ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

КОНИЧЕСКИЕ СЕТИ

Я. П. Бланк

(Харьков)

Конической сетью поверхности называется сопряженная сеть, образованная линиями касания описанных около поверхности конусов.

Поверхности, несущие на себе коническую сеть, впервые рассматривал К. М. Петерсон [1]. Поверхности Петерсона допускают следующее каноническое представление:

$$\rho x_i = u_i(u) + v_i(v), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{*}$$

если коническую сеть принять за координатную. При этом вершины конусов расположены на кривых

$$\rho x_i = \frac{du_i}{du},\ \rho x_i = \frac{dv_i}{dv}. \tag{**}$$

Если кривые (**) лежат в бесконечно удаленной плоскости, коническая сеть переходит в цилиндрическую, а поверхность Петерсона — в поверхность переноса.

Проблема определения поверхностей, несущих две или больше конические сети, решена для случая поверхностей переноса [2], для случая плоских конических сетей [3] и конических сетей, у которых кривые (**), порождающие сеть, плоские и расположены в общей плоскости, различной для каждой из обеих сетей [4].

Общей проблеме посвящены две работы Б. Гамбье [5], в которых доказывается, что проблему можно свести к решению функционального уравнения вида $\sum X_i Y_i = 0$, где X_i — функции одного переменного x, Y_i — функции переменного y; x и y — переменные независимые, но не получено новых решений.

Настоящая работа посвящена определению поверхностей, несущих континуум конических сетей.

§ 1. Дифференциальные уравнения конической сети

Для получения дифференциальных уравнений, определяющих коническую сеть, естественно воспользоваться аппаратом проективно-дифференциальной геометрии, аналогично тому, как вывод дифференциальных уравнений поверхностей переноса был получен впервые методами афинной дифференциальной геометрии [6].

Канонические уравнения поверхности Петерсона:

$$\lambda x^i = X^i + Y^i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

где X^i — функции одного параметра x, Y^i — функции параметра y. Координатная сеть x, y — сопряженная, коническая (сеть Петерсона).

В произвольных координатах u^1, u^2 сеть Петерсона определяется уравнением

$$\tau = \varphi_{ik} du^i du^k = 0. \tag{2}$$

Второй дифференциальный параметр Бельтрами, примененный к функциям λx^i относительно квадратичной дифференциальной формы τ, обращается в нуль.

Действительно,

$$\Delta(\lambda x^i) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \left\{ \left(\frac{\varphi_{11}(\lambda x^i)_2 - \varphi_{12}(\lambda x^i)_1}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \right)_2 + \left(\frac{\varphi_{22}(\lambda x^i)_1 - \varphi_{12}(\lambda x^i)_2}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \right)_1 \right\}. \tag{3}$$

В случае канонических координат $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, $(\lambda x^i)_{12} = 0$, следовательно,

$$\Delta(\lambda x^i) = 0. \tag{4}$$

По свойству дифференциального параметра это имеет место для любого выбора координат.

Отнесем поверхность к асимптотическим координатам u, v. В силу сопряженности сети (2): $\varphi_{12} = 0$. Положив

$$\frac{\varphi_{22}}{\sqrt{-\varphi_{11}\varphi_{22}}} = e^{\sigma}, \quad \frac{\varphi_{11}}{\sqrt{-\varphi_{11}\varphi_{22}}} = -e^{-\sigma}, \tag{5}$$

получаем по (3), (4):

$$[e^{\sigma}(\lambda x^i)_u]_u - [e^{-\sigma}(\lambda x^i)_v]_v = 0. \tag{6}$$

Заменив в (6) вторые производные координат поверхности по основным дифференциальным уравнениям проективно-дифференциальной теории поверхностей [7]:

$$\left. \begin{aligned} x^i_{uu} &= \theta_u x^i_u + \beta x^i_v + p_{11} x^i \\ x^i_{vv} &= \gamma x^i_u + \theta_v x^i_v + p_{22} x^i \end{aligned} \right\}, \tag{7}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_u + \lambda(\theta_u - \gamma e^{-2\sigma} + \sigma_u) &= 0, \\ 2\lambda_v + \lambda(\theta_v - \beta e^{2\sigma} - \sigma_v) &= 0, \\ (-\lambda_{vv} + \sigma_v\lambda_v - \lambda p_{22}) e^{-\sigma} + (\lambda_{uu} + \sigma_u\lambda_u + \lambda p_{11}) e^{\sigma} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Приравняв оба значения $(\lg\lambda)_{uv}$, которые получаем из (8_1) и (8_2), приходим к уравнению:

$$\sigma_{uv} = A, \tag{9}$$

где

$$A = \frac{1}{2}(\gamma e^{-2\sigma})_v - \frac{1}{2}(\beta e^{2\sigma})_u. \tag{10}$$

Подставив в (8_3) значения первых и вторых производных функции λ из (8_1), (8_2), получаем уравнение:

$$\sigma_{vv} + e^{2\sigma}\sigma_{uu} = B, \tag{11}$$

где

$$B = \frac{1}{2}(\sigma_v^2 - e^{2\sigma}\sigma_u^2) - 2(\lambda\sigma_u + \beta\sigma_v e^{2\sigma}) - \frac{1}{2}\beta^2 e^{4\sigma} + \frac{1}{2}\gamma^2 e^{-2\sigma} - e^{2\sigma}(L + 2\beta_v) + M + 2\gamma_u. \tag{12}$$

Здесь L, M — известные проективные инварианты [7]

$$\left.\begin{aligned} L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2p_{11} \\ M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2p_{22} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Обратно, если функция σ удовлетворяет уравнениям (9), (11), система (8) совместна и определяет λ вплоть до постоянного множителя. Из (8) с помощью (7) получаем (6), или эквивалентное уравнение (4). Наконец, если перейти от асимптотических параметров к параметрам сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$, приходим к уравнению (1).

Мы получили следующий результат: чтобы на поверхности, отнесенной к асимптотическим параметрам, существовала сеть Петерсона:

$$du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0, \tag{2'}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция σ удовлетворяла системе из двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (9), (11).

2. Другой вывод дифференциальных уравнений (9), (11) конической сети получим, если потребуем, чтобы сопряженная сеть

$$du = \varepsilon\, e^{\sigma}dv, \quad \varepsilon^2 = 1 \tag{14}$$

удовлетворяла дифференциальному уравнению конических линий

$$(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi) = 0, \tag{15}$$

где ξ — тангенциальные координаты поверхности.

Воспользуемся выражением $(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)$, вычисленным Фубини [8]:

$$\frac{(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)}{(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv})} = -2\,du\,dv \left[\begin{array}{c} du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u - 3(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) \\ -(\beta_u - 2\beta\theta_u)\,du^4 + (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^4 \\ +(3p_{11} - \pi_{11})\,dv\,du^3 + (\pi_{22} - 3p_{22})\,du\,dv^2 \end{array}\right]$$

$$+ [3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u - \beta du^3 - \gamma dv^3)]\,[du\delta^2 v - dv\delta^2 u - \beta du^3 + \gamma dv^3], \tag{16}$$

где δ — символ контравариантного дифференциала относительно квадратичной дифференциальной формы F_2:

$$\delta u = du,\ \delta^2 u = d^2u + \theta_u du^2,\ \delta^3 u = d^3u + 3\theta_u du\, d^2u + \theta_{uv}du^2dv + \\ + (\theta_{uu} + \theta_u^2)\,du^3,$$

аналогично для v.

По (14):

$$d^2u = (\varepsilon\, e^{\sigma}\sigma_v + e^{2\sigma}\sigma_u)\,dv^2$$

$$d^3u = [\varepsilon\, e^{\sigma}(\sigma_{vv} + \sigma_v^2) + e^{2\sigma}(2\sigma_{uv} + 3\sigma_u\sigma_v) + \varepsilon\, e^{3\sigma}(\sigma_{uu} + 2\sigma_u^2)]\,dv^3.$$

Внеся эти значения в (15), складывая и вычитая полученные два уравнения соответственно двум значениям ε, вновь приходим к системе (9), (11).

§ 2. Поверхность с ∞^4 конических сетей

1. Легко убедиться, что максимальное число параметров, от которых может зависеть коническая сеть на данной поверхности, равно четырем.

Действительно, любые две кривые C_1, C_2, принадлежащие одному и тому же семейству сети, определяют всю сеть, так как развертывающиеся поверхности, у которых прямолинейными образующими служат касательные к C_1, C_2, пересекаются по одной из кривых Γ, порождающей сеть. Если из различных точек кривой Г опишем около поверхности касательные конусы, то линии касания образуют одно семейство сети, а сопряженные линии образуют второе семейство сети.

Пусть M_1, M_2 — две произвольные точки поверхности и C_1, C_2 — проходящие через них линии одного из семейств сети. Вершина конуса, описанного около поверхности вдоль C_i, лежит в плоскости, касательной к поверхности в M_i, и требует для своего определения двух параметров. Следовательно, сеть может зависеть не больше чем от четырех параметров[1].

Поверхности второго порядка обладают как раз четырехпараметрическим множеством конических сетей, так как произвольная прямая пространства и прямая, сопряженная с ней относительно поверхности второго порядка, определяют два плоских пучка, которые пересекают поверхность по конической сети.

Докажем, что это свойство характеризует поверхности второго порядка.

Дифференцируя (9), (11), имеем:

$$\begin{gathered}\sigma_{uuu} = e^{-2\sigma}(B_u - A_v) - 2\sigma_u\sigma_{uu}, \quad \sigma_{uuv} = A_u, \\ \sigma_{uvv} = A_v, \quad \sigma_{vvv} = B_v - e^{2\sigma}A_u - 2e^{2\sigma}\sigma_v\sigma_{uu}.\end{gathered} \tag{17}$$

Вычисляя двумя различными способами σ_{uuuv} (или σ_{vvvu}), получаем следующее условие интегрируемости системы (9), (11):

$$[e^{-2\sigma}(B_u - A_v)]_v = (A_u + 2A\sigma_u)_u, \tag{18}$$

Это условие имеет вид:

$$A\sigma_{uu} + C = 0, \tag{18*}$$

где C не содержит производных функции σ выше первого порядка.

Чтобы на поверхности существовала ∞^4 конических сетей, необходимо, чтобы уравнение (18*) было тождеством относительно σ_{uu}. Следовательно, A должно быть равно нулю и, кроме того, не должно содержать σ, σ_u, σ_v.

Отсюда, согласно (10), $\beta = \gamma = 0$, что характеризует поверхности второго порядка.

2. Докажем, что не существует поверхностей с ∞^3 конических сетей.

В случае поверхности с ∞^3 конических сетей из уравнения (18*) можно определить σ_{uu}.

Действительно, если $A = 0$, то либо $\beta = \gamma = 0$ и поверхность несет ∞^4 сетей, либо одна из производных σ_u, σ_v определяется в функции σ и второй производной и число параметров, определяющих сети, не превышает двух.

Определим из уравнения (18*) σ_{uuv} и приравняем соответствующему значению из (17); имеем:

$$R = \left(\frac{C}{A}\right)_v + A_u = 0. \tag{19}$$

Обозначим A_1, B_2, C_3 совокупность старших относительно σ_u, σ_v членов в выражениях A, B, C (индекс совпадает со степенью этих членов).

Положим:

$$p = \sigma_u, \quad q = \sigma_v. \tag{20}$$

[1] Это следует также из дифференциальных уравнений (9), (11) конической сети, так как, если задать произвольно значения σ, σ_u, σ_v и σ_{uu} в некоторой точке u, v, остальные частные производные определятся.

Имеем по уравнениям (18), (18*):

$$C_3 = -\frac{1}{8}(5\gamma e^{-4\sigma}q^3 - \beta pq^2 + 3\gamma e^{-2\sigma}p^2q + 9\beta e^{2\sigma}p^3) \tag{21}$$

и по уравнению (19), положив $R^* = A^3R$,

$$R_6^* = \left(A_1\frac{\partial C_3}{\partial q} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)(A_1B_2 + e^{2\sigma}C_3) + qA_1\left(A_1\frac{\partial C_3}{\partial \sigma} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial \sigma}\right). \tag{22}$$

По уравнениям (10), (12) и (21):

$$A_1\frac{\partial C_3}{\partial q} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial q} = \frac{1}{4}(5\gamma^2e^{-6\sigma}q^3 + 7\beta\gamma e^{-2\sigma}pq^2 - \beta^2e^{2\sigma}p^2q - 3\beta\gamma p^3),$$

$$A_1B_2 + e^{2\sigma}C_3 = \frac{1}{8}(-9\gamma e^{-2\sigma}q^3 - 3\beta e^{2\sigma}pq^2 + \gamma p^2q - 5\beta e^{4\sigma}p^3), \tag{23}$$

$$A_1\frac{\partial C_3}{\partial \sigma} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{4}(-5\gamma^3e^{-6\sigma}q^4 - 16\beta\gamma e^{-2\sigma}pq^3 + \beta^2e^{2\sigma}p^2q^2 + 12\beta\gamma p^3q).$$

Подставив эти значения в (22), получаем:

$$\begin{aligned}32e^{8\sigma}R_6^* &= -5\gamma^3q^6 + 90\beta\gamma^2e^{4\sigma}q^5p + (108\beta^2\gamma e^{8\sigma} + 5\gamma^3e^{2\sigma})q^4p^2 - \\ &- (87\beta\gamma^2e^{6\sigma} + 5\beta^3e^{12\sigma})q^3p^3 - 123\beta^2\gamma e^{10\sigma}q^2p^4 - (3\beta\gamma^2e^{8\sigma} - 5\beta^3e^{14\sigma})qp^5 + \\ &+ 15\beta^2\gamma e^{12\sigma}p^6.\end{aligned} \tag{24}$$

Чтобы на поверхности существовала ∞^3 конических сетей, необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена R_6^* были равны нулю. Поэтому $\beta = \gamma = 0$, и мы приходим к поверхностям второго порядка.

Следовательно, поверхностей с ∞^3 конических сетей не существует.

§ 3. Поверхности с ∞^2 конических сетей

1. Чтобы на поверхности существовала ∞^2 конических сетей, необходимо, чтобы уравнение (18*) не содержало σ_{uu}:

$$A = C = 0.$$

Доказательство. Пусть $A \neq 0$. Тогда имеет место уравнение (19), а также уравнение

$$S = 0, \tag{25}$$

которое получается из (19), если в нем поменять местами u и v, β и γ, L и M и заменить σ на $-\sigma$, так как уравнения (9), (11) сети Петерсона инвариантны относительно такой замены.

Уравнение (25) получим также, если из (18*) вычислим σ_{uuu} и приравняем соответствующему значению из (17):

$$Se^{2\sigma} = \left(\frac{C}{A}\right)_u + 2p\frac{C}{A} + e^{-2\sigma}(B_u - A_v) = 0. \tag{25*}$$

Положив $S^* = -A^3S$, имеем по (24):

$$\left.\begin{aligned}32e^{-8\sigma}S_6^* &= -5\beta^3p^6 + 90\beta^2\gamma e^{-4\sigma}p^5q + (108\beta\gamma^2e^{-8\sigma} + 5\beta^3e^{-2\sigma})p^4q^2 - \\ &- (87\beta^2e^{-6\sigma} + 5\gamma^3e^{-12\sigma})p^3q^3 - 123\beta\gamma^2e^{-10\sigma}p^2q^4 - \\ &- (3\beta^2\gamma e^{-8\sigma} - 5\gamma^3e^{-14\sigma})pq^5 + 15\beta\gamma^2e^{-12\sigma}q^6\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

R^* и S^*, рассматриваемые как многочлены относительно p и q, должны иметь общего делителя, так как в противном случае (19) и (25) определяют p и q, и число сетей не превышает ∞^1.

Пусть T — общий наибольший делитель R^* и S^*. Совокупность старших относительно p, q членов T служит общим делителем многочленов R_6^*, S_6. Поэтому займемся отысканием общего наибольшего делителя этих последних многочленов.

Общий наибольший делитель многочленов R_6^* и S_6^* служит также делителем многочлена $Q = 32\,e^{6\sigma}(pe^{2\sigma}R_6^* + qS_6^*)$.

Имеем по (24), (26):

$$\left.\begin{aligned} Q = 3\,\beta\gamma^2 e^{2\sigma} q\,(5q^6 - 11 e^{2\sigma}p^2q^4 + 7e^{4\sigma}p^4q^2 - e^{6\sigma}p^6) - \\ - 3\,\beta^2\gamma e^{6\sigma} p\,(q^6 - 7e^{2\sigma}q^4p^2 + 11 e^{4\sigma}q^2p^4 - 5\,e^{6\sigma}p^6) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

или

$$Q = 3\,\beta\gamma e^{2\sigma}(q^2 - e^{2\sigma}p^2)^2\,[\gamma q\,(5q^2 - e^{2\sigma}p^2) - \beta p e^{4\sigma}(q^2 - 5e^{2\sigma}p^2)]\,.$$

Q исчезает, если $\beta\gamma = 0$, поэтому случай линейчатых поверхностей подвергнем отдельному рассмотрению и положим пока $\beta\gamma \neq 0$.

Легко видеть, что $q^2 - e^{2\sigma}p^2$ служит общим наибольшим делителем R_6^* и S_6^*.

Действительно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} R_6^* = (q^2 - e^{2\sigma}p^2)\,H_4, \\ S_6^* = (q^2 - e^{2\sigma}p^2)\,K_4, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где:

$$\left.\begin{aligned} H_4 = -\frac{1}{32}\,e^{-8\sigma}[\,5\gamma^3q^4 - 90\,\beta\gamma^2e^{4\sigma}q^3p - 108\,\beta^2\gamma e^{8\sigma}q^2p^2 - \\ - (3\,\beta\gamma^2e^{6\sigma} - 5\,\beta^3e^{12\sigma})\,qp^3 + 15\,\beta^2\gamma e^{10\sigma}p^4] \\ K_4 = \frac{1}{32}\,[5\,\beta^3e^{12\sigma}p^4 - 90\,\gamma\beta^2e^{8\sigma}p^3q - 108\,\gamma^2\beta e^{4\sigma}p^2q^2 - \\ - (3\,\beta^2\gamma e^{6\sigma} - 5\,\gamma^2)\,pq^3 + 15\,\beta\gamma^2e^{2\sigma}q^4]\,e^{-6\sigma}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Многочлен H_4 — взаимно простой как с $q^2 - e^{2\sigma}p^2$, так и с $P = \gamma q\,(5\,q^2 - e^{2\sigma}p^2) - \beta p e^{4\sigma}(q^2 - 5e^{2\sigma}p^2)$.

Первое утверждение следует из того, что, подставив в H_4 $q = \varepsilon e^{\sigma}p$, где $\varepsilon^2 = 1$, получаем многочлен относительно e^{σ}, который обращается в нуль тождественно относительно σ только при условии $\beta = \gamma = 0$.

Чтобы убедиться во втором утверждении, составим многочлен.

$$32\,e^{8\sigma}H_4 + 3\,\beta\gamma e^{4\sigma}pP =$$

$$= -\,5q\,(\gamma q + \beta p e^{4\sigma})\,(\gamma q + h_1\beta p e^{4\sigma})\,(\gamma q + h_2\beta p e^{4\sigma})\,,$$

где h_1, h_2 — корни уравнения $h^2 + 22h + 1 = 0$, но $\gamma q + \lambda\beta e^{4\sigma}p$, где $\lambda = 0$, 1, h_1, h_2, не служит делителем P (при условии $\beta\gamma \neq 0$).

Теперь рассмотрим многочлен $G = R^*K_4 - S^*H_4$.

Так как T служит делителем G, совокупность старших членов T должна служить делителем совокупности старших членов G, т. е. $G_9 = R_5^*K_4 - S_5^*H_4$ должно иметь делителем $q - \varepsilon e^{\sigma}p$, $\varepsilon^2 = 1$.

Это, однако, не имеет места. Чтобы в этом убедиться, вычислим R_5^*.

С этой целью отберем в выражении C из формул (18), (18*) члены второго измерения:

$$\left.\begin{aligned} C_2 = \frac{1}{48}\,[(45\,\gamma_v e^{-4\sigma} + 3\,\beta_u - 48\,\beta\gamma e^{-2\sigma})\,q^2 + (12\,\beta_v - 16\,\beta^2e^{2\sigma} - \\ - 80\,\gamma^2e^{-4\sigma} - 12\,\gamma_u e^{2\sigma})\,pq + (9\,\gamma_v e^{-2\sigma} - 57\,\beta_u e^{2\sigma} - 48\,\beta\gamma)\,p^2] \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

и, подставив в (19), получаем:

$$R_5^* = r_0 q^5 + r_1 p q^4 + r_2 p^2 q^3 + r_3 p^3 q^2 + r_4 p^4 q + r_5 p^5, \tag{31}$$

причем значения коэффициентов r_i следующие:

$$\left.\begin{aligned}
r_0 &= -\frac{29}{8}\gamma^2\beta_u e^{-4\sigma} + \frac{5}{4}\beta\gamma^3 e^{-6\sigma} + \frac{11}{8}\gamma^2\gamma_v e^{-8\sigma}\\
r_1 &= -\frac{25}{8}\beta\gamma\beta_u - \frac{5}{4}\beta^2\gamma^2 e^{-2\sigma} + \left(\frac{25}{4}\beta\gamma\gamma_v - \frac{55}{16}\gamma^2\beta_v\right)e^{-4\sigma} + \frac{5}{16}\gamma^2\gamma_u e^{-6\sigma} -\\
&\qquad - \frac{5}{2}\gamma^4 e^{-8\sigma}\\
r_2 &= \frac{15}{64}\beta^2\beta_u e^{4\sigma} - \frac{37}{12}\beta^3\gamma e^{2\sigma} + \left(\frac{385}{64}\beta^2\gamma_v - \frac{47}{32}\beta\gamma\beta_v\right) +\\
&\qquad + \left(\frac{57}{64}\gamma^2\beta_u - \frac{9}{32}\beta\gamma\gamma_u\right)e^{-2\sigma} - \frac{161}{12}\beta\gamma^3 e^{-4\sigma} + \frac{5}{16}\gamma^2\gamma_v e^{-6\sigma}\\
r_3 &= \frac{5}{12}\beta^4 e^{6\sigma} + \frac{15}{32}\beta^2\beta_v e^{4\sigma} + \left(\frac{461}{64}\beta\gamma\beta_u - \frac{31}{32}\beta^2\gamma_u\right)e^{2\sigma} - \frac{227}{12}\beta^2\gamma^2 +\\
&\qquad + \frac{3}{4}\gamma^2\beta_v - \frac{237}{64}\beta\gamma\gamma_v e^{-2\sigma}\\
r_4 &= -\frac{25}{64}\beta^2\beta_u e^{6\sigma} - \frac{107}{12}\beta^3\gamma e^{4\sigma} + \left(\frac{31}{32}\beta\gamma\beta_v - \frac{215}{64}\beta^2\gamma_v\right)e^{2\sigma} +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{8}\gamma^2\beta_u - \frac{7}{32}\beta\gamma\gamma_u\right) + \frac{1}{6}\beta\gamma^3 e^{-2\sigma}\\
r_5 &= -\frac{35}{12}\beta^4 e^{8\sigma} - \frac{5}{32}\beta^2\beta_v e^{6\sigma} + \left(\frac{5}{32}\beta^2\gamma_u - \frac{85}{64}\beta\gamma\beta_u\right)e^{4\sigma} +\\
&\qquad + \frac{7}{6}\beta^2\gamma^2 e^{2\sigma} - \frac{3}{64}\beta\gamma\gamma_v.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Аналогично имеем:

$$S_5^* = s_0 p^5 + s_1 p^4 q + s_2 p^3 q^2 + s_3 p^2 q^3 + s_4 p q^4 + s_5 q^5, \tag{33}$$

причем s_i получаются из r_i, если поменять местами u и v, β и γ и заменить σ на $-\sigma$. Так как нам понадобятся лишь старшие относительно e^σ члены, мы выпишем только эти члены в выражениях s_i:

$$\left.\begin{aligned}
s_0 &= \frac{11}{8}\beta^2\beta_u e^{8\sigma} + \ldots & s_3 &= \left(\frac{3}{4}\beta^2\gamma_u - \frac{237}{64}\beta\gamma\beta_u\right)e^{2\sigma} + \ldots\\
s_1 &= -\frac{5}{2}\beta^4 e^{8\sigma} + \ldots & s_4 &= \frac{1}{6}\beta^3\gamma e^{2\sigma} + \ldots\\
s_2 &= \frac{5}{16}\beta^2\beta_u e^{6\sigma} + \ldots & s_5 &= -\frac{3}{64}\beta\gamma\beta_u + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Подставим теперь $q = \varepsilon e^\sigma p$ в G_9 и выделим в полученном многочлене относительно e^σ старшую степень e^σ.

Так как после указанной подстановки в H_4 член с высшей степенью e^σ будет $-\frac{5}{32}\varepsilon\beta^3 e^{5\sigma}p^4$, в K_4 член с высшей степенью e^σ равен $\frac{5}{32}\beta^3 e^{6\sigma}p^4$, а в R_5^* старший член содержится по (31) и (32) в слагаемом $r_3 q^2 p^3$ и равен $\frac{5}{12}\beta^4 e^{8\sigma}p^5$ и в S_5^* старший член содержится по (33), (34) в слагаемом $s_1 p^4 q$ и равен $-\frac{5}{2}\varepsilon\beta^4 e^{9\sigma}p^5$, находим для старшего члена в $G_9 = R_5^* K_4 - S_5^* H_4$ выражение $-\frac{125}{384}\beta^7 e^{14\sigma}p^9$. Но в силу нашего допущения

$\beta \neq 0$; следовательно, R и S — взаимно простые многочлены относительно p, q, что и доказывает необходимость условия $A=0$ для нелинейчатых поверхностей с ∞^2 сетей Петерсона.

2. В случае линейчатых поверхностей один из коэффициентов β, γ равен нулю. Пусть $\gamma=0$. По (24) и (26):

$$\left.\begin{aligned} R_6^* &= -\frac{5}{32}\beta^3 e^{4\sigma} q p^3 (q^2 - e^{2\sigma}p^2), \\ S_6^* &= \frac{5}{32}\beta^3 e^{6\sigma} p^4 (q^2 - e^{2\sigma}p^2). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Общий наибольший делитель R_6^* и S_6^*: $p^3(q^2 - e^{2\sigma}p^2)$, но так как теперь по (10) A не содержит q, знаменатель в выражении (19) для R содержит A не в третьей степени, а во второй и многочлен $R^* = A^3 R$ имеет A делителем. Следовательно, совокупность старших членов T может иметь своими делителями p в степени не выше второй и $q - \varepsilon e^{\sigma} p$, где $\varepsilon^2 = 1$.

Покажем, что последнее не имеет места. Для этого составим многочлен $F = pe^{2\sigma}R^* + qS^*$ и отберем его старшие члены $F_6 = pe^{2\sigma}R_5^* + qS_5^*$. По (32) и (34) теперь $r_0 = r_1 = s_3 = s_4 = s_5 = 0$; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} R_5^* &= p^2(r_2 q^3 + r_3 q^2 p + r_4 q p^2 + r_5 p^3). \\ S_5^* &= p^3(s_0 p^2 + s_1 pq + s_2 q^2), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

причем:

$$r_2 = \frac{15}{64}\beta^2\beta_u e^{4\sigma}, \qquad s_0 = \frac{11}{8}\beta^2\beta_u e^{8\sigma}$$

$$r_3 = \frac{5}{12}\beta^4 e^{6\sigma} + \frac{15}{32}\beta^2\beta_v e^{4\sigma}, \qquad s_1 = -\frac{5}{2}\beta^4 e^{8\sigma} + \frac{5}{16}\beta^2\beta_v e^{6\sigma},$$

$$r_4 = -\frac{25}{64}\beta^2\beta_u e^{6\sigma}, \qquad s_2 = \frac{5}{16}\beta^2\beta_u e^{6\sigma}.$$

$$r_5 = -\frac{35}{12}\beta^4 e^{8\sigma} - \frac{5}{32}\beta^2\beta_v e^{6\sigma}$$

Подставив значения R_5^* и S_5^* в F_6 и положив $q = \varepsilon e^{\sigma} p$, получаем:

$$F_6 = p^6 [\varepsilon(r_2 e^{2\sigma} + s_2) e^{3\sigma} + (r_3 e^{2\sigma} + s_1) e^{2\sigma} + \varepsilon e^{\sigma}(r_4 e^{2\sigma} + s_0) + r_5 e^{2\sigma}]. \tag{37}$$

Для члена с высшей степенью относительно e^{σ} находим выражение $-5\beta^4 e^{10\sigma} p^6$; следовательно, $q - \varepsilon e^{\sigma} p$ не служит делителем совокупности старших членов T.

Таким образом, либо $T = p^2 + ap + bq + c$, либо $T = p + c$. Однако, легко видеть, что второе предположение невозможно и что $b \neq 0$. Действительно, если T не содержит q, из $T=0$ следует $p = \varphi(u, v, \sigma)$.

Дифференцируя по v, получаем:

$$A = -\frac{1}{2}\beta_u e^{2\sigma} - \beta e^{2\sigma} p = \varphi_\sigma q + \varphi_v.$$

Это последнее уравнение не должно содержать q, так как иначе p и q определяются и число сетей не превосходит ∞^1. Следовательно, $\varphi_\sigma = 0$ и

$$p = \varphi(u, v) = -\frac{\beta_u}{2\beta} - \frac{\varphi_v}{\beta} e^{-2\sigma}, \tag{38}$$

поэтому $\varphi_v = 0$, но тогда и $A = 0$.

Мы получаем для T единственно возможное значение следующего вида:

$$T = q - \lambda_0 p^2 - \lambda_1 p - \lambda_2, \quad \lambda_0 \neq 0. \tag{39}$$

Из $q=\lambda_0 p^2+\lambda_1 p+\lambda_2$ следует после дифференцирования по u и замены σ_{uu} его значением из (18*):

$$A^2+C(2\lambda_0 p+\lambda_1)-A\left[\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial u}+\frac{\partial\lambda_0}{\partial\sigma}p\right)p^2+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial\sigma}p\right)p+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial\sigma}p\right)\right]=0. \tag{40}$$

Это уравнение не должно содержать p. По (21):

$$C_3=\frac{1}{8}(\beta pq^2-9\beta e^{2\sigma}p^3).$$

Подставляя сюда вместо q его значение по (39), получаем:

$$C_3=\frac{1}{8}\lambda_0^2\beta p^5+\ldots$$

Следовательно, в уравнении (40) старший относительно p член $\frac{1}{4}\lambda_0^3 p^6$ и так как $\lambda_0\neq 0$, то уравнение (40) содержит p.

Тем самым доказана необходимость условия $A=0$ и для линейчатых поверхностей с ∞^2 сетей Петерсона.

3. По крайней мере, один из коэффициентов β,γ отличен от нуля. Пусть $\beta\neq 0$. Из условия $A=0$ по (10) следует:

$$p=-\frac{\gamma}{\beta}e^{-4\sigma}q+\ldots \tag{41}$$

Подставив в уравнение $C=0$, получаем следующее уравнение третьей степени относительно q:

$$\left(-9\gamma e^{-4\sigma}+9\frac{\gamma^3}{\beta^2}e^{-10\sigma}\right)q^3+\Omega=0, \tag{42}$$

где Ω содержит q в степени не выше второй.

Уравнение (42) должно выполняться тождественно относительно q, σ. Следовательно,

$$\gamma=0, \tag{43}$$

а искомые поверхности линейчатые.

Из $A=0$, $\gamma=0$ следует по (10):

$$p=-\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}. \tag{44}$$

Подставив полученное значение p в (9), получаем:

$$(\lg\beta)_{uv}=0 \tag{45}$$

и так как $\beta\frac{du^2}{dv}$ инвариантно относительно замены параметров вида $U=U(u)$, $V=V(v)$, можно β привести к единице:

$$\beta=1. \tag{46}$$

Из (44) следует:

$$p=0. \tag{47}$$

Условия интегрируемости [7]:

$$\left.\begin{aligned}L_v=-2\beta\gamma_u-\gamma\beta_u,\quad M_u=-2\gamma\beta_v-\beta\gamma_v\\ \beta M_v+2M\beta_v+\beta_{vvv}=\gamma L_u+2L\gamma_u+\gamma_{uuu}\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

дают: $M=\text{const}$, $L=L(u)$, а из (17_1) следует, что L не зависит и от u:

$$L=\text{const}.$$

Итак, если на поверхности существует ∞^2 сетей Петерсона, можно так выбрать параметры, что выполняются условия:

$$\gamma = 0, \quad \beta = 1, \quad L = \text{const}, \quad M = \text{const} \tag{49}$$

при этом

$$p = 0. \tag{50}$$

Но эти условия и достаточны, так как система (9), (11) сводится при этом к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 - 2e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv} - \frac{1}{2}e^{4\sigma} - Le^{2\sigma} + M, \tag{51}$$

которое и определяет ∞^2 конических сетей.

4. Первые два условия (49) характеризуют линейчатые поверхности, принадлежащие линейной конгруэнции.

Остается выяснить, для каких линейчатых поверхностей, принадлежащих линейной конгруэнции, $\frac{dL}{du} = 0$.

Имеем два случая: 1° — линейная конгруэнция неособенная; следовательно, ее директрисы различны, 2° — линейная конгруэнция особенная, директрисы — совпадают.

В случае 1° примем директрисы за противоположные ребра координатного тетраэдра. Уравнение поверхностей принимает вид:

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{52}$$

или в асимптотических параметрах:

$$x = v\sqrt{f'(u)}, \quad y = uv\sqrt{f'(u)}, \quad z = f(u), \quad t = 1. \tag{53}$$

Имеем по (7), (13):

$$\theta_u = \frac{f'''}{f'}, \theta_v = \gamma = p_{11} = p_{22} = 0, \quad \beta = \frac{v}{2}\left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right), \tag{54}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'} = \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right), \quad M = 0.$$

Заменив параметры по формулам:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right), \quad \frac{dV}{dv} = \frac{1}{v}, \tag{55}$$

получаем

$$\overline{\beta} = 1.$$

Выражение:

$$L\,du^2 + M dv^2 - \left[\left(\lambda_{uu} - \frac{1}{2}\lambda_u^2\right)du^2 + \left(\mu_{vv} - \frac{1}{2}\mu_v^2\right)dv^2\right],$$

где

$$\lambda = \lg\sqrt{\beta}, \quad \mu = -\lg\beta$$

инвариантно относительно замены параметров [7].

Так как

$$L = \left(\frac{dU}{du}\right)^2, \quad \beta = v\left(\frac{dU}{du}\right)^2,$$

имеем

$$\left(U'^2 - \frac{U'''}{U'} + \frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^2}\right)du^2 - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{v^2} = \overline{L}dU^2 + \overline{M}dV^2.$$

Следовательно,

$$1-\overline{L}=\frac{U'''}{U'^3}-\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4}, \quad \overline{M}=-\frac{1}{2}. \tag{56}$$

Для определения $f(u)$ мы получили уравнения (55_1), (56_1), причем $\overline{L}$ — постоянная.

Из уравнения (56_1) получаем для U'^2 одно из следующих трех значений:

$$1)\ U'^2=\frac{C_1}{\left[\left(\frac{C_1u+C_2}{2}\right)^2-2C\right]^2} \quad C=1-\overline{L} \tag{57}$$

$$2)\ U'^2=\frac{1}{(\sqrt{2C}\,u+C_2)^2} \tag{58}$$

$$3)\ U'^2=\mathrm{const} \tag{59}$$

В уравнении (55_1) правая часть есть шварцева производная функции f. Следовательно, общее решение представляет собой дробно-линейную функцию частного решения.

Подставив в (55_1) найденное значение U'^2 из (57) и заменив независимую переменную u по формуле:

$$C_1u+C_2=2u_1, \quad \frac{u_1-a}{u_1+a}=u_2, \quad 2C=a^2, \tag{60}$$

приведем (55_1) к виду:

$$\frac{\dddot{f}}{\dot{f}}-\frac{3}{2}\frac{\ddot{f}^2}{\dot{f}^2}=\frac{2}{C_1a^2u_2^2}. \tag{61}$$

Это уравнение имеет частные решения:

$$f=u_2^n \quad \left(C_1a^2=\frac{4}{1-n^2}, \quad n\neq 0, \quad n\neq 1\right) \tag{62}$$

и

$$f=\lg u_2 \ (\text{если } c_1a^2=4). \tag{63}$$

Если $C=1-\overline{L}=0$, вместо подстановки (60_2) полагаем $u_2=\frac{1}{u_1}$ и снова приходим к уравнению типа (61). Выражение (58) для U'^2 эквивалентно с правой частью (61).

Выражение (59) для U'^2 приводит к частному решению:

$$f=e^u. \tag{64}$$

Следовательно, искомые поверхности надлежащим проективным преобразованием (вещественным или мнимым) приводятся к виду:

$$z=\left(\frac{y}{x}\right)^n \tag{65}$$

и

$$Z=\lg\frac{y}{x} \quad \left(\text{или } z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \tag{66}$$

5. Линейчатая поверхность, принадлежащая особенной линейной конгруэнции, может быть при соответствующем выборе координатного тетраэдра представлена уравнением:

$$z=\frac{y}{x}+F(x), \tag{67}$$

а в асимптотических параметрах — уравнениями:

$$x=u, \ y=uv+\frac{1}{2}(u^2F'-uF), \ z=v+\frac{1}{2}(F+uF'), \quad t=1. \tag{68}$$

Отсюда, по (7) и (13):

$$\theta_u = \theta_v = \gamma = p_{11} = p_{22} = L = M = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}(uF)'''. \tag{69}$$

Заменив переменные u, v по формулам:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 = \frac{1}{2}(uF)''' = \beta, \quad V = v, \tag{70}$$

в силу

$$\bar\beta \frac{dU^2}{dV} = \beta \frac{du^2}{dv}$$

получаем

$$\bar\beta = 1.$$

И так как

$$Ldu^2 + Mdv^2 - \left(\varphi_{uu} - \frac{1}{2}\varphi_u^2\right)du^2 - \left(\varphi_{vv} - \frac{1}{2}\psi_v^2\right)dv^2,$$

где

$$\varphi = \lg\sqrt{\beta} = \lg U', \quad \psi = -\lg\beta = -2\lg U,$$

инвариантно относительно замены параметра, имеем:

$$\bar L dU^2 + \bar M dV^2 = -\left(\frac{U'''}{U'} - \frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^2}\right)du^2.$$

Следовательно,

$$\bar M = 0, \quad \bar L = -\left(\frac{U'''}{U'^3} - \frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4}\right). \tag{72}$$

Поэтому искомая функция $F(u)$ определяется из уравнений:

$$[u F(u)]\, U'^3 = 2U'^2, \tag{73}$$

$$\frac{U'''}{U'^3} - \frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4} = C. \tag{74}$$

Последнее уравнение совпадает с (56_1), следовательно, значения U'^2 определяются формулами (57), (58), (59).

Подставив эти значения в (73), определяем $F(u)$ и по (67) находим следующие уравнения искомых поверхностей с точностью до коллинеаций:

$$z = \frac{y}{x} + \lg x \tag{75}$$

$$z = \frac{y}{x} + x^2. \tag{76}$$

Резюмируем результаты данного параграфа в виде следующей теоремы:

Теорема. Поверхности с ∞^2 конических сетей суть линейчатые, принадлежащие линейной конгруэнции и с точностью до коллинеаций (вещественных или мнимых) исчерпываются следующими типами:

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^n, \quad z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad z = \frac{y}{x} + x^2, \quad z = \frac{y}{x} + \lg x.$$

6. В числе этих поверхностей содержатся, в частности, все косые линейчатые поверхности третьего порядка, уравнения которых при

надлежащем выборе координатного тетраэдра приводятся, как известно, к следующему виду:

$$1^\circ\ z = \frac{y}{x} + x^2 \text{ (поверхность Кэйли)}$$

и

$$2^\circ\ z = \frac{y^2}{x^2} \qquad \text{(общая линейчатая поверхность).}$$

Поверхность Кэйли, как показал еще С. Ли [2], принадлежит к поверхностям переноса с ∞^1 сетей переноса. Найдем ∞^2 ее конических сетей.

Записав ее уравнение в виде $z = 2xy - x^3$, перейдем к асимптотическим параметрам:

$$x = 2u, \quad y = 3u^2 + v, \quad z = 4u^3 + 4uv, \quad t = 1. \tag{77}$$

Здесь

$$\theta_u = \theta_v = p_{11} = p_{22} = \gamma = L = M = 0, \quad \beta = 6.$$

Уравнение (11) принимает вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{av}\right)^2 - 12e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv} - 18e^{4\sigma}. \tag{78}$$

Положив $\sigma' = w$, перепишем (78) так:

$$2w\frac{dw}{d\sigma} = w^2 - 24e^{2\sigma}w - 36e^{4\sigma}. \tag{79}$$

Это уравнение допускает два частных решения вида $w = ke^{2\sigma}$, где $k = \text{const}$. Действительно, подставляя в (79), получаем

$$w_1 = -6e^{2\sigma}, \quad w_2 = -2e^{2\sigma}.$$

Отсюда в первом случае имеем:

$$e^{-2\sigma} + 12v = \text{const},$$

во втором случае:

$$e^{-2\sigma} + 4v = \text{const}.$$

Внеся эти значения в дифференциальные уравнения конической сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2$, проинтегрировав и приняв линии сети за параметрические, получаем следующие два канонических представления поверхности Кэйли:

$$x = \frac{\lambda + \mu}{6}, \quad y = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 2c}{24}, \quad z = \frac{\lambda^3 + \mu^3 - 3c(\lambda + \mu)}{108} \tag{80}$$

и

$$x = \frac{4(\lambda^2 - \mu^2)}{8(\lambda - \mu)}, \quad y + \frac{c}{4} = \frac{2(\lambda^3 - \mu^3)}{8(\lambda - \mu)}, \quad z = \frac{\lambda^4 - \mu^4 + 2c(\lambda^2 - \mu^2)}{8(\lambda - \mu)}. \tag{81}$$

Уравнения (80) дают все ∞^1 представлений поверхности Кэйли как поверхности переноса.

Уравнения (81) дают ∞^1 представлений ее как поверхности Петерсона, причем сети Петерсона порождаются кривыми:

$$\xi = 8\lambda, \ \eta = 6\lambda^2 - 2c, \ \zeta = 4\lambda^3 - 4c\lambda, \ \tau = 8,$$

на которых расположены вершины конусов, описанных около поверхности вдоль кривых сети.

Легко видеть, что эти пространственные кривые третьего порядка расположены на самой поверхности и служат ее асимптотическими линиями второго семейства (непрямолинейными).

Подставив в уравнение (79) $\theta = \frac{e^{2\sigma}}{w}$, перепишем его в виде:

$$2\frac{d\theta}{d\sigma} = 3\theta(1 + 8\theta + 12\theta^2), \tag{82}$$

откуда

$$e^{\sigma} = c_1\theta^{3/4}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{3/4}\left(\theta + \frac{1}{6}\right)^{-1}. \tag{83}$$

Но $dv = \theta e^{-2\sigma}d\sigma$. Подставив сюда вместо σ его выражение через θ по (83), получаем:

$$18c_1^2\frac{dv}{d\theta} = \theta^{-\frac{4}{3}}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{-5/2}\left(\theta + \frac{1}{6}\right). \tag{84}$$

Сделав в (84) подстановку $\theta + \frac{1}{2} = \theta\tau^3$ и проинтегрировав, получаем

$$9c_1^2 v = \tau^{-2} - \tau + c_2$$

и, внеся в уравнение сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$:

$$\pm 3c_1 u = \tau^{-1} + c_0.$$

Обозначим $3c_1 = k$, $\frac{4}{\mu^3} = m$, $\frac{c_2}{k^2} = l$ и подставим найденные значения u, v в уравнения поверхности. Обозначив λ, μ параметры сети, получаем следующие ∞^2 канонических представлений поверхности Кэйли как поверхности Петерсона:

$$\begin{gathered} x = \lambda^2 - \mu^2, \quad y = \left(\lambda^3 + l\lambda - \frac{m}{2}\right) - (\mu^3 + l\mu), \\ z = (\lambda^4 + 2l\lambda^2 + m\lambda) - (\mu^4 + 2l\mu^2 + m\mu), \quad t = \lambda - \mu. \end{gathered} \tag{85}$$

Кривые, порождающие конические сети, определяются уравнениями:

$$\xi_1 = 2\lambda, \quad \eta_1 = 3\lambda^2 + l, \quad \zeta_1 = 4\lambda^3 + 4l\lambda - m, \quad \tau_1 = 1,$$
$$\xi_2 = 2\mu, \quad \eta_2 = 3\mu^2 + l, \quad \zeta_2 = 4\mu^3 + 4l\mu + m, \quad \tau_2 = 1.$$

Это две конгруэнции пространственных кривых третьего порядка. Пары кривых, порождающие сеть, различны при $m \neq 0$; при $m = 0$ они совпадают и образуют асимптотические линии поверхности Кэйли.

Рассмотрим произвольную точку M поверхности Кэйли.

Касательная плоскость ω в точке M пересекает поверхность по кривой третьего порядка, которая распадается на прямую a и коническое сечение C. Произвольная асимптотическая линия Γ — пространственная кривая третьего порядка и пересекает ω в трех точках, из которых одна точка (P_3) расположена на образующей и две другие (P_1, P_2) — на коническом сечении C. Эти последние служат вершинами конусов, описанных около поверхности вдоль кривых сети Петерсона, проходящих через точку M. Касательные MP_1 и MP_2 сопряжены и гармонически разделяют асимптотические касательные, т. е. образующую a и касательную к коническому сечению C, проведенную в точке M. Следовательно, P_1 и P_2 на коническом сечении C гармонически разделяют точки пересечения C и a. На поверхности Кэйли, таким образом, имеет место следующий аналог теоремы Дезарга: асимптотические линии пересекают каждое коническое сечение, расположенное на поверхности в парах точек, принадлежащих одной инволюции.

Здесь роль пучка кривых второго порядка, о котором идет речь в теореме Дезарга, играет семейство кривых третьего порядка — асимптотических линий поверхности, роль прямых теоремы Дезарга — конические сечения, расположенные на поверхности (и тех и других ∞^2).

Других конических сетей на поверхности Кэйли не существует. Действительно, пусть $\sigma_u \neq 0$. Условие интегрируемости (18) в нашем случае имеет вид:

$$8\sigma_{uu} + 9\sigma_u^2 + 16\,\sigma_v + 36e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}\sigma_v^2 = 0. \tag{86}$$

Уравнения (9), (11):

$$\sigma_{uv} + 6e^{2\sigma}\sigma_u = 0 \tag{87}$$

$$8\sigma_{vv} = 3\,\sigma_v^2 + 5\,e^{2\sigma}\sigma_u^2 - 80\,e^{2\sigma}\,\sigma_v - 108\,e^{4\sigma}. \tag{88}$$

Интегрируя уравнение (87), получаем:

$$\sigma_v = -\,3e^{2\sigma} + V.$$

Подставив в (88), получим:

$$\sigma_u^2 = -\,3e^{2\sigma} + 10\,V - \frac{1}{5}\,e^{-2\sigma}\,(8V' - 3V^2). \tag{89}$$

Дифференцируем по u и подставляем в (86). Получаем:

$$72\,e^{2\sigma} - \frac{1}{5}\,e^{-2\sigma}\,(8V' - 3V^2) - 112\,V + e^{-2\sigma}\,V^2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma_u = 0$, что противоречит нашему предположению.

7. Общую линейчатую поверхность третьего порядка

$$zx^2 - ty^2 = 0$$

в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{3u+v}, \quad z = e^{4u}, \ t = 1. \tag{90}$$

Здесь

$$\gamma = p_{11} = p_{22} = 0, \quad \theta_v = 1, \quad \theta_u = 4, \quad \beta = -\,3, \quad L = -\,5, \quad M = -\,\frac{1}{2}.$$

Для определения ∞^2 сетей Петерсона имеем уравнение $\sigma_u = 0$ и по (11):

$$2\,\frac{d^2\sigma}{dv^2} - \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 - 12\,e^{2\sigma}\,\frac{d\sigma}{dv} + 9\,e^{4\sigma} - 10\,e^{2\sigma} + 1 = 0. \tag{91}$$

Положив $\frac{d\sigma}{dv} = w$, $e^{2\sigma} = \lambda$, получаем:

$$4\lambda\, w dw = (12\,\lambda w - 9\lambda^2 + 10\,\lambda + w^2 - 1)\, d\lambda, \tag{92}$$

или в однородных координатах $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda : w : 1$,

$$4\,x_1x_2\,(x_3dx_2 - x_2dx_3) = (12\,x_1x_2 - 9x_1^2 + 10\,x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2)\,(x_3dx_1 - x_1dx_3). \tag{92*}$$

Уравнение типа Дарбу. Имеем следующие пять частных решений:

$$1^\circ\ g_1 = x_3 = 0, \quad 2^\circ\ g_2 = x_1 = 0, \quad 3^\circ\ g_3 = x_2 - x_1 + x_3 = 0.$$

$$4^\circ\ g_4 = (x_2 - 3x_1 - x_3)^2 - 16\,x_1x_3 = 0, \quad 5^\circ\ g_5 = (x_2 - 3x_1 + x_3)^2 - 4\,x_1x_3 = 0.$$

Этого достаточно, чтобы написать общее решение в виде:

$$g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} g_5^{\alpha_5} = \text{const}.$$

Для определения α_i имеем уравнения:

$$\Sigma\, h_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma\, k_i\alpha_i = 0,$$

где:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad h_4 = h_5 = 2, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -4x_2,$$
$$k_3 = 9x_1 - x_2 + x_3, \quad k_4 = -6x_1 - 2x_2 - 2x_3, \quad k_5 = -6x_1 - 2x_2 + 2x_3.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -2, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 2,$$

и общее решение в неоднородных координатах:

$$[(w - 3\lambda - 1)^2 - 16\lambda][(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda]^2 = C\lambda(w - \lambda + 1)^2. \quad (93)$$

Положив

$$(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda = \tau(w - \lambda + 1), \quad (94)$$

получаем:

$$w(\tau - 4) - \lambda\left(\frac{c}{\tau^2} + \tau\right) + \tau = 0. \quad (95)$$

Определим из (94) и (95) λ и w в функции τ.

Пусть

$$w = \frac{d\sigma}{dv} = \varphi(\tau), \quad \lambda = e^{2\sigma} = \psi(\tau). \quad (96)$$

Для сети Петерсона имеем:

$$du = \pm\frac{\psi(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau}{2\varphi(\tau)}, \quad dv = \frac{\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)\varphi(\tau)}. \quad (97)$$

Следовательно, определение ∞^2 конических сетей на общей линейчатой поверхности третьего порядка привелось к двум квадратурам.

Частное решение 3° определяет ∞^1 конических сетей, порождаемых асимптотическими линиями. Действительно, из $\lambda = w + 1$ получим:

$$2dv = \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)}.$$

Следовательно,

$$Ce^{2v} + e^{-2\sigma} - 1 = 0.$$

Подставив в $du^2 = e^{2\sigma}dv^2$, получаем:

$$e^{2u} = \sqrt{\tau_1\tau_2}, \quad e^v = \frac{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}{c\,\tau_2 + \tau_1},$$

и из уравнения (20) — следующие канонические представления поверхности:

$$x = \frac{c}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}, \quad y = -\tau_1 + c\tau_2, \quad z = -\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{c^2\tau_2^2}{2}, \quad t = \frac{c^2}{2\tau_1^2} - \frac{1}{2\tau_2^2}. \quad (98)$$

Уравнения кривых, порождающих сети Петерсона, здесь:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{\tau_1^2}, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = \tau_1, \quad t_1 = \frac{c^2}{\tau_1^3}, \\ x_2 &= \frac{1}{\tau_2^2}, \quad y_2 = c, \quad z_2 = c^2\tau_2, \quad t_2 = \frac{1}{\tau_2^3}. \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Обе эти кривые (при одинаковых значениях c) тождественны и расположены на самой поверхности.

Эти уникурсальные пространственные кривые четвертого порядка — асимптотические линии поверхности. Каждая асимптотическая Γ пересекает касательную плоскость ω, проведенную в точке M поверхности в четырех точках P_1, P_2, P_3 и P_4, из которых две (P_3 и P_4) расположены на образующей a, проходящей через точку M и две другие (P_1 и P_2) расположены на коническом сечении C, которое вместе с a образует полное пересечение нашей поверхности плоскостью ω. Так как P_3 и P_4 — вершины конусов, касающихся поверхности вдоль кривых сети Петерсона, проходящих через точку M, то касательные MP_1 и MP_2 гармонически разделяют касательную в точке M к C и образующую a. Поэтому P_1 и P_2 гармонически разделяют точки пересечения C и a. Следовательно, и на общей линейчатой поверхности третьего порядка имеет место аналог теоремы Дезарга.

Теорема. Асимптотические линии линейчатой поверхности третьего порядка пересекают каждое коническое сечение, расположенное на поверхности в парах точек, принадлежащих одной инволюции.

Рассмотрим частное решение 4°:

$$(w - 3\lambda - 1)^2 - 16\lambda = 0$$

или

$$\frac{d\sigma}{dv} = 3\lambda + 1 \pm 4\sqrt{\lambda}, \quad \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \lambda, \quad \lambda = e^{2\sigma}.$$

Интегрируя, получаем:

$$e^v = C\frac{\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{\lambda}+1\right)^{1/2}}{\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{3}\right)^{3/2}}, \quad e^u = \tau_1\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\frac{1}{3}}{\sqrt{\lambda}+1}\right)^{1/2} = \tau_2\left(\frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}+\frac{1}{3}}\right)^{1/2},$$

откуда

$$e^{2u} = \tau_1\tau_2, \quad e^{u+v} = \frac{\tau_1 C}{2}\left(3 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right).$$

Внеся эти значения в уравнения (90), получаем следующие канонические представления поверхности:

$$x = \frac{C}{2}\left(\frac{3}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right), \quad y = \frac{C}{2}(3\tau_2 - \tau_1), \quad z = \tau_2^2, \quad t = \frac{1}{\tau_1^2}. \tag{100}$$

Уравнения кривых, порождающих эти ∞^1 конических сетей,

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = -\frac{3C}{2\tau_1^2}, \quad y_1 = -\frac{C}{2}; \quad z_1 = 0, \quad t_1 = -\frac{2}{\tau_1^3}, \\ &x_2 = \frac{C}{2\tau_2^2}, \quad y_2 = \frac{3C}{2}, \quad z_2 = 2\tau_2, \quad t_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Это плоские кривые третьего порядка с точкой возврата. Кривые (101_1) расположены в плоскости $z = 0$, кривые (101_2) — в плоскости $t = 0$.

Аналогично, частное решение 5°:

$$(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda = 0$$

после интеграции дает:

$$e^v = \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\left[\left(\sqrt{\lambda}+1\right)\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$e^u = \tau_1\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\lambda}+1}\right)^{\frac{1}{4}} = \tau_2\left(\frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

приводит к следующему каноническому представлению поверхности:

$$x=\frac{4c}{\tau_1},\quad y=4c\tau_2,\quad z=3\tau_2^2+\tau_1^2,\quad t=\frac{3}{\tau_1^2}+\frac{1}{\tau_2^2}. \tag{102}$$

Здесь уравнения кривых, принадлежащих ∞^1 конических сетей:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=-\frac{4c}{\tau_1^2},\quad y_1=0,\quad z_1=2\tau_1,\quad t_1=-\frac{6}{\tau_1^3},\\ &x_2=0,\quad y_2=4c,\quad z_2=6\tau_2,\quad t_2=-\frac{2}{\tau_2^3}. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Это плоские кривые четвертого порядка. Кривые (103_1) расположены в плоскости $y=0$. Кривые (103_2) — в плоскости $x=0$.

8. В числе найденных поверхностей с ∞^2 конических сетей содержится также геликоид.

Уравнения геликоида в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x=e^v\cos u,\quad y=e^v\sin u,\quad z=u. \tag{104}$$

Здесь

$$\gamma=\theta_u=0,\quad \theta_v=1,\quad \beta=-1,\quad L=1.\quad M=-\frac{1}{2}.$$

Система (9) и (11) имеет решение $\sigma_u=0$, удовлетворяющее обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2+2e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv}-\frac{1}{2}e^{4\sigma}-e^{2\sigma}-\frac{1}{2}.$$

Если положить:

$$\frac{d\sigma}{dv}=w,\quad e^{2\sigma}=\lambda, \tag{105}$$

получаем уравнение типа Дарбу:

$$4\lambda w\frac{dw}{d\lambda}=w^2+4\lambda w-\lambda^2-2\lambda-1, \tag{106}$$

или в однородных координатах $x_1:x_2:x_3=\lambda:w:1$

$$4x_1x_2(x_3dx_2-x_2dx_3)=[x_2^2+4x_1x_2-(x_1+x_3)^2](x_3dx_1-x_1dx_3). \tag{106*}$$

Имеем частные решения:

1° $x_1=0$, 2° $x_3=0$, 3° $x_2-x_1-x_3=0$, 4° $(x_2-x_1+x_3)^2+4x_1x_3=0$.

По теореме Дарбу этого достаточно, чтобы с помощью одной квадратуры найти интегрирующий множитель.

Частное решение 3° дает известные ∞^1 сетей переноса геликоида. Действительно, из $w=\lambda+1$, $du^2=\lambda\,dv^2$ и (104) следует:

$$u=\frac{\tau_1+\tau_2}{2},\quad e^v=C\sin\frac{\tau_2-\tau_1}{2}$$

и подстановка в (104) дает:

$$x=\frac{C}{2}(\sin\tau_2-\sin\tau_1),\quad y=\frac{C}{2}(\cos\tau_1-\cos\tau_2),\quad z=\frac{\tau_1+\tau_2}{2}. \tag{107}$$

Частное решение 4° дает следующую ∞^1 канонических представлений геликоида как поверхности Петерсона:

$$\left.\begin{aligned} &x=C(e^{-i\tau_1}+e^{i\tau_2}),\quad y=C_i(e^{-i\tau_1}-e^{i\tau_2}),\\ &z=\tau_1(2-i\tau_1)+\tau_2(2+i\tau_2),\ t=2(1-i\tau_1)+2(1+i\tau_2). \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Здесь кривые, порождающие ∞^1 конических сетей, определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -Cie^{-i\alpha}, \quad y_1 = Ce^{-i\alpha}, \quad z_1 = 2-2i\alpha, \quad t_1 = -2i, \\ x_2 &= Cie^{i\beta}, \quad y_2 = Ce^{i\beta}, \quad z_2 = 2+2i\beta, \quad t_2 = 2i. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Оба семейства плоские, но трансцендентные; первое расположено в плоскости $x+iy=0$, второе — в плоскости $x-iy=0$.

§ 4. Поверхности с ∞^1 конических сетей

1. Рассмотрим дифференциальные уравнения (9), (11) конической сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$:

$$p_v = q_u = A, \tag{9'}$$

$$q_v + e^{2\sigma}p_u = B, \tag{11'}$$

где $p=\sigma_u$, $q=\sigma_v$ и A, B определены по (10), (12).

Условием совместности системы (9), (10) служит (18):

$$Ap_u + C = 0. \tag{18'}$$

Если $A \neq 0$, уравнения (9'), (11') и (18') определяют p_u, p_v, q_u и q_v как функции p, q, σ, u, v. Условиями интегрируемости $p_{uv} = p_{vu}$ и $q_{uv} = q_{vu}$ служат (19) и (25) или, обозначив $R^* = A^3R$ и $S^* = -A^3S$:

$$R^* = 0, \tag{19'}$$

$$S^* = 0, \tag{25'}$$

где R^* и S^* — многочлены 6-ой степени относительно p и q.

В § 3 было доказано, что R^* и S^* в случае нелинейчатых поверхностей многочлены взаимно простые относительно p и q.

Следовательно, существуют разложения p и q по убывающим (или возрастающим) степеням e^σ:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k e^{\lambda_k\sigma}, \quad \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots, \quad \pi_0 \neq 0, \tag{110}$$

$$q = \sum_{k=0}^{\infty}\varkappa_k e^{\mu_k\sigma}, \quad \mu_0 > \mu_1 > \ldots, \quad \varkappa_0 \neq 0. \tag{111}$$

Аналогичные разложения имеют место и в случае линейчатых поверхностей при условии $A \neq 0$.

Действительно, в § 3, п. 2 было доказано, что если в рассматриваемом случае и существует общий наибольший делитель T многочленов R^* и S^*, то либо $T = p + c$, либо $T = p^2 + ap + bq + c$.

Если $T \neq 0$, из $R^* = S^* = 0$ следует разложения вида (110), (111).

Если $T = 0$, то, дифференцируя его по v или u и воспользовавшись (9'), (11'), (18'), получаем второе условие в виде равенства нулю некоторого многочлена и из рассуждения, проведенного в конце § 3 п. 2, следует, что эти два условия действительно определяют p и q при $A \neq 0$.

В случае $A = 0$ искомые поверхности, несущие ∞^1 конических сетей, не могут быть линейчатыми.

Действительно, пусть $A = 0$, $\gamma = 0$.

Имеем по (10):

$$\sigma = V - \frac{1}{2}\lg\beta.$$

Так как $\sigma_{uv} = 0$, то $(\lg\beta)_{uv} = 0$.

Заменой параметров можно β привести к единице, откуда следует $p=0$. Из (11), (12) следует, что β есть функция одного v, откуда $L_u=0$. Но при этих условиях, как было установлено в § 3 п. 3, поверхность несет ∞^2 конических сетей.

Покажем, что и в случае $A=0$ имеют место разложения вида (110), (111).

Действительно, из $A=0$ следует:

$$p = h_0 q + h_1,$$
$$q = k_0 p + k_1,$$

где

$$h_0 = -\frac{\gamma}{\beta} e^{-4\sigma}, \quad h_1 = \frac{\gamma_v}{2\beta} e^{-4\sigma} - \frac{\beta_u}{2\beta}, \quad k_0 = -\frac{\beta}{\gamma} e^{4\sigma}, \quad k_1 = -\frac{\beta_u}{2\gamma} e^{4\sigma} + \frac{\gamma_v}{2\gamma}.$$

Вычислив r и t и подставив в (11′), получим, исключивши q:

$$H_0 p^2 + H_1 p + H_2 = 0,$$

где

$$H_0 = -7\frac{\beta^2}{\gamma^2} e^{10\sigma} + 7e^{4\sigma},$$

а H_1 и H_2 — многочлены относительно e^σ.

В этом случае вместо двух взаимно простых многочленов 6-го порядка $R^*=0$ и $S^*=0$ имеем один линейный многочлен $A=0$ и один квадратный $-H_0p^2+H_1p+H_2=0$, что и приводит к разложениям вида (110), (111).

2. Чтобы на поверхности существовала ∞^1 конических сетей, разложения (110), (111) для p и q должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (9′) и (11′) тождественно относительно σ.

Рассмотрим сначала нелинейчатые поверхности ($\beta\gamma \neq 0$).

Определим наибольшие показатели λ и μ_0 в разложениях (110), (111) и коэффициенты π_0, $\varkappa_0$.

Подстановка разложений p и q в дифференциальные уравнения (9′) и (11′) дает:

$$\beta\pi_0 e^{(\lambda_0+2)\sigma} + \gamma\varkappa_0 e^{(\mu_0-2)\sigma} + \lambda_0\pi_0\varkappa_0 e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma} + \frac{\beta_u}{2}e^{2\sigma} + \ldots = 0, \tag{112}$$

$$\frac{\partial\pi_0}{\partial v}e^{\lambda_0\sigma} - \frac{\partial\varkappa_0}{\partial u}e^{\mu_0\sigma} + \pi_0\varkappa_0(\lambda_0-\mu_0)e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma} + \ldots = 0, \tag{113}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varkappa_0}{\partial v}e^{\mu_0\sigma} + \varkappa_0^2\mu_0 e^{2\mu_0\sigma} + \frac{\partial\pi_0}{\partial u}e^{(\lambda_0+2)\sigma} + \pi_0^2\lambda_0 e^{(2\lambda_0+2)\sigma} + \ldots = \\ &= -\frac{1}{2}\pi_0^2 e^{(2\lambda_0+2)\sigma} + \frac{1}{2}\varkappa_0^2 e^{2\mu_0\sigma} - 2\gamma\pi_0 e^{\lambda_0\sigma} - 2\beta\varkappa_0 e^{(\mu_0+2)\sigma} - \frac{\beta^2}{2}e^{4\sigma} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Мы можем считать $\beta_u \neq 0$, так как при замене параметров $\beta^*\frac{dv^{*2}}{du^*} = \beta\frac{dv^2}{du}$.

Докажем, что

$$\lambda_0 = 0. \tag{115}$$

Действительно, пусть $\lambda_0 \neq 0$. Тогда в (112) все выписанные коэффициенты отличны от нуля. Два из четырех показателей

$$\lambda_0+2, \quad \mu_0-2, \quad \lambda_0+\mu_0, \quad 2$$

должны быть равны между собой и не меньше остальных.

Рассмотрим все мыслимые комбинации.

а) $\left.\lambda_0 + 2 = \mu_0 - 2 \geqslant \begin{matrix}\lambda_0 + \mu_0 \\ 2\end{matrix}\right\}$,

б) $\left.\lambda_0 + 2 = \lambda_0 + \mu_0 \geqslant \begin{matrix}\mu_0 - 2 \\ 2\end{matrix}\right\}$,

в) $\left.\lambda_0 + 2 = 2 \geqslant \begin{matrix}\mu_0 - 2 \\ \lambda_0 + \mu_0\end{matrix}\right\}$,

г) $\left.\mu_0 - 2 = \lambda_0 + \mu_0 \geqslant \begin{matrix}\lambda_0 + 2 \\ 2\end{matrix}\right\}$,

д) $\left.\mu_0 - 2 = 2 \geqslant \begin{matrix}\lambda_0 + 2 \\ \lambda_0 + \mu_0\end{matrix}\right\}$,

е) $\left.\lambda_0 + \mu_0 = 2 \geqslant \begin{matrix}\lambda_0 + 2 \\ \mu_0 - 2\end{matrix}\right\}$,

Случай а) исключается, так как приводит к невозможному неравенству.

Случай б) исключается, так как противоречит допущению $\lambda_0 \neq 0$.

В случае в) $\mu_0 = 2$, $\lambda_0 > 0$. Старший член в (113): $\pi_0 \varkappa_0 (\lambda_0 - \mu_0) e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma}$; следовательно, $\lambda_0 = \mu_0 = 2$. Но при этом старший член в (114): $\pi_0^2 \left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right) e^{(2\lambda_0+2)\sigma}$ отличен от нуля, что невозможно.

В остальных случаях г), д) и е) имеем $\lambda_0 < 0$ и $\mu_0 > 2$; следовательно, старший член в (114): $\varkappa_0^2 \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right) e^{2\mu_0\sigma}$ отличен от нуля, что невозможно. Этим доказано, что $\lambda_0 = 0$.

Для определения μ_0 рассмотрим уравнение (114); оно теперь принимает вид:

$$\varkappa_0^2 \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right) e^{2\mu_0\sigma} + 2\beta\varkappa_0 e^{(\mu_0+2)\sigma} + \frac{\beta^2}{2} e^{4\sigma} + \ldots = 0. \qquad (114')$$

Здесь три первых коэффициента отличны от нуля; следовательно, два из трех показателей

$$2\mu_0, \quad \mu_0 + 2, \; 4$$

должны быть равны между собой и не меньше третьего. Это приводит к единственно возможному значению для μ_0:

$$\mu_0 = 2. \qquad (116)$$

При этом

$$3\varkappa_0^2 + 4\beta\varkappa_0 + \beta^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\varkappa_0 = k_i \beta, \quad i = 1, 2,$$

где

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{3}.$$

Из (112) определяем коэффициент π_0:

$$\pi_0 = \frac{\beta_u}{2\beta}. \qquad (119)$$

3. Рассмотрим случай, когда число членов в разложениях p и q по степеням e^σ конечно:

$$p = \pi_0 + \pi_1 e^{\lambda_1\sigma} + \ldots + \pi_m e^{\lambda_m\sigma}, \qquad (110')$$

$$q = \varkappa_0 e^{2\sigma} + \varkappa_1 e^{\mu_1\sigma} + \ldots + \varkappa_n e^{\mu_n\sigma}, \tag{111'}$$

где

$$0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_m$$

$$2 > \mu_1 > \ldots > \mu_n$$

и

$$\pi_m \neq 0, \quad \varkappa_n \neq 0.$$

Докажем, что в этом случае существуют решения и найдем их. Определим наименьшие показатели λ_m и μ_u и коэффициенты π_m и $\varkappa_n$. Докажем, что

$$\mu_n = 0. \tag{120}$$

Действительно, пусть $\mu_n \neq 0$.

Если в уравнении $q_u = A$ расположить члены по возрастающим степеням e^σ, получим:

$$\varkappa_n \mu_n \pi_m e^{(\mu_n + \lambda_m)\sigma} + \gamma \varkappa_n e^{(\mu_n - 2)\sigma} - \frac{\gamma_v}{2} e^{-2\sigma} + \ldots = 0. \tag{121}$$

Мы можем считать, отвлекаясь от случая линейчатых поверхностей, что $\gamma_v \neq 0$, поэтому в (121) все выписанные коэффициенты отличны от нуля. Так как (121) должно выполняться тождественно относительно σ, два из трех показателей

$$\mu_n + \lambda_m, \quad \mu_n - 2, \ -2,$$

должны быть равны между собой и не больше третьего.

Рассмотрим все мыслимые комбинации:

° $\mu_n + \lambda_m = \mu_n - 2 \leqslant -2$,

2° $\mu_n + \lambda_m = -2 \leqslant \mu_n - 2$,

3° $\mu_n - 2 = -2 \leqslant \mu_n + \lambda_m$.

Случай 3° противоречит допущению $\mu_n \neq 0$. В случае 1°: $\lambda_m = -2$, $\mu_n < 0$. Из условия $q_u = p_v$ следует:

$$\pi_m \varkappa_n (\mu_n - \lambda_m) e^{(\lambda_m + \mu_n)\sigma} + \frac{\partial \varkappa_n}{\partial u} e^{\mu_n \sigma} - \frac{\partial \pi_\mu}{\partial v} e^{\lambda_m \sigma} + \ldots = 0.$$

Так как $\mu_n < 0$, член с наименьшей степенью $e^{(\lambda_m + \mu_n)\sigma}$ и его коэффициент должен быть равен нулю:

$$\mu_n = \lambda_m = -2.$$

Условие $q_v + e^{2\sigma} p_u = B$ дает:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varkappa_n}{\partial v} e^{\mu_n \sigma} + \varkappa_n^2 \left(\mu_n - \frac{1}{2}\right) e^{2\mu_n \sigma} + \pi_m^2 \left(\lambda_m + \frac{1}{2}\right) e^{(2\lambda_m + 2)\sigma} + \\ &\qquad + 2\gamma \pi_m e^{\lambda_m \sigma} - \frac{\gamma^2}{2} e^{-2\sigma} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

В случае 1° член с наименьшей степенью $e^{2\mu_n\sigma}$ имеет коэффициент отличный от нуля; следовательно, случай 1° невозможен.

В случае 2° $\mu_n > 0$, $\lambda_m < -2$; член с наименьшей степенью $e^{(2\lambda_m + 2)\sigma}$ имеет также коэффициент отличный от нуля; следовательно, и случай 2° невозможен.

Этим доказана справедливость (120).

Теперь (121) принимает следующий вид:

$$-\frac{\gamma^2}{2} e^{-2\sigma} + 2\gamma \pi_m e^{\lambda_m \sigma} + \pi_m^2 \left(\lambda_m + \frac{1}{2}\right) e^{(2\lambda_m + 2)\sigma} + \ldots = 0. \tag{122'}$$

Все три выписанные коэффициента отличны от нуля.

Из трех показателей

$$-2, \quad \lambda_m, \quad 2\lambda_m+2$$

два должны быть равны между собою и не больше третьего.

Это приводит к единственно возможному значению для λ_m:

$$\lambda_m = -2. \tag{123}$$

Для π_m получаем уравнение:

$$3\pi_m^2 - 4\gamma\pi_m + \gamma^2 = 0,$$

откуда

$$\pi_m = h_i\gamma, \quad t = 1,\ 2$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{3}. \tag{124}$$

Наконец, из (121) следует

$$\varkappa_n = \frac{\gamma_v}{\gamma}. \tag{125}$$

Мы определили λ_0 и λ_m. Определим λ_1.
Для этого отберем старшие члены в $(9') - p_v = A$.
Имеем:

$$\frac{\partial\pi_0}{\partial v} + \mu\pi_0 + \pi_1(\lambda_1\varkappa_0 + \beta)\, e^{(\lambda+2)\sigma} + \ldots = 0. \tag{126}$$

Но $\pi_1 \neq 0, \quad \lambda_1\varkappa_0 + \beta = \beta(1 + k_i\lambda_1) \neq 0$, следовательно,

$$\lambda_1 \leqslant -2. \tag{127}$$

Сопоставляя (117) с (123), приходим к выводу, что

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\beta_u}{2\beta} + L_i\gamma\, e^{-2\sigma}, \quad i = 1,\ 2 \\ h_1 &= 1, \ \ h_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\gamma_v}{2\gamma} + k_i\beta\, e^{2\sigma}, \ \ i = 1,\ 2 \\ k_1 &= -1, \quad k_2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Непосредственной подстановкой в уравнения (9), (11), учитывая условия интегрируемости (48), убеждаемся, что возможны лишь следующие два случая:

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \ \ p = -\frac{\beta_u}{2\beta} + \gamma e^{-2\sigma}, \quad q = \frac{\gamma_v}{2\gamma} - \beta e^{2\sigma}, \\ &2^\circ \ \ p = -\frac{\beta_u}{2\beta} + \frac{\gamma}{3}\, e^{-2\sigma}, \quad q = \frac{\gamma_v}{2\gamma} - \frac{\beta}{3}\, e^{2\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Подставив эти значения p и q в (9) и (11), получаем в случае 1°:

$$\left.\begin{aligned} &(\lg\beta)_{uv} = (\lg\gamma)_{uv} = 4\beta\gamma \\ &2L = (\lg\beta)_{uu} - \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 - \beta(\lg\gamma)_v - 2\beta_v \\ &2M = (\lg\gamma)_{vv} - \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 - \gamma(\lg\beta)_u - 2\gamma_u. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Следовательно, по (13):

$$\left.\begin{aligned} 4p_{11} &= 2\theta_{uu} - \theta_u^2 - (\lg\beta)_{uu} + \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 + \beta(\lg\gamma)_v - 2\beta\theta_v \\ 4p_{22} &= 2\theta_{vv} - \theta_v^2 - (\lg\gamma)_{vv} + \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 + \gamma(\lg\beta)_u - 2\gamma\theta_u \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

и в случае 2°:

$$(\lg\beta)_{uv} = (\lg\gamma)_{uv} = \frac{4}{9}\beta\gamma,$$

$$\left.\begin{aligned} 2L &= \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - \frac{5}{3}\frac{\beta}{\gamma}\gamma_v - \frac{10}{3}\beta_v, \\ 2M &= \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)^2 - \frac{5}{3}\frac{\gamma}{\beta}\beta_u - \frac{10}{3}\gamma_u. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Следовательно, по (13):

$$\left.\begin{aligned} 4p_{11} &= 2\theta_{uu} - \theta_u^2 - (\lg\beta)_{uu} + \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 + \frac{1}{3}\beta(\lg\beta^4\gamma^5)_v - 2\beta\theta_v \\ 4p_{22} &= 2\theta_{vv} - \theta_v^2 - (\lg\gamma)_{vv} + \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 + \frac{1}{3}\gamma(\lg\gamma^4\beta^5)_u - 2\gamma\theta_u. \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

4. Выбор функции θ сводится к нормированию однородных координат поверхности. Положив в случае 1°

$$2d\theta = (\lg\beta)_u\,du + (\lg\gamma)_v\,dv, \quad (135)$$

(правая часть есть полный дифференциал), получаем по (132)

$$p_{11} = p_{22} = 0. \quad (136)$$

Следовательно, координаты неоднородны; можно считать $t = 1$. И по (131) и (135):

$$2\theta_u = (\lg\beta)_u, \quad 2\theta_v = (\lg\gamma)_v, \quad \theta_{uv} = 2\beta\gamma. \quad (137)$$

Уравнения (130), принимают вид:

$$p = \gamma e^{-2\sigma} - \theta_u, \quad q = -\beta e^{2\sigma} + \theta_v, \quad (138)$$

а уравнения (137) означают, что система (138) вполне интегрируема и определяет ∞^1 сетей.

Внеся эти значения (p, q) в уравнение (8), получаем $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Так как $t = 1$, то из уравнения (1) видим, что полученные поверхности представляют собой нелинейчатые поверхности переноса с ∞^1 сетей переноса. Эти поверхности были впервые найдены С. Ли.

Уравнения (137), (138) характеризуют поверхности переноса с бесконечным числом сетей переноса и только обозначениями отличаются от уравнений, полученных Рейдемейстером [6].

5. Второй найденный тип поверхностей с ∞^1 сетей Петерсона является новым. Можно получить в конечном виде уравнения этих поверхностей, если воспользоваться следующей теоремой E. Lane'a [9]: нелинейчатые поверхности третьего порядка характеризуются условиями (134) и условием $\left(\lg\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv} = 0$.

В нашем случае к этим условиям добавляется еще по (133) условие:

$$(\lg\beta\gamma)_{uv} = \frac{8}{9}\beta\gamma. \quad (139)$$

Следовательно, остается установить, для каких нелинейчатых поверхностей третьего порядка выполняется условие (139).

Такими поверхностями являются: 1) поверхности третьего порядка с четырьмя коническими точками, 2) поверхности с двумя коническими точками и одной бипланарной, которая получается от слияния двух конических, 3) поверхности с одной конической точкой и одной бипланарной, которая получается от слияния трех конических.

6. Поверхность третьего порядка с четырьмя коническими точками при соответствующем выборе координатного тетраэдра определяется уравнением:

$$yzt + ztx + txy + xyz = 0. \tag{140}$$

В асимптотических координатах

$$x = \frac{1}{(u+v)^2}, \quad y = \frac{-1}{(u-v)^2}, \quad z = \frac{1}{(uv-1)^2}, \quad t = \frac{-1}{(uv+1)^2}. \tag{141}$$

Здесь

$$\beta = \frac{3v(1-v^4)}{(1-u^2v^2)(u^2-v^2)}, \quad \gamma = \frac{-3u(1-u^4)}{(1-u^2v^2)(u^2-v^2)}. \tag{142}$$

Уравнение (139) выполняется.

Для определения ∞^1 сетей Петерсона надо проинтегрировать вполне интегрируемую систему (130_2). Переписав первое уравнение так:

$$2e^{2\sigma}\sigma_u = \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{2}(\lg\beta)_u e^{2\sigma},$$

и проинтегрировав, находим:

$$\frac{4}{3}\beta e^{2\sigma} = (\lg\beta\gamma)_v + V. \tag{143}$$

Подставив во второе уравнение, получаем для определения V уравнение:

$$2V' + V^2 + (\lg\beta)_{vv} - \frac{1}{2}(\lg\beta\gamma)_v^2 = 0,$$

или по (142):

$$2V' + V^2 = \frac{3(1+14v^4+v^8)}{v^2(1-v^4)^2}. \tag{144}$$

Это уравнение Риккати имеет следующие частные решения:

$$V_1 = \frac{v^4+3}{v(1-v^4)}, \quad V_2 = \frac{-3v^4-8v^2-1}{v(1-v^4)}, \quad V_3 = \frac{-3v^4+8v^2-1}{v(1-v^4)}. \tag{145}$$

Подставив в (143) первое частное решение, получаем

$$e^{2\sigma} = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{u^2}{v^2}. \tag{146}$$

Эта сопряженная сеть составлена из кривых одновременно и плоских и конических (двойная сеть Кенигса) и образуется пересечением поверхности двумя пучками плоскостей с осями $x = y = 0$ и $z = t = 0$.

Второе частное решение определяет сеть

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \left(\frac{u^2-1}{v^2-1}\right)^2. \tag{147}$$

Это двойная сеть Кенигса с осями $y = z = 0$ и $x = t = 0$. Третье частное решение дает:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \left(\frac{u^2-1}{v^2-1}\right)^2. \tag{148}$$

двойную сеть Кенигса с осями $x = z = 0$ и $y = t = 0$.

Общим решением служит:

$$V = \frac{c(v^2+1)^2 + (v^2-1)^2}{c(v^2+1)^2 - (v^2-1)^2} - \frac{3v^4+1}{v(1-v^4)} + \frac{8v}{1-v^4}. \tag{149}$$

Подставив в (143), получаем:

$$\frac{du^2}{dv^2}=\frac{(1-u^2)^2-c^2(1+u^2)^2}{(1-v^2)^2-c^2(1+v^2)^2}. \tag{150}$$

Положив

$$u^2=ku_1^2, \quad v^2=kv_1^2, \quad k=\frac{1+c}{1-c}, \tag{151}$$

имеем по (150):

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-ku_1^2)}}-\int\frac{dv_1}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-kv_1^2)}}=2\mu_1,\\ \int\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-ku_1^2)}}+\int\frac{dv_1}{\sqrt{(1-v^2)(1-kv_1^2)}}=2\mu_2,\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

откуда

$$u_1=sn(\mu_1+\mu_2), \quad v_1=sn(\mu_2-\mu_1). \tag{153}$$

Внеся эти значения в (141) и воспользовавшись теоремой сложения эллиптических функций, находим:

$$\left.\begin{aligned}x=\frac{1}{4\,ksn^2\mu_2 cn^2\mu_1\,dn^2\mu_2}, \quad y=\frac{-1}{4\,ksn^2\mu_1\,cn^2\mu_2\,dn^2\mu_2}\\ z=\frac{1}{(1+ksn^2\mu_1)^2(1-ksn^2\mu_2)^2}, \quad t=\frac{-1}{(1-ksn^2\mu_1)^2(1+ksn^2\mu_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Положив

$$sn^2\mu_1=\tau_1, \quad sn^2\mu_2=\tau_2,$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned}x=\frac{1}{4k\tau_2(1-\tau_1)(1-k^2\tau_2)}, \quad y=\frac{-1}{4k\tau_1(1-\tau_2)(1-k^2\tau_2)},\\ z=\frac{1}{(1+k\tau_1)^2(1-k\tau_2)^2}, \quad z=\frac{-1}{(1-k\tau_1)^2(1+k\tau_2)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Этим уравнениям можно придать следующий вид, обнаруживающий все ∞^1 способов ее канонического представления как поверхности Петерсона:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{(1+k)^2(1-k\tau_1)^2}{(1-\tau_1)(1-k^2\tau_2)}-\frac{(1+k\tau_2)^2}{\tau_2},\\ y&=\frac{(1-k\tau_1)^2}{\tau_1}-\frac{(1-k)^2(1+k\tau_2)^2}{(1-\tau_2)(1-k^2\tau_2)},\\ z&=\frac{-(1+k)^2(1-k\tau_1)^2}{(1+k\tau_1)^2}+\frac{(1-k)^2(1+k\tau_2)^2}{(1-k\tau_2)^2}\\ t&=-\frac{(1-k)^2(1+k\tau_1)^2}{(1-k\tau_1)^2}+\frac{(1+k)^2(1-k\tau_2)^2}{(1+k\tau_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Для кривых, порождающих сети Петерсона, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{(1-k^2)^2(1-k^2\tau_1^2)}{(1-\tau_1^2)(1-k^2\tau_1)^2}, & x_2&=\frac{1-k^2\tau_2^2}{\tau_2^2},\\ y_1&=-\frac{1-k^2\tau^2}{\tau_1^2}, & y_2&=\frac{(1-k^2)^2(1-k^2\tau_2^2)}{(1-\tau_2)^2(1-k^2\tau_2)^2},\\ z_1&=4k(1+k)^2\frac{1-k\tau_1}{(1+k\tau_1)^3}, & z_2&=-4k(1-k^2)\frac{1+k\tau_2}{(1-k\tau_2)^3},\\ t_1&=-4k(1-k)^2\frac{1+k\tau_1}{(1-k\tau_1)^3}, & t_2&=\frac{4k(1-k)^2(1-k\tau_2)}{(1+k\tau_2)^3}.\end{aligned}\right\} \tag{157}$$

Эти кривые расположены на самой поверхности

$$\frac{1}{x_i}+\frac{1}{y_i}+\frac{1}{z_i}+\frac{1}{t_i}=0 \quad i=1, 2,$$

и являются ее асимптотическими линиями. Действительно, имеем:

$$\frac{z_1}{t_1}=-\frac{(1+k^2)(1-k\tau_1)^4}{(1-k^2)(1+k\tau_1)^4}, \quad \frac{z}{t}=-\frac{(1-k\tau_1)^2(1+k\tau_2)^2}{(1+k\tau_1)^2(1-k\tau_2)^2};$$

приравняв эти значения, получаем:

$$1-(\tau_1+\tau_2)+k^2\tau_1\tau_2=0,$$

либо

$$1-k^2(\tau_1+\tau_2)+k^2\tau_1\tau_2=0.$$

В первом случае:

$$sn\,\mu_1\,dn\,\mu_2=\varepsilon\,cn\,\mu_2, \quad \varepsilon^2=1,$$

$$sn\,\mu_2\,dn\,\mu_1=\omega\,cn\,\mu_1, \quad \omega^2=1.$$

Поэтому

$$sn=(\mu_1\pm\mu_2)=\frac{\varepsilon\,cn^2\mu_1\pm cn^2\mu_2}{cn^2\mu_1+cn^2\mu_2}.$$

Если $\varepsilon=\omega$, имеем:

$$sn^2(\mu_1+\mu_2)=u_1^2=1.$$

Следовательно, по (151):

$$u^2=k,$$

асимптотические линии одного семейства.

Если $\varepsilon=-\omega$, имеем:

$$sn^2(\mu_2-\mu_1)=v_1^2=1, \quad v^2=k,$$

асимптотические линии второго семейства.

Аналогично получаем во втором случае асимптотические $u^2=\frac{1}{k}$ или $v^2=\frac{1}{k}$.

7. Уравнение поверхности третьего порядка с двумя коническими точками и одной бипланарной, в которую слились две конические, можно представить при соответствующем выборе координатного тетраэдра уравнением:

$$xyz+xt^2-yt^2=0 \tag{158}$$

и в асимптотических координатах:

$$x=\frac{1}{(u+v)^2}, \quad y=\frac{1}{(u-v)^2}, \quad z=4uv, \quad t=1. \tag{159}$$

Здесь

$$\beta=\frac{3v}{u^2-v^2}, \quad \gamma=-\frac{3u}{u^2-v^2}. \tag{160}$$

Условие (139) выполняется.

Внеся значения β, γ в (130_2), получаем:

$$\sigma_u=\frac{u}{u^2-v^2}(1-e^{-2\sigma}), \quad \sigma_v=\frac{v}{u^2-v^2}(1-e^{2\sigma}). \tag{161}$$

Проинтегрировав систему (161), находим:

$$e^{2\sigma}=\left(\frac{du}{dv}\right)^2=\frac{u^2-k}{v^2-k}. \tag{162}$$

Проинтегрировав (162), получаем:

$$u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\tau_1\tau_2}+\frac{k}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+k\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right). \tag{163}$$

Внеся эти значения в (159), получаем следующие канонические представления поверхности как поверхности Петерсона, содержащие параметр k:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{4\tau_1}{(1+\tau_1)^2}-\frac{4k\tau_2}{(\tau_2+k)^2}, \quad y=\frac{4\tau_1}{(\tau_1-1)^2}-\frac{4k\tau_2}{(\tau_2-k)^2},\\ z&=\left(\tau_2+\frac{k^2}{\tau_2}\right)^2-\left(k\tau_1+\frac{k}{\tau_1}\right)^2, \quad t=\tau_2+\frac{k^2}{\tau^2}-\left(k\tau_1+\frac{k}{\tau_1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Уравнения кривых, порождающих сети Петерсона:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{4(1-\tau_1)}{(1+\tau_1)^3}, \quad y_1=\frac{4(1+\tau_1)}{(1-\tau_1)^3}, \quad z_1=\frac{2k^2(1-\tau_1^4)}{\tau_1^3}, \quad t_1=\frac{k(1-\tau_1^2)}{\tau_1^2},\\ x_2&=\frac{4k(\tau_2-k)}{(\tau_2+k)^3}, \quad y_2=\frac{4k(\tau_2+k)}{(\tau_2-k)^3}, \quad z_2=\frac{2(\tau^4-k^4)}{\tau^3}, \quad t_2=\frac{\tau^2-k^2}{\tau^2}. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Они расположены на самой поверхности и служат ее асимптотическими линиями. Действительно, $z_i=\frac{1}{x_i}-\frac{1}{y_i}$, $i=1,\ 2$. Приравняв $\frac{x_i}{t_i}$ и $\frac{x}{t}$, получаем либо $\tau_1\tau_2=k$, либо $\frac{\tau_2}{\tau_1}=k$. Следовательно, $u=\mathrm{const}$ или $v=\mathrm{const}$.

Среди найденных сетей содержится и двойная сеть Кенигса, образованная пучками плоскостей с осями $z=t=0$ и $x=y=0$. Она получается при $k=0$.

Вторая двойная сеть Кенигса получается из (161) при $\sigma=0$. Осями пучков плоскостей служат прямые $x=t=0$ и $y=t=0$.

8. Поверхность третьего порядка с одной конической точкой и одной бипланарной, которая получается от слияния трех конических, может быть при надлежащем выборе координатного тетраэдра представлена уравнением:

$$xzt+xy^2-t^3=0. \tag{166}$$

В асимптотических параметрах:

$$x=\frac{1}{(v-u)^2}, \quad y=2(u+v), \quad z=-3u^2-3v^2-10uv. \tag{167}$$

Здесь:

$$\beta=\frac{3}{2(u-v)}, \quad \gamma=-\frac{3}{2(u-v)}. \tag{168}$$

Уравнение (139) выполняется.

Уравнения (130_2) сети принимают вид:

$$\sigma_u=\frac{1-e^{-2\sigma}}{2(u-v)}, \quad \sigma_v=\frac{1-e^{2\sigma}}{2(u-v)}. \tag{169}$$

Проинтегрировав, находим:

$$e^{2\sigma}=\frac{du^2}{dv^2}=\frac{u+c}{v+c}, \tag{170}$$

$$u=(\tau_1+\tau_2)^2-c, \quad v=(\tau_2-\tau_1)^2-c. \tag{171}$$

Канонические представления поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &x=\frac{1}{16\tau_2^2}-\frac{1}{16\tau_1^2}, \quad y=4\tau_1^4-4c\,\tau_1^2-4\tau_2^4+4c\,\tau_2^2, \\ &z=16(\tau_2^6-2\tau_2^4+c^2\tau_2^2)-16(\tau_1^6-2\tau_1^4+c^2\tau_1^2), \quad t=\tau_1^2-\tau_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Кривые, порождающие сети:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=\frac{1}{8\tau_1^3},\ y_1=16\tau_1^3-8c\tau_1, \quad z_1=-96\tau_1^5+128\tau_1^3-32c^2\tau_1,\ t_1=2\tau_1, \\ &x_2=-\frac{1}{8\tau_2^3},\ y_2=-16\tau_2^3-8c\tau_2,\ z_2=96\tau_2^5-128\tau_2^3+32c^2\tau_2,\ t=-2\tau_2, \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

расположены на самой поверхности.

Отождествляя $\frac{x}{t}$ и $\frac{x_i}{t_i}$, имеем $\tau_1 \pm \tau_2 = 0$. Следовательно, либо $u+c=0$, либо $v+c=0$, т. е. эти линии служат асимптотическими.

9. Мы рассмотрели случай, когда разложения p и q по степеням e^σ содержат конечное число членов.

В случае бесконечного числа членов хотя бы одного из разложений (110), (111), подставив эти разложения в систему трех дифференциальных уравнений (9′), (11′) и определив последовательно показатели λ_k, μ_k и коэффициенты π_k, $\varkappa_k$, получаем для β, γ, L, M систему дифференциальных уравнений, несовместную с системой (48).

В случае линейчатых поверхностей изложенный метод при конечном числе членов разложения (110), (111) приводит к поверхностям, несущим ∞^2 конических сетей, а при бесконечном числе — к несовместной системе дифференциальных уравнений.

Следовательно, поверхности, несущие ∞^1 конических сетей, исчерпываются полученными выше двумя типами.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 К. М. Петерсон. Математический сборник, I, 391—438, 1866.

2. S. Lie. Собрание сочинений, I, статья 27, II, статьи 10, 13, 14. Geometrie der Berührungstransformationen I, 1896.

3. Я. П. Бланк. Труды 2-го Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде, 1934.

Сообщение Харьк. Матем. Об-ва, 11, 55—68, 1935.

4. Я. П. Бланк. Записки Инст. матем. и мех. ХГУ и ХМО, 19, 121—140, 1948.

5. B. Gambier. Ann. Ecole norm., III, 83—118, 1938. Journ. de math. p. et appl., 19, 63—82, 1940.

6. K. Reidemeister. Hamb. Abh., I, 127—138, 1922.

7. G. Fubini — E. Cech. Introduction a la géométrie projective différentielle des surfaces, 1931.

8. G. Fubini — E. Cech. Geometria projettiva diffrenziale, I, 1926.

9. E. Lane. Atreatise on projective differential geometry, стр. 131, 1942.