ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО и ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ СВОЙСТВЕ КОНГРУЭНЦИЙ W

Я. П. Бланк

(Харьков)

В статье «О конгруэнциях W» [1] была доказана следующая теорема.

С каждой конгруэнцией W естественным образом связано однопараметрическое семейство поверхностей несущих сети, соответствующие асимптотическим линиям фокальных поверхностей, притом такие, что соприкасающиеся плоскости кривых сети пересекаются по лучам конгруэнции.

В настоящей статье мы решаем обратную задачу:

Найти условия, которым должна удовлетворять конгруэнция, чтобы существовали поверхности, несущие сети кривых, соприкасающиеся плоскости которых пересекаются по лучам конгруэнции, а сами кривые соответствуют асимптотическим линиям одной из фокальных поверхностей. При этом мы приходим к следующему результату.

У произвольной конгруэнции вовсе не существует таких поверхностей. Существуют конгруэнции, у которых имеется лишь одна такая поверхность. Если же имеется больше одной такой поверхности, то их бесконечное множество, а сами конгруэнции представляют собой конгруэнции W.

Во втором параграфе мы рассматриваем конгруэнции W, у которых одна фокальная поверхность есть нулевая поверхность второго порядка и доказываем, что если принять эту поверхность за абсолют эллиптического пространства, то связанное с конгруэнцией однопараметрическое семейство поверхностей состоит из поверхностей сдвига эллиптического пространства.

В третьем параграфе мы рассматриваем нормальные конгруэнции W и находим уравнения связанного с ними однопараметрического семейства по уравнению поверхности Вейнгартена, нормалями которой служат лучи конгруэнции.

§ 1. Пусть задана некоторая конгруэнция. Рассмотрим одну из ее фокальных поверхностей S_1, которую отнесем к асимптотическим координатам u, v. Пусть семейство кривых на S_1, касательные к которым служат лучами конгруэнции, определено дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}. \tag{1}$$

Найдем условия, которым должна удовлетворять конгруэнция (в данном случае — функции A, B), чтобы существовала поверхность, несущая сеть кривых, соприкасающиеся плоскости которых пересекаются по лучам конгруэнции, причем линиям сети соответствуют асимптотические на S_1.

Искомую поверхность можно задать уравнениями

$$X = \rho x + 2(Ax_u + Bx_v) \tag{2}$$

и задача сводится к отысканию функции ρ, удовлетворяющей условиям

$$(x,\ X,\ X_u,\ X_{uu}) = 0, \tag{3}$$
$$(x,\ X,\ X_v,\ X_{vv}) = 0. \tag{4}$$

С помощью деривационных формул

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + px, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + qx \tag{5}$$

для поверхности S_1 находим

$$X_u = (\rho_u + 2Ap)\,x + (\rho + 2A_u + 2A\theta_u)\,x_u + 2(B_u + A\beta)\,x_v + 2Bx_{uv}$$
$$X_{uu} = ax + bx_u + cx_v + dx_{uv},$$

где

$$a = (\rho_u + 2Ap)_u + p(\rho + 2A_u + 2A\theta_u) + 2B(p_v + \beta q)$$
$$b = \rho_u + 2Ap + (\rho + 2A_u + 2A\theta_u)_u + \theta_u(\rho + 2A_u + 2A\theta_u) + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma)$$
$$c = \beta(\rho + 2A_u + 2A\theta_u) + 2(B_u + A\beta)_u + 2B(\beta_v + \beta\theta_v + p)$$
$$d = 2(B_u + A\beta) + 2B_u + 2B\theta_u.$$

Подставив значения X, X_u, X_{uu} в (3), получаем

$$B^2[2\rho_u + 2(A_u + A\theta_u)_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma)] - AB[\beta(\rho + 2A_u) - 2B_u\theta_u + 2(B_u + A\beta)_u + 2B(\beta_v + \beta\theta_v)] + (2B_u + A\beta)[2A(B_u + A\beta) - B(\rho + 2A_u + 2A\theta_u)] = 0. \tag{6}$$

Аналогично запишется условие (4):

$$A^2[2\rho_v + 2(B_v + B\theta_v)_v + 2A(\theta_{uv} + \beta\gamma)] - AB[\gamma(\rho + 2B_v) - 2A_v\theta_v + 2(A_v + B\gamma)_v + 2A(\gamma_u + \gamma\theta_u)] + (2A_v + B\gamma)[2B(A_v + B\gamma) - A(\rho + 2B_v + 2B\theta_v)] = 0. \tag{7}$$

Так как функции A, B заданием конгруэнции определены с точностью до общего множителя, можно их так нормировать, что выполняется условие

$$B_u = -A\beta. \tag{8}$$

Введем функции σ и ω:

$$\sigma = \frac{A_v + B\gamma}{A}, \tag{9}$$

$$\omega = \rho + A_u + A\theta_u + B_v + B\theta_v - B\sigma. \tag{10}$$

Уравнения (6) и (7) принимают следующий простой вид:

$$\omega_u = -B\sigma_u, \tag{11}$$

$$\omega_v = A\sigma_u - \sigma\omega. \tag{12}$$

Условие совместности системы (11), (12):

$$\omega\sigma_u = (A\sigma_u)_u + (B\sigma_u)_v + B\sigma\sigma_u. \tag{13}$$

Система (11), (12) вполне интегрируема лишь при условии $\sigma_u = 0$. Но при этом условии

$$W = \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)_u - \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\right)_v = \sigma_u \tag{14}$$

обращается в нуль, что характеризует конгруэнции W [2].

В этом случае можно так нормировать A и B, что имеют место соотношения

$$A_v + B\gamma = 0,$$
$$B_u + A\beta = 0, \tag{15}$$

т. е. $\sigma = 0$, $\omega = \text{const}$ и по (10)

$$\rho = \mu + c, \tag{16}$$

где

$$\mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v, \tag{17}$$

и по (2)

$$X = (\mu + c)\, x + 2\,(Ax_u + Bx_v),$$

или

$$X = \bar{x} + cx, \tag{18}$$

где

$$\bar{x} = \mu x + 2\,(Ax_u + Bx_v) \tag{19}$$

вторая фокальная поверхность конгруэнции.

Если же $\sigma_u \neq 0$, положив

$$\lambda = \ln \sigma_u, \tag{20}$$

определяем ω из (13):

$$\omega = A\lambda_u + B\lambda_v + A_u + B_v + B\sigma. \tag{21}$$

Подставив значение ω в (11), (12), приходим к системе

$$A\lambda_{uu} + B\lambda_{uv} + P = 0,$$
$$A\lambda_{uv} + B\lambda_{vv} + Q = 0, \tag{22}$$

где

$$P = A_u\lambda_u + B_u\lambda_v + 2B\sigma_u + B_u\sigma + A_{uu} + B_{uv},$$
$$Q = A_v\lambda_u + B_v\lambda_v - A\sigma_u + (B\sigma)_v + A_{uv} + B_{vv} +$$
$$+ \sigma\,(A\lambda_u + B\lambda_v + A_u + B_v + B\sigma). \tag{23}$$

Система (22) совместна, условие ее совместности выполняется тождественно. Определив из нее и из уравнения (8) A и B и внеся их в (21), находим ω, и подставив ω и σ в (10), находим ρ.

Таким образом, приходим к следующему выводу. У произвольной конгруэнции не существует поверхностей искомого вида.

Конгруэнции, образованные касательными к кривым (1), где функции A, B удовлетворяют уравнениям (8), (9), а σ есть решение системы (22), допускают одну такую поверхность.

Если же существуют две поверхности, несущие такие сети, что соприкасающиеся плоскости кривых сети пересекаются по лучам одной и той же конгруэнции, причем линиям сети соответствуют асимптотические на одной из фокальных поверхностей, то конгруэнция представляет собой конгруэнцию W и таких поверхностей существует бесконечное множество, зависящее от одного параметра.

§ 2. Пусть первая фокальная поверхность конгруэнции W есть нулевая поверхность второго порядка. Если принять ее за абсолют эллиптической геометрии, то, как показал Фубини [2], вторая фокальная поверхность есть поверхность сдвига эллиптического пространства нулевой кривизны. Докажем, что и все однопараметрическое семейство, связанное с конгруэнцией, состоит из поверхностей сдвига, причем асимптотическим линиям фокальных поверхностей соответствуют на них линии сдвига.

Действительно, пусть уравнения поверхности второго порядка

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v, \quad t = 1,$$

тогда

$$\theta_u = \theta_v = p = q = 0, \quad \beta = \gamma = 0$$

и по (15)

$$A = U(u), \quad B = V(v),$$

по (17)

$$\mu = -U' - V'$$

и по (18), (19)

$$\begin{aligned} X &= u(2V - vV' + cv) + v(2U - uU') \\ Y &= u(-V' + c) + (2U - uU') \\ Z &= (2V - vV' + cv) - vU'. \\ T &= (-V' + c) - U'. \end{aligned} \tag{24}$$

Но в случае, когда абсолют задан уравнением

$$y_1 y_3 = y_2 y_4,$$

сдвиги первого и второго рода, как известно [3], определяются формулами:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \alpha y_1' + \beta y_4', \\ \rho y_2 &= \alpha y_2' + \beta y_3', \\ \rho y_3 &= \gamma y_4' + \delta y_3', \\ \rho y_4 &= \gamma y_1' + \delta y_4', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \rho y_1 &= a y_1' + b y_2', \\ \rho y_2 &= c y_1' + d y_2', \\ \rho y_3 &= d y_3' + c y_4', \\ \rho y_4 &= b y_3' + a y_4'. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения поверхностей сдвига эллиптического пространства могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= U_1 V_1 + U_2 V_4, \\ \rho y_2 &= U_1 V_2 + U_2 V_3, \\ \rho y_3 &= U_3 V_2 + U_4 V_3, \\ \rho y_4 &= U_3 V_1 + U_4 V_4. \end{aligned} \tag{25}$$

Но формулы (25) переходят в формулы (24), если положить

$$U_1 = u, \quad U_2 = 2U - uU', \quad U_3 = 1, \quad U_4 = U',$$
$$V_1 = 2V - vV' + cv, \quad V_2 = c - V', \quad V_3 = v, \quad V_4 = 1.$$

Заметим, что общая поверхность сдвига эллиптического пространства содержит существенным образом четыре функции одного аргумента, тогда как поверхности (24) зависят лишь от двух функций одного аргумента.

§ 3. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ поверхность Вейнгартена, отнесенная к линиям кривизны, R_1 и R_2 ее главные радиусы, $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ ее эволюты, $\bar{n}$ — орт нормали.

Определим однопараметрическое семейство поверхностей, связанное с конгруэнцией нормалей поверхности $\bar{r}$.

Искомые поверхности можно задать уравнением

$$\bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{n}. \tag{26}$$

Дифференциальное уравнение асимптотических линий эволют поверхности Вейнгартена:

$$E R_2^2 \frac{dR_1}{dR_2} du^2 - G R_1^2 dv^2 = 0,$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{G}R_1} = \pm \frac{dv}{\sqrt{E\frac{dR_1}{dR_2}R_2}}. \tag{27}$$

Этим кривым должны соответствовать на поверхностях (26) кривые, соприкасающиеся плоскости которых содержат вектор $\bar{n}$, следовательно,

$$\left(\bar{\rho}_u + \bar{\rho}_v\frac{dv}{du},\ \bar{\rho}_{uu} + 2\bar{\rho}_{uv}\frac{dv}{du} + \bar{\rho}_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \bar{\rho}_v\frac{d^2v}{du^2},\ \bar{n}\right) = 0. \tag{28}$$

По (26)

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_u &= \bar{r}_u\left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right) + \lambda_u\bar{n}, \quad \bar{\rho}_v = \bar{r}_v\left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right) + \lambda_v\bar{n},\\
\bar{\rho}_{uu} &= \bar{r}_{uu}\left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right) - \bar{r}_u\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)_u + \frac{2\lambda_u}{R_1}\right] + \lambda_{uu}\bar{n},\\
\bar{\rho}_{vv} &= \bar{r}_{vv}\left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right) - \bar{r}_v\left[\left(\frac{1}{R_2}\right)_v + \frac{2\lambda_v}{R_2}\right] + \lambda_{vv}\bar{n},\\
\bar{\rho}_{uv} &= \bar{r}_{uv}\left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right) - \bar{r}_u\left(\frac{\lambda}{R_1}\right)_v - \lambda_u\frac{\bar{r}_v}{R_2} + \lambda_{uv}\bar{n},
\end{aligned} \tag{29}$$

а деривационные формулы для поверхности Вейнгартена

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\bar{r}_u - \frac{E_v}{2G}\bar{r}_v + L\bar{n},\\
\bar{r}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\bar{r}_u + \frac{G_v}{2G}\bar{r}_v + N\bar{n},\\
\bar{r}_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\bar{r}_u + \frac{G_u}{2G}\bar{r}_v.
\end{aligned} \tag{30}$$

Подставив в уравнение (28) выражения для $\bar{\rho}_u$, $\bar{\rho}_v$, $\bar{\rho}_{uu}$, $\bar{\rho}_{uv}$, $\bar{\rho}_{vv}$ по формулам (29) и (30) и заменив $\frac{dv}{du}$ по (27), получим, учтя, что уравнение (28) должно удовлетворяться обоими значениями $\frac{dv}{du}$, следующие два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\lambda_u + \left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right)^2\frac{G_u}{2G} + \left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right)\left[\ln\sqrt{\frac{1}{G}\frac{dR_1}{dR_2}\frac{R_2}{R_1}}\right]_u +\\
&\quad + \left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right)^2\frac{G_u}{2G}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\frac{dR_1}{dR_2} + \lambda\left(\frac{1}{R_1}\right)_u\left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right) = 0,\\
&2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\lambda_v - \left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right)^2\frac{E_v}{2E}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{dR_2}{dR_1} + \left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right)\left(\ln\sqrt{E\frac{dR_1}{dR_2}\cdot\frac{R_2}{R_1}}\right)_v -\\
&\quad - \left(1-\frac{\lambda}{R_2}\right)^2\frac{E_v}{E} - \lambda\left(1-\frac{\lambda}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}\right)_v = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Уравнения эволют

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_1 &= \bar{r} + R_1\bar{n},\\
\bar{\rho}_2 &= \bar{r} + R_2\bar{n}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Перепишем уравнение (26) следующим образом:

$$\bar{\rho} = \frac{(\lambda - R_1)\,\bar{\rho}_2 + (R_2-\lambda)\,\bar{\rho}_1}{R_2 - R_1},$$

или так

$$\rho = \frac{\mu\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1}{\mu+1}, \tag{33}$$

где

$$\lambda = \frac{\mu R_2 + R_1}{\mu + 1}. \tag{34}$$

Заменив в уравнениях (31) λ на μ и воспользовавшись уравнениями Петерсона — Кодации

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{E_v}{2E} - \left(\frac{1}{R_1}\right)_v = 0, \\ \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{G_u}{2G} + \left(\frac{1}{R_2}\right)_u = 0, \end{gathered} \tag{35}$$

приведем их к следующему виду:

$$2\frac{\mu_u}{\mu} + \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\dfrac{dR_1}{dR_2} + 1}{R_2 - R_1} - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{dR_1}{dR_2}\right)_u = 0,$$

$$2\frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\partial R_2}{\partial v}\frac{\dfrac{dR_1}{dR_2} + 1}{R_2 - R_1} - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{dR_1}{dR_2}\right)_v = 0.$$

Отсюда следует

$$2\frac{d\mu}{\mu} - \frac{1}{2}d\ln\frac{dR_1}{dR_2} + \left(\frac{dR_1}{dR_2} + 1\right)\frac{dR_2}{R_2 - R_1} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\mu = C\sqrt[4]{(R_2 - R_1)^2\frac{dR_1}{dR_2}}\, e^{-\int\frac{dR_2}{R_2 - R_1}}. \tag{36}$$

Если поверхность Вейнгартена представляет собой минимальную поверхность, то $R_1 + R_2 = 0$ и по (36) $\mu = \text{const}$

$$\bar{\rho} = \frac{c\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1}{c + 1}.$$

При $c = 1$ получаем саму минимальную поверхность. Так как в этом случае дифференциальное уравнение (27) асимптотических линий эволют приводится к виду

$$Edu^2 + Gdv^2 = 0,$$

то им соответствует на поверхности сеть минимальных линий.

В случае поверхности $R_2 - R_1 = R = \text{const}$,

$$\mu = Ce^{-\frac{R_2}{R}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Записки математ. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и Харьк. матем. общ-ва, т. 25, стр. 45—48, 1957.

2. G. Fubini — E. Čech. Geometria projettiva differenziale, I, 1926.

3. Ф. Клейн. Неевклидова геометрия, 1936.