Я. П. БЛАНК (Харьков)

О ПОВЕРХНОСТЯХ СДВИГА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Наличие в группе движений эллиптического пространства двух трёхчленных подгрупп клиффордовых сдвигов позволяет строить в этом пространстве поверхности сдвига, имеющие глубокую аналогию с поверхностями переноса эвклидова пространства.

Группы клиффордовых сдвигов первого и второго рода, как известно, удобно представить посредством умножения кватернионов:

$$X^*=X\cdot A,\quad X^*=A\cdot X,$$

где

$$X=x_0+ix_1+jx_2+kx_3,\quad A=a_0+ia_1+ja_2+ka_3.$$

Соответственно этому поверхность сдвига допускает следующее каноническое представление:

$$X=U\cdot V,$$

где кватернионы U, V зависят от одного параметра каждый, первый от u, и второй от v, или в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned}
x_0&=u_0v_0-u_1v_1-u_2v_2-u_3v_3;\\
x_1&=u_1v_0+u_0v_1-u_3v_2+u_2v_3;\\
x_2&=u_2v_0+u_3v_1+u_0v_2-u_1v_3;\\
x_3&=u_3v_0-u_2v_1+u_1v_2+u_0v_3.
\end{aligned}\tag{1}$$

Кривыми сдвигами здесь служат координатные линии. При этом касательные к линиям u вдоль v (соответственно v вдоль u) правые (левые) параллели Клиффорда и встречают, таким образом, пару образующих первой (второй) серии абсолюта

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

Если нормировать кватернионы U, V, положив

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2=1,\quad v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2=1,\tag{2}$$

будем иметь также для координат поверхности сдвига

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

и, если кривые сдвига не изотропные, приняв дугу за параметр,

$$u_0'^2+u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2=1,\quad v_0'^2+v_1'^2+v_2'^2+v_3'^2=1.\tag{3}$$

Бианки[1] приходит к ним, изучая поверхности эллиптического пространства нулевой гауссовой кривизны. Полученный им замечательный результат гласит: *всякая поверхность нулевой кривизны эллиптического пространства есть поверхность сдвига*. Она может быть линейчатой, тогда она допускает сдвиг произвольной, расположенной на ней кривой вдоль прямолинейных образующих—параллелей Клиффорда.

В общем же случае, кривые сдвига—асимптотические линии постоянного кручения $+\frac{1}{R}$ для одного семейства, $-\frac{1}{R}$ —для другого, где $\frac{1}{R^2}$—кривизна пространства.

Представляет интерес перенесение на эти поверхности результатов, полученных для поверхностей переноса.

Среди возникающих здесь вопросов особенно привлекательной и сложной представляется задача об отыскании поверхностей сдвига, допускающих более чем один способ образования,—задача, которая была для обычного пространства поставлена и решена Ли и которой занимались Пуанкаре, Дарбу и другие авторы.

Н. Г. Чеботарёву[2] принадлежит широкое обобщение поверхностей переноса.

Вместо группы переносов задаётся произвольная группа Ли. Рассматриваются поверхности, несущие ∞^1 кривых, переходящих друг в друга в результате преобразований данной группы (системы импримитивности). При этом траектории отдельных точек могут составить систему импримитивности относительно другой группы (сопряжённой).

Поверхности сдвига реализуют интересный пример, иллюстрирующий эту мысль Н. Г. Чеботарёва. Действительно, поверхность сдвига несёт два семейства кривых сдвига, но одно из них образует систему импримитивности относительно группы правых сдвигов, второе—относительно группы левых сдвигов.

Поверхности переноса, как известно, характеризуются наличием сопряжённой чебышевской сети.

В настоящей статье вводится для поверхностей эллиптического пространства понятие клиффордовой сопряжённости, позволяющее охарактеризовать поверхности сдвига как поверхности, несущие k-сопряжённую чебышевскую сеть, и сделать ряд заключений, касающихся теории этих поверхностей. (Результаты настоящей статьи были частично опубликованы в заметке «Клиффордово-сопряжённые сети»*).)

§ 1. Гауссова кривизна линейчатых поверхностей эллиптического пространства

2. Примем, что кривизна эллиптического пространства $K_0=1$. У развёртывающихся поверхностей гауссова кривизна постоянна и равна единице. У линейчатых, образованных параллелями Клиффорда (линейчатых Клиффорда), гауссова кривизна равна нулю.

Рассмотрим изменение гауссовой кривизны вдоль прямолинейной образующей в общем случае. Пусть x, y—точки сжатия образующей, z—точка на нормали к линейчатой поверхности, проведённой в x, w—точка на прямой, лежащей в касательной плоскости и перпендикуляр-

*) ДАН, т. 59, № 7, 1231–1234.

ной к образующей в x, причём x, y, z, w взаимно полярны относительно абсолюта:

$$x^2=y^2=z^2=w^2=1,$$

$$xy=xz=xw=yz=yw=zw=0$$

$$(xy=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3).$$

Имеют место следующие формулы, данные Бляшке[3]:

$$\frac{dx}{dt}=qy+\bar{p}w,\quad \frac{dz}{dt}=-py+qw,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\bar{q}x+pz,\quad \frac{dw}{dt}=-\bar{p}x-qz.$$

Здесь t — параметр, определяющий положение образующей, а p, $\bar{p}$, q, $\bar{q}$ — четыре функции одного аргумента t, отношения которых однозначно определяют линейчатую поверхность вплоть до положения. Если α — расстояние переменной точки X образующей от точки сжатия x, имеем

$$X=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

Дифференцируем по α и по t:

$$X'_\alpha=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,$$

$$X'_t=\cos\alpha\,(qy+\bar{p}w)+\sin\alpha\,(-\bar{q}x+pz).$$

Компоненты первого тензора поверхности

$$g_{11}=X'^2_\alpha=1,\ g_{12}=X'_\alpha X'_t=\bar{q},\ g_{22}=X'^2_t=\bar{q}^2+\bar{p}^2\cos^2\alpha+p^2\sin^2\alpha,$$

$$g=g_{11}g_{22}-g^2_{12}=\bar{p}^2\cos^2\alpha+p^2\sin^2\alpha.$$

Для компонентов второго тензора имеем

$$b_{11}=0,\ b_{12}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,(XX'_\alpha X'_tX''_{\alpha t}),$$

где

$$(XX'_\alpha X'_tX''_{\alpha t})^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\bar{q} \\ 0 & 1 & \bar{q} & 0 \\ 0 & \bar{q} & g_{22} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha} \\ -\bar{q} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha} & \bar{q}^2+\bar{p}^2\sin^2\alpha+p^2\cos^2\alpha \end{vmatrix}=p^2\bar{p}^2.$$

Гауссова кривизна

$$K=1-\frac{b_{11}b_{22}-b^2_{12}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}}=1-\frac{p^2\bar{p}^2}{(p^2\sin^2\alpha+\bar{p}^2\cos^2\alpha)^2}\,. \tag{4}$$

Если образующие — параллели Клиффорда, то $p^2=\bar{p}^2$ и $K=0$. Если поверхность развёртывающаяся, то p или $\bar{p}$ равно нулю, $K=1$. Эти случаи исключим.

В точках сжатия

$$K_1 = \frac{\bar{p}^2 - p^2}{\bar{p}^2} \qquad (\alpha = 0),$$

$$K_2 = \frac{p^2 - \bar{p}^2}{p^2} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right).$$

Это — экстремальные значения K вдоль образующей, причём одно соответствует максимуму, другое — минимуму. Они связаны соотношением

$$\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = 1. \tag{5}$$

Так как $p^2 \neq \bar{p}^2$, K_1 и K_2—разных знаков, и на каждом из двух отрезков, на которые образующая разбивается точками x, y, имеется по точке, где $K=0$. Эти точки определяются формулами

$$\cos^2\alpha = \frac{|p|}{|p| + |\bar{p}|}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{|\bar{p}|}{|p| + |\bar{p}|}; \tag{6}$$

они расположены симметрично относительно точек сжатия.

Таким образом на линейчатой поверхности в эллиптическом пространстве в общем случае имеются две линии нулевой гауссовой кривизны.

§ 2. Клиффордово-сопряжённые сети

3. Пусть C—кривая на поверхности S эллиптического пространства.

Если гауссова кривизна S вдоль C отлична от нуля и C не асимптотическая, среди линейчатых поверхностей, описанных около S вдоль C, имеются две и только две, для которых C—линия нулевой гауссовой кривизны.

Действительно, пусть x — точка кривой C. Уравнения линейчатой, описанной около S вдоль C:

$$x^* = x\cos\alpha + \frac{\delta x}{\delta s}\sin\alpha,$$

здесь x и $\frac{\delta x}{\delta s}$ вдоль C—функции дуги s.

Если воспользоваться деривационными формулами

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\,\partial u^k} = \Gamma^j_{ik}\frac{\partial x}{\partial u^j} - g_{ik}x + b_{ik}\xi, \tag{7}$$

где ξ—точка нормали, взаимно полярная с x относительно абсолюта, имеем при $\alpha=0$

$$(x^* x^*_\alpha x^*_s x^*_{\alpha s}) = \left(x\,\frac{\delta x}{\delta s}\,\frac{dx}{ds}\,\xi\right) b_{ik}\,\frac{du^i}{ds}\,\frac{\delta u^k}{\delta s}.$$

При $\alpha=0$ должно быть

$$K^* = 1 + \frac{b^*_{11}b^*_{22} - b^{*2}_{12}}{g^*} = 0,$$

но

$$b^*_{11} = 0$$

и

$$b^{*2}_{12} = g^* = \sin^2\omega \qquad (\alpha = 0).$$

Имеем

$$b_{12}^{*}\sqrt{g^{*}}=(x^{*}x_{\alpha}^{*}x_{s}^{*}x_{\alpha s}^{*}),$$

$$\left(x\frac{\delta x}{\delta s}\frac{dx}{ds}\xi\right)^{2}=\sin^{2}\omega,$$

следовательно,

$$b_{ik}du^{i}\delta u^{k}=\pm\sqrt{g}\,(du^{1}\,\delta u^{2}-du^{2}\,\delta u^{1}). \tag{8}$$

Это соотношение устанавливает в пучке касательных к поверхности два (в зависимости от знака) проективных соответствия.

Двойными элементами служат асимптотические касательные.

Соответствия вырождаются, если

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}+\sqrt{g} \\ b_{12}-\sqrt{g} & b_{22} \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

т. е. в точках, где гауссова кривизна $K=0$.

Пусть t—касательная к S в точке O.

Опишем около S линейчатую Клиффорда с образующими—правыми (левыми) параллелями к t. Касательную t' к линии соприкосновения S с описанной линейчатой назовём правой (левой) клиффордово-сопряжённой с t.

Соотношение (8) и представляет собою аналитическое выражение k-сопряжённости.

В отличие от сопряжённости в смысле Дюпена k-сопряжённость не инволюционна. Если поменять местами символы d и δ, знак перед корнем меняется на противоположный, откуда следует: если t_2—правая k-сопряжённая для t_1, то t_1—левая k-сопряжённая для t_2.

4. Если t_i $(i=1, 2)$ — k-сопряжённые касательные, а t_i^*—касательные, сопряжённые с t_i в дюпеновом смысле, то t_i^* k-сопряжены между собой.

Действительно, отнесём поверхность к асимптотическим линиям и обозначим

$$\frac{du^{2}}{du^{1}}=k, \quad \frac{\delta u^{2}}{\delta u^{1}}=\varkappa.$$

Имеем

$$b_{12}\,(k+\varkappa)=\pm\sqrt{g}\,(k-\varkappa). \tag{10}$$

Но в силу дюпеновой сопряжённости t_i и t_i^*

$$k+k^{*}=0 \qquad \varkappa+\varkappa^{*}=0, \tag{11}$$

поэтому

$$b_{12}\,(k^{*}+\varkappa^{*})=\pm\sqrt{g}\,(k^{*}-\varkappa^{*}).$$

5. Клиффордова сопряжённость позволяет дать следующее истолкование гауссовой кривизны линейного элемента.

Реализуем данный линейный элемент в виде первой дифференциальной формы некоторой поверхности в эллиптическом пространстве $K_0=1$.

Гауссова кривизна равна двойному отношению касательных t_1, t_2, t_1^*, t_2^*, где t_i— пара k-сопряжённых касательных, а t_i^* сопряжены с t_i в дюпеновом смысле.

Доказательство. По (11) $D(t_1 t_2 t_1^* t_2^*)=\frac{4k\varkappa}{(k+\varkappa)^2}$, а по (10)

$$\frac{4k\varkappa}{(k+\varkappa)^2}=\frac{g-b_{12}^2}{g},$$

следовательно,

$$D(t_1 t_2 t_1^* t_2^*)=K.$$

6. Чтобы данная сеть кривых на поверхности была сетью сдвига, необходимо и достаточно, чтобы она была k-сопряжённой и чебышевской.

Необходимость следует непосредственно из канонического представления поверхности сдвига (1), (2), (3). Докажем достаточность.

Рассмотрим линейчатую поверхность, образованную касательными к кривым одного из семейств, входящих в состав сети, вдоль произвольной кривой C второго семейства:

$$x^*=x\cos\alpha+\frac{\delta x}{\delta s}\sin\alpha.$$

Имеем

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\,\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{\delta u^i}{\delta s}+\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta u^i}{\delta s}\right). \tag{12}$$

Так как сеть чебышевская, $\frac{\delta x}{\delta s}$ параллельны вдоль C в смысле Леви-Чивита:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta u^i}{\delta s}\right)+\Gamma_{jk}^{i}\frac{\delta u^j}{\delta s}\frac{du^k}{ds}=0,$$

а в силу k-сопряжённости

$$b_{ik}\frac{du^i}{ds}\frac{\delta u^k}{\delta s}=\pm\sin\omega.$$

Поэтому (12) по (7) запишется так:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)=\pm\,\xi\sin\omega-x\cos\omega.$$

Дифференцируя x^*, имеем

$$\frac{dx^*}{d\alpha}=-x\sin\alpha+\frac{\delta x}{\delta s}\cos\alpha,$$

$$\frac{dx^*}{ds}=\frac{dx}{dt}\cos\alpha+\sin\alpha\,(\pm\,\xi\sin\omega-x\cos\omega).$$

Отсюда

$$g_{11}^*=g_{22}^*=1,\quad g_{12}^*=\cos\omega,\quad g^*=\sin^2\omega,$$

$$(x^* x_\alpha^* x_s^* x_{\alpha s}^*)^2=\left(x\frac{\delta x}{\delta s}\frac{dx}{ds}\xi\right)^2\sin^2\omega=\sin^4\omega$$

и

$$b_{12}^{*2}=\frac{(x^* x_\alpha^* x_s^* x_{\alpha s}^*)^2}{g^*}=\sin^2\omega.$$

Следовательно,

$$K^* = 1 - \frac{b_{12}^{*2}}{g^*} = 0.$$

Итак, касательные к кривым одного семейства вдоль произвольной кривой второго семейства—параллели Клиффорда. Возьмём две произвольные кривые одного семейства; кривые второго семейства отсекают на них равные дуги, причём в соответствующих точках касательные к ним параллельны в смысле Клиффорда. Поэтому существует сдвиг, который их приводит в совмещение, следовательно, поверхность, несущая такую сеть, есть поверхность сдвига.

7. На поверхности нулевой кривизны по Бианки всегда имеется сеть сдвига, а именно, асимптотическая. Существуют ли иные сети сдвига на такой поверхности? Мы видели, что в случае $K=0$ k-сопряжённость вырождается, и так как в этом случае

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0,$$

одна из k-сопряжённых касательных асимптотическая, вторая—неопределённая.

Таким образом из двух семейств сети сдвига одно составлено из асимптотических.

Так как $K=0$, можно ввести такую систему координат, чтобы $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=0$ и для асимптотических кривых сдвига

$$\frac{\delta u^2}{\delta u^1} = -\frac{b_{11}}{b_{12}-1} = \frac{b_{12}+1}{-b_{22}}.$$

При движении вдоль кривой второго семейства асимптотическая касательная должна перемещаться параллельно в смысле Леви-Чивита:

$$d\left(\frac{\delta u^i}{\delta s}\right) = 0,$$

или

$$\frac{du^2}{du^1} = \frac{b_{22}\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1}(1+b_{12})}{(1+b_{12})\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^2} - b_{22}\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^2}}. \tag{13}$$

С помощью уравнений Кодацци

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}, \qquad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2}$$

и соотношений, полученных дифференцированием тождества

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -1,$$

можно (13) переписать так:

$$\frac{du^2}{du^1} = \frac{(b_{12}-1)\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - b_{11}\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^2}}{(1+b_{12})\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^2} - b_{22}\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^2}}.$$

Отсюда, если числитель и знаменатель не обращаются в нуль,

$$\frac{du^2}{du^1} = -\frac{b_{11}}{1+b_{12}} = \frac{1-b_{12}}{b_{22}},$$

и второе семейство кривых сдвига также асимптотическое. $\frac{du^2}{du^1}$ становится неопределённым, если

$$b_{22}\frac{\partial b_{12}}{\partial u^2}=(1\pm b_{12})\frac{\partial b_{22}}{\partial u^2},$$

$$b_{22}\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=(1\pm b_{12})\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}.$$

Но в этом случае

$$\delta\left(\frac{\delta u^i}{\delta s}\right)=0,$$

асимптотические автопараллельны, т. е. состоят из прямых, и поверхность—линейчатая Клиффорда. На такой поверхности любая кривая при сдвиге вдоль прямолинейных образующих порождает семейство кривых сдвига, дополняющее клиффордовы параллели до сети сдвига.

На всякой нелинейчатой поверхности нулевой кривизны существует единственная сеть кривых сдвига, составленная из асимптотических линий.

§ 3. Условия, характеризующие поверхности, несущие больше одной сети кривых сдвига

8. Отнесём поверхность сдвига к сети кривых сдвига.

Условие k-сопряжённости координатной сети:

$$b_{12}^2=\sin^2\omega.$$

Пусть на поверхности имеется ещё вторая сеть сдвига

$$\frac{du^2}{du^1}=\varphi(u^1,u^2),\qquad \frac{\delta u^2}{\delta u^1}=\psi(u^1,u^2).$$

Так как координатная сеть чебышевская, имеем

$$g_{11}=g_{22}=1,\quad g_{12}=\cos\omega,\quad \Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2=0,$$

$$\Gamma_{11}^1=\operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u^1},\quad \Gamma_{11}^2=-\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u^1},\quad \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u^2},\quad \Gamma_{22}^2=\operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u^2}.$$

Условие k-сопряжённости второй сети:

$$b_{11}+2\sin\omega\cdot\varphi\pm b_{22}\varphi\psi=0. \tag{14}$$

Эта сеть должна быть чебышевской. Касательные к кривым одного семейства вдоль кривой второго семейства параллельны в смысле Леви-Чивита:

$$d\left(\frac{\delta u^i}{\delta s}\right)+\Gamma_{jk}^i\frac{\delta u^i}{\delta s}du^k=0,$$

$$\delta\left(\frac{du^i}{ds}\right)\pm\Gamma_{jk}^i\frac{du^i}{ds}\delta u^k=0.$$

Внеся сюда значения Γ_{jk}^i, имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\omega}{\partial u^1}(\psi\cos\omega\pm1)-\frac{\partial\omega}{\partial u^2}(\psi\pm\cos\omega)\varphi\psi-\sin\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial u^1}\pm\varphi\frac{\partial\psi}{\partial u^2}\right)=0;\\&\frac{\partial\omega}{\partial u^2}(\varphi\cos\omega\pm1)-\frac{\partial\omega}{\partial u^2}(\varphi\pm\cos\omega)\varphi\psi-\sin\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\pm\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\right)=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Необходимым и достаточным условием существования второй сети сдвига является существование двух функций φ, ψ, удовлетворяющих одновременно трём условиям (14), (15). Вместо двух функций φ, ψ, связанных (14), введём одну функцию σ, положив

$$\sigma = b_{22}\psi + \sin\omega = -\frac{b_{11}}{\varphi} - \sin\omega. \tag{16}$$

Заменив в (15) φ, ψ через σ, получим два уравнения, содержащие σ и её первые частные производные. Разрешим их относительно частных производных. Воспользовавшись формулами Кодацци

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}\sin\omega = b_{22}\frac{\partial\omega}{\partial u^1}, \qquad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}\sin\omega = b_{11}\frac{\partial\omega}{\partial u^2},$$

получаем

$$\begin{aligned}(\sigma^2 + b)\frac{\partial\sigma}{\partial u^1} &= a_1\sigma^3 + b_1\sigma^2 + c_1\sigma + d_1,\\ (\sigma^2 + b)\frac{\partial\sigma}{\partial u^2} &= a_2\sigma^3 - b_2\sigma^2 + c\,\sigma - d\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}b &= b_{11}b_{22} - b_{12}^2,\\ a_1 &= \frac{\partial}{\partial u^1}\ln(b_{22}^2\sin\omega),\\ b_1 &= \frac{\partial}{\partial u^2}\ln\frac{b_{11}^3\sin\omega}{b_{22}} - 4\sin\omega\frac{\partial}{\partial u^1}\ln b_{22},\\ c_1 &= b_{11}b_{22}\frac{\partial}{\partial u^1}\ln\frac{b_{11}b_{22}}{\sin^2\omega} + 2\frac{\sin^3\omega}{b_{22}}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{b_{11}b_{22}}{\sin^2\omega}\right) - b\frac{\partial}{\partial u^1}\ln\frac{b_{22}^2}{\sin\omega},\\ d_1 &= \sin^3\omega\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{b_{11}b_{22}}{\sin^2\omega}\right) - \frac{\sin^4\omega}{b_{22}}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{b_{11}b_{22}}{\sin^2\omega}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

а коэффициенты a_2, b_2, c_2, d_2 получаются из вышенаписанных перестановкой индексов 1, 2.

Приравняем значения $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^1\partial u^2}$, полученные дифференцированием (17):

$$(\sigma^2 + b)\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial u^2} - \frac{\partial a_2}{\partial u^1}\right)\sigma^3 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial u^2} + \frac{\partial b_2}{\partial u^1}\right)\sigma^2 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^2} - \frac{\partial c_2}{\partial u^1}\right)\sigma + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial d_1}{\partial u^2} + \frac{\partial d_2}{\partial u^1}\right)\right] + A\sigma^4 + B\sigma^3 + C\sigma^2 + D\sigma + E = 0,$$

где

$$\begin{aligned}A &= -(a_1b_2 + b_1a_2),\\ B &= 2(a_1c_2 - c_1a_2) + a_2\frac{\partial b}{\partial u^1} - a_1\frac{\partial b}{\partial u^2},\\ C &= b_1c_2 + c_1b_2 - 3(a_1d_2 + d_1a_2) - b_2\frac{\partial b}{\partial u^1} - b_1\frac{\partial b}{\partial u^2},\\ D &= 2(b_2d_1 - d_2b_1) + c_2\frac{\partial b}{\partial u^1} - c_1\frac{\partial b}{\partial u^2},\\ E &= -d_1\left(c_2 + \frac{\partial b}{\partial u^2}\right) - d_2\left(c_1 + \frac{\partial b}{\partial u^1}\right).\end{aligned} \tag{18a}$$

Полученное условие интегрируемости — пятой степени относительно σ. Однако оно содержит множитель σ^2+b. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$D = bB, \quad E = bC - b^2A,$$

поэтому

$$A\sigma^4 + B\sigma^3 + C\sigma^2 + D\sigma + E \equiv (\sigma^2 + b)\left[A(\sigma^2 - b) + B\sigma + C\right].$$

Но $\sigma^2 + b = 0$ не даёт сети сдвига. Действительно, из $\sigma^2 + b = 0$ следует $\varphi = \psi$, т. е. оба семейства совпадают, и сеть кривых сдвига вырождается в прямолинейные образующие. Следовательно, этот множитель надо отбросить, и условие интегрируемости сводится к следующему:

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial u^2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_1}\right)\sigma^3 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial u^2} + \frac{\partial b_2}{\partial u^1}\right)\sigma^2 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^2} - \frac{\partial c_2}{\partial u^1}\right)\sigma + \\ + \left(\frac{\partial d_1}{\partial u^2} + \frac{\partial d_2}{\partial u^1}\right) + A(\sigma^2 - b) + B\sigma + C = 0. \qquad (19)$$

Координатная сеть сдвига соответствует значениям $\varphi = 0$, $\psi = \infty$, т. е. значению $\sigma = \infty$.

Если значение σ, полученное из уравнения (19), удовлетворяет системе (17), оно определяет сеть сдвига.

Если поверхность имеет больше четырёх сетей сдвига, то она имеет ∞^1 таких сетей.

Действительно, в этом случае уравнение (19) превращается в тождество, и система (17) вполне интегрируема.

Чтобы это имело место, должны выполняться следующие четыре условия:

$$\frac{\partial a_1}{\partial u^2} - \frac{\partial a_2}{\partial u^1} = 0, \qquad \frac{\partial b_1}{\partial u^2} + \frac{\partial b_2}{\partial u^1} + A = 0,$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial u^2} - \frac{\partial c_2}{\partial u^1} + B = 0, \quad \frac{\partial d_1}{\partial u^2} + \frac{\partial d_2}{\partial u^1} - Ab + C = 0. \qquad (20)$$

Исследование совместности этой системы представляет, однако, значительные трудности, и вопрос о существовании поверхностей сдвига с бесконечным числом сетей сдвига (помимо линейчатых Клиффорда) остаётся пока открытым.

9. Рассмотрим на поверхности сдвига ($K \neq 0$) сеть, составленную из кривых, сопряжённых в смысле Дюпена кривым сдвига. Эта сеть, как мы видели, k-сопряжённая. Существуют ли поверхности, на которых она также и чебышевская и образует, следовательно, вторую сеть сдвига?

Из условий сопряжённости кривых второй сети с кривыми первой сети следует

$$\varphi = -\frac{b_{11}}{\sin\omega}, \quad \psi = -\frac{\sin\omega}{b_{22}}.$$

Эти значения действительно удовлетворяют условию (14). По (16), им соответствует $\sigma = 0$. Подставив это значение в систему (17), получаем $d_1 = d_2 = 0$, или по (18)

$$b_{22}\frac{\partial K}{\partial u^1} - b_{12}\frac{\partial K}{\partial u^2} = 0,$$

$$b_{12}\frac{\partial K}{\partial u^1} - b_{11}\frac{\partial K}{\partial u^2} = 0,$$

откуда $K = \mathrm{const}$.

Обратно, если существует поверхность сдвига постоянной не равной нулю кривизны, то сеть, составленная из кривых, дюпеново-сопряжённых кривым сдвига, образует вторую сеть сдвига. Естественно возникает вопрос: существуют ли поверхности сдвига постоянной кривизны $K \neq 0$?

Из существования поверхностей сдвига постоянной кривизны следует существование поверхностей переноса постоянной кривизны, и обратно. В обоих случаях мы приходим к исследованию совместности одной и той же системы. Действительно, в обоих случаях мы имеем чебышевскую сеть, которую можно принять за координатную:

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad \cos\omega = g_{12};$$

формулы Кодацци имеют одинаковый вид:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}\sin\omega = b_{22}\frac{\partial\omega}{\partial u^1}, \qquad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}\sin\omega = b_{11}\frac{\partial\omega}{\partial u^2}, \tag{21}$$

а также и уравнение Гаусса:

$$\begin{gathered} b_{11}b_{22} = K\sin^2\omega, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial u^1\,\partial u^2} \mp K\sin\omega = 0, \quad K = const. \end{gathered} \tag{22}$$

С помощью (22) уравнения (21) переписываются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2}(b_{11}^2) &= -2K\frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega), \\ \frac{\partial}{\partial u_1}(b_{22}^2) &= -2K\frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega). \end{aligned} \tag{21a}$$

Таким образом вопрос сводится к исследованию совместности системы (21a), (22).

Можно избежать исследования совместности этой системы, заметив, что из существования поверхности переноса постоянной кривизны следует, что она несёт сопряжённую сеть геодезических, т. е. является одновременно поверхностью Фосса, и обратно, из существования поверхности Фосса постоянной кривизны следует, что она несёт сеть переноса. Действительно, отнесём поверхность переноса постоянной кривизны к асимптотическим координатам, которые образуют чебышевскую сеть (заметим, что из существования поверхности переноса постоянной положительной кривизны следует существование поверхности переноса постоянной отрицательной кривизны, так как поверхности $\bar r = \bar U + \bar V$ и $\bar r^* = \bar U - \bar V$ имеют кривизну, равную по абсолютной величине и противоположную по знаку).

Сеть переноса есть сопряжённая сеть цилиндрических линий. Дифференциальное уравнение цилиндрических линий (которым в сферическом отображении соответствуют большие круги):

$$\sin^2\omega\frac{d^2u^2}{du^{1\,2}} - \frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^3 - \cos\omega\frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 \mp$$

$$\mp\cos\omega\frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega)\frac{du^2}{du^1} - \frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega) = 0.$$

Сопряжённая сеть $du^2 = \pm\varphi(u^1, u^2)\,du^1$ должна удовлетворять этому уравнению. Подставляя $\pm\varphi(u^1, u^2)$, получаем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^2} = 2\frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega), \quad \frac{\partial\mu}{\partial u^1} = 2\frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega),$$

$$\lambda\mu = \sin^4\omega,$$

где

$$\lambda = \varphi^2\sin^2\omega, \quad \mu = \frac{\sin^2\omega}{\varphi^2}.$$

К этой системе надо присоединить

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^1\,\partial u^2} + K\sin\omega = 0, \quad K = \text{const}.$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение геодезических:

$$\sin^2\omega\frac{d^2u^2}{du^{1^2}} - \frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^3 - \cos\omega\frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 +$$
$$+\cos\omega\frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega)\frac{du^2}{du^1} + \frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega) = 0,$$

и если существует сопряжённая геодезическая сеть

$$du^2 = \pm\psi(u^1, u^2)\,du^1,$$

то должна быть совместна система:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^2} = -2\frac{\partial}{\partial u^1}(\cos\omega), \quad \frac{\partial\beta}{\partial u^1} = -2\frac{\partial}{\partial u^2}(\cos\omega),$$

$$\alpha\beta = \sin^4\omega, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^1\,\partial u^2} + K\sin\omega = 0, \quad K = \text{const.},$$

где

$$\alpha = \psi^2\sin^2\omega, \quad \beta = \frac{\sin^2\omega}{\psi^2}.$$

Мы видим, что если $du^2 = \pm\varphi(u^1, u^2)\,du^1$ будет сетью переноса, то на той же поверхности $du^2 = \pm i\varphi(u^1, u^2)\,du^1$ будет сетью Фосса.

К этому же выводу можно притти, заметив, что преобразование Гаццидакиса переводит цилиндрические одной поверхности постоянной положительной кривизны в геодезические преобразованной, сохраняя сопряжённость; таким образом, поверхность переноса постоянной положительной кривизны преобразуется в поверхность Фосса постоянной кривизны, и обратно. Поверхность Фосса допускает изгибание на основании Фосса, переводящее асимптотическую сеть в сопряжённую, а так как асимптотическая—чебышевская, то сопряжённая будет сетью переноса.

Эйзенгарт[4] доказал, что не существует поверхности Фосса постоянной отрицательной кривизны, следовательно, не существует поверхностей переноса и поверхностей сдвига постоянной кривизны. Следовательно, сеть, составленная из кривых, сопряжённых кривым сдвига, не образует сети сдвига.

§ 4. Изгибание с сохранением k-сопряжённой сети

10. *Пусть между двумя поверхностями S, S^* установлено взаимно однозначное точечное соответствие.*

Если соответствие не асимптотическое, существуют две общие k-сопряжённые сети.

Действительно, имеем

$$b_{ik}\,du^i\,\delta u^k=\sqrt{g}\,(du^1\,\delta u^2-du^2\,\delta u^1),$$
$$b^*_{ik}\,du^i\,\delta u^k=\sqrt{g^*}\,(du^1\,\delta u^2-du^2\,\delta u^1);$$

исключив δu^k, получаем уравнение

$$\alpha_{ik}\,du^i\,du^k=0,$$

где

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}+\sqrt{g} \\ b^*_{11} & b^*_{12}+\sqrt{g^*}\end{vmatrix},\quad \alpha_{22}=\begin{vmatrix} b_{12}-\sqrt{g} & b_{22} \\ b^*_{12}-\sqrt{g^*} & b^*_{22}\end{vmatrix},$$
$$2\alpha_{12}=\begin{vmatrix} b_{12}-\sqrt{g} & b_{12}+\sqrt{g} \\ b^*_{12}-\sqrt{g^*} & b^*_{12}+\sqrt{g^*}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{22} \\ b^*_{11} & b^*_{22}\end{vmatrix}.$$

Это уравнение определяет две общие k-сопряжённые сети и обращается в тождество только, когда b_{ik}, b^*_{ik} пропорциональны.

11. Рассмотрим изометрическое соответствие.

Пусть задан линейный элемент $ds^2=g_{ik}\,du^i\,du^k$. Будем искать поверхности с данным линейным элементом, для которых координатная сеть k-сопряжённая.

Обозначим

$$b_{ik}=\Delta_{ik}\sqrt{g}.$$

Условие k-сопряжённости координатной сети $\Delta_{12}^2=1$, примем

$$\Delta_{12}=+1.$$

Условия Кодацци

$$\frac{\partial\Delta_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial\Delta_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^2_{22}\Delta_{11}-2\Gamma^2_{12}\Delta_{12}+\Gamma^2_{11}\Delta_{22}=0,$$
$$\frac{\partial\Delta_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial\Delta_{12}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{22}\Delta_{11}-2\Gamma^1_{12}\Delta_{12}+\Gamma^1_{11}\Delta_{22}=0,$$

принимают вид

$$\frac{\partial\Delta_{11}}{\partial u^2}+\Gamma^2_{22}\Delta_{11}-2\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Delta_{22}=0,$$
$$\frac{\partial\Delta_{22}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{22}\Delta_{11}-2\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{11}\Delta_{22}=0,$$

а уравнение Гаусса

$$\Delta_{11}\Delta_{22}=K.$$

Аналогично тому, как это делают в теории изгибания на главном основании [4], можно и здесь положить

$$\Delta_{11}=\sqrt{K}t,\quad \Delta_{22}=\sqrt{K}t^{-1}$$

и внести эти значения в условия Кодацци:

$$\frac{\partial\ln t}{\partial u^1}=at^2+bt+c,\quad -\frac{\partial\ln t}{\partial u^2}=a_1t^{-2}+b_1t^{-1}+c_1, \tag{23}$$

где

$$a=\Gamma^1_{22},\quad b=-2\Gamma^1_{12}K^{-\frac{1}{2}},\quad c=\Gamma^1_{11}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u^1}\ln K,$$

$$a_1=\Gamma^2_{11},\quad b_1=-2\Gamma^2_{12}K^{-\frac{1}{2}},\quad c_1=\Gamma^2_{22}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u^2}\ln K.$$

Условие интегрируемости

$$t^2\left(\frac{\partial a}{\partial u^2}-2ac_1\right)+t\left(\frac{\partial b}{\partial u^2}-bc_1-3ab_1\right)+\frac{\partial c}{\partial u^1}+\frac{\partial c_1}{\partial u^2}-4aa_1-2bb_1+$$
$$+t^{-1}\left(\frac{\partial b_1}{\partial u^1}-cb_1-3ba_1\right)+t^{-2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u^1}-2ac_1\right)=0 \quad (24)$$

— четвёртой степени. Если сеть k-сопряжена на пяти изометричных поверхностях, условие (24) должно выполняться тождественно, система (23) вполне интегрируемая. В этом случае сеть сохраняется при непрерывном изгибании.

Это требование налагает пять условий на три функции g_{ik}, а именно:

$$\frac{\partial a}{\partial u^1}=2ac_1, \quad \frac{\partial a_1}{\partial u^1}=2a_1c,$$
$$\frac{\partial b}{\partial u^2}=bc_1+3ab_1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial u^1}=b_1c+3a_1b,$$
$$\frac{\partial c}{\partial u^1}+\frac{\partial c_1}{\partial u^2}-4aa_1-2bb_1=0.$$

12. Пусть координатная сеть представляет собою сеть сдвига; в этом случае

$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2=0$$

и

$$b_1=b_2=0.$$

Система (23), (24) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \ln t}{\partial u^1}=at^2+c, \quad \frac{\partial \ln t}{\partial u^2}=a_1t^{-2}+c_1,$$
$$t^2\left(\frac{\partial a}{\partial u^2}-2ac_1\right)+\frac{\partial c}{\partial u^2}+\frac{\partial c_1}{\partial u^1}-4aa_1+t^{-2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u^1}-2ac_1\right)=0. \quad (25)$$

Эти уравнения совпадают с аналогичными уравнениями для изгибания поверхностей переноса [4].

Таким образом каждой паре налагающихся поверхностей переноса с общей сетью переноса соответствует изометричная пара налагающихся поверхностей сдвига.

13. Для поверхностей сдвига, допускающих непрерывное изгибание с сохранением сети сдвига, система (25) сводится к следующей:

$$\operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u^1}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}\ln\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial u^1}}{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^1\partial u^2}}, \quad \operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}\ln\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^1\partial u^2}}, \quad (26)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^2}\ln\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial u^1}\dfrac{\partial\omega}{\partial u^2}}{\sin^2\omega}=8\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial u^1}\dfrac{\partial\omega}{\partial u^2}}{\sin^2\omega},$$

где ω — угол между кривыми сдвига.

Система (26) интегрируется и даёт

$$\cos\omega=U_1U_2. \quad (27)$$

U_i — функция одного аргумента u^i.

Вычислим $\cos\omega$ непосредственно по каноническим уравнениям (1). Если обозначить

$$u_{ik}=\begin{vmatrix} u_i & u_k \\ u_i' & u_k' \end{vmatrix}, \quad v_{ik}=\begin{vmatrix} v_i & v_k \\ v_i' & v_k' \end{vmatrix}, \quad (28)$$

имеем

$$\cos\omega = (u_{01} - u_{23})(v_{01} + v_{23}) + (u_{02} - u_{31})(v_{02} + v_{31}) + \\ + (u_{03} - u_{12})(v_{03} + v_{12}). \qquad (29)$$

Так как

$$(u_{01} - u_{23})^2 + (u_{02} - u_{31})^2 + (u_{03} - u_{12})^2 = 1,$$
$$(v_{01} + v_{23})^2 + (v_{02} + v_{31})^2 + (v_{03} + v_{12})^2 = 1,$$

из сопоставления (27) и (29) следует

$$\begin{aligned} A_1(u_{01} - u_{23}) + A_2(u_{02} - u_{31}) + A_3(u_{03} - u_{12}) = 0, \\ B_1(v_{01} + v_{23}) + B_2(v_{02} + v_{31}) + B_3(v_{03} + v_{12}) = 0, \end{aligned} \qquad (30)$$

где A_i, B_i — постоянные, связанные условием

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0.$$

Линейные комплексы (30) можно привести к виду

$$u_{02} - u_{31} = 0, \quad v_{01} + v_{23} = 0.$$

Если отказаться от нормирования, согласно (2), (3) можно положить

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \varphi'(u), \quad u_2 = 2\varphi(u) - u\varphi'(u), \quad u_3 = -u,$$
$$v_0 = 1, \quad v_1 = v\psi'(v) - 2\psi(v), \quad v_2 = v, \quad v_3 = -\psi'(v),$$

где φ и ψ—две произвольные функции одного аргумента.

14. Сеть сдвига может состоять из изотропных кривых.

Изотропная сеть переноса характеризует минимальные поверхности. В эллиптическом пространстве на минимальных поверхностях изотропные линии сопряжены в дюпеновом смысле.

Изотропная сеть сдвига характеризует поверхности, у которых средняя кривизна постоянна и равна i.

Действительно,

$$2H = \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Если отнести поверхность к изотропной сети сдвига,

$$g_{11} = g_{22} = 0, \quad b_{12}^2 = g,$$

откуда

$$H = i.$$

В этом случае

$$u_0'^2 + u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 = 0, \quad v_0'^2 + v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = 0,$$

$$g_{12} = (u_{01} - u_{23})(v_{01} + v_{23}) + (u_{02} - u_{31})(v_{02} + v_{31}) + (u_{03} - u_{12})(v_{03} + v_{12}),$$

причём

$$(u_{01} - u_{23})^2 + (u_{02} - u_{21})^2 + (u_{03} - u_{12})^2 = 0,$$
$$(v_{01} + v_{23})^2 + (v_{02} + v_{31})^2 + (v_{03} + v_{12})^2 = 0.$$

Положим (если изотропные не прямые)

$$u_{01}-u_{23}=\frac{1-u^2}{2}U,\quad v_{01}+v_{23}=\frac{1-v^2}{2}V,$$
$$u_{02}-u_{31}=i\frac{1+u^2}{2}U,\quad v_{02}+v_{31}=-i\frac{1+v^2}{2}V,$$
$$u_{03}-u_{12}=uU,\qquad v_{03}+v_{12}=vV,$$

и линейный элемент принимает вид

$$ds^2=(1+uv)^2\,UV\,du\,dv.$$

Эти поверхности изометричны минимальным поверхностям эвклидова пространства. Для них уравнения (25) выполняются, — поверхности допускают непрерывное изгибание с сохранением k-сопряжённой сети изотропных линий.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, Annali di matematica, 1895. Lezioni di geometria differenziale, V. 2. p. 2.
2. Н. Г. Чеботарёв, О поверхностях, содержащих системы импримитивности относительно заданной группы непрерывных преобразований, «Матем. сборник», 1927, т. 34, стр. 149 – 206.
3. W. Blaschke, Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum, 1922, Math. Z., B.15, 309 – 320.
4. С. П. Фиников, Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, 1937.