ЛЕКЦИЯ 1

Релятивистский характер магнитного поля. Магнитное поле равномерно движущегося точечного заряда. Уравнения для средних значений магнитного поля. Уравнение для векторного потенциала. Векторный потенциал движущегося точечного заряда и системы точечных зарядов. Магнитное поле системы токов. Закон Био-Савара. Магнитное поле прямолинейного провода с током. Сила Ампера. Магнитный момент. Поле магнитного диполя. Вектор намагниченности.

Релятивистский характер магнитного поля. Магнитное поле равномерно движущегося точечного заряда

В этом семестре мы с вами продолжаем изучение электромагнетизма и у нас на очереди после электростатики (прошлый семестр) — **магнитостатика**. В прошлом семестре мы выяснили, что магнитное поле, в отличие от электрического, имеет релятивистское происхождение (см. Лекцию 16). Так заряженная частица, двигаясь равномерно вдоль провода с током, испытывает действующую со стороны провода силу за счет создаваемого током магнитного поля. Но в системе покоя частицы это магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия. Тем не менее воздействие со стороны провода сохраняется. Только теперь это воздействие проявляется посредством электрического поля. Провод оказывается заряженным (!) в системе покоя частицы. Происходит это, как мы видели (см. конец Лекции 16), за счет эффекта Лоренцева сокращения длин и появления разницы между плотностью положительных и отрицательных зарядов в проводе. Это имеет место в силу того, что эти заряды движутся с разными скоростями.

Иными словами, если бы скорость света c была бесконечной, в природе не существовало бы магнитного поля! Оно обращается в ноль при $c \to \infty$ (речь идет о магнитном поле, создаваемым зарядами, движущимися с конечной скоростью). В этой Лекции нашей задачей будет рассмотрение магнитного поля, создаваемого движущимися зарядами и токами.

Для заряда, движущегося равномерно и прямолинейно с произвольной скоростью $\mathbf{V}$, создаваемое им магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{E}] \tag{1}$$

(смотри формулы (26) и (27) из Лекции 16), где $\mathbf{E}$ — создаваемое зарядом электрическое поле. Если обозначить за θ угол между скоростью заряда

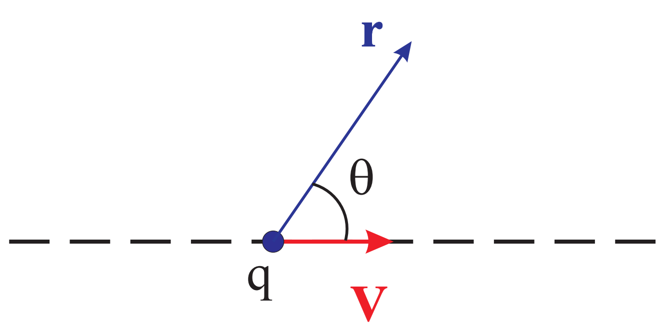

Рис. 1: Движущийся точечный заряд.

$\mathbf{V}$ и радиус вектором $\mathbf{r}$, проведенным от заряда к точке наблюдения, то, как мы покажем в Лекции 12, электрическое поле $\mathbf{E}$ равно

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}\frac{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Если скорость движения заряда много меньше скорости света $V \ll c$, то эта формула переходит в известный закон Кулона, а формула (1) — в закон Био-Савара. В результате в нерелятивистском случае электрическое и магнитное поля, создаваемые движущимся точечным зарядом, равны

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{q}{c}\frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{r}]}{r^3}.} \tag{3}$$

Поскольку заряд движется эти поля не остаются постоянными в каждой фиксированной точке пространства, а движутся вместе с ним.

Уравнения для средних значений магнитного поля. Уравнение для векторного потенциала. Векторный потенциал движущегося точечного заряда и системы точечных зарядов

Нас однако сейчас будет интересовать магнитное поле, создаваемое зарядами, которые совершают некоторое финитное движение в какой-то конечной области пространства. Импульсы заряженных частиц пусть тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, то есть его средние характеристики не меняются со временем. Поэтому представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами. Такое поле будет, очевидно, только функцией координат и не будет зависеть от времени, т. е. будет постоянным. Частным случаем такого рода является магнитное поле, создаваемое системой постоянных токов. Оно, очевидно, изначально не зависит от времени, поэтому $\overline{\mathbf{H}}$ совпадает с $\mathbf{H}$.

Для нахождения среднего магнитного поля усредним по времени уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{4}$$

Усреднение первого из них дает просто

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{5}$$

Усредняя второе уравнение учтем, что среднее значение производной по времени от функции меняющейся в конечных пределах равно нулю (Ландау, Лифшиц, Механика, §10), то есть

$$\overline{\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} = 0. \tag{6}$$

Поэтому второе уравнение запишется в виде

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{7}$$

Эти два уравнения и определяют среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Первое из них удовлетворяется тождественно введением среднего векторного потенциала $\overline{\mathbf{A}}$ (см. Лекцию 20, уравнение (17))

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}. \tag{8}$$

Подставив это в уравнение (7) получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}} - \Delta\overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{9}$$

Как мы знаем, векторный потенциал определен уравнением (8) неоднозначно (см. Лекцию 20, уравнение (18)). К нему можно прибавить градиент произвольной скалярной функции. Выбором этой функции можно добиться, чтобы $\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}} = 0$. В этом случае векторный потенциал постоянного магнитного поля определится из уравнения

$$\Delta\overline{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{10}$$

Это уравнение математически идентично уравнению для скалярного потенциала в электростатике (см. Лекцию 21, уравнение (19))

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{11}$$

Решением последнего является функция (см. Лекцию 21, уравнение (28))

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \tag{12}$$

По аналогии (одинаковые уравнения имеют одинаковые решения) получим из уравнения (10)

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.} \tag{13}$$

Если вместо тока $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ мы имеем просто движущиеся заряды q_a, то интеграл в уравнении (13) заменяется на сумму по отдельным зарядам [1]

$$\int\limits_{V'} \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \Longrightarrow \quad \sum_a \overline{\frac{q_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}}, \tag{14}$$

где $\mathbf{r}_a$ — радиус-векторы движущихся частиц, а $\mathbf{v}_a$ — их скорости и усреднению по времени подвергаются все выражения под знаком суммы (от времени зависят $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{v}_a$). Поэтому в этом случае

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum \overline{\frac{q_a \mathbf{v}_a}{R_a}},} \tag{15}$$

где $\mathbf{R}_a = \mathbf{r} - \mathbf{r}_a$ — радиус-вектор от заряда q_a в точку наблюдения поля.

Магнитное поле системы токов. Закон Био-Савара

Чтобы теперь найти среднее магнитное поле, надо к выражению (13) применить операцию ротор

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\left[\frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]. \tag{16}$$

[1] При этом мы воспользовались формулой

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a \rho_a(\mathbf{r})\mathbf{v}_a = \sum_a q_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a).$$

Операция дифференцирования (ротор) производится по координатам точки наблюдения $\mathbf{r}$, поэтому ее можно ввести под знак интеграла по переменной $\mathbf{r}'$

$$\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} dV' \mathrm{rot}_{\mathbf{r}}\left[\frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]. \tag{17}$$

Используя формулу

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{C}\phi) = [\nabla \times (\phi\mathbf{C})] = [\mathrm{grad}\,\phi \times \mathbf{C}], \tag{18}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор, получим

$$\mathrm{rot}_{\mathbf{r}}\left[\frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \left(\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \times \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') = \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{19}$$

В результате среднее по времени магнитное поле равно

$$\boxed{\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV'.} \tag{20}$$

Это, как известно, закон Био-Савара. Его часто записывают в дифференциальной форме. Магнитное поле, создаваемое плотностью тока $\mathbf{j}$ элемента объема dV в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, равно (смотри формулу (35) из Лекции 16)

$$\boxed{d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{r}]}{r^3}\,dV.} \tag{21}$$

Иногда, если речь идет о магнитном поле, создаваемым элементом про-

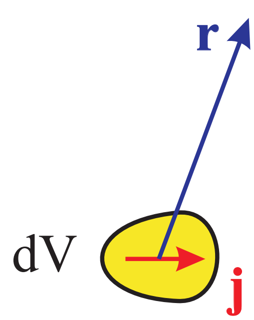

Рис. 2: Элемент объема dV с плотностью тока $\mathbf{j}$.

вода $d\mathbf{l}$, по которому протекает ток I, этот закон записывают в виде (смотри формулу (37) из Лекции 16)

$$\boxed{d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}].} \tag{22}$$

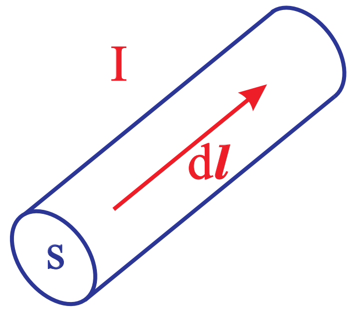

Рис. 3: Элемент трубки с током $d\mathbf{l}$.

Это ясно из соотношения

$$\mathbf{j}dV = \mathbf{j}Sdl = Id\mathbf{l}, \tag{23}$$

где $I = jS$ — полный ток, протекающий по проводу, а S — площадь поперечного сечения провода — Рис 3.

Магнитное поле прямолинейного провода с током

Иногда бывает полезно (при определении магнитного поля, создаваемого текущими токами) использовать уравнения Максвелла в интегральной форме (см. Лекцию 19, формулу(64))

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad \Longrightarrow \quad \oint\limits_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}, \tag{24}$$

где S — поверхность, опирающаяся на контур L. Направление векторов $d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{s}$ соответствует правилу буравчика — Рис. 4.

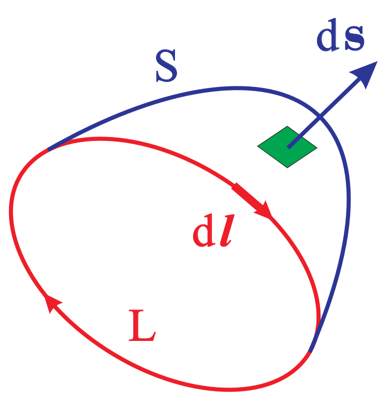

Рис. 4: Замкнутый контур и поверхность, опирающаяся на этот контур.

Применим это соотношение, например, для определения магнитного поля от прямолинейного бесконечного провода с током I. В качестве контура L выберем окружность радиуса ρ с центром на оси провода

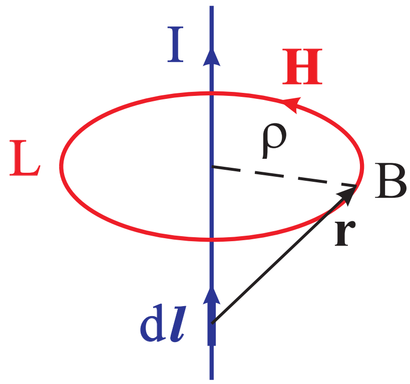

Рис. 5: Магнитное поле прямолинейного провода с током.

плоскость которой перпендикулярна проводу — Рис. 5. Из симметрии задачи очевидно, что магнитное поле по своей величине одинаково во всех точках этой окружности. Далее из анализа дифференциальной формы закона Био-Савара

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^3}\,[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}] \tag{25}$$

следует, что вклад от всех элементов прямолинейного провода в точке B перпендикулярен проводу ($d\mathbf{l}$) и радиус вектору $\mathbf{r}$. Это означает, что магнитное поле направлено по касательной к нашей окружности. Иными словами, силовые линии магнитного поля прямолинейного провода с током являются концентрическими окружностями — Рис. 6.

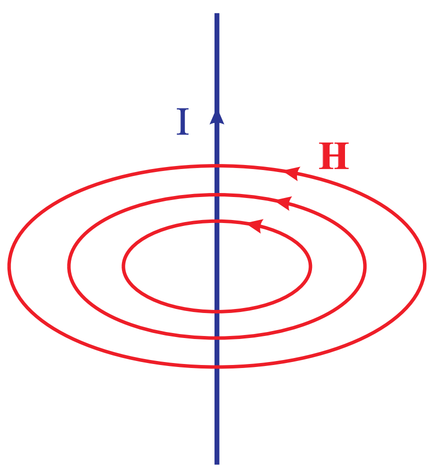

Рис. 6: Силовые линии магнитного поля от прямолинейного провода с током.

Тогда вектора $\mathbf{H}$ и $d\mathbf{l}$ в формуле закона Стокса просто параллельны и интеграл

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H2\pi\rho. \tag{26}$$

С другой стороны, правая часть равенства (24) выражается через полный ток I

$$\frac{4\pi}{c}\int\limits_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}I. \tag{27}$$

В результате

$$H2\pi\rho = \frac{4\pi}{c}I \quad \text{или} \quad H = \frac{2I}{c\rho}. \tag{28}$$

То есть магнитное поле убывает обратно пропорционально расстоянию до провода. Есть еще ряд задач (цилиндр с током, бесконечная плоскость с током и т. д.), которые можно решить применяя теорему Стокса, однако в большинстве ситуаций необходимо выполнить интегрирование по формуле (20).

Сила Ампера

Как известно, на заряженную частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитом поле действует сила

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}].} \tag{29}$$

Так как ток — это движение заряженных частиц, то на элемент с током в магнитном поле также действует сила — сила Ампера

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]dV,} \tag{30}$$

или в случае элемента провода с током I

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{I}{c}[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}].} \tag{31}$$

Более подробно мы останавливались на этих формулах в Лекции 16 в прошлом семестре (смотри формулы (20) и (22)).

Магнитный момент

Подобно тому, как в электростатике мы находили электрическое поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях от этой системы (см. Лекцию 22), рассмотрим аналогичную проблему в магнитостатике. А именно, найдем среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов, на больших расстояниях от этой системы —

Рис. 7. Это также может быть система токов (постоянных) текущих по проводам, расположенных в ограниченной области пространства. В обоих случаях размеры системы должны быть много меньше расстояния до точки, в которой мы ищем поле.

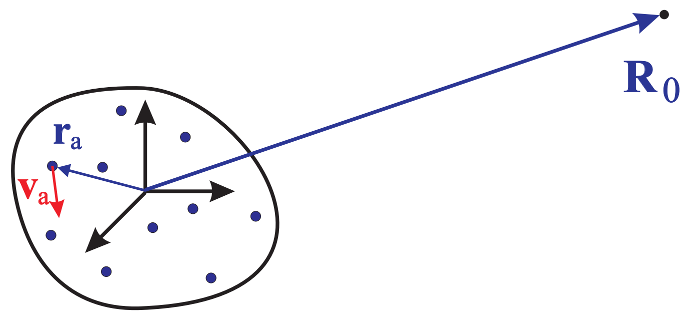

Рис. 7: Система движущихся зарядов в ограниченной области пространства.

Выберем нашу систему координат так, чтобы ее начало лежало где-нибудь внутри этой системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов q_a обозначим через $\mathbf{r}_a$. Пусть $\mathbf{R}_0$ будет радиус-вектор точки, в которой мы ищем магнитное поле. Очевидно, что $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ — есть радиус-вектор от заряда q_a к точке наблюдения. Тогда для векторного потенциала имеем формулу (15)

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum_a \overline{\frac{q_a\mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}}. \tag{32}$$

Разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_a$. При этом ограничимся здесь лишь членами первого порядка по малому параметру $r_a/R_0 \ll 1$. В результате

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0}\sum_a q_a\overline{\mathbf{v}}_a - \frac{1}{c}\sum_a q_a\overline{\mathbf{v}_a\left(\mathbf{r}_a\cdot\nabla\frac{1}{R_0}\right)}. \tag{33}$$

Первое слагаемое можно переписать в виде

$$\sum_a q_a\overline{\mathbf{v}}_a = \overline{\frac{d}{dt}\sum_a q_a\mathbf{r}_a}, \tag{34}$$

то есть в виде среднего значения от производной по времени дипольного момента системы. Поскольку величина дипольного момента меняется в конечных пределах, среднее значение его производной по времени равно нулю. Поэтому для $\overline{\mathbf{A}}$ имеем выражение

$$\overline{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_a q_a\overline{\mathbf{v}_a\left(\mathbf{r}_a\cdot\mathrm{grad}\,\frac{1}{R_0}\right)} = \frac{1}{cR_0^3}\sum_a q_a\overline{\mathbf{v}_a(\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{R}_0)}. \tag{35}$$

Поскольку $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_a$, то имеем тождество

$$\sum_a q_a \mathbf{v}_a(\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{R}_0) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_a q_a\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum_a q_a[\mathbf{v}_a(\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_a(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{R}_0)]. \tag{36}$$

Первый член в этом выражении есть производная по времени от величины, меняющейся в конечных пределах. Поэтому при усреднении по времени это слагаемое обратится в ноль. Следовательно вклад в среднее значение векторного потенциала будет определятся вторым слагаемым

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum_a q_a\overline{[\mathbf{v}_a(\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_a(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{R}_0)]} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum_a q_a\overline{[\mathbf{R}_0\times[\mathbf{v}_a\times\mathbf{r}_a]]}. \tag{37}$$

Введем теперь аксиальный вектор

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a[\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a].} \tag{38}$$

Он называется **магнитным моментом** системы. Пользуясь этим обозначением получим (сравни с формулой для электростатического потенциала (33) в Лекции 22)

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R_0}\times\overline{\boldsymbol{\mu}}\right].} \tag{39}$$

Поле магнитного диполя

Зная среднее значение векторного потенциала, можно теперь найти среднее значение магнитного поля с помощью формулы $\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}$. При этом дифференцирование в этой формуле производится по координатам радиус-вектора $\mathbf{R}_0$

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\frac{[\overline{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla\times\left[\overline{\boldsymbol{\mu}}\times\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right]\right] = \overline{\boldsymbol{\mu}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}. \tag{40}$$

Учитывая, что при $\mathbf{R}_0 \neq 0$

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = 0 \tag{41}$$

(как равна нулю дивергенция электрического поля $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$, создаваемого точечным зарядом, помещенным в начало координат — см. Лекцию 19). Далее, преобразуя второе слагаемое, получим

$$(\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}=\frac{1}{R_0^3}(\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\nabla)\mathbf{R}_0+\mathbf{R}_0\left(\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\nabla\frac{1}{R_0^3}\right)=\frac{\overline{\boldsymbol{\mu}}}{R_0^3}-\frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{R}_0)}{R_0^5}. \tag{42}$$

Таким образом получаем окончательно для магнитного поля на больших расстояниях от системы

$$\boxed{\overline{\mathbf{H}}=\frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{R}_0)-R_0^2\overline{\boldsymbol{\mu}}}{R_0^5},} \tag{43}$$

то есть формулу аналогичную формуле для электрического поля диполя (см. Лекцию 22, формула (35)).

Таким образом наша система токов представляет собой **магнитный диполь**, а формула (43) определяет магнитное поле этого диполя. Следовательно на больших расстояниях от системы токов или движущихся зарядов магнитное поле (как и в случае электрического диполя) убывает обратно пропорционально кубу расстояния

$$H\sim\frac{1}{R_0^3}. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь несколько примеров на вычисление магнитного момента системы (поскольку после этого задача о поле на больших расстояниях решается формулой (43)).

Пример 1

Заряд, равномерно вращающейся по окружности радиуса r — рис. 8.

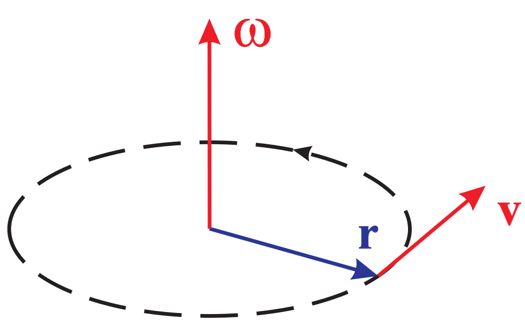

Рис. 8: Заряд равномерно вращающийся по окружности.

Используя формулу (38) и то, что при вращении заряда по окружности его скорость определяется соотношением $\mathbf{v}=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения, получаем

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{q}{2c}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]=\frac{q}{2c}[\mathbf{r}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]]=\frac{q}{2c}r^2\boldsymbol{\omega}=\frac{qr^2}{2c}\boldsymbol{\omega}. \tag{45}$$

Мы видим, что в этом случае магнитный момент — величина постоянная и не меняется со временем. Его направление задается вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому его среднее значение совпадает с ним самим. Задача: рассчитать магнитный момент равномерно заряженного шара радиуса R с зарядом q, вращающегося с угловой частотой ω.

Пример 2

Контур с током.

Рассмотрим теперь проволочную петлю с током I, пусть провод расположен в одной плоскости. Тогда учитывая соответствие

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a[\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] = \frac{1}{2c}\int\limits_V dV[\mathbf{r}\times\mathbf{j}] \tag{46}$$

и то, что $dV\mathbf{j} = Id\mathbf{l}$ для элемента тока, получим

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2c}\oint\limits_L [\mathbf{r}\times d\mathbf{l}]. \tag{47}$$

Но интеграл

$$\frac{1}{2}\oint\limits_L [\mathbf{r}\times d\mathbf{l}] = \mathbf{S}, \tag{48}$$

где $\mathbf{S}$ — вектор, равный по величине площади петли с током и направленный по правилу буравчика перпендикулярно плоскости петли — Рис. 9. Таким образом, для плоской петли произвольной формы, по которой те-

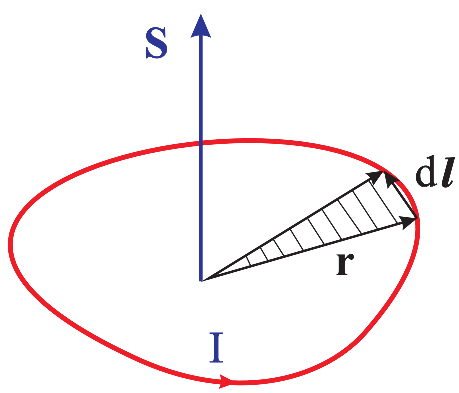

Рис. 9: Петля с током.

чет постоянный ток I, магнитный момент тоже оказывается постоянным и равным по величине

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{c}\mathbf{S}. \tag{49}$$

Вектор намагниченности

Рассмотрим теперь ситуацию, которая нам пригодится в дальнейшем, когда магнитные диполи $\boldsymbol{\mu}$ не являются точечными, а распределены в пространстве непрерывно и характеризуются плотностью магнитного дипольного момента $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Вектор $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ — это есть магнитный дипольный момент единицы объема и называется **вектором намагниченности**. Системой с распределенным магнитным дипольным моментом отличным от нуля, например, может быть ферромагнетик, который намагничен даже в отсутствии внешнего магнитного поля. Вследствие своей намагниченности, он сам является источником магнитного поля. Если же тело не является ферромагнетиком, то отличный от нуля вектор намагниченности возникает в нем, если тело поместить во внешнее магнитное поле.

Очевидно, что тогда вместо формулы (39) для векторного потенциала мы должны будем написать

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} dV' \frac{[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\int\limits_{V'} dV' \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)\right]. \tag{50}$$

Поскольку дифференцируемая по $\mathbf{r}$ под знаком интеграла функция зависит только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, мы можем заменить $\nabla_{\mathbf{r}} \to -\nabla_{\mathbf{r}'}$. И после этого воспользоваться формулой

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{M}\,\varphi) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} - [\mathbf{M} \times \mathrm{grad}\,\varphi]\,. \tag{51}$$

Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} dV' \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)\right] =$$

$$= \int\limits_{V'} dV' \frac{\mathrm{rot}_{\mathbf{r}'}\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int\limits_{V'} dV'\,\mathrm{rot}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right]. \tag{52}$$

С помощью замены $dV\,\nabla_{\mathbf{r}'} \to d\mathbf{s}'$ (теорема Гаусса-Остроградского) второе слагаемое в правой части преобразуется к интегралу по замкнутой поверхности, ограничивающей объем интегрирования

$$\int\limits_{V'} dV'\,\mathrm{rot}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] = \oint\limits_{S'} \frac{[d\mathbf{s}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{53}$$

Если эта поверхность проходит достаточно далеко, там, где вектор намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}') = 0$, то вклад от второго слагаемого обращается в ноль. В результате мы приходим к формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} dV' \, \frac{\mathrm{rot}_{\mathbf{r}'}\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{54}$$

Сравнивая это с формулой (13), мы заключаем, что с вектором намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ связана плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\mathbf{j} = c \,\mathrm{rot}\, \mathbf{M}.} \tag{55}$$

Эта полезная формула нам очень пригодится в дальнейшем.

Задачи

1. Покажите, что для однородного магнитного поля $\mathbf{H}$ векторный потенциал $\mathbf{A}$ можно выбрать в виде (симметричная калибровка)

   $$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}].$$

   Чему равна $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$?

2. Покажите, что векторный потенциал для однородного магнитного поля можно также выбрать в виде (калибровка Ландау):

   $$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0,$$

   где ось z выбрана в направлении магнитного поля. Эта калибровка используется для удобства при решении уравнения Шрёдингера электрона в магнитном поле, поскольку позволяет разделить переменные в декартовой системе координат и получить так называемые уровни Ландау

3. Найти векторный потенциал от прямолинейного провода с током.

4. Найти векторный потенциал $\mathbf{A}$ магнитного поля бесконечного цилиндрического соленоида с током (внутри и вне соленоида). Радиус соленоида R, магнитное поле внутри соленоида $\mathbf{H}$.

5. Докажите, что $\mathrm{div}\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = 0$, где $\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ определяется формулой (13).

6. Как считать площадь плоской петли с током, если петля имеет самопересечения — рис. 10?

7. Что такое магнитный квадруполь? Приведите пример петли с током не имеющей магнитного момента.

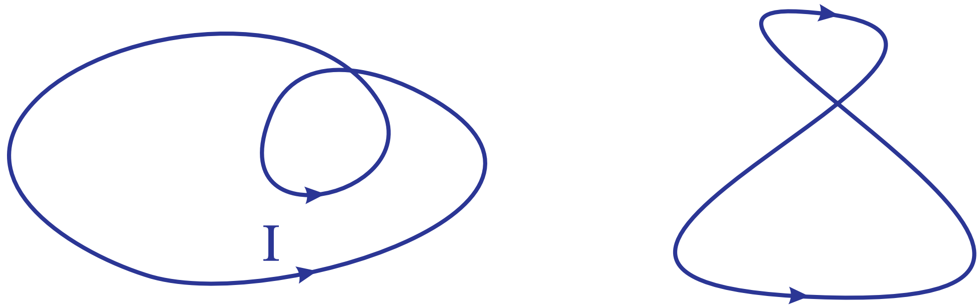

Рис. 10: Петли с самопересечением.

8. Рассчитать магнитный момент равномерно заряженного шара радиуса R с зарядом q, вращающегося с угловой частотой ω вокруг оси, проходящей через центр шара. Найдите отношение магнитного момента к механическому если масса шара равна m.

Литература

1. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Электричество.
2. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика.
3. С. В. Вонсовский, Магнетизм, Наука, 1971.
4. Г. С. Ландсберг, Оптика, Наука, 1976.
5. Берклеевский курс физики, том II, Э. Парселл, Электричество и магнетизм.
6. Берклеевский курс физики, том III, Ф. Крауфорд, Волны.
7. Фейнмановские лекции по физике, 5 том, Электричество и магнетизм.
8. Фейнмановские лекции по физике, 6 том, Электродинамика.
9. Фейнмановские лекции по физике, 7 том, Физика сплошных сред.
10. Фейнмановские лекции по физике, Задачи и упражнения.
11. И. Е. Иродов, Электромагнетизм, основные законы.
12. И. Е. Иродов, Волновые процессы, основные законы.
13. И. Е. Иродов. Задачи по общей физике, 3 издание 1998 г.

Дополнительная литература

1. В. В. Шмидт, Введение в физику сверхпроводников, Наука, 1972.
2. И. Н. Топтыгин, Математическое введение в курс общей физики, С.-Петербург, 2000. ftp://ftp.unilib.neva.ru/dl/010.pdf
3. Н. И. Карякин, К. Н. Быстров, П. С. Киреев, Краткий справочник по физике, Высшая школа, 1969.
4. Raymond A. Serway and John W. Jewett, Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, http://ifolder.ru/16484625, http://ifolder.ru/16515278
5. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Природа магнетизма, Библиотечка Квант, вып. 16, Наука, 1982. http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-kvant/magnetizm.djvu
6. А. Л. Эфрос, Физика и геометрия беспорядка, Библиотечка Квант, выпуск 19, Наука, 1982 г. http://www.math.ru/lib/files/pdf/kvant_19.pdf
7. http://lib.dyndns.tv — Библиотека “Колхоза” — 50000 книг. См. также http://bib.tiera.ru/
8. http://bookfi.org — BookFinder — 1,232,128 книг —Самая большая электронная библиотека рунета. Поиск книг и журналов.
9. http://www.poiskknig.ru — искалка + качалка.
10. http://sci-lib.com — Большая Научная Библиотека БНБ DJVU книг!!! — 2000 книг. Для того чтобы скачать книгу на сайте sci-lib.com, при получении прямой ссылки необходимо в ней `books` поменять на `books_1`.
11. http://kvant.mccme.ru — все выпуски журнала Квант с 1970-2008 г.
12. http://www.math.ru — серия “Библиотечка Квант” (84 книги).
13. http://www.koob.ru — 4000 книг, в том числе и по физике.
14. http://www.infanata.com — “Лучшие книги с Интернета”
15. http://ilib.mccme.ru — Интернет библиотека по математике.