ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

АНАЛОГ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕНОСА В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Я. П. Бланк

Харьков

1. Группа переносов эвклидова пространства имеет своим естественным аналогом в эллиптическом пространстве группы клиффордовых сдвигов. В силу этого, аналогом поверхностей переноса эвклидова пространства служат поверхности сдвига эллиптического пространства.

В гиперболическом пространстве группа движений не имеет подгруппы вещественных сдвигов. Поэтому при построении гиперболического аналога поверхностей переноса следует исходить из другого определения этих поверхностей.

Поверхности переноса эвклидова пространства это поверхности несущие цилиндрическую сеть, то есть сопряженную сеть, составленную из линий касания описанных около поверхности цилиндров. Им соответствуют в гиперболическом пространстве поверхности, несущие сопряженную сеть, у которой вдоль каждой линии, принадлежащей любому из двух семейств сети, касательные к линиям второго семейства — параллели Лобачевского.

Таким образом, аналогом поверхности переноса служит в гиперболическом пространстве поверхность с конической сетью, у которой вершины конусов сети расположены на абсолюте.

2. Пусть x_i — вейерштрассовы координаты точки гиперболического пространства
$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1. \tag{1}$$

Уравнение абсолюта
$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0. \tag{2}$$

Поверхность с конической сетью определяется в каноническом виде уравнениями
$$\lambda x_i=X_i(x)+Y_i(y)_{i=0,\,1,\,2,\,3}. \tag{3}$$

Координатными линиями поверхности служат при этом линии конической сети.

Вершины конусов, касающихся поверхности вдоль линий сети, расположены на линиях
$$x_i=\frac{dX_i}{dx}, \quad x_i=\frac{dY_i}{dy}. \tag{4}$$

Эти линии, по определению, должны принадлежать абсолюту, следовательно

$$dX_0^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 = 0,$$
$$dY_0^2 - dY_1^2 - dY_2^2 - dY_3^2 = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем (3) по x и по y, воспользовавшись (5), получим

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} x_0 + \lambda\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} x_1 + \lambda\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} x_2 + \lambda\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} x_3 + \lambda\frac{\partial x_3}{\partial x}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} x_0 + \lambda\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} x_1 + \lambda\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} x_2 + \lambda\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} x_3 + \lambda\frac{\partial x_3}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{6}$$

Введем коэффициенты первой дифференциальной формы поверхности

$$E = R^2\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2\right],$$
$$F = R^2\left[\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial x_2}{\partial x}\frac{\partial x_2}{\partial y} + \frac{\partial x_3}{\partial x}\frac{\partial x_3}{\partial y} - \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial y}\right], \tag{7}$$
$$G = R^2\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2\right].$$

Из уравнений (6) следует

$$R\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lambda\sqrt{E},$$
$$R\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda\sqrt{G} \tag{8}$$

или

$$\sqrt{E}\,dx + \sqrt{G}\,dy = R\,d\ln\lambda. \tag{9}$$

Если обозначить ds_1, ds_2, дифференциалы дуг координатных линий, то

$$ds_1 + ds_2 = R\,d\ln\lambda. \tag{10}$$

Следовательно, в криволинейном четырехугольнике $ABCD$, образованном координатными линиями, сумма дуг прилежащих сторон AB и BC равна сумме дуг сторон AD и DC.

Иначе, алгебраическая сумма дуг, отсчитываемая вдоль кривых координатной сети между двумя точками поверхности, не зависит от пути.

Это свойство характеризует сети равных путей.

Таким образом, в пространстве Лобачевского, цилиндрическая сеть (понимая под цилиндром линейчатую поверхность, у которой прямолинейные образующие — параллели Лобачевского) есть сеть равных путей, тогда как в эвклидовом пространстве она представляет собою чебышевскую сеть.

Но в то время как сопряженность чебышевской сети есть условие и необходимое и достаточное для сети переноса эвклидова пространства, в гиперболическом пространстве сопряженность сети равных путей необходима, но недостаточна для того, чтобы сеть была цилиндрической. Действительно, из (3) следует

$$\frac{\partial^2(\lambda x_i)}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

или

$$\lambda \frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial y} + \lambda_x \frac{\partial x_i}{\partial y} + \lambda_y \frac{\partial x_i}{\partial x} + \lambda_{xy} x_i = 0. \tag{11}$$

Воспользуемся деривационными формулами

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial y} = \Gamma^1_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \Gamma^2_{12} \frac{\partial x_i}{\partial y} + \frac{F}{R^2} x_i + \frac{M}{R} \xi. \tag{12}$$

Для символов Кристоффеля имеем по (8)

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{12} &= \frac{R^2 \lambda_y}{\lambda\left(\frac{R^2 \lambda_x \lambda_y}{\lambda^2} + F\right)} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)_y, \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{R^2 \lambda_x}{\lambda\left(\frac{R^2 \lambda_x \lambda_y}{\lambda^2} + F\right)} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)_x. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как координатная сеть сопряженная, $M = 0$.

Подставив в уравнения (11) значения $\frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial y}$ из (12), приходим к уравнению

$$(R^2 \lambda_{xy} + \lambda F) \left[\frac{x_i}{R^2} + \frac{\lambda \lambda_y}{R^2 \lambda_x \lambda_y + F\lambda^2} \frac{\partial x_i}{\partial x} + \frac{\lambda \lambda_x}{R^2 \lambda_x \lambda_y + F\lambda^2} \frac{\partial x_i}{\partial y}\right] = 0.$$

Но точки $x_i, \frac{\partial x_i}{\partial x}, \frac{\partial x_i}{\partial y}$ линейно независимы, следовательно

$$R^2 \lambda_{xy} + \lambda F = 0. \tag{14}$$

Условия (10), (14) и $M = 0$ необходимы и достаточны, чтобы координатная сеть на поверхности в гиперболическом пространстве была цилиндрической.

Действительно, из (10) и (14) следует

$$\Gamma^1_{12} = -\frac{\lambda_y}{\lambda}, \quad \Gamma^2_{12} = -\frac{\lambda_x}{\lambda}. \tag{15}$$

Подставив эти значения символов Кристоффеля в деривационные формулы (12) и воспользовавшись условиями (14) и $M = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial y} = -\frac{\lambda_x}{\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial y} - \frac{\lambda_y}{\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial x} - \frac{\lambda_{xy}}{\lambda} x_i,$$

или

$$\frac{\partial^2 (\lambda x_i)}{\partial x \partial y} = 0,$$

следовательно,

$$\lambda x_i = X_i(x) + Y_i(y),$$

то есть координатная сеть — коническая. Остается доказать, что вершины конусов принадлежат абсолюту. Продифференцируем полученные выражения для λx_i по x, возведем в квадрат и просуммируем; в силу условия (10) получим

$$X_0'^2 - X_1'^2 - X_2'^2 - X_3'^2 = 0.$$

и аналогично

$$Y_0'^2 - Y_1'^2 - Y_2'^2 - Y_3'^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Условию (14) можно придать инвариантный вид.

Действительно, пусть Θ — угол между линиями сети

$$\cos\Theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

или по (14) и (8)

$$\cos\Theta = -\frac{\lambda\lambda_{xy}}{\lambda_x\lambda_y}.$$

Вычислим дифференциальные параметры Бельтрами для функции λ относительно квадратичной формы τ, нулевыми линиями которой служат линии цилиндрической сети.

Если эта сеть принята за координатную

$$\tau = 2\rho\, dx\, dy, \tag{16}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_x\lambda_y}{\rho},$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_{xy}}{\rho},$$

следовательно,

$$\cos\Theta = -\frac{\lambda\Delta\lambda}{\nabla\lambda}. \tag{17}$$

Это уравнение и выражает условие (14) в инвариантной форме.

Теорема. Чтобы сопряженная сеть на поверхности гиперболического пространства была цилиндрической, необходимо и достаточно чтобы существовала функция λ удовлетворяющая условиям

$$R\, d\ln\lambda = ds_1 + ds_2, \tag{18}$$

$$\lambda\Delta\lambda + \cos\Theta\,\nabla\lambda = 0, \tag{19}$$

где Θ — сетевой угол, ds_1, ds_2 — дифференциалы дуг линий сети а параметры Бельтрами составлены относительно квадратичной формы τ нулевыми линиями которой служат линии сети.

3. Отнесем поверхность к асимптотическим линиям. В асимптотических координатах сопряженная сеть определяется дифференциальным уравнением

$$\tau = du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0. \tag{20}$$

Для дифференциалов дуг кривых сети имеем соответственно

$$ds_1 = P\,dv,\quad ds_2 = Q\,dv, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{Ee^{2\sigma} + 2Fe^{\sigma} + G}\,, \\ Q &= \sqrt{Ee^{2\sigma} - 2Fe^{\sigma} + G}\,, \end{aligned} \tag{22}$$

а E, F, G — коэффициенты первой дифференциальной формы поверхности, отнесенной к асимптотическим параметрам.

Из уравнения (18) следует

$$R\left(\frac{\lambda_u}{\gamma}e^{\sigma}+\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)=P,$$
$$R\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}-\frac{\lambda_u}{\lambda}e^{\sigma}\right)=Q. \tag{23}$$

Отсюда

$$2R\frac{\lambda_v}{\lambda}=P+Q,$$
$$2R\frac{\lambda_u}{\lambda}=e^{-\sigma}(P-Q). \tag{24}$$

Для дифференциальных параметров имеем по (20) следующие выражения:

$$\nabla\lambda=\lambda_u^2-e^{-2\sigma}\lambda_v^2$$
$$\triangle\lambda=e^{-\sigma}[(e^{\sigma}\lambda_u)_u-(e^{-\sigma}\lambda_v)_v], \tag{25}$$

а сетевой угол определяется уравнением

$$\cos\Theta=\frac{G-Ee^{2\sigma}}{PQ}. \tag{26}$$

Следовательно, уравнение (19) принимает вид

$$(\lambda_u^2-e^{2\sigma}\lambda_v^2)(G-Ee^{2\sigma})+\lambda e^{-\sigma}[(e^{\sigma}\lambda_u)_u-(e^{-\sigma}\lambda_v)_v]PQ=0. \tag{27}$$

Подставив сюда значения λ_u, λ_v из (24) приходим к условию

$$\frac{2}{R}(Ee^{2\sigma}-G)=\frac{2}{R}PQ-e^{\sigma}(P-Q)_u+(P+Q)_v-(P+Q)\sigma_v. \tag{28}$$

Из (24) следует

$$(P+Q)_u=[e^{-\sigma}(P-Q)]_v$$

или

$$e^{\sigma}(P+Q)_u-(P-Q)_v+(P-Q)\sigma_v=0. \tag{29}$$

Функция σ, определяющая цилиндрическую сеть на данной поверхности гиперболического пространства, отнесенной к асимптотическим координатам, должна удовлетворять системе (28), (29) из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Обратно, если найдена функция σ, удовлетворяющая уравнениям (28), (29), то на поверхности существует цилиндрическая сеть, определяемая уравнением

$$du^2-e^{2\sigma}dv^2=0.$$

Действительно, уравнение (29) есть условие интегрируемости системы (24), а система (24), (28) для сети $du^2-e^{2\sigma}dv^2$ эквивалентна системе (25), для которой утверждение доказано.

Разрешим систему (28), (29) относительно σ_u, σ_v. Сложив и вычтя уравнения (28), (29) приходим к уравнениям

$$\frac{1}{R}(Ee^{2\sigma}-G)=\frac{1}{R}PQ+e^{\sigma}Q_u+Q_v-Q\sigma_v$$
$$\frac{1}{R}(Ee^{2\sigma}-G)=\frac{1}{R}PQ-e^{\sigma}P_u+P_v-P\sigma_v. \tag{30}$$

Подставим сюда значения P_u, P_v, Q_u, Q_v

$$
\begin{aligned}
P_u &= \frac{1}{2P}\,[E_u\,e^{2\sigma} + 2F_u\,e^{\sigma} + G_u + 2(Ee^{2\sigma} + Fe^{\sigma})\,\sigma_u],\\
P_v &= \frac{1}{2P}\,[E_v\,e^{2\sigma} + 2F_v\,e^{\sigma} + G_v + 2(Ee^{2\sigma} + Fe^{\sigma})\,\sigma_v],\\
Q_u &= \frac{1}{2Q}\,[E_u\,e^{2\sigma} - 2F_u\,e^{\sigma} + G_u + 2(Ee^{2\sigma} - Fe^{\sigma})\,\sigma_u].\\
Q_v &= \frac{1}{2Q}\,[E_v\,e^{2\sigma} - 2F_v\,e^{\sigma} + G_v + 2(Ee^{2\sigma} - Fe^{\sigma})\,\sigma_v].
\end{aligned} \tag{31}
$$

Уравнения (30) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R}(Ee^{2\sigma} - G)P - \frac{1}{R}(Ee^{2\sigma} + 2Fe^{\sigma} + G)Q = \frac{1}{2}(E_v e^{2\sigma} + 2F_v e^{\sigma} + G) -\\
&\qquad - \frac{1}{2}e^{\sigma}(E_u e^{2\sigma} + 2F_u e^{\sigma} + G) - e^{\sigma}(Ee^{2\sigma} + Fe^{\sigma})\sigma_u - (Fe^{\sigma} + G)\,\sigma_v,\\
&\frac{1}{R}(Ee^{2\sigma} - G)Q - \frac{1}{R}(Ee^{2\sigma} - 2Fe^{\sigma} + G)P = \frac{1}{2}(E_v e^{2\sigma} - 2F_v e^{\sigma} + G) +\\
&\qquad + \frac{1}{2}e^{\sigma}(E_u\,e^{2\sigma} - 2F_u e^{\sigma} + G) + e^{\sigma}(Ee^{2\sigma} - Fe^{\sigma})\sigma_u + (Fe^{\sigma} - G)\,\sigma_v.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Сложив и вычтя последние два уравнения, представим их так

$$
\begin{aligned}
Fe^{2\sigma}\sigma_u + G\sigma_v &= \frac{1}{R}(G - Fe^{\sigma})P + \frac{1}{R}(Fe^{\sigma} + G)Q + \frac{1}{2}(E_v\,e^{2\sigma} + G_v) - F_u e^{2\sigma},\\
Ee^{2\sigma}\sigma_u + F\sigma_v &= \frac{1}{R}(F - Ee^{\sigma})P + \frac{1}{R}(F + Ee^{\sigma})Q - \frac{1}{2}(E_u e^{2\sigma} + G_u) + F_v.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Разрешив систему (33) относительно σ_u, σ_v, приходим к следующей системе из двух уравнений в частных производных первого порядка относительно функции σ

$$
\begin{aligned}
\sigma_v &= \frac{1}{R}(P + Q) - \Gamma^2_{11}\,e^{2\sigma} + \Gamma^2_{22}\\
\sigma_u &= \frac{1}{R}e^{-\sigma}(Q - P) - \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\,e^{-2\sigma}.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Система (34) эквивалентна системе (28), (29), следовательно, совместность системы (34) необходима и достаточна для существования на поверхности цилиндрической сети и каждое решение $e^{2\sigma}$ определяет такую сеть.

4. Этот же прием применим и к поверхностям переноса эвклидова пространства.

Действительно, пусть

$$\bar{r} = \bar{X}(x) + \bar{Y}(y)$$

поверхность переноса. Так как

$$E = \bar{X}'^2, \quad G = \bar{Y}'^2,$$

то
$$(\sqrt{E})_y = (\sqrt{G})_x = 0.$$
Поэтому
$$\sqrt{E} = \lambda_x, \quad \sqrt{G} = \lambda_y, \quad \lambda_{xy} = 0. \tag{35}$$
Условия (35) можно записать в инвариантном виде следующим образом:
$$ds_1 + ds_2 = d\lambda,$$
$$\triangle\lambda = 0,$$

Теорема. Чтобы сопряженная сеть на поверхности эвклидова пространства была сетью переноса необходимо и достаточно, чтобы существовала функция λ, удовлетворяющая условиям
$$d\lambda = ds_1 + ds_2, \tag{36}$$
$$\triangle\lambda = 0,$$
где ds_1, ds_2 — дифференциалы дуг линий сети, а параметр Бельтрами составлен относительно квадратичной формы τ, нулевыми линиями которой служат линии сети.

Действительно, отнесем поверхность к сети переноса. Из уравнений (36) следуют уравнения (35). Из (35) следует
$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0,$$
следовательно, так как $M = 0$,
$$\bar{r}_{xy} = 0,$$
или
$$\bar{r} = \bar{X}(x) + \bar{Y}(y).$$
В асимптотических координатах сопряженная сеть определяется дифференциальным уравнением
$$du^2 - e^{2\sigma} dv^2 = 0$$
Условие (36_1) приводит к соотношениям
$$2e^{\sigma}\lambda_u = P - Q, \tag{37}$$
$$2\lambda_v = P + Q,$$
где
$$P = \sqrt{Ee^{2\sigma} + 2Fe^{\sigma} + G}, \quad Q = \sqrt{Ee^{2\sigma} - 2Fe^{\sigma} + G}.$$
Условие (36_2) запишется так
$$(e^{\sigma}\lambda_u)_u - (e^{-\sigma}\lambda_v)_v = 0,$$
или с помощью (37)
$$e^{\sigma}(P - Q)_u - (P + Q)_v + (P + Q)\sigma_v = 0. \tag{38}$$
Условием интегрируемости системы (37) служит
$$e^{\sigma}(P + Q)_u - (P - Q)_v + (P - Q)\sigma_v = 0. \tag{39}$$
Уравнения (38), (39) эквивалентны уравнениям
$$\begin{gathered} e^{\sigma}P_u - P_v + P\sigma_v = 0, \\ e^{\sigma}Q_u + Q_v - Q\sigma_v = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

Вычитая и складывая уравнения (40), мы их можем заменить уравнениями

$$2Fe^{2\sigma}\sigma_u + 2G\sigma_v = G_v + (E_v - 2F_u)\, e^{2\sigma}$$
$$2Ee^{2\sigma}\sigma_u + 2F\sigma_v = 2F_v - G_u - E_u e^{2\sigma}. \tag{41}$$

Разрешив (41) относительно σ_u и σ_v, приходим к уравнению

$$\sigma_u = -\Gamma_{11}^1 + e^{-2\sigma}\Gamma_{22}^1,$$
$$\sigma_v = \Gamma_{22}^2 - e^{2\sigma}\Gamma_{11}^2. \tag{42}$$

Совместность этих последних уравнений необходима и достаточна для того, чтобы сеть

$$du^2 - e^{2\sigma}\,dv^2 = 0$$

поверхности, отнесенной к асимптотическим координатам, была сетью переноса, а каждое решение $e^{2\sigma}$ этой системы определяет такую сеть переноса на данной поверхности.

Уравнения (42) получаются из уравнений (34) для цилиндрической сети поверхности гиперболического пространства переходом к пределу $\lim R = \infty$.

5. Возвращаясь к цилиндрической сети поверхности в гиперболическом пространстве, напишем условие совместности системы (34).

Приравняв оба значения для σ_{uv}, полученные из (34) и положив $R = 1$, приходим к уравнению

$$aP - bQ + cPQ + d = 0, \tag{43}$$

где

$$a = 2E\Gamma_{11}^2 e^{5\sigma} - 6F\Gamma_{11}^2 e^{4\sigma} + (E_v + 4G\Gamma_{11}^2)\, e^{3\sigma} - (G_u + 4E\Gamma_{22}^1)e^{2\sigma} + 6F\Gamma_{22}^1 e^{\sigma} - 2G\Gamma_{22}^{'2},$$

$$b = 2E\Gamma_{11}^2 e^{5\sigma} + 6F\Gamma_{11}^2 e^{4\sigma} + (E_v + 4G\Gamma_{11}^2)e^{3\sigma} + (G_u + 4E\Gamma_{22}^1)e^{2\sigma} + 6F\Gamma_{22}^1 e^{\sigma} + 2G\Gamma_{22}^1,$$

$$c = [\,(\Gamma_{11}^2)_u - 2\Gamma_{11}^1\cdot\Gamma_{11}^2]\, e^{4\sigma} + [4\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + 4F - (\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{22}^2)_u]e^{2\sigma} +$$
$$+ [(\Gamma_{22}^1)_v - 2\Gamma_{22}^2\Gamma_{22}^1],$$

$$d = 4F(Ee^{4\sigma} - Ge^{2\sigma}). \tag{44}$$

Из этого уравнения следует, что если поверхность имеет более трех цилиндрических сетей, то число сетей бесконечно.

Действительно, уравнение (43) инвариантно относительно замены e^{σ} на $-e^{\sigma}$. Освободив его от радикалов, получим уравнение 12-ой степени относительно $e^{2\sigma}$.

Допустим, что на поверхности имеются четыре цилиндрических сети. Уравнение (43) имеет четыре различных решения. Столько же различных решений должны иметь уравнения

$$aP + bQ + cPQ - d = 0,$$
$$aP + bQ - cPQ + d = 0, \tag{45}$$
$$aP - bQ - cPQ - d = 0.$$

Если все 16 решений различны, то уравнение 12-ой степени превращается в тождество, а вместе с ним и уравнение (43). Предположим теперь, что одно из уравнений системы (45), например первое, имеет общие корни с уравнением (43). Так как система (34) должна удовлетворяться этими решениями и при замене P на $-P$, то для этих решений $P=0$. Заметим, что если $\pm e^{\sigma}$ обращает в нуль P, то $\mp e^{\sigma}$ обращает в нуль Q. Так как для общего решения длина дуги равна нулю, то это решение должно удовлетворять всем уравнениям системы (44), то есть наряду с $P=0$ имеем $bQ=0$, $d=0$. Из $d=0$ следует либо $F=0$, либо $Ee^{2\sigma}-G=0$. Если $F=0$, то $P\equiv Q=\sqrt{Ee^{2\sigma}+G}$ и система (43), (45) имеет только одно общее решение $Ee^{2\sigma}+G=0$ и уравнение 12-ой степени имеет 13 различных корней, то есть обращается в тождество. Если же $Ee^{2\sigma}-G=0$, то, так как

$$Ee^{2\sigma}+2Fe^{\sigma}+G=0, \qquad G+Fe^{\sigma}=0, \qquad F+Ee^{\sigma}=0,$$

то есть $EG-F^2=0$, что невозможно. Теорема доказана.

Пример поверхности, несущей две цилиндрические сети, представляет собою поверхность второго порядка, у которой пара полярно сопряженных прямых принадлежит одной серии прямолинейных образующих абсолюта. Тогда существует и вторая пара полярно сопряженных относительно этой же поверхности второго порядка образующих абсолюта, принадлежащая второй серии; каждая пара образующих порождает цилиндрическую сеть. Если существует и третья пара полярно сопряженных относительно этой поверхности образующих абсолюта, то существует и четвертая; следовательно, поверхность несет ∞^1 цилиндрических сетей.

Если полярно сопряженные относительно поверхности второго порядка прямолинейные образующие абсолюта принадлежат разным сериям, то они порождают одну цилиндрическую сеть и поверхность касается абсолюта в точке пересечения этих образующих. Если имеется и вторая такая пара образующих, поверхность имеет и вторую цилиндрическую сеть. Наконец, если существует такая третья пара образующих, поверхность второго порядка касается абсолюта вдоль кривой и несет ∞^1 цилиндрических сетей.

Определим поверхности, несущие бесконечное множество цилиндрических сетей.

Уравнение (43) должно превратиться в тождество относительно e^{σ}.

Перепишем условие (43) следующим образом:

$$a^2P^2+b^2Q^2-c^2P^2Q^2-d^2=2PQ(ab+cd).$$

Так как левая часть этого тождества представляет собою многочлен относительно e^{σ}, то либо PQ точный квадрат, либо $ab+cd\equiv0$.

Рассмотрим случай $ab+cd\equiv0$. Приравняв нулю старшие члены относительно e^{σ}, находим $E\Gamma_{11}^2=0$, $F\Gamma_{11}^2=0$, следовательно, $\Gamma_{11}^2=0$.

Приравняв нулю младшие члены находим аналогично $\Gamma_{22}^1=0$.

Но эти условия определяют поверхности второго порядка. Так как вопрос о цилиндрических сетях на поверхностях второго порядка рассмотрен выше, то можно считать, что $ab+cd\neq0$.

Чтобы PQ было точным квадратом, необходимо либо $F=0$, либо $E=G=0$. Но из $E=G=0$ следует $\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^1=0$, то есть снова приходим к поверхностям второго порядка.

Остается рассмотреть случай $F=0$. Уравнение (43) принимает вид

$$a-b+cP=0.$$

Отсюда следует

$$a-b\equiv0, \ c\equiv0,$$

и мы приходим к следующим условиям

$$F=0, \quad \Gamma_{22}^1=0, \quad G_u=0, \quad (\Gamma_{11}^1)_v+(\Gamma_{22}^2)_u=0, \quad (\Gamma_{11}^2)_u-2\Gamma_{11}^2\Gamma_{11}^1=0.$$

Эти последние эквиваленты трем условиям

$$F=0, \quad G_u=0, \quad (\ln E)_{uv}=0.$$

Первое из них выражает ортогональность асимптотических линий, следовательно поверхность минимальная. Так как из $F=0$, $G_u=0$ следует $\Gamma^1_{22}=0$, то поверхность линейчатая.

Так как $G_u=0$, $(\ln E)_{uv}=0$ можно привести G к единице, а E к функции одного аргумента v.

$$G=1, \quad E=V^2.$$

Из уравнений Кодацци следует

$$M=\frac{C}{V},$$

где C — постоянная.
Из уравнения Гаусса

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K+1$$

следует, что функция V удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{V''}{V}-\frac{C^2}{V^4}-1=0.$$

Итак, у найденной поверхности коэффициенты обеих квадратичных форм определяются следующими уравнениями

$$E=V^2, \quad F=0, \quad G=1,$$

$$L=0, \quad M=\frac{C}{V^2}, \quad N=0, \tag{46}$$

где

$$\frac{V''}{V}-\frac{C^2}{V^4}+1=0. \tag{47}$$

Так как эти коэффициенты удовлетворяют уравнениям Кодацци и Гаусса, то поверхность с такими коэффициентами существует, и так как условия интегрируемости системы (34) выполняются тождественно, то система вполне интегрируема и поверхность действительно несет ∞^1 цилиндрических сетей.

Таким образом мы пришли к следующему результату.

Кроме рассмотренных выше поверхностей второго порядка, ∞^1 цилиндрических сетей несет лишь минимальная линейчатая поверхность, определяемая уравнениями (46), (47).