riippuvien automorfifunktioiden alalle, missä funktioteoria yhtyy yleiseen ryhmäteoriaan ja laajoihin geometrian aloihin, kuten projektiiviseen geometriaan, epäeuklidiseen geometriaan ja topologiaan eli analysis situkseen. Hänen lukuisat tutkimuksensa tällä alalla huipentuvat laajaksi työksi, joka on painettuna *Acta Mathematica*ssa ja jonka kautta, kuten eräs ulkomainen asiantuntija huomauttaa, koko puheenaoleva teoria on kohonnut entistä oleellisesti korkeammalle tasolle. Myrberg osoittaa tässä työssään, että aikaisempi epäjatkuvaisuuskäsite ei riitä useampien muuttujien ryhmäteoriassa, vaan että on välttämätöntä tämän ohella määritellä ja käyttää uutta käsitettä, jota hän kutsuu »normaaliseksi epäjatkuvaisuudeksi». Tämän nojalla hänen onnistuu luoda aivan uutta valoa niihin peruskysymyksiin, jotka koskevat määrättyyn ryhmään kuuluvien automorfifunktioiden oleellisia erikoisuuksia ja eksistenssialuetta. — Näissä tutkimuksissaan Myrberg jo aikaisin tuli tekemisiin lukuteoreettisten kysymysten kanssa. Hän sovelsi ensin ketjumurtolukujen teoriaa elliptiseen modulifunktioon ja binääristen neliömuotojen tutkimiseen. Tästä johtui hän yleisempiin tutkimuksiin, jotka koskevat neliömuotoryhmiä, ja vihdoin muotosysteemeihin, joiden kertaluku on mielivaltaisen korkea. Nämä tutkimukset täydentävät ja yleistävät aikaisempia Hermiten, Jordanin ja Poincarén tuloksia. — Aivan toiseen funktioteorian alaan kuuluu Myrbergin tutkimus sellaisista funktiosysteemeistä, joille on voimassa algebrallinen yhteenlaskuväittämä. Siinä hän laajasti yleistää erään Weierstrassin esittämän peruslauseen, jonka mukaan n toisistaan riippumatonta n:n muuttujan funktiota, joiden muodostamalla systeemillä on algebrallinen yhteenlaskuväittämä, aina voidaan algebrallisesti lausua Abelin funktioiden avulla. Myrberg saavuttaa päämääränsä käyttämällä mainitun Weierstrassin lauseen ohella hyväkseen eräitä Poincarén tuloksia. Tämä työ, joka todistaa tekijässään harvinaisen laajakatseista yhdistelykykyä, sai vuonna 1922 Jablonowskin Seuran palkinnon.

Frithiof Nevanlinna käsitteli ensimmäisissä töissään asymptoottisten sarjojen teoriaa. Näissä täydennetään ja tarkistetaan eräitä aikaisempia Poincarén ja Watsonin tuloksia ja saatetaan nämä kysymykset yhteyteen Nörlundin kertomasarjoja koskevien tutkimusten kanssa. Kosketeltuaan parissa pienessä työssä Dirichlet'n sarjoja sekä Fourier'n sarjoja ja integraaleja, siirtyi hän funktioteorian peruskysymyksiin ja otti käsiteltäväksi kysymyksen analyyttisen funktion reuna-arvojen ja alueen sisällä sijaitsevien nolla- ja äärettömyyskohtien välisestä riippuvaisuudesta. Käyttämällä Greenin muunnosta hän johti yleisen kaavan analyyttisen funktion modulin logaritmille, mikä kaava, sovellettuna ympyrään, yhdistää kaksi funktioteorian tärkeimmistä apuneuvoista, Poissonin integraalin ja Jensenin lauseen, ja jota senvuoksi sattuvasti on kutsuttu Poisson-Jensenin kaavaksi. Tämän kaavan avulla tekijä uudella ja välittömällä tavalla todisti Hadamardin tuloksen, joka koskee äärellistä kertalukua olevan kokonaisen funktion esitystä äärettömänä tulona, edelleen erittäin tarkan lauseen, josta ilmenee riippuvaisuus, joka vallitsee sektorissa meromorfisen funktion asymptoottisen suhtautumisen ja sen sektorissa sijaitsevien nolla- ja äärettömyyskohtien välillä; vihdoin hän yhdessä veljensä R. Nevanlinnan kanssa käytti sitä Riemannin zetafunktion tutkimiseen. Kun veli sitten oli esittänyt uuden teoriansa meromorfifunktioista, johon kohta palaamme, ryhtyi F. Nevanlinna käsittelemään tätä samaa alaa käyttämällä toista menetelmää, joka liittyy siihen perusajatukseen, jota noudattaen Picard viisikymmentä vuotta aikaisemmin oli keksinyt kuuluisan lauseensa. Hänen tuloksensa ovat sangen yleisiä ja käsittävät tärkeimmät R. Nevanlinnan lauseet.

Rolf Nevanlinnan laaja tuotanto kohdistuu milt'ei kokonaan funktioteorian peruskysymykseen: analyyttisen funktion arvojen jakautumiseen. Hänen ensimmäiset tutkimuksensa koskivat määrätyllä alueella rajoitettuja funktioita, jotka annetuissa sisäpisteissä saavat määrätyt arvot. Hän johtaa ne välttämättömät ja riittävät ehdot, jotka annettujen argumentti- ja funktioarvojen tulee tyydyttää, jotta tällaisia funktioita olisi olemassa. Käsiteltyään tämän jälkeen parissa pienessä työssä eräitä aktuaalisia konformiseen kuvausoppiin liittyviä kysymyksiä palasi Nevanlinna aikaisempaan aiheeseensa, jota hän nyt, liittyen erääseen Julian todistamaan lauseeseen, kehitti edelleen asettamalla kysymyksen siten, että rajoitetun funktion ja sen derivaatan annetuissa reunapisteissä tulee saada määrätyt arvot. Sopivan rajaprosessin kautta johtuu hän tästä tutkimaan rajoitettuja funktioita, joilla on määrätty asymptoottinen kehitelmä ja ratkaisee tätä tietä aivan uudella tavalla Stieltjesin kuuluisan »momenttiprobleeman», selvittäen täydellisesti senkin tapauksen, jossa probleeman ratkaisu ei ole yksikäsitteisesti määrätty. — Kiinteässä yhteistyössä veljensä kanssa syventyy Nevanlinna tämän jälkeen yhä enemmän funktioteorian johtaviin periaatteisiin. Greenin muunnoskaavan avulla johtaa hän yleisen epäyhtälön, joka osoittautuu erittäin käyttökelpoiseksi tutkittaessa funktion modulia ja sen asymptoottista suhtautumista oleellisen erikoispisteen ympäristössä. Tällä tavalla johtaa hän suuren määrän lauseita, jotka oleellisesti tarkistavat ja yleistävät aikaisempia, m.m. eräitä E. Phragménin ja allekirjoittaneen, tuloksia. — Tämän jälkeen hän ryhtyy perusteellisesti tutkimaan kokonaisia ja meromorfisia funktioita, erityisesti kysymystä näiden arvojen jakautumisesta. Kokonaisten funktioiden paljon tutkitussa teoriassa saavuttaa hän huomattavasti tarkempia tuloksia kuin kukaan ennen häntä ottamalla funktion kasvun mitaksi sopivamman lausekkeen aikaisemmin käytetyn »maksimimodulin» asemesta. Meromorfifunktioiden aikaisemmin suhteellisen tutkimattomaan teoriaan tuo Nevanlinnan uuden peruskäsitteen, joka oli aivan välttämätön, nimittäin erään mitan, joka toisaalta kuvastaa funktion kasvua, toisaalta sen äärettömyyskohtien tiheyttä äärettömän kaukaisen erikoispisteen ympäristössä. Täten voi Nevanlinna kehittää meromorfifunktioiden yleisen teorian suureen täydellisyyteen, niin että se tämän jälkeen alaosastona sisältää kokonaisten funktioiden teorian. Tämän teoriansa yhteydessä valaisee hän uusilta puolilta niitä syviä kysymyksiä, jotka ovat yhteydessä Picardin lauseen kanssa, avaten täten uusia näköaloja ja herättäen uusia kysymyksiä, joita emme tässä voi ryhtyä selostamaan. Nämä Nevanlinnan tutkimukset on, kuten eräs ulkomainen asiantuntija sanoo, laskettava funktioteorian kauneimpiin saavutuksiin viimeisten vuosikymmenien aikana. Ne ovat ulkomaisessa ammattikirjallisuudessa herättäneet hyvin suurta huomiota, josta yhtenä todistuksena mainittakoon, että Nevanlinna yhdeksi lukukaudeksi kutsuttiin luennoimaan teoriastaan Zürichin Teknilliseen korkeakouluun, joka jo kauan on ollut matemaattisen tutkimuksen keskuksia.

Meidän on analyysin alalta vielä mainittava eräitä tutkijoita, joiden pääasialliset työt lankeavat funktioteorian ulkopuolelle.

J. W. Lindeberg omisti ensimmäiset työnsä kysymyksille, jotka koskevat lineaaristen osittaisten differentiaaliyhtälöiden integroimista; tähän piiriin kuuluu myös eräs kriitillistä laatua oleva kirjoitus, joka käsittelee Hilbertin esittämää Dirichlet'n probleeman ratkaisua. Tämän jälkeen Lindeberg syventyi variatiolaskuun, käsitellen useita teoreettisesti tärkeitä kysymyksiä tältä alalta. Eräässä työssään hän syventää Jacobin, pisteestä säteilevien ekstremaalikäyrien verhokäyrää koskevaa teoriaa ja n.k. konjugoitujen pisteiden merkitystä ääriarvon olemassaololle.

Toisissa julkaisuissa hän oleellisesti yksinkertaistuttaa ja täydentää n.k. isoperimetrisen probleeman teoriaa, osoittaen m.m. erään Weierstrassin tekemän olettamuksen tarpeettomaksi. Nämä tulokset ovat herättäneet ansaittua huomiota ja variatiolaskun oppikirjoissa saaneet niille kuuluvan paikkansa. — Aivan toisellakin, nimittäin todennäköisyyslaskun alalla on Lindebergin nimi tunnettu. Tämän teorian peruskiviä on n.k. Gaussin virhelaki, ja sen tärkeimpiä ongelmia on kysymys niistä edellytyksistä, joilla useammasta pienestä virheestä syntynyt kokonaisvirhe tätä lakia likimäärin noudattaa. Tätä kysymystä, jolla puhtaasti matemaattisen merkityksensä ohella on luonnonfilosoofisestikin suurta mielenkiintoa, on Lindeberg tutkinut uudella, entistä yksinkertaisemmalla ja suoraan asian ytimeen käyvällä tavalla. Edelleen hän on työskennellyt n.k. matemaattisen tilastotieteen alalla ja täällä kohdistanut terävää ja tarpeen vaatimaa kritiikkiä eräisiin peruskäsitteisiin, sellaisiin kuin »vinous», »eksessi» ja »korrelatiokerroin», joille hän on ehdottanut uudet määritelmät, jotka luonnollisemmin ja välittömämmin liittyvät tilastolliseen aineistoon. Käytännössäkin hän on soveltanut matemaattista tilastotiedettä, nimittäin metsäarvioissa esiintyvään n.k. linjataksoitukseen, ja hänen tässä ehdottamaansa uutta menettelyä on sen jälkeen meillä paljon käytetty.

Viime vuosina on myös laskeva matematiikka meillä saanut edustajan E. J. Nyströmissä, joka on tutkinut differentiaaliyhtälöiden laskennollista integrointia ja m.m. edelleen kehittänyt Rungen esittämää menettelyä. Nyström on sitä paitsi julkaissut keinoja eräiden variatiolaskuun kuuluvien probleemojen graafiseksi ja laskennolliseksi ratkaisemiseksi, ja hänen viimeinen työnsä sisältää uuden, sangen huomattavan menettelyn integraaliyhtälöiden laskennollista käsittelyä varten.

Matemaattinen ajatusmaailma käsittää analyysin ohella monta laajaa alaa, joista ennen muita on mainittava geometria, algebra ja lukuteoria. On vielä puhuttava niistä suhteellisen harvalukuisista suomalaisista tutkijoista, joiden tieteellinen toiminta pääasiallisesti on kohdistunut viimemainittuihin aloihin.

Aikajärjestystä noudattaen on silloin ensin mainittava Suomen matemaatikkojen nestor, E. Bonsdorff, jonka tutkimukset pääasiassa käsittelevät algebrallisten muotojen teoriaa ja tämän geometrisiä sovellutuksia. Erityisesti hän on kohdistanut harrastuksensa binääri-muotoihin sekä ternäärisiin kuutiomuotoihin ja niiden sovellutuksiin kolmannen asteen käyriin. Tämän ohella hän on suorittanut puhtaasti geometrisiä tutkimuksia, jotka käsittelevät niitä lauseita, jotka englantilainen matemaatikko Stewart aikanaan ilman todistuksia julkaisi.

E. R. Neovius (1851—1917) opiskeli insinööriksi Zürichin Teknillisessä Korkeakoulussa, mutta harrasti tämän ohella tarmokkaasti puhdasta matematiikkaa, opettajinaan tunnettu geometrikko Fiedler ja kuuluisa matemaatikko H. A. Schwarz. Hänen ensimmäinen matemaattinen työnsä käsitteli kolmannen ja neljännen asteen algebralliset käyrät projektiivisen geometrian kannalta. Tämän jälkeen siirtyi hän minimaalipintojen teoriaan, mikä ala on läheisessä yhteydessä analyyttisten funktioiden teorian kanssa. Ensimmäisessä tähän alaan kuuluvassa työssään Neovius tutkii eräitä jaksollisia minimaalipintoja, jotka sisältävät äärettömän monta suoraa viivaa ja geodeettista tasokäyrää. Hänen seuraavat työnsä tähtäävät kaikki samaan yleiseen probleemaan: määrätä kaikki kolmen annetun suoran kautta kulkevat minimaalipinnat; tätä kysymystä oli jo Riemann käsitellyt ja hänen jälkeensä jättämissään papereissa löytyi eräitä irrallisia sitä koskevia tuloksia. Kolmen vuosikymmenen aikana omisti Neovius tälle laajalle ja vaikealle kysymykselle paljon innokasta työtä, johtuen täten m.m. esiintyviä singulariteetteja koskeviin yksityiskohtaisiin analyyttisiin tutkimuksiin. Perusteellisten, sekä analyysin että geometrian käsittävien tietojensa avulla ja käyttämällä hyväkseen harvinaista avaruushavaintoaan ja suurta kätevyyttään, onnistui hänen täydellisesti ratkaista tämä kysymys Riemannin tarkastamissa tapauksissa. Hän osoitti, että kolmen annetun suoran kautta yleensä voidaan asettaa suuri määrä eri minimaalipintoja, jotka eri tavoilla yhdistävät näiden suorien päät; näistä olivat useimmat aikaisemmin jääneet huomioon ottamatta. Minimaalipinnoistaan on Neovius valmistanut kauniit mallit.

Myöskin monet Neoviuksen oppilaista ovat tutkineet minimaalipintoja. Näistä on ensi sijassa mainittava Hj. Tallqvist, joka on käsitellyt muitakin matemaattisia kysymyksiä, esim. konformikuvausta, ja matemaattisen fysiikan eri aloilla julkaissut lukuisia tutkimuksia ja oppikirjoja.

A. L. Hjelmman on työskennellyt puhtaasti synteettisen geometrian piirissä. Hänen aikaisemmat työnsä käsittelevät eräitten neljännen ja kuudennen asteen algebrallisten tasokäyrien luokittelukysymyksiä, myöhemmissä tutkitaan neljännen ja viidennen asteen avaruuskäyriä.

Nuorempienkin matemaatikkojemme joukossa on mainittava yksi puhtaan geometrian tutkija, E. Kivikoski, joka käyttäen alkeellisia projektiivisen geometrian keinoja on tutkinut niitä merkillisiä, Schläflin ensinnä huomaamia ryhmityksiä, jotka muodostuvat kuutiopinnan suorista viivoista. Viimeisissä töissään hän perusteellisesti on tutkinut n.k. Jordanin käyrälausetta projektiivisessa tasossa.

Varsinaisen algebran tutkijoita on ylipäänsäkin vähän, ja meillä on yksi ainoa tämän alan huomattu edustaja, nimittäin K. Väisälä. Hän on useassa julkaisussa käsitellyt algebrallisia yhtälöitä ja tässä mahdollisuuksia myöten välttänyt ryhmäteorian käyttöä. Erityisesti on mainittava hänen tyhjentävä tutkimuksensa algebrallisesti ratkeavista viidennen asteen yhtälöistä, samoin eräs työ, joka käsittelee yleisten algebrallisesti ratkeavien yhtälöiden juurien reaalisuutta; nämä tutkimukset täydentävät ja parantavat monessa suhteessa aikaisempia tuloksia tällä alalla. Edelleen on Väisälä käsitellyt polynoomien jaollisuutta koskevia kysymyksiä; tässä suhteessa on erityisesti mainittava hänen Hilbertin tärkeään »jaottomuuslauseeseen» liittyvä tutkimuksensa, jossa hän paljastaa oleellisia Hilbertin ja muiden todistuksissa löytämiään puutteellisuuksia ja itse sitovalla ja entistä yksinkertaisemmalla tavalla todistaa mainitun peruslauseen.

Lukuteorian alalla on meillä niinikään mainittavana vain yksi tutkija, nimittäin Nils Pipping, joka erityisesti on kohdistanut huomionsa algebrallisiin lukuihin. Ensimmäisessä työssään hän uudella, huomattavasti yksinkertaisemmalla tavalla johtaa Minkowskin kriteerion näille luvuille, ja eräässä myöhemmässä julkaisussa hän itse esittää uuden alkeellisemman kriteerion, johon hän johtuu yleistämällä Euklideen algoritmin. Sitäpaitsi hän on käsitellyt määrätynlaisia ketjumurtolukuja sekä Goldbachin lausetta, joka koskee parillisen kokonaisluvun esittämistä kahden alkuluvun summana.

Täten on mainittu ne tutkijat, joiden pääasiallinen toiminta lankeaa puhtaan matematiikan piiriin. Mutta matemaattisissa luonnontieteissäkin esiintyy suuri määrä probleemoja, joiden käsittely ensi sijassa vaatii matemaattista ajattelua. Tämä koskee erityisesti mekaniikkaa ja teoreettista tähtitiedettä, ja viimemainitulla alalla onkin meidän vielä lopuksi puhuttava eräästä ensiluokkaisesta saavutuksesta, nimittäin K. F. Sundmanin n.k. »kolmen kappaleen probleemaa» koskevista tutkimuksista. Sundmán on sitovalla tavalla matemaattisesti ratkaissut tämän probleeman, todistamalla että — sitä yksityistapausta lukuunottamatta, jolloin kaikki kolme pintavakiota häviävät — aina voidaan määritellä sellainen apumuuttuja, että aika ja kappalten koordinaatit voidaan kehittää tämän muuttujan nousevien potenssien mukaan eteneviksi potenssisarjoiksi, jotka konvergenssialueellaan esittävät kappalten liikettä kautta kaikkien aikojen. Jos kaksi näistä kolmesta kappaleesta törmäävät yhteen, määrittelevät mainitut sarjat yhteentörmäyksen jälkeen liikkeen, joka on analyyttinen jatko aikaisemmalle. Ranskan Tiedeakatemia palkitsi nämä Sundmanin tutkimukset antamalla hänelle Pontécoulantin palkinnon, tässä tapauksessa kaksinkertaisena, ja niiden merkitys ilmenee paraiten Picardin palkintolautakunnan puolesta Akatemialle laatimasta selostuksesta. Tässä sanotaan Sundmanin laajasta *Acta Mathematica*ssa ilmestyneestä työstä, johon hän oli koonnut tutkimustensa tulokset, m.m. että

»se on kaikille matemaatikoille ja matemaattisille astronoomeille käänteentekevä työ», ja lopussa lausutaan: »Aikaisemmin oli vallalla käsitys, ettei kolmen kappaleen probleemaa voitaisi ratkaista ilman uusia monimutkaisia transcendentteja. Tästä syystä lukija hämmästyy nähdessään miten yksinkertaisella tavalla, nojautumalla vain differentiaaliyhtälöiden teorian klassillisiin tuloksiin, suomalainen tutkija saavuttaa näin vaikeana pidetyn probleeman ratkaisun. Mutta totta on, että vaaditaan harvinaista älyn hienoutta voidakseen, tekisipä mieli sanoa, niin alkeellisin keinoin käsitellä kaikki eteen tulevat kysymykset». Nämä Sundmanin tutkimukset ovat liittäneet Suomenkin nimen yhteen matemaattisten tieteitten suurimpia probleemoja, joka varmaankin vielä vuosituhansia tulee askarruttamaan ajattelevaa ihmishenkeä.

Tämän numeron erikoissisällyksen vuoksi on siitä jätetty pois koko arvosteluosasto. Sentähden ei numerossa myöskään ole voinut saada tilaa t:ri J. Hollon vastaus nimimerkki Z.C:n tammikuun numerossa julkaisemaan Snellmanin koottujen teosten suomennoksen IV:n osan arvosteluun.
