ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

К ПРОБЛЕМЕ Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Я. П. Бланк

(Харьков)

1. Н. Г. Чеботареву [1] принадлежит широкое обобщение поверхностей переноса, заключающееся в следующем. Дана группа преобразований G. Рассматриваются поверхности, допускающие семейства импримитивности относительно G, т. е. несущие семейства кривых, переводящихся друг в друга преобразованиями из G.

В случае трехчленной группы траектории точек линий импримитивности группы G являются линиями импримитивности для группы H взаимной с G и совпадающей с нею только в случае коммутативности G.

Обобщая теорему Ли о поверхностях переноса двойного образования, Н. Г. Чеботарев доказал, что обобщенная поверхность переноса может иметь или континуум систем импримитивности, или не более четырех.

Однако неизвестно, существуют ли обобщенные поверхности переноса, которые имеют все четыре системы импримитивности, или континуум таких систем.

Примером обобщенной в смысле Чеботарева поверхности переноса может служить поверхность сдвига эллиптического пространства [2], [3]. Здесь G и H две трехчленных группы клиффордовых сдвигов.

Цель настоящей заметки на примере поверхностей сдвига эллиптического пространства ответить на один из вышеуказанных вопросов, а именно, выяснить, существуют ли поверхности, несущие континуум сетей сдвига*.

2. Поверхностью сдвига эллиптического пространства называется поверхность, допускающая такое каноническое представление:

$$X = Y(u) \cdot Z(v), \tag{1}$$

где Y и Z кватернионы, зависящие от одного параметра каждый, X квартернион, компоненты которого служат координатами поверхности, при этом координатная сеть u, v — сеть сдвига.

В статье [3] мы показали, что сеть сдвига характеризуется тем, что она одновременно чебышевская и клиффордово-сопряженная. Последнее условие аналитически выражается так:

$$b_{ik}\, du^i \delta u^k = \pm g\,(du^1 \delta u^2 - du^2 \delta u^1), \tag{2}$$

где g_{ik} и b_{ik} первый и второй тензоры поверхности.

---

* В нашей статье [3] этот вопрос был поставлен, но остался открытым.

Отнесем поверхность к асимптотическим линиям. Этого нельзя сделать для поверхностей, развертывающихся на эллиптическую плоскость, но последние не имеют сетей сдвига.

Положив

$$1-K^2=\frac{1}{\rho^2}, \tag{3}$$

где K — гауссова кривизна поверхности, имеем [2]:

$$\rho b_{12}=\sqrt{g},\ \ \Gamma^1_{12}=\frac{\rho_1}{2\rho},\ \ \Gamma^2_{12}=\frac{\rho^2}{2\rho}. \tag{4}$$

Условие (2) к-сопряженности, сети

$$\frac{du^2}{du^1}=\varphi(u^1,\ u^2),\quad \frac{\delta u^2}{\delta u^1}=\psi(u^1,\ u^2) \tag{5}$$

принимает вид:

$$\varphi(1+\rho)+\psi(1-\rho)=0,$$

или

$$\varphi=\sigma(\rho-1),\quad \psi=\sigma(\rho+1). \tag{6}$$

Чтобы сеть (6) была сетью сдвига, необходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской, т. е. имели место уравнения Сервана—Бианки [4]:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1\partial v^2}+\Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\cdot\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=0. \tag{7}$$

Здесь u^i асимптотические параметри, v^i — параметри сети сдвига, следовательно по [5], [6]:

$$\frac{\partial u^2}{\partial v^2}-\sigma(\rho-1)\frac{\partial u^1}{\partial v^2}=0,\quad \frac{\partial u^2}{\partial v^1}-\sigma(\rho+1)\frac{\partial u^1}{\partial v^1}=0. \tag{8}$$

Вычислив $\dfrac{\partial^2 u^k}{\partial v^1\partial v^2}$ и подставив в (7), получаем:

$$\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=\sigma(\rho-1)\,\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}-\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial v^1}[\sigma(\rho-1)], \tag{9}$$

$$\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=\sigma(\rho+1)\,\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}-\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^2}[\sigma(\rho+1)]. \tag{10}$$

Вычитая и складывая уравнения (9) и (10) и воспользовавшись (8) и (4), находим, что функция σ должна удовлетворять системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\sigma_1=\Gamma^1_{11}\sigma+2\rho_2\sigma^2+\Gamma^1_{22}(\rho^2-1)\sigma^3, \tag{11}$$

$$\sigma_2=\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}\right)\sigma+\frac{2\rho_1}{1-\rho^2}+\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\frac{1}{\sigma}. \tag{12}$$

Совместность системы (11), (12) есть условие необходимое и достаточное для того, чтобы на поверхности, заданной двумя дифференциальными формами в асимптотических параметрах, существовала сеть сдвига. При этом сама сеть сдвига определяется уравнениями (5), (6).

3. Условие интегрируемости системы (11), (12) имеет вид:

$$A\sigma^4+B\sigma^3+C\sigma^2+D\sigma+E=0, \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A &= 2(\rho^2-1)\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)\Gamma^1_{22}+[(\rho^2-1)\Gamma^1_{22}]_2,\\
B &= 2\rho_2\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)+2\rho_{22}-6\rho_1\Gamma^1_{22},\\
C &= \frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2}-4\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}+(\Gamma^1_{11})_2-\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)_1,\\
D &= \frac{2\rho_1\Gamma^1_{11}}{1-\rho^2}+\frac{6\rho_2\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}-2\left(\frac{\rho_1}{1-\rho^2}\right)_1,\\
E &= 2\frac{\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}-\left(\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\right)_1
\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Из (13) и следует, что если на поверхности имеется больше четырех сетей сдвига, то существует континуум таких сетей.

Возникает вопрос: существуют ли поверхности, несущие континуум сетей сдвига.

Чтобы на поверхности существовал континуум сетей сдвига необходимо, чтобы условие интегрируемости (13) выполнялось тождественно, следовательно имеем следующие пять уравнений:

$$\left(\frac{\Gamma^1_{22}}{1-\rho^2}\right)_2=\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{22}\cdot\frac{2}{1-\rho^2}, \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\right)_1=\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11}\cdot\frac{2}{1-\rho^2}, \qquad (16)$$

$$\rho_{22}+\frac{2\rho\rho_2^2}{1-\rho^2}=\Gamma^2_{22}\rho_2+3\Gamma^1_{22}\rho_1, \qquad (17)$$

$$\rho_{11}+\frac{2\rho\rho_1^2}{1-\rho^2}=\Gamma^1_{11}\rho_1+3\Gamma^2_{11}\rho_2, \qquad (18)$$

$$[\lg(1-\rho^2)]_{12}+\frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2}+(\Gamma^1_{11})_2+(\Gamma^2_{22})_1-4\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}=0. \qquad (19)$$

Первые два уравнения интегрируются непосредственно, действительно: воспользовавшись формулой Фосса—Вейля:

$$(\lg\sqrt{g})_\alpha=\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}$$

и (4), имеем:

$$\Gamma^1_{11}=\left(\lg\sqrt{\frac{g}{\rho}}\right)_1,\quad \Gamma^2_{22}=\left(\lg\sqrt{\frac{g}{\rho}}\right)_2. \qquad (20)$$

Внеся эти значения в (15), (16) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{22}&=\frac{1-\rho^2}{\rho}\,g\,U(u),\\
\Gamma^2_{11}&=\frac{1-\rho^2}{\rho}\,gV(v)
\end{aligned}\right\}. \qquad (21)$$

Если функции U или V отличны от нуля, их можно привести к единице.

Действительно, при замене параметров:

$$U^*=U^*(u),\quad V^*=V^*(v)$$

имеем

$$g=g^*U^{*\prime 2}V^{*\prime 2}$$

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma^{1*}_{22}\frac{V^{*\prime 2}}{U^{*\prime}},\quad \Gamma^2_{11}=\Gamma^{2*}_{11}\cdot\frac{U^{*\prime 2}}{V^{*\prime}},$$

следовательно

$$\Gamma_{22}^{1*} = \frac{1-\rho^2}{\rho} g^* U^{*\prime 3} U, \quad \Gamma_{11}^{2*} = \frac{1-\rho^2}{\rho} g^* V^{*\prime 3} V$$

и, положив

$$U^{*\prime} = U^{-\frac{1}{3}}, \ V^{*\prime} = V^{-\frac{1}{3}},$$

приведем U^*, V^* к единице.

Поэтому могут представиться три случая:

$$1^\circ \quad U = V = 0,$$
$$2^\circ \quad U = 0, \quad V = 1,$$
$$3^\circ \quad U = 1, \quad V = 1.$$

Из деривационных формул:

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v - g_{11} x,$$
$$x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v - g_{22} x$$

следует, что в случае 1° асимптотические обеих семейств прямые — имеем поверхности второго порядка, в случае 2° асимптотические линии одного семейства прямые — имеем линейчатые поверхности, в случае 3° асимптотические обеих семейств криволинейны, но так как $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2$ поверхности изотермо-асимптотические.

4. Замечание. Прием, которым были получены дифференциальные уравнения (11), (12) сети сдвига можно применить и для получения дифференциальных уравнений сети переноса обычного пространства. Вместо (3) имеем $K = -\frac{1}{\rho^2}$, (4) и (5) сохраняются, вместо к-сопряженности имеем дюпенову сопряженность:

$$\varphi + \psi = 0,$$

или

$$\psi = -\varphi = \sigma. \tag{6'}$$

Уравнения (11), (12) заменяются уравнениями:

$$\sigma_1 = \Gamma_{11}^1 \sigma - \Gamma_{22}^1 \sigma^3,$$
$$\sigma_2 = -\Gamma_{22}^2 \sigma + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{\sigma}. \tag{12'}$$

Условие интегрируемости:

$$A_1 \sigma^4 + C_1 \sigma^2 + E_1 = 0, \tag{13'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 2\Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 = (\Gamma_{22}^1)_2, \\ C_1 &= (\Gamma_{11}^1)_2 + (\Gamma_{22}^2)_1 - 4\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \\ E_1 &= 2\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1 - (\Gamma_{11}^2)_1. \end{aligned}\right\}. \tag{14'}$$

Уравнения (20) сохраняются и здесь.

Для поверхностей с ∞ сетей переноса имеем три условия:

$$A_1 = C_1 = E_1 = 0.$$

Первые два условия в силу (20) дают:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{g}{\rho} U, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{g}{\rho} V \end{aligned}\right\}. \tag{20'}$$

Третье:

$$\left(\lg\frac{g}{\rho}\right)_{12} = 4\frac{g^2}{\rho^2}UV.$$

И здесь имеем три случая:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad U = V = 0,\\ &2^\circ \quad U = 0, \quad V = 1,\\ &3^\circ \quad U = V = 1. \end{aligned}$$

Все они действительно дают поверхности с ∞ сетей переноса, а именно: в случае 1° получаются параболоиды, в 2° — линейчатые поверхности переноса (геликоиды и поверхность Кейли) и в 3° — поверхности, с точностью до афинного преобразования определяемые уравнением: $e^x + e^y + e^z = 1$.

5. Займемся исследованием совместности системы (15 — 19), характеризующей поверхности с ∞ сетей сдвига.

Обозначим:

$$\frac{g}{\rho} = e^{2\theta};$$

уравнения (15), (16) эквивалентны уравнениям (21) или:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= (1-\rho^2)\,e^{2\theta}U,\\ \Gamma^2_{11} &= (1-\rho^2)\,e^{2\theta}V \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Уравнения (20) запишутся так:

$$\Gamma^1_{11} = \theta_1, \ \Gamma^2_{22} = \theta_2. \tag{24}$$

Уравнения (17), (18) и (19) можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\rho_2}{1-\rho^2}\right)_2 = \theta_2\frac{\rho^2}{1-\rho^2} + 3\rho_1 e^{2\theta}U, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\rho_1}{1-\rho^2}\right)_1 = \theta_1\frac{\rho_1}{1-\rho^2} + 3\rho_2 e^{2\theta}V, \tag{26}$$

$$[\lg(1-\rho^2)]_{12} + \frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2} + 2\theta_{12} - 4(1-\rho^2)^2 e^{4\theta}UV = 0. \tag{27}$$

Символы Кристоффеля выражаются по формулам (24), (23), (4) через ρ, θ. Последние должны удовлетворять системе из трех уравнений (25), (26) и (27).

Если эта система совместна, то чтобы существовала поверхность искомого вида, необходимо и достаточно, чтобы тензор Риччи удовлетворял условиям:

$$R_{jk|i} = \frac{K_i}{K}R_{jk}, \tag{28}$$

$$R_{11}R_{22} - R_{12}^2 = K^2\cdot g, \tag{29}$$

где K определено по (3), (5).

Для компонентов тензора Риччи имеем следующие значения:

$$\begin{aligned} -R_{11} = {} & [(1-\rho^2)\,e^{2\theta}V]_2 + (1-\rho^2)\,e^{2\theta}V\left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_2 - \\ & - \frac{1}{2}(\lg\rho)_{11} + \frac{1}{2}(\lg\rho)_1\left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_1, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} -R_{22} = {} & [(1-\rho^2)\,e^{2\theta}U]_1 + (1-\rho^2)\,e^{2\theta}U\left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_1 - \\ & - \frac{1}{2}(\lg\rho)_{22} + \frac{1}{2}(\lg\rho)_2\left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_2, \end{aligned} \tag{31}$$

$$R_{12}=\left(\theta-\frac{1}{2}\lg\rho\right)_{12}-\frac{1}{4}(\lg\rho)_1(\lg\rho)_2+(1-\rho^2)^2e^{4\theta}UV. \tag{32}$$

Рассмотрим случай 1° $U=V=0$, поверхности второго порядка. Если $K=0$, имеем поверхность Клиффорда, которая допускает сдвиг любой расположенной на ней кривой вдоль образующих как первой, так и второй серии.

Пусть $K\neq 0$, докажем, что $\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$.

Действительно, пусть $\rho_1=0$. По (27): $\theta_{12}=0$, по (32): $R_{12}=0$, по (30): $R_{11}=0$, следовательно, по (29): $K=0$, что противоречит нашему допущению.

Из (25), (26) следует:

$$U_0'\rho_2=V_0'\rho_1=e^{\theta}(1-\rho^2), \tag{33}$$

следовательно:

$$\rho=\rho(U_0+V_0),\quad e^{\theta}=\frac{\rho'}{1-\rho^2}U_0'V_0'. \tag{34}$$

Введем новые переменные:

$$U^*=U_0,\quad V^*=V_0.$$

Заметив, что $g=g^*U_0'^2V_0'^2$, и воспользовавшись (22), получим вместо (34):

$$\rho=\rho(u+v),\quad e^{\theta}=\frac{\rho'}{1-\rho^2}, \tag{35}$$

где знак (*) опущен.

По (30) и (35):

$$R_{11}=-\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2}-\frac{\rho'^2}{1-\rho^2}. \tag{36}$$

По (28):

$$R_{11|1}=\frac{K_1}{K}R_{11}, \tag{37}$$

или в развернутом виде, в силу (23) и (24):

$$\frac{K'}{K}=\frac{R_{11}'}{R_{11}}-2\theta'. \tag{38}$$

Интегрируя, получаем:

$$R_{11}=CKe^{2\theta}. \tag{39}$$

Внеся сюда значение K по (3) и e^{θ} по (35), получаем:

$$R_{11}=-C\frac{\rho'^2}{\rho^2(1-\rho^2)}. \tag{40}$$

Из сравнения (40) и (36) следует, что $\rho'=\mathrm{const}$, что противоречит условию $K\neq 0$.

Итак, кроме поверхностей Клиффорда не существует поверхностей второго порядка с ∞ сетей сдвига.

Случай 2°: $U=0$, $V=1$, линейчатые поверхности.

Если $K=0$, имеем линейчатые поверхности с образующими параллелями Клиффорда. Эти поверхности допускают сдвиг произвольной, расположенной на них кривой, вдоль образующих.

Пусть $K\neq 0$, докажем, что $\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$.

Действительно, пусть $\rho_2=0$. (Из $\rho_1=0$ следует по (26) $\rho_2=0$). Имеем по (27): $\Theta_{12}=0$, по (31) и (32): $R_{22}=R_{12}=0$, следовательно, по (29): $K=0$, что противоречит нашему допущению.

В силу (25) имеем:

$$U_0' \rho_2 = (1 - \rho^2) e^{\theta}. \tag{41}$$

Можно U_0' привести к единице. Действительно, сделаем замену $u^* = U_0$, при этом по (22): $e^{\theta} = U_0' e^{\theta^*}$, следовательно, по (41), опустив знак (*):

$$\rho_2 = (1 - \rho^2) e^{\theta}. \tag{42}$$

Подставив значение e^{θ} из (42) в (31) получаем:

$$-R_{22} = \frac{\rho_2^2}{1 - \rho^2} + \frac{1}{4} \frac{\rho_2^2}{\rho^2}. \tag{43}$$

По (28):

$$R_{22/2} = \frac{K_2}{K} R_{22},$$

или в развернутом виде в силу (23) и (24):

$$\frac{(R_{22})_2}{R_{22}} = 2\theta_2 + \frac{K_2}{K}. \tag{44}$$

Проинтегрировав, находим:

$$R_{22} = U_1 K e^{2\theta}. \tag{45}$$

Подставив вместо K и $e^{2\theta}$ их выражения по (3) и (42) и сопоставив (45) с (43), получаем:

$$\rho_2 \left(\frac{3}{4} \rho^2 + \frac{1}{4} - U_1 \right) = 0,$$

т. е. $\rho_2 = 0$, что противоречит условию $K \neq 0$.

Итак, за исключением линейчатых поверхностей с образующими параллелями Клиффорда, не существует линейчатых поверхностей с ∞ сетей сдвига.

Случай 3°: $U = 1$, $V = 1$, изотермо-асимптотические поверхности.

Если $K = 0$ поверхности имеют единственную сеть сдвига, именно асимптотическую, следовательно, $K \neq 0$ [3].

Докажем, что $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$.

Действительно, пусть, например, $\rho_1 = 0$. Из (26) следует $\rho_2 = 0$. Из (27):

$$\theta_{12} = 2 (1 - \rho^2)^2 e^{4\theta}. \tag{46}$$

Из (30), (31), (32) следует:

$$-R_{11} = 3 (1 - \rho^2) e^{2\theta} \theta_2, \quad -R_{22} = 3 (1 - \rho^2) e^{2\theta} \theta_1,$$
$$R_{12} = 3 (1 - \rho^2)^2 e^{4\theta}. \tag{47}$$

По (28):

$$R_{12|1} = R_{12|2} = 0,$$

или, в развернутом виде, в силу (4), (23), (24) и (47):

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,$$

следовательно, по (46): $\rho^2 = 1$, т. е $K = 0$, что невозможно.

Обозначив

$$(1 - \rho^2) e^{2\theta} = \vartheta, \quad \rho = \sin \tau, \tag{48}$$

перепишем уравнения (25), (26), (27) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\vartheta} \right)_2 + \frac{2}{\vartheta} \frac{\tau_{22}}{\tau_2} = 6 \frac{\tau_1}{\tau_2}, \tag{49}$$

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)_1 + \frac{2}{\vartheta}\frac{\tau_{11}}{\tau_1} = 6\frac{\tau_2}{\tau_1}, \tag{50}$$

$$(\lg\vartheta)_{12} + 8\tau_1\tau_2 - 4\vartheta^2 = 0. \tag{51}$$

Уравнение (51) в силу (49) и (50) можно записать в одном из следующих двух видов:

$$16\vartheta^2 - \left[6\frac{\tau_{11}}{\tau_2} + 3\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)_1\right]\vartheta + \left(\frac{\tau_{22}}{\tau_2}\right)_1 + 4\tau_1\tau_2 = 0, \tag{52}$$

$$16\vartheta^2 - \left[6\frac{\tau_{22}}{\tau_1} + 3\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_2\right]\vartheta + \left(\frac{\tau_{11}}{\tau_1}\right)_2 + 4\tau_1\tau_2 = 0. \tag{53}$$

Если из (52) вычтем (53), получаем:

$$\frac{1}{\vartheta}\left(\lg\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_{12} + 9\left(\frac{\tau_{22}}{\tau_1} - \frac{\tau_{11}}{\tau_2}\right) + 3\tau_{12}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2^2} - \frac{\tau_2}{\tau_1^2}\right) = 0. \tag{54}$$

К этому же уравнению приходим, если приравняем оба значения смешанной производной $\frac{1}{\vartheta}$, получаемые из (49) и (50). Уравнение (54) должно выполняться тождественно относительно $\frac{1}{\vartheta}$, в противном случае, определив из него ϑ и подставив в (52) и в (49), (50), (28), (29), можем определить все третьи частные производные τ в функции вторых и первых и условия интегрируемости приводят к тому, что $\tau_1 = \text{const}$, $\tau_2 = \text{const}$, что невозможно.

Следовательно,

$$\left(\lg\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_{12} = 0, \tag{55}$$

$$3\left(\frac{\tau_{22}}{\tau_1} - \frac{\tau_{11}}{\tau_2}\right) + \tau_{12}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2^2} - \frac{\tau_2}{\tau_1^2}\right) = 0. \tag{56}$$

Интегрируя (55) получаем:

$$\tau = \tau(U + V). \tag{57}$$

Подстановка этого значения в (50) дает:

$$2\frac{\tau''}{\tau'}(V'^3 - U'^3) + 3(V'V'' - U'U'') = 0. \tag{58}$$

Из (58) следует:

$$\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)''(V'^3 - U'^3) + 3\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)'(V'V'' - U'U'') = 0. \tag{59}$$

Пусть $V'^3 - U'^3 \neq 0$. Имеем:

$$2\frac{\tau''}{\tau'}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)' - \left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)'' = 0. \tag{60}$$

Для $\frac{\tau''}{\tau'}$ имеем одно из следующих четырех значений:

1) $\frac{\tau''}{\tau'} = 0$, 2) $\frac{\tau''}{\tau'} = a\ (a \neq 0)$, 3) $\frac{\tau''}{\tau'} = a\frac{1 + be^{2a(U+V)}}{1 - be^{2a(U+V)}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

4) $\frac{\tau''}{\tau'} = \frac{1}{c - (U + V)}$.

В случаях 1), 2) и 3), определив τ, и из (58) — U, V и подставив найденные значения τ в (49), (50), (52), убеждаемся, что эта система несовместна.

В случае 4), определив τ, U, V, ϑ из системы (52), (49), (50), которая в этом случае имеет решение, и вычислив компоненты тензора Риччи, приходим к противоречию с (29).

В случае $V'^3 - U'^3 = 0$, имеем:

$$\tau = \tau(u + v). \tag{61}$$

Уравнения (49) и (50) сводятся к одному:

$$\left(\lg\frac{\tau'^2}{\vartheta}\right)' = 6\vartheta.$$

Положив $\frac{\tau'^2}{\vartheta} = \lambda$, имеем:

$$\tau'^2 = \frac{\lambda'}{6}, \qquad \vartheta = \frac{\lambda'}{6\lambda}.$$

Внеся эти значения в (52), получаем:

$$9\lambda^2\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)' - 9\lambda\lambda'' + 8\lambda'^2 + 12\lambda^2\lambda' = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda' = c\lambda^{4/3} + c_0\lambda^{2/3} - \frac{3}{2}\lambda^2,$$

или положив $\lambda = \lambda_1^3$:

$$\lambda_1' = c_1\lambda_1^2 + c_2 - \frac{1}{2}\lambda_1^4, \tag{62}$$

$$\vartheta = \frac{\lambda_1'}{2\lambda_1}, \tag{63}$$

$$\tau = \int\frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{2c_1\lambda_1^2 + 2c_2 - \lambda_1^4}}. \tag{64}$$

По (28):

$$R_{11/_1} = (R_{11})' - 2\Gamma^1_{11}R_{11} - 2\Gamma^2_{11}R_{12} = \frac{K'}{K}R_{11},$$

$$R_{11/_2} = (R_{11})' - 2\Gamma^1_{12}R_{11} - 2\Gamma^2_{12}R_{12} = \frac{K'}{K}R_{11}.$$

Вычтя и подставив значения символов Кристоффеля, получаем:

$$R_{11}\left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right) + \left(\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}\right)R_{12} = 0.$$

Подставив значения R_{ik}, именно:

$$-R_{11} = \left(\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}\right)' + \left(\vartheta + \frac{\rho'}{2\rho}\right)\left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right),$$

$$R_{12} = \left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right)' + \vartheta^2 - \frac{\vartheta'^2}{4\rho^2},$$

получаем:

$$\left(\frac{\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}}{\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}}\right)' + \left(\vartheta + \frac{\rho'}{2\rho}\right)\left[1 - \left(\frac{\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}}{\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}}\right)^2\right] = 0. \tag{65}$$

Воспользовавшись (63), можно проинтегрировать (65), получаем:

$$\left(\vartheta + \theta' - \frac{\rho'}{\rho}\right)\rho\lambda_1 = c(\vartheta - \theta'). \tag{66}$$

Подставив сюда значения ρ, θ из (48) и (49), значения ϑ и τ из (63) и (64) и заменив λ_1' из (62), получаем уравнение относительно λ_1, которое должно выполняться тождественно, однако, это не имеет места, следовательно система несовместна.

Мы получили следующий результат: единственными поверхностями, на которых имеется континуум сетей сдвига, служат линейчатые поверхности с образующими — параллелями Клиффорда (цилиндрические поверхности эллиптического пространства).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чеботарев. О поверхностях, содержащих системы импримитивности относительно заданной группы непрерывных преобразований (обобщенные поверхности переноса). Матем. сборн, 34, 149—206, 1927. Н. Г. Чеботарев. Математическая автобиография. У. М. Н. III вып. 4 (26). 3 — 66. 1948.
2. L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale т. II, P. 2, 1924.
3. Я. П. Бланк. Поверхности сдвига элиптического пространства. Записки н.-и. инст. мат. и мех. и Харьк. мат. об-ва с. 4, т. 20, 61, 1950.
4. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. I, 1947.
5. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. II, 1948.