ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIV 1956

ГЕОМЕТРИЯ В ХАРЬКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Я. П. Бланк, Д. З. Гордевский, А. В. Погорелов

За первые десятилетия существования Харьковского университета геометрия была только предметом преподавания, научных же работ по геометрии в ту пору, по существу, не было, если не иметь в виду исследований Ф. Швейкарта, который, как известно, с 1812 по 1816 г. состоял профессором права в Харьковском университете и, занимаясь в часы досуга геометрией, пришел к выводам, которые можно рассматривать, как зачатки геометрии Лобачевского (см. В. Ф. Каган „Лобачевский", Москва—Ленинград, 1944, стр. 260—261).

Первые научные исследования в области геометрии, выполненные в Харьковском университете, связаны с именем Константина Алексеевича Андреева (1848—1921), одного из выдающихся русских геометров последней четверти XIX и начала XX вв., проводившего научную и педагогическую деятельность в Харьковском университете с 1873 по 1898 г.

Научные исследования К. А. Андреева относятся, главным образом, к проективной геометрии, хотя несомненный интерес представляют также его работы по анализу. Андреев известен также, как автор обстоятельного, получившего широкое распространение курса аналитической геометрии (вышло 5 изданий), нескольких литографированных курсов по высшей геометрии, начертательной геометрии, высшей алгебре и др., и нескольких ярко и интересно написанных статей историко-биографического характера, посвященных жизни и деятельности В. Г. Имшенецкого, В. Я. Цингера, В. Я. Буняковского, Штаудта, Шаля.

В 1885 г. К. А. Андреев по представлению О. Баклунда, В. Г. Имшенецкого, В. Я. Буняковского (см. Архив АН СССР, ф. 2, оп. 17, № 7, л. 185—185 об.) был избран членом-корреспондентом Российской Академии наук.

Высокая оценка научного творчества К. А. Андреева дана Д. Ф. Егоровым в некрологическом очерке, опубликованном в 1924 г. в „Математическом сборнике". Биографические сведения об Андрееве содержатся в сборнике „Физико-математический факультет ХГУ за 100 лет", в распространенных энциклопедических словарях, в некрологе, опубликованном Д. М. Синцовым в журнале „Наука на Украине" за 1922 г.

Перу К. А. Андреева принадлежит свыше 20 работ. Главные результаты по геометрии содержатся в его двух диссертациях и примыкающих к ним работах.

В магистерской диссертации „О геометрическом образовании плоских кривых“, опубликованной в 1875 г., ставится задача обобщить классическое понятие проективного соответствия (которое является одно-однозначным) между двумя пучками прямых на плоскости, приводящее к образованию кривых 2-го порядка, и прийти к построению и изучению кривых более высокого порядка.

Андреев устанавливает взаимно-двузначное соответствие двух пучков следующим образом.

На плоскости зафиксированы две точки O и O' и шесть прямых, из которых три — a, b, c проходят через O, а остальные три — k, l, m — общего расположения, не проходящие, вообще говоря, ни через O, ни через O'. Всякий произвольный луч $O'x'$ пучка с центром O' пересечет прямые k, l, m в точках K, L, M. В пучке прямых a, b, c, OK, OL, OM с центром O двумя тройками прямых (a, b, c) и (OK, OL, OM) будет установлено проективное соответствие между лучами одного и того же пучка (с центром O) с двойными лучами OI_1, OI_2. Таким образом, каждому лучу $O'x'$ пучка O' будут соответствовать два луча OI_1, OI_2 пучка O. Это соответствие является взаимно-двузначным, причем, если OO' рассматривать как луч пучка O, то один из двух соответственных ему лучей в пучке O' будет совпадать с OO'. Такое положение пучков Андреев называет перспективным и с помощью цепи перспектив переходит к рассмотрению общего взаимно-двузначного соответствия, которому и посвящены дальнейшие страницы.

Андреева интересует не только общая теория этого соответствия, но и вопросы построения соответственных лучей, и свойства кривой, образованной точками пересечения соответственных лучей.

Андреев доказывает ряд важных теорем. Вот две из них.

Взаимно-двузначное соответствие двух пучков в общем случае вполне определяется восемью парами соответственных лучей (в перспективном случае — семью парами).

Геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух взаимно-двузначных пучков есть кривая 4-го порядка с двумя двойными точками в центрах этих пучков (в перспективном случае — кривая 3-го порядка с простыми точками в центрах пучков).

Построением кривых 3-го порядка занимались Шаль, Шретер, Вейр, однако работа Андреева имеет то преимущество, что его рассмотрения являются более общими, он занимается не только кривыми 3-го порядка, но и 4-го порядка, метод его является оригинальным и чисто геометрическим.

Сам Андреев считал, что его исследование „О геометрическом образовании плоских кривых“ представляет собой „первый опыт геометрического установления взаимно-двузначного соответствия в самом общем его виде“.

Соответствия более высоких порядков, построение кривых высших порядков и другие вопросы рассмотрены К. А. Андреевым в его докторской диссертации „О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий“, опубликованной в 1879 г. во 2-м и 3-м выпусках IX тома „Математического сборника“.

Основная идея, которой руководствовался К. А. Андреев при написании этой работы, состоит в том, чтобы разработать геометрическую теорию многозначных соответствий между лучами двух прямолинейных пучков и изучить кривые, образованные точками пересечения соответственных лучей, чтобы, таким образом, классическая теория проективного образования кривых 2-го порядка, или еще более классическая проективная геометрия, основанная на учении о проективном (одно-однозначном) соответствии, выступала как первая глава (как низшая ступень) общей теории многозначных соответствий.

К. А. Андреев считал, что „учение о многозначных соответствиях составляет обширное поле для совершенно новых отделов науки“, но подчеркивал, что он ставит перед собой более скромную задачу — рассматривать вопрос о соответствиях высших родов лишь в такой мере, в какой это понадобится для построения кривых. На этом пути Андреев делает дальнейший шаг по сравнению с тем, что сделано в магистерской диссертации, и получает ряд важных результатов. Он строит геометрически такие многозначные соответствия, что одному лучу одного пучка прямых соответствуют четыре луча другого пучка. Это дает возможность указать общий способ построения кривой 4-го порядка по 14 ее точкам и кривой 5-го порядка по 20 ее точкам. Андрееву удается строить некоторые кривые до 8-го порядка.

Одним из наиболее существенных результатов, достигнутых Андреевым в его исследованиях, является теорема, утверждающая, что решение всякой конструктивной задачи третьей и четвертой степени может быть выполнено с помощью только линейки и одной, взятой как-нибудь на плоскости и известной всеми своими точками, кривой 3-го порядка и 3-го класса. Интересна глава „Квадратное соответствие — кремоновы преобразования — построение точек пересечения двух конических сечений“, которая представляет собой простое и оригинальное изложение квадратного и кремонова соответствия. Не менее интересной является и глава „О сетях конических сечений“, о которой, пользуясь современной терминологией, надо сказать, что в ней содержится тщательно разработанная и подробно развитая интерпретация геометрии пятимерного проективного пространства с помощью конических сечений на плоскости. Восторженный отзыв о работе Андреева дал В. Я. Цингер (Архив МГУ, дело 89/1898). К сожалению за границей эта работа, как и другие его труды, не была оценена по достоинству. В международном математическом ежегоднике (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik) приведен только заголовок диссертации Андреева. С этим связан тот факт, что замечательная теорема Андреева о решении всякой конструктивной задачи 3-й и 4-й степени, опубликованная в 1879 г., приписывается Лондону, открывшему ее в 1896 г. (см. А. А. Глаголев „Высшая синтетическая геометрия в трудах Н. Д. Брашмана, В. Я. Цингера и К. А. Андреева“, Номографический сборник, 1951 г.).

Вот еще один факт. В статье Сегре „Многомерные пространства“, помещенной в математической энциклопедии (Enz. der Math. Wiss., III, C. 7, стр. 707—972), говорится, что геометрия конических сечений на плоскости позволяет отобразить конические сечения на точки пятимерного проективного пространства; при этом автор ссылается на Штуди (1886 г.) и Ландсберга (1889 г.), забывая об Андрееве (1879 г.).

Весьма интересной является работа К. А. Андреева „О многоугольниках Понселе“, состоящая из двух статей и опубликованная в 1884 г.

Понселе в 1814 г., будучи в плену в Саратове, доказал такую теорему: „Если все вершины какого-нибудь простого многоугольника перемещаются по коническому сечению, а все стороны, кроме одной, *огибают другое коническое сечение, то последняя сторона будет перемещаться*, огибая третье коническое сечение, проходящее через точки пересечения двух первых“. Эта теорема была доказана только для окружностей, а потом была распространена на конические сечения по принципу непрерывности, вокруг которого, как известно, было много споров и который некоторые математики считали сомнительным.

Шаль высказал мнение, что в том случае, когда доказывают некоторое предположение, прибегая к принципу непрерывности, должно существовать доказательство непосредственное и не менее легкое, но проведенное с помощью подготовительных геометрических предложений, которые имеют важное значение для науки.

Имея в виду это мнение Шаля, а также имея в виду устранить применение понятия бесконечно-малого перемещения, к которому прибегал Понселе (кстати сказать, Шаль также доказывал сформулированную выше теорему Понселе и тоже применял понятие бесконечно малого перемещения), Андреев дает доказательство теоремы Понселе (и при более общих предположениях), опираясь на простые геометрические свойства, и проводит это доказательство с остроумием и блеском.

Сначала теорема доказывается для треугольников и для конических сечений, не имеющих двух точек касания, затем она распространяется на общий случай. Вводится понятие противолежащей прямой точке одного конического сечения относительно другого и понятие пары конических сечений дополнительных другой паре конических сечений.

Пусть S и T — два действительные конические сечения. Отметим на S точку G, и пусть m и m' — одна пара, а l и l' — другая пара, проходящих через G и сопряженных относительно T прямых.

Точки M, M', L, L' пересечения кривой S с прямыми (соответственно) m, m', l, l' будут действительными, так как G действительная точка.

Прямые MM' и LL' пересекаются в точке P, поляра которой g относительно S и названа противолежащей прямой точке G кривой S относительно T.

В том случае, когда m совпадает с m' и l совпадает с l', мы имеем пару касательных m и l, проведенных к T из точки G, а противолежащая прямая g точки G совпадает с прямой ML (она же $M'L'$) и мы приходим к треугольнику GML, вершины которого лежат на S, две его стороны GM и GL касаются кривой T.

Ставится вопрос: если G будет описывать кривую S, какую кривую будет огибать противолежащая прямая g.

Ответ на этот вопрос и доказывает теорему Понселе.

Андреев доказывает такую вспомогательную важную теорему: „Если два конические сечения S и T не имеют двух точек касания, то в пучке (ST) существуют еще другие два конические сечения S' и T', отличные последовательно от S и T и притом такие, что взаимная поляра S' относительно T' есть то же коническое сечение, что и взаимная поляра S относительно T“.

Конические сечения S' и T' называются д о п о л н и т е л ь н ы м и последовательно к коническим сечениям S и T.

После этого Андреев приходит к ответу на поставленный выше вопрос. Противолежащая всякой точки конического сечения S относительно T есть касательная в соответственной точке к дополнительному сечению S'. Противолежащие всех точек конического сечения S огибают, таким образом, определенное коническое сечение S', принадлежащее пучку (ST).

Эту работу Андреева нельзя не признать замечательной.

Мы не останавливаемся на разборе других геометрических работ К. А. Андреева, как, например, „О построении поляр относительно плоских геометрических кривых линий“, „Семиугольники Шретера“, „Гомоциклическое изображение сферы на плоскость“ и др. Мы не касаемся также важных работ Андреева по анализу, учебных руководств, историко-биографических очерков.

Беглый обзор научных результатов К. А. Андреева убеждает нас в том, что Д. Ф. Егоров имел основание в 1924 г. утверждать, что „как проективист Константин Алексеевич не имеет себе равных среди русских математиков“. К. А. Андреев и в Харькове и в Москве принадлежал к числу наиболее уважаемых профессоров, он принимал деятельное участие в работе Харьковского математического общества, председателем и редактором „Сообщений“ которого он состоял с 1884 по 1889 г. Он часто выступал с докладами о своих работах и речами на заседаниях общества, например, об Имшенецком, Буняковском, Ковалевской.

К. А. Андреев принимал также участие в работах Московского математического общества и Московского педагогического общества, председателем которого он был некоторое время.

Кроме работы в университете, К. А. Андреев вел педагогическую деятельность в Харьковском технологическом институте. Много поработал для средней школы.

К. А. Андреев принадлежал к либеральным кругам профессуры, он сочувственно относился к студенческому революционному движению.

В 1905 и в 1909 гг. избирался деканом физмата Московского университета, однако в 1911 г. покинул эту должность, как полагают, в знак протеста против реакционной политики министра Кассо.

К. А. Андреев находился в очень близких отношениях с Н. Е. Жуковским, А. М. Ляпуновым, В. А. Стекловым. Он восторженно отзывался о „прекрасных традициях и научных заветах“, о „таланте и преданности науке“ Н. Е. Жуковского.

В архиве АН СССР сохранилась часть переписки между К. А. Андреевым и А. М. Ляпуновым и В. А. Стекловым.

* * *

Развитие геометрии в Харьковском университете в первой половине 20-го века связано с именами Д. М. Синцова и его учеников, С. Н. Бернштейна и А. В. Погорелова.

1. Геометрические исследования С. Н. Бернштейна

Сергей Натанович Бернштейн (р. в 1880 г.) работал в Харьковском университете с 1906 по 1932 г.

Основные труды академика С. Н. Бернштейна относятся к теории дифференциальных уравнений, теории приближения функций многочленами (конструктивная теория функций) и теории вероятностей.

Важные для геометрии приложения содержатся в работах С. Н. Бернштейна по теории дифференциальных уравнений, принадлежащих к первому периоду его математического творчества.

Бернштейн доказал следующую основную теорему: если z есть решение аналитического уравнения с частными производными второго порядка $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$, обладающее внутри некоторой области S конечными производными первых трех порядков и удовле творяющее в этой области неравенству $4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2>0$, то функция z аналитична в области S.

Отсюда следует, что все поверхности постоянной положительной кривизны с конечными производными первых трех порядков аналитичны. Все поверхности с конечными производными первых трех порядков, налагающиеся на какую-нибудь аналитическую поверхность положительной кривизны, аналитичны.

Эта геометрическая теорема имеет большое принципиальное значение для теории поверхностей. Здесь впервые было получено заключение об аналитичности поверхности, если ее метрика положительной кривизны аналитична.

В своей магистерской диссертации: „Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа“ С. Н. Бернштейн получил первое общее решение проблемы Плато, построения минимальной поверхности, опирающейся на данный контур.

Дарбу в первом томе своей „Théorie générale des surfaces“, излагая работы Римана, Вейерштрасса и Шварца по решению проблемы Плато для контуров, состоящих из пространственных ломаных или плоскостей, которые минимальная поверхность должна пересекать ортогонально, пишет, что решение проблемы Плато для общего контура превышает силы современного анализа.

Приоритет решения этой проблемы для аналитического контура, который проектируется на плоскость выпуклой кривой, принадлежит С. Н. Бернштейну. В настоящее время новые решения этой проблемы получены Дугласом, Радо и Курантом.

С. Н. Бернштейну принадлежит следующая важная для геометрии „в целом“ теорема: поверхность $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первых двух порядков (при всех вещественных x, y), полная кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может при всех значениях x, y оставаться между двумя фиксированными плоскостями $z=\pm h$.

Эта теорема была затем усилена её автором: поверхность S отрицательной кривизны (в вышеуказанном смысле) $z=f(x, y)$ не может быть целиком расположена между обеими полостями гиперболоида (имеющими по одной точке пересечения с любой прямой, параллельной оси OZ), асимптотический конус которого имеет достаточно большой угол раствора.

2. *Д. М. Синцов и его ученики*

Почти полвека (1903—1946 гг.) протекала в Харьковском университете плодотворная научная и педагогическая деятельность Дмитрия Матвеевича Синцова.

При всем разнообразии исследований Д. М. Синцова можно проследить основное направление в его математическом творчестве — построение геометрической теории дифференциальных уравнений. Этому направлению принадлежат его капитальные работы по теории коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и работы по неголономной геометрии — пфаффовым и монжевым многообразиям.

Из 43 лет профессорской деятельности Д. М. Синцова в Харьковском университете 28 лет принадлежат послеоктябрьскому периоду. Именно за эти годы Синцову удается привлечь к научным исследованиям в области геометрии многочисленную группу своих учеников. Этому способствовала организация Д. М. Синцовым сначала геометрического семинара, затем научно-исследовательской кафедры геометрии при Харьковском институте народного образования, перешедшей впоследствии в кафедру геометрии Харьковского университета, и сектора геометрии Харьковского научно-исследовательского института математики и механики.

Наибольшее число работ этого периода Д. М. Синцов посвятил вопросам неголономной геометрии, а именно, геометрии пфаффовых и монжевых многообразий. Эти исследования представляют естественное развитие его работ по теории коннексов, которыми он занимался с 1892 г.

Коннексы были введены в рассмотрение Клебшем в 70-х годах прошлого столетия. В мемуаре „Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie“ он ставит задачу изучения геометрических конфигураций, элементом которых служит сочетание основных элементов точка — прямая (в плоскости) или точка, прямая и плоскость (в пространстве).

Соответственно этому Клебш называет коннексом (тернарным) конфигурацию, определяемую уравнением $f(x;\ u)=0$, однородным относительно точечных координат x_1, x_2, x_3 и координат прямой u_1, u_2, u_3.

Теория тернарных коннексов непосредственно применяется при изучении поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений первого порядка и при разработке вопроса о геометрических преобразованиях. Так, билинейный коннекс определяет коллинеацию, коннекс $(m,\ 1)$ $L_1u_1+L_2u_2+L_3u_3=0$, где $L_i=0$, кривые m-го порядка с m^2-1 общими точками, определяет кремоново преобразование.

Широкое развитие этих идей для пространства трех измерений является большой заслугой Д. М. Синцова. Общей теории коннекса с элементом точка — плоскость посвящена диссертация Синцова: „Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка“ [1].

Коннекс с элементом точка—прямая в пространстве имеет меньше аналогий с тернарным. Как показал Д. М. Синцов, если рассмотреть главную коинциденцию такого коннекса, то приходим в случае ранга 1 к пфаффову уравнению с тремя переменными, а при ранге $r>1$ — к монжеву уравнению.

Терминология эта принадлежит С. Ли (Geometrie der Berührungstransformationen).

Полнее дифференциальную геометрию систем интегральных кривых пфаффова уравнения разработал Фосс под названием „Punkt — Ebenen Systeme“ в „Math. Ann.“ (тт. 16, 23, 25). Ими занимались Лилиенталь, Роджерс и Дарбу.

Систематически геометрией пфаффовых и монжевых многообразий Д. М. Синцов занялся, начиная с 1926 г., в серии работ, из которых главные: „О системах интегральных кривых пфаффова уравнения“ [2], „Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung“ [3], „Studien über das System der Integralkurven der Pfaffs-

[1] Ученые записки Казанского университета, 1894—1895.
[2] Наукові записки наук.-дослід. математичних кафедр України, III, 1928.
[3] Math. Ann., Bd. 101, 1929, pp. 261—272.

chen Gleichung $Pdx+Q\,dy+R\,dz=0$"[1], „Геометрія монжевих рівнянь"[2].

Пфаффово уравнение

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \tag{1}$$

в случае

$$G=P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \tag{2}$$

определяет семейство поверхностей. Если же условие интегрируемости (2) не выполнено, интегральные кривые, выходящие из точки пространства, касаются плоскости $\Sigma P(X-x)=0$.

Интегральные кривые, для которых эти плоскости служат соприкасающимися, играют роль асимптотических и определяются уравнением (1) и $\Sigma\, dP\, dx=0$.

Кривизна интегральных кривых определяется по формуле

$$\frac{\cos\varphi}{\rho_\varphi}=\frac{\Sigma\, dP\, dx}{ds^2\,\Sigma P^2}=\frac{1}{\rho},$$

являющейся обобщением теоремы Менье.

Отрезки $l=\sqrt{|\rho|}$, отложенные на касательных к интегральным кривым, выходящим из точки пространства, определяют аналог индикатрисы Дюпена.

Отсюда вытекает классификация точек пространства на эллиптические, гиперболические и параболические. Естественно обобщается понятие сопряженных касательных. Но соответствие сопряженных направлений, хотя и проективное, оказывается не инволюционным (если $G\neq 0$).

Экстремальные радиусы определяются из квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} 2\left(P_x-\frac{1}{\rho}\right) & P_y+Q_x & P_z+R_x & P \\ P_y+Q_x & 2\left(Q_y-\frac{1}{\rho}\right) & Q_z+R_y & Q \\ P_z+R_x & Q_z+R_y & 2\left(R_z-\frac{1}{\rho}\right) & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}=0,$$

позволяющего ввести среднюю кривизну — полусумму главных кривизн и полную кривизну — произведение главных кривизн; последняя

$$K=\frac{\Delta'}{(\Sigma P^2)^2},$$

где

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 2P_x & P_y+Q_x & P_z+R_x & P \\ P_y+Q_x & 2Q_y & Q_z+R_y & Q \\ P_z+R_x & Q_z+R_y & 2R_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

[1] Записки Харк. математичн. т-ва, **4**, V, стр. 97—129, 1932.

[2] Там же, III, 1929, стр. 121—132.

Интегральные кривые, огибающие направления главных кривизн, составляют линии кривизны первого рода, а интегральные кривые, вдоль которых нормали системы образуют развертывающиеся поверхности, составляют линии кривизны второго рода. Если в плоскости, соответствующей точке M, взять две бесконечно близкие точки M', M'' и нормали, соответствующие точкам M, M', M'', отобразить на единичную сферу, то отношение площади сферического отображения к площади треугольника M, M', M'' имеет своим пределом

$$K' = -\frac{\Delta}{(\Sigma P^2)^2},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z & P \\ Q_x & Q_y & Q_z & Q \\ R_x & R_y & R_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

Этот предел Д. М. Синцов называет гауссовой кривизной системы.

Полная и гауссова кривизна вообще не совпадают, так как

$$\Delta' = 4\Delta + G^2.$$

В то время как полная кривизна равна произведению кривизн, соответствующих направлениям линий кривизны первого рода, гауссова кривизна равна произведению кривизн, соответствующих направлениям линий кривизны второго рода.

Соотношение Эннепера—Бельтрами, как показал Д. М. Синцов, обобщается следующим образом:

$$\left(K - \frac{1}{4}G^2\right)\mathrm{I} - 2H\,\mathrm{II} + \mathrm{III} - \frac{G}{\Sigma P^2}\,\mathrm{IV} = 0,$$

где IV — левая часть дифференциального уравнения линий кривизны первого рода.

Геодезические линии первого рода, или „прямейшие", — интегральные кривые, у которых главная нормаль совпадает с нормалью системы.

Геодезические линии второго рода, или „кратчайшие", — экстремали вариационной задачи $\delta\int(1 + \lambda\Sigma Px' + \mu\Sigma x'^2)\,ds = 0$. Совпадение этих линий имеет место только при $G = 0$.

Д. М. Синцов рассмотрел индикатрису геодезического кручения, геометрическое место кругов кривизны и отдельные случаи систем интегральных кривых — системы конические, цилиндрические, развертывающиеся, системы, аналогичные поверхностям вращения, и уравнение вида $dy - z\,dx = 0$, к которому можно привести общее пфаффово уравнение точечным преобразованием.

Если по геометрии пфаффовых многообразий работы Д. М. Синцова пополняют и систематизируют результаты предшествующих авторов (Фосс, Лилиенталь, Роджерс, Дарбу, Иссали), то по дифференциальной геометрии монжевых уравнений имелся лишь результат С. Ли от 1898 г., обобщающий теорему Менье: кривизна интегральной кривой монжева уравнения $F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ определяется по формуле:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho_\varphi} = -\frac{\Sigma F'_{x'} \cdot x''}{\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}.$$

Синцов обобщает понятие асимптотических линий как интегральных кривых, у которых соприкасающиеся плоскости касаются конусов, определяемых монжевым уравнением. Если $F=0$ степени r относительно дифференциалов, то через точку пространства проходит $r(r+1)$ асимптотических (в случае линейчатого комплекса каждая прямая комплекса — асимптотическая). Распространение задачи об экстремальных радиусах кривизны приводит к $r(3r-1)$ направлений, огибающих линии кривизны первого рода. Линии кривизны второго рода, вдоль которых бесконечно близкие нормали пересекаются, определяются дифференциальным уравнением

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ F'_{x'} & F'_{y'} & F'_{z'} \\ dF'_{x'} & dF'_{y'} & dF'_{z'} \end{vmatrix} = 0.$$

Как и в случае пфаффовых уравнений, здесь имеются геодезические двух типов. Во-первых, „прямейшие“ линии, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{F'_x x'+F'_y y'+F'_z z'}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}} \text{ и т. д.}$$

и „кратчайшие“ — экстремали вариационной задачи о наименьшем расстоянии:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial x'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] \text{ и т. д.}$$

Получено выражение кривизны и кручения асимптотических линий монжева уравнения, включая и случай линейчатого комплекса.

С пфаффовыми многообразиями тесно связаны конгруэнции кривых, заданные совокупной системой нормального вида:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

Д. М. Синцов дает подробное перечисление возможных типов особенных точек, исходя из классификации Пуанкаре, применяя методы теории коннексов и используя введенное им понятие соприкасающегося билинейного коннекса $\sum\frac{\partial P_i}{\partial x_k}X_k U_i=0$.

Из других работ Д. М. Синцова, относящихся к этому периоду и посвященных общей теории коннексов, важнейшие: „Общая теория коннекса с элементом точка, прямая в пространстве“[1], „Простейшие образы и метрические функции коннексного пространства“[2], „Геометрическая теория интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными (теория характеристик)“[3] и обзорная статья: „Современное состояние теории коннексов“[4].

---

[1] Труды Института математики Акад. наук УССР, № 5, 1940.
[2] Записки Науч.-исслед. института математики Харьк. госуниверситета, т. 14, 1937.
[3] Геометричний збірник, II, 1940.
[4] Труды I Всесоюзного съезда математиков, Харьков, 1930.

После того как основные понятия классической теории поверхностей были распространены на пфаффовы многообразия, возникла аналогичная задача для проективной теории поверхностей.

Я. П. Бланк и М. А. Николаенко (1929 г.) распространили на эти системы понятие соприкасающейся поверхности второго порядка С. Ли. В отличие от случая поверхности, здесь в каждой точке пространства имеются две различные поверхности Ли, которые совпадают лишь при $G=0$.

Я. П. Бланк рассмотрел для этих систем геометрическую интерпретацию Террачини проективного линейного элемента: двойное отношение четырех точек пересечения асимптотических касательных, исходящих из двух бесконечно близких точек интегральной кривой, с прямой пересечения соответствующих плоскостей имеет пределом с точностью до численного коэффициента $\frac{G^2}{\Delta}$. В этом — геометрический смысл условия интегрируемости.

Если $G=0$, исчезают члены нулевого и первого порядка, а член второго порядка дает с точностью до числового коэффициента квадрат проективного линейного элемента.

Естественно обобщается известное соответствие Сегре: три бесконечно близкие точки интегральной кривой определяют ее соприкасающуюся плоскость, а плоскости системы, соответствующие этим точкам, определяют точку. Этим устанавливается соответствие между плоскостями связки с центром в произвольной точке пространства M и точками плоскости, соответствующей M, — соответствие бирациональное третьей степени. Стационарные плоскости, соответствующие стационарным точкам, огибают конус шестого класса, для которого плоскость системы четырехкратная касательная плоскость, касающаяся конуса вдоль асимптотических направлений.

Лишь при $G=0$ плоскость становится пятикратной и касается конуса вдоль двух асимптотических направлений и трех направлений Дарбу.

По проективно-дифференциальной геометрии „неголономных поверхностей“ появились затем исследования ряда авторов (Максиа, Бомпиани, Бортолотти, Вычихло, Бушин-Су), преимущественно в итальянских журналах, и кандидатская диссертация М. Р. Рогового.

М. А. Николаенко показала, что характеристики монжева уравнения могут быть рассматриваемы как интегральные кривые, определяемые монжевым уравнением $F(x, y, z, x', y', z')=0$

и
$$\begin{vmatrix} F_x & F_{x'} & (F_{x'})' \\ F_y & F_{y'} & (F_{y'})' \\ F_z & F_{z'} & (F_{z'})' \end{vmatrix} = 0.$$

Если интегральные кривые обладают двумя из трех свойств: 1) быть характеристиками, 2) быть геодезическими первого рода (прямейшими), 3) быть геодезическими второго рода (кратчайшими), то они обладают и третьим свойством.

Геодезические линии поверхностей изучал Т. И. Котов. Опубликованы шесть заметок из его обширной монографии, посвященной геодезическим линиям, над которыми он работал до последних дней жизни, заканчивая редакцию последних параграфов. Эта работа была премирована премиальной комиссией ВУКСУ, но после передачи дел Наркомпросу потерялась в архивах. Из опубликованных заметок приведем следующие результаты: необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональные траектории геодезических линий были геодезическими кругами (кривыми постоянной геодезической кривизны), является их изотермичность.

В семействе параллельных кривых с постоянной кривизной поверхности вдоль каждой кривой или все кривые — геодезические круги, или ни одна не является геодезическим кругом. Только на развертывающихся поверхностях радиусы геодезического круга в смысле Бианки и Дарбу равны.

Котовым дано новое доказательство теоремы Адамара о том, что на поверхностях положительной кривизны не существует геодезических линий, асимптотически приближающихся к замкнутой геодезической; доказывается, что геодезической линии, асимптотически приближающейся к замкнутой геодезической, не существует также на развертывающихся поверхностях.

Если на некоторой поверхности вращения (положительной кривизны) с одной максимальной параллелью все геодезические линии, не упирающиеся в края, замкнуты, то все поверхности вращения, наложимые на данную, имеют геодезические линии или исключительно замкнутые или исключительно незамкнутые.

Николай Михайлович Душин напечатал оригинальный курс элементарной геометрии, в котором отведено большое место движению. Стереометрия излагается не оторванно от планиметрии, тригонометрия связывается с геометрией и излагается с помощью метода координат; введены элементы начертательной геометрии и, где это возможно, проводится идея функциональной зависимости.

Н. М. Душин издал также курс аналитической геометрии, который тоже пронизан идеей геометрических преобразований. Так, например, в курсе рассмотрены центральная перспектива, перспективное подобие, перспективно-афинное соответствие. При этом вначале изучаются геометрические формы, определяемые уравнениями первой степени, в плоскости и в пространстве, а затем формы второго порядка.

Наконец, ему же принадлежит курс начертательной геометрии, основанный на идеях проективной геометрии.

Из оригинальных научных работ Душина следует отметить его работу о самопроективных кривых, т. е. кривых инвариантных относительно одночленной группы проективных преобразований. Работа сопровождается прекрасно выполненными чертежами.

Поверхностям переноса и их обобщениям посвятил свою докторскую диссертацию Я. П. Бланк.

Поверхности переноса рассматривал еще Монж в своей Application de l'analyse à la Géométrie. С. Ли построил свою теорию минимальных поверхностей, рассматривая их как поверхности переноса с минимальными кривыми переноса. С. Ли принадлежит постановка и решение проблемы: определить поверхности, которые могут быть рассматриваемы как поверхности переноса двумя или большим числом способов. Прямые, проведенные через произвольную точку пространства параллельно касательным к кривым переноса такой поверхности, образуют алгебраический конус четвертого порядка, а координаты самой поверхности выражаются через абелевы интегралы. Эта теорема доказывалась затем разными авторами (Пуанкаре, Шефферс, Дарбу, Чеботарев) и обобщалась на пространство большего числа измерений (С. Ли, Пуанкаре, Н. Г. Чеботарев в 1927 г. и Виртингер в 1938 г.).

Широкое обобщение поверхностей переноса принадлежит Н. Г. Чеботареву, рассматривавшему поверхности, содержащие системы импримитивности относительно заданной группы непрерывных преобразований.

Я. П. Бланк исходит из того, что поверхности переноса, характеризуемые наличием у них сопряженной сети цилиндрических линий, представляют частный случай поверхностей Петерсона, несущих сопряженную сеть конических линий, и ставит вопрос о распространении проблемы С. Ли на эти последние поверхности.

Им определены поверхности с двумя сетями взаимно-сопряженных плоских конических линий (иначе — поверхности с двумя двойными сетями Кёнигса) и найдено общее решение проблемы Энгеля. Последняя заключается в определении поверхностей, являющихся поверхностями переноса относительно двух различных плоскостей. Поверхностью переноса относительно плоскости ω Энгель называет поверхность, полученную из обычной проективным преобразованием, переводящим бесконечно удаленную плоскость в ω. Это частный случай вышеуказанной задачи, к которому приходим, введя дополнительное требование, чтобы вершины конусов, соответствующих кривым каждой сети, лежали в соответствующей плоскости.

Я. П. Бланк определил все поверхности, несущие континуум конических сетей.

Различными вопросами линейчатой геометрии занимались П. М. Дармостук, С. М. Урисман, Д. З. Гордевский.

Вот некоторые из полученных ими результатов.

П. М. Дармостук доказывает, что через каждую прямую конгруэнции проходят две линейчатые поверхности, для которых данная точка прямой является стрикционной. Для предельных точек эти линейчатые поверхности совпадают в одну. Дармостук нашел зависимость между куммеровыми и гауссовыми коэффициентами первой дифференциальной формы. Он изучил кривые на развертывающихся поверхностях, касательные к которым образуют конгруэнцию с фокальной кривой (в частности: ангармоническое отношение, в котором четыре кривых делят прямолинейные образующие развертывающейся поверхности, постоянно). Им подробно изучены комплексы, конусы которых пересекают некоторую поверхность по кривым, зависящим от двух параметров.

С. М. Урисман, приводя элементарное доказательство формул Чезаро, применяет их к некоторым вопросам теории линейчатых поверхностей. В частности, отыскиваются линейчатые поверхности, на которых стрикционные линии являются геодезическими, асимптотическими, линиями кривизны, плоскими линиями или прямыми.

Д. З. Гордевский средствами тензорного анализа строит общую теорию прямолинейных конгруэнций в аффинной дифференциальной геометрии, устанавливает зависимость между различными аффинными теориями, между аффинной теорией и метрической и находит тензорные признаки некоторых отдельных классов конгруэнций.

В связи с изучением конгруэнции аффинных нормалей им исследованы аффиннопараллельные поверхности. Поверхность $\bar{y}$ называется аффиннопараллельной к поверхности x, если в соответственных точках касательные плоскости к этим поверхностям параллельны между собой. Соответствие устанавливается аффинными нормалями к поверхности $\bar{x}$. Найдены основные тензоры и инварианты поверхности $\bar{y}$, и, в частности, выяснены условия взаимности поверхностей $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Кривые, плоские и пространственные, также привлекали к себе внимание харьковских геометров.

Большое число заметок посвятил этому вопросу Д. М. Синцов, в особенности в связи с изготовлением большого атласа кривых, являющегося украшением созданного им геометрического кабинета в Харьковском университете, одного из наиболее полных в Союзе.

Деятельное участие в составлении этого атласа принял Н. М. Душин.

Интересны работы П. А. Соловьева по конструированию приборов, вычерчивающих различные кривые, в частности, новый параболограф, гиперболограф (этот прибор находится в геометрическом кабинете ХГУ), прибор для построения листа Декарта и некоторых других кривых[1].

П. А. Соловьева также интересовали кривые, центр тяжести которых является центром тяжести их кривизны. Здесь он идет дальше Мейсснера, указавшего на кривые постоянной ширины, и строит новые кривые, комбинируя центрально-симметричные кривые с кривыми постоянной кривизны.

Им изучен вопрос о наилучшем наложении двух замкнутых кривых, разумея под этим такое наложение, когда сумма абсолютных величин тех сегментов обеих площадей, которые не являются общими, минимальна. Одно из следствий гласит: «во всякую всюду выпуклую кривую можно вписать прямоугольник данной ширины по крайней мере одним способом».

С. М. Урисман в статье «Про пари кривих» обобщает кривые Бертрана, Спивака, Сальковского и определяет некоторые другие типы парных кривых.

Сотрудниками сектора геометрии Института математики и кафедры геометрии Харьковского университета выпущено два тома «Геометрического сборника». В первом томе помещена статья Д. М. Синцова: «Обзор работ по геометрии на Украине за 20 лет (1917—1937)», в которой содержатся некоторые дополнительные факты, не освещенные в нашем обзоре.

Вторая мировая война нанесла тяжелый урон геометрии Харькова. Погибли в боях с врагом доцент А. А. Макаренко, аспирант С. Левинтович, защитивший диссертацию буквально накануне войны (21 июня 1941 г.), аспирант А. Шапиро, уже подготовлявший диссертацию.

После войны Я. П. Бланком написана упомянутая выше докторская диссертация и ряд примыкающих к ней работ.

Д. З. Гордевскому принадлежат синтетические исследования в многомерном проективном пространстве, в частности, теорема, позволяющая переносить результаты, полученные в m-мерном пространстве, на пространства $mk+m+k$ измерений при произвольных m и k.

В своей кандидатской диссертации «Топологическая модель Бойя проективной плоскости и ее сферическое отображение» А. С. Лейбин дает решение задачи (на которую указывают Гильберт и Кон-Фоссен в своей «Наглядной геометрии») о построении сферического отображения топологической модели Бойя проективной плоскости. Отображение строится наглядными методами и осуществляется в виде замкнутой многолистной поверхности, покрывающей сферу.

Между прочим дается также деформация «римской» поверхности Штейнера в поверхность Бойя.

---

[1] Конструированием приборов занимались также Г. И. Гаврилко (новый коникограф) и А. С. Лейбин (поляриграф).

Работы А. В. Погорелова посвящены в основном четырем вопросам: 1) кривые на выпуклых поверхностях; 2) изгибание выпуклых поверхностей; 3) регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой; 4) существование и единственность выпуклых поверхностей, определяемых различными условиями «в малом».

Основные результаты, касающиеся кривых на общих выпуклых поверхностях, содержатся в работе «Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности»[1], где рассмотрен важный, введенный А. Д. Александровым, класс кривых — квазигеодезические линии. Эти линии являются обобщением геодезических линий и содержат последние. На регулярной поверхности каждая квазигеодезическая является геодезической. Квазигеодезические естественным образом появляются в теории общих выпуклых поверхностей, поэтому исследование этих линий представляет интерес. Подобно тому, как геодезические на регулярных поверхностях определяются как кривые с нулевой геодезической кривизной, квазигеодезические определяются как кривые с неотрицательным по обе стороны поворотом, представляющим собой обобщение интегральной геодезической кривизны регулярных кривых на регулярных поверхностях. Точное определение поворота состоит в следующем: пусть γ —простая кривая на выпуклой поверхности, Γ — геодезическая ломаная, соединяющая концы γ и расположенная в правой полуокрестности кривой γ. Пусть $\alpha_к$ — углы, образованные последовательными звеньями ломаной Γ со стороны области, ограниченной кривой и ломаной, α и β — углы, образованные начальным и конечным звеньями ломаной с кривой γ. Тогда под правым поворотом кривой γ понимают предел выражения $\alpha+\beta+\Sigma(\pi-\alpha_к)$, когда Γ стремится к γ. Например, окружность основания кругового конуса является квазигеодезической (кстати она не будет геодезической; более того, в направлении этой окружности нельзя провести никакой геодезической). Оказывается, этот предел всегда существует, если кривая γ имеет на концах определенные направления, что эквивалентно существованию полукасательных (А. Д. Александров). Квазигеодезическая определяется, как кривая, имеющая на любом участке неотрицательный правый и левый поворот.

В этой работе обобщены известные теоремы И. М. Либермана о геодезических на случай квазигеодезических линий, в частности, теорема о выпуклости геодезической на развертке проектирующего цилиндра, о существовании в каждой точке полукасательной справа и слева, существовании касательной почти во всех точках, исключая не более чем счетное множество точек, существование почти всюду кривизны и соприкасающейся плоскости и др. Доказано, что из каждой точки выпуклой поверхности в любом направлении можно провести квазигеодезическую (вообще говоря, не единственную), в то время как геодезической может и не существовать; доказано, что на поверхности с ограниченной кривизной каждая квазигеодезическая является геодезической. На случай квази-геодезических распространена теорема Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана о замкнутых геодезических на поверхности рода нуль. Именно, доказано, что на любой замкнутой выпуклой поверхности существуют по крайней мере три замкнутые геометрически различные квазигеодезические (в то время как замкнутых геодезических на ней может вовсе не существовать).

Основные результаты по вопросу изгибания выпуклых поверхностей содержатся в трех работах А. В. Погорелова: «Однозначная определен-

[1] Матем. сборник, т. 25, № 2, 1949.

ность выпуклых поверхностей»[1], «Изгибание выпуклых поверхностей»[2] и «Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей»[3]. Первая работа посвящена изгибаниям важного класса выпуклых поверхностей — ограниченной удельной кривизны. Это поверхности, у которых для каждого геодезического треугольника выполняется неравенство $\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{S}<M$, где α, β, γ — углы треугольника, S — его площадь, а M — постоянная, одна и та же для всех треугольников. В частности все регулярные (дважды дифференцируемые) поверхности суть поверхности ограниченной удельной кривизны. Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах:

1. Замкнутые выпуклые поверхности ограниченной удельной кривизны в классе выпуклых поверхностей неизгибаемы;

2. Бесконечные выпуклые поверхности $z=z\ (x,\ y)$ ограниченной удельной кривизны в любой конечной части при условии

$$\frac{z(x,\ y)}{x^2+y^2}>\varepsilon>0$$

неизгибаемы;

3. Бесконечные выпуклые поверхности с полной кривизной меньше 2π и с ограниченной удельной кривизной в любой конечной части, «закрепленные» на бесконечности, неизгибаемы;

4. Выпуклые шапки с ограниченной удельной кривизной неизгибаемы в классе выпуклых шапок.

Значение этих теорем заключается не столько в том, что неизгибаемость устанавливается для поверхностей, подчиненных слабым условиям регулярности (ограниченность удельной кривизны), сколько в том, что факт неизгибаемости устанавливается в классе всех выпуклых поверхностей, т. к. условие теоремы (ограниченность удельной кривизны) является внутренним, оно относится к метрике поверхности, а не к ее внешней форме. Во всех известных ранее доказательствах неизгибаемости (Кон-Фоссен, Герглотц, А. Д. Александров) класс поверхностей, в котором неизгибаемость устанавливалась, подчинялся тем или иным требованиям внешней регулярности (например, двукратная дифференцируемость). Кроме того, теоремой 2 впервые установлена неизгибаемость бесконечных поверхностей. А теорема 3 естественно дополняет теорему С. П. Оловянишникова об изгибаниях бесконечных поверхностей с полной кривизной меньше 2π.

В работе «Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей» неизгибаемость замкнутых выпуклых поверхностей устанавливается А. В. Погореловым в самых общих предположениях, т. е. для всех выпуклых поверхностей, не подчиненных никаким другим ограничениям, кроме выпуклости. Изложенные в этой работе методы доказательства допускают перенесение на случай бесконечных выпуклых поверхностей и шапок.

Основные результаты, касающиеся вопроса внешней регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой, содержатся в упомянутой уже книге А. В. Погорелова «Изгибание выпуклых поверхностей». В этой работе установлено, что выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной кривизной регулярна, в частности, всякая выпуклая поверхность, изометричная регулярной, регулярна. Значение этого ре-

[1] Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 29, 1948.
[2] Гостехиздат, 1951.
[3] Издательство АН УССР, 1952.

зультата заключается в том, что им открываются широкие возможности применения сильных методов теории общих выпуклых поверхностей, созданных А. Д. Александровым, к решению различных вопросов классической дифференциальной геометрии. Мы имеем ввиду прежде всего проблему изгибания в ее классической постановке, где идет речь об изгибании регулярных поверхностей в классе также регулярных поверхностей. Эта проблема аналитически сводится к рассмотрению уравнения Дарбу, представляющего собой уравнение типа Монжа—Ампера и является довольно трудной, в особенности, когда ставится вопрос об изгибании целой поверхности, а не сколь угодно малой ее части. Результаты, полученные в этой области, несмотря на работы многих крупных геометров, далеко не многочисленны.

Теоремой А. Д. Александрова «о склеивании» проблема изгибания в классе общих выпуклых поверхностей принципиально решается до конца. Этой теоремой вопрос об изгибании той или иной поверхности с краем сводится к задаче, которая в конкретных случаях решается совершенно элементарными средствами. Так, например, с помощью этой теоремы А. С. Лейбин доказал, что любая выпуклая поверхность, которая получается из замкнутой удалением области с положительной кривизной, изгибаема[1].

Теорема о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой позволяет применить метод склеивания А. Д. Александрова к решению проблемы изгибания в классической постановке. Заметим также, что из теоремы о регулярности и теоремы А. Д. Александрова о реализации абстрактно заданной на сфере выпуклой метрики выпуклой поверхностью, получается простое решение известной проблемы Вейля о существовании замкнутой аналитической поверхности, реализующей заданную на сфере аналитическую метрику с положительной кривизной. Не касаясь других применений теоремы о регулярности, заметим, что по ходу ее доказательства в работе получается некоторое обобщение известной теоремы С. Н. Бернштейна об аналитичности решений уравнений эллиптического типа, а именно, доказывается теорема:

Всякое трижды непрерывно дифференцируемое решение уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа $F(x, y, z, p; q, r, s, t) = 0$ является дифференцируемым $n+1$ раз, если функция F дифференцируема n раз.

Вопросам существования и единственности выпуклых поверхностей посвящены работы А. В. Погорелова «Одна общая теорема для бесконечных выпуклых многогранников» и «Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей»[2]. В первой из этих двух работ доказывается существование и единственность бесконечного выпуклого многогранника, у которого заданы: направления внешних нормалей, значения опорных функций для бесконечных граней и значения некоторой неотрицательной непрерывной функции плоского многоугольника с весьма общими свойствами для конечных граней (в частном случае эта функция может представлять собою площадь многоугольника). Относительно направлений нормалей делаются также предположения самого общего характера, естественно вытекающие из самой постановки вопроса.

[1] Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем, УМН, т. 5, вып. 5, 1950.
[2] ДАН, т. 62, № 2, 3, 1948.