Gestufte Räume.

Von

F. Hausdorff (Bonn).

Wenn jeder Teilmenge A einer Menge E eine Menge A_λ zugeordnet wird, die den Kuratowskischen Axiomen über die abgeschlossene Hülle mit Ausnahme von $A_{\lambda\lambda} = A_\lambda$ genügt, so wollen wir E einen *gestuften Raum* nennen. Insbesondere erzeugt jeder Fréchetsche L-Raum einen gestuften Raum, und andererseits jeder gestufte Raum einen topologischen Raum, so dass die gestuften Räume als Bindeglied zwischen L-Räumen und topologischen Räumen einer kurzen Untersuchung nicht unwert sind, die vielleicht einige bekannte Tatsachen der Raum-Axiomatik [1]) in hellerem Lichte erscheinen lässt.

§ 1. Topologische Räume.

Dieser Ausdruck wird hier im folgenden Sinn verstanden: in E ist ein System $\mathfrak{F}$ von Mengen $F \subset E$, den abgeschlossenen Mengen, mit den Eigenschaften gegeben [2]):

(1) *Der Raum E selbst und die Nullmenge 0 sind abgeschlossen.*

(2) *Die Summe von zwei (also von endlich vielen) abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(3) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(4) *Einpunktige (also endliche) Mengen sind abgeschlossen.*

[1]) Vgl. M. Fréchet, *Les espaces abstraits* (Paris 1928).

[2]) Wieviel man schon mit (1) und (3) allein beweisen kann, zeigt W. Sierpiński, *General topology* (Toronto 1934), Chapt. I.

Die Komplemente der abgeschlossenen Mengen heissen offene Mengen; eine offene Menge, die den Punkt x oder die Menge A enthält, heisst Umgebung von x oder A. (4) möge auch das *erste Trennungsaxiom* heissen; es besagt, dass, für $x \neq y$, x eine zu y disjunkte Umgebung hat. Das zweite Trennungsaxiom, wonach zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen haben, wird nicht vorausgesetzt.

Die Axiome (1)—(4) ermöglichen die Einführung der kleinsten abgeschlossenen Menge $\supset A$, d. h. der abgeschlossenen Hülle A_α von A mit den Eigenschaften

(5) $\quad 0_\alpha = 0, \quad A \subset A_\alpha \subset E, \quad (A+B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha, \quad A_{\alpha\alpha} = A_\alpha, \quad x_\alpha = x,$

die man auch mit Herrn Kuratowski [1]) als Axiome an die Spitze stellen kann.

Eine und dieselbe Menge kann durch verschiedene Systeme $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ abgeschlossener Mengen zu verschiedenen topologischen Räumen E, E_1 gemacht werden. Wir nennen E_1 einen (topologischen) *Oberraum* zu E, E einen *Unterraum* zu E_1, wenn $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Alle im Oberraum abgeschlossenen Mengen sind also auch im Unterraum abgeschlossen, aber (falls $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$) nicht umgekehrt; der Oberraum hat weniger abgeschlossene Mengen und demgemäss grössere abgeschlossene Hüllen:

$$A_\alpha(E_1) \supset A_\alpha(E).$$

Der unterste aller möglichen Räume ist der, wo alle Mengen abgeschlossen sind (also alle Mengen offen, alle Punkte isoliert, E ein „diskreter" Raum), der oberste der, in dem nur die (von den Axiomen geforderten) endlichen Mengen und E selbst abgeschlossen sind. Ist eine Menge von topologischen, als Punktmengen sämtlich identischen, Räumen E_t (wo der Index t irgend eine Menge T durchläuft) mit den Systemen $\mathfrak{F}_t$ abgeschlossener Mengen und den abgeschlossenen Hüllen $A_\alpha(E_t)$ gegeben, so hat dieses Raumsystem gemeinsame Ober- und Unterräume. Unter den Oberräumen $\overline{E}$, für die ja $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}_t$ sein muss, gibt es einen untersten, für den das System der abgeschlossenen Mengen

$$\overline{\mathfrak{F}} = \prod_t \mathfrak{F}_t$$

[1]) C. Kuratowski, *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), p. 182—199.

das Produkt (der Durchschnitt) der sämtlichen $\mathfrak{F}_t$ ist, das offenbar die Axiome (1)—(4) erfüllt. Für die abgeschlossenen Hüllen in diesem untersten Oberraum gilt

$$A_\alpha(\bar{E}) \supset \sum_t A_\alpha(E_t);$$

die genaue Formel wird in (10) gegeben. Ebenso gibt es unter den Unterräumen $\underline{E}$ mit $\underline{\mathfrak{F}} \supset \mathfrak{F}_t$ einen obersten; für ihn ist

$$\underline{\mathfrak{F}} \supset \sum_t \mathfrak{F}_t, \qquad A_\alpha(\underline{E}) \subset \prod_t A_\alpha(E_t),$$

und zwar $\underline{\mathfrak{F}}$ das kleinste System über $\sum_t \mathfrak{F}_t$, das die Axiome (2), (3) erfüllt.

Es sei $y = \varphi(x)$ eine eindeutige Abbildung des topologischen Raumes E (mit den abgeschlossenen Hüllen A_α) auf den topologischen Raum H (mit den abgeschlossenen Hüllen B_β); $\varphi(A)$ sei das Bild von $A \subset E$, $\varphi^{-1}(B)$ das Urbild von $B \subset H$. Die Abbildung ist im Punkt x stetig, wenn für jede Menge A mit $x \in A_\alpha$ zugleich $\varphi(x) \in \varphi(A)_\beta$ ist; sie ist überall stetig, wenn

$$\varphi(A_\alpha) \subset \varphi(A)_\beta \qquad (A \subset E)$$

oder auch

$$\varphi^{-1}(B)_\alpha \subset \varphi^{-1}(B_\beta) \qquad (B \subset H)$$

ist. Damit gleichbedeutend ist: die Urbilder der in H abgeschlossenen (offenen) Mengen sind in E abgeschlossen (offen). Die identische Abbildung von E auf den, als Punktmenge mit E identischen, Raum H ist stetig, wenn jede in H abgeschlossene Menge auch in E abgeschlossen, d. h. H Oberraum zu E ist. Die schlichten (= eineindeutigen) stetigen Bilder von E sind also mit den Oberräumen von E topologisch äquivalent (homöomorph).

Es sei $E = \sum_y^H E_y$ eine Zerlegung der Menge E in disjunkte Summanden $\neq 0$, wobei der Index y zunächst eine reine Menge H durchläuft. Indem wir $y = \varphi(x)$ statt $x \in E_y$ schreiben, also jedem Punkt x den Index der ihn enthaltenden Menge E_y zuordnen, erhalten wir eine eindeutige Abbildung von E auf H, bei der $\varphi^{-1}(y) = E_y$ das Urbild von y ist. Wenn nun E topologisch ist, so suche man auch H so zu topologisieren, dass die Abbildung $y = \varphi(x)$ stetig wird; ist dies möglich, so heisst $E = \sum E_y$ eine *stetige Zerlegung*. Die Aufgabe verlangt, *nur* solche Mengen $B \subset H$ als abgeschlossen zu erklären, deren Urbilder $\varphi^{-1}(B)$ abgeschlossen sind; es steht aber frei, alle diese Mengen oder nur einen Teil von ihnen als abgeschlossen zu erklären. Andererseits sind die Punkte y durch Axiom (4) als abgeschlossen vorgeschrieben, und ihre Urbilder, die Summanden E_y der Zerlegung, müssen also abgeschlossen sein. Dies ist aber auch die einzige [1]) notwendige und hinreichende Bedingung für eine stetige Zerlegung. Bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{B}$ das System der B, deren Urbilder

$$\varphi^{-1}(B) = \sum_y^B E_y$$

abgeschlossen sind, so gibt jedes System $\mathfrak{F}(H) \subset \mathfrak{B}$, das den Bedingungen (1)—(4) genügt, einen zulässigen topologischen Raum H. Da das System $\mathfrak{B}$ selbst diesen Bedingungen genügt, so ist der Raum H mit $\mathfrak{F}(H) = \mathfrak{B}$ der unterste aller dieser Räume, die ihrerseits die Oberräume (schlichte stetige Bilder) dieses Minimalraums sind. Die abgeschlossenen Hüllen des Minimalraums werden in (12) angegeben.

§ 2. Gestufte Räume.

Wir denken uns jeder Menge $A \subset E$ eine Menge A_λ zugeordnet, die die Eigenschaften (5) von A_α hat bis auf $A_{\lambda\lambda} = A_\lambda$, also

(6) $\quad 0_\lambda = 0, \quad A \subset A_\lambda \subset E, \quad (A+B)_\lambda = A_\lambda + B_\lambda, \quad x_\lambda = x.$

Wir nennen E einen *gestuften Raum*, A_λ seine *Stufenfunktion*.

Das System der Mengen mit $A_\lambda = A$ erfüllt die Forderungen (1)—(4). Es genügt (3) zu beweisen; aus der dritten Gleichung (6) folgt, dass A_λ monotone Funktion von A ist (mit $A \subset B$ ist $A_\lambda \subset B_\lambda$), und wenn also $A = \prod_t A_t$, $A_{t\lambda} = A_t$ ist, so ist

$$A_\lambda \subset \prod_t A_{t\lambda} = \prod_t A_t = A \subset A_\lambda, \qquad A_\lambda = A.$$

Wenn wir also die Mengen mit $A_\lambda = A$ als abgeschlossen erklären, so entsteht ein topologischer Raum. In bekannter Weise findet man,

[1]) Über weitere in der Literatur auftretende Bedingungen vgl. § 4.

dass die abgeschlossene Hülle A_α die grösste Menge ist, die durch endliche und transfinite Wiederholung der λ-Operation aus A entsteht, also die grösste Menge in der Folge

(7) $\quad A_0 = A,\quad A_1 = A_\lambda,\quad A_2 = A_{\lambda\lambda},\quad \ldots,\quad A_\omega, \ldots,\quad A_\xi, \ldots,$

wobei

$$A_{\xi+1} = A_{\xi\lambda}, \qquad A_\eta = \sum_{\xi<\eta} A_\xi \qquad (\eta \text{ Limeszahl}).$$

Wir schreiben kurz

(8) $$A_\alpha = A + A_\lambda + A_{\lambda\lambda} + \cdots \qquad (\text{in transf.}).$$

Der Aufstieg über die „Stufen" (7) führt also schliesslich zur höchsten Stufe, zur abgeschlossenen Hülle. Man bemerkt sofort, dass verschiedene gestufte Räume denselben topologischen Raum ergeben können, z. B. die Räume mit den Stufenfunktionen $A_{\lambda\lambda}$ oder A_ξ ($\xi > 0$). Ein topologischer Raum ist selbst ein gestufter Raum, in dem die Stufenbildung A_α sofort abbricht ($A_{\alpha\alpha} = A_\alpha$).

Eine und dieselbe Menge kann durch verschiedene Stufenfunktionen $A_\lambda(E)$, $A_\lambda(E_1)$ zu verschiedenen gestuften Räumen E, E_1 gemacht werden. Wir nennen E_1 einen (gestuften) Oberraum zu E, E einen Unterraum zu E_1, wenn

$$A_\lambda(E_1) \supset A_\lambda(E).$$

Hieraus folgt

$$A_\alpha(E_1) \supset A_\alpha(E),$$

E_1 ist also auch im topologischen Sinne Oberraum zu E. Der unterste aller gestuften Räume ist der diskrete Raum mit $A_\lambda = A$, der oberste der, wo $A_\lambda = A$ für endliches, $A_\lambda = E$ für unendliches A; diese beiden Extremalräume sind topologisch und dieselben wie im topologischen Fall (§ 1).

Eine Menge gestufter, als Mengen identischer, Räume E_t mit den Stufenfunktionen $A_\lambda(E_t)$ hat gestufte Oberräume $\overline{E}$ mit

$$A_\lambda(\overline{E}) \supset \sum_t A_\lambda(E_t),$$

hierunter einen untersten mit

(9) $$A_\lambda(\overline{E}) = \sum_t A_\lambda(E_t),$$

weil dieser Ausdruck die Eigenschaften (6) hat. Die Menge A ist in $\overline{E}$ dann und nur dann abgeschlossen ($A_\lambda(\overline{E}) = A$), wenn sie in jedem E_t abgeschlossen ist; $\overline{E}$ ist also auch als topologischer Raum der unterste Oberraum der topologischen Räume E_t. Die abgeschlossene Hülle $A_\alpha(\overline{E})$ ergibt sich aus dem $A_\lambda = A_\lambda(\overline{E})$ durch (8), und diese Formel vereinfacht sich im Allgemeinen auch dann nicht, wenn die E_t als bereits topologisch angenommen werden, sodass also die abgeschlossene Hülle A_α im untersten Oberraum durch

(10) $$A_\lambda = \sum_t A_\alpha(E_t), \qquad A_\alpha = A + A_\lambda + A_{\lambda\lambda} + \cdots \qquad (\text{in transf.})$$

gegeben wird. Entsprechend gibt es zum System der E_t gestufte Unterräume $\underline{E}$ mit

$$A_\lambda(\underline{E}) \subset \prod_t A_\lambda(E_t)$$

und unter diesen einen obersten; ob er das auch im topologischen Sinne ist, bleibt fraglich.

Insbesondere haben die sämtlichen gestuften Räume E_t, die denselben topologischen Raum E mit den abgeschlossenen Hüllen A_α erzeugen, einen obersten Unterraum $\underline{E}$, von dem aber fraglich ist, ob er noch E erzeugt, ob es also eine kleinste Stufenfunktion gibt, die vermöge (8) zu gegebenen A_α führt. Hierzu sei bemerkt: wenn $A_\lambda = A + D$ mit endlichem D ist, so ist $A_{\lambda\lambda} = A_\lambda + D_\lambda = (A + D) + D = A + D = A_\lambda$ und demgemäss $A_\alpha = A + D$; umgekehrt ist bei $A_\alpha = A + D$ mit endlichem D auch $A_\lambda = A + D$ für jede Stufenfunktion, die A_α erzeugt. Demnach enthält A_λ alle X_α mit $X \subset A$ und endlichem $X_\alpha - X$ (vgl. dazu die Anmerkung S. 496).

Sind E, H gestufte Räume mit den Stufenfunktionen A_λ, B_μ, so ist nach Analogie mit dem topologischen Fall die Abbildung $y = \varphi(x)$ von E auf H im Punkt x stetig zu nennen, wenn für jede Menge A mit $x \in A_\lambda$ zugleich $\varphi(x) \in \varphi(A)_\mu$, und überall stetig, wenn

(a) $$\varphi(A_\lambda) \subset \varphi(A)_\mu \qquad (A \subset E)$$

Hieraus folgt, wenn man $A = \varphi^{-1}(B)$ setzt, also $B = \varphi(A)$:

(b) $$\varphi(A_\lambda) \subset B_\mu, \qquad A = \varphi^{-1}(B) \qquad (B \subset H)$$

und durch die Abbildung φ^{-1}, wegen $A_\lambda \subset \varphi^{-1}\varphi(A_\lambda)$,

$$\text{(c)} \qquad \varphi^{-1}(B)_\lambda \subset \varphi^{-1}(B_\mu) \qquad (B \subset H);$$

aus (c) aber folgt wieder (a), denn wird $B = \varphi(A)$, also $A \subset \varphi^{-1}(B)$ angenommen, so kommt $A_\lambda \subset \varphi^{-1}(B_\mu)$ und durch die Abbildung φ: $\varphi(A_\lambda) \subset B_\mu = \varphi(A)_\mu$. Die Bedingungen (a), (b), (c) sind also äquivalent. Aus der gestuften Stetigkeit (überall, nicht bloss an einer Stelle) folgt die topologische, denn nach (c) ist mit $B = B_\mu$ auch $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B)_\lambda$ abgeschlossen. Sind E, H als Punktmengen identisch, so ist die gestufte Stetigkeit der identischen Abbildung von E auf H damit gleichbedeutend, dass E gestufter Unterraum zu H ist.

Um eine Zerlegung $E = \sum\limits_y^H E_y$ des gestuften Raumes E (mit der Stufenfunktion A_λ) durch geeignete Stufung von H stetig zu machen, hat man die Stufenfunktion B_μ der Bedingung (b) zu unterwerfen, wobei $\varphi(A_\lambda) = \varphi(\varphi^{-1}(B)_\lambda)$ eine bekannte Funktion von B ist, von der man sich sofort überzeugt, dass sie selbst eine zulässige Stufenfunktion mit den Eigenschaften (6) ist. Die Räume, die wir suchen, sind also: der Raum H mit

$$\text{(11)} \qquad B_\mu = \varphi(A_\lambda), \qquad A = \varphi^{-1}(B)$$

als unterster (Minimalraum) und seine gestuften Oberräume. H ist auch im topologischen Sinn der Minimalraum (§ 1), nämlich: B ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist. (Aus $A_\lambda = A$ folgt $B_\mu = \varphi(A) = B$; aus $B_\mu = B$ folgt $A_\lambda \subset \varphi^{-1}\varphi(A_\lambda) = \varphi^{-1}(B_\mu) = \varphi^{-1}(B) = A$, also $A_\lambda = A$). Die abgeschlossenen Hüllen in H werden gemäss (8) durch

$$B_\beta = B + B_\mu + B_{\mu\mu} + \dots \qquad \text{(in transf.)}$$

geliefert, und dies vereinfacht sich im Allgemeinen auch dann nicht, wenn E bereits topologisch ist; die abgeschlossenen Hüllen im Minimalraum werden dann durch

$$\text{(12)} \quad B_\mu = \varphi(A_\alpha), \quad A = \varphi^{-1}(B), \quad B_\beta = B + B_\mu + B_{\mu\mu} + \dots \ \text{(in transf.)}$$

gegeben.

§ 3. L-Räume.

Ein Fréchetscher L-Raum entsteht aus der Menge E, wenn unter den Punktfolgen $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ gewisse als konvergent mit einem Limes x ausgezeichnet werden. Das System $\mathfrak{K}$ dieser Konvergenzen $x_n \to x$ soll folgende Eigenschaften haben:

(α) *Eine konvergente Folge hat nur einen einzigen Limes.*

(β) *Eine (konstante, d.h.) aus lauter gleichen Punkten x bestehende Folge konvergiert nach x.*

(γ) *Jede Teilfolge einer nach x konvergenten Folge konvergiert nach x.*

Der Punkt x heisse Limespunkt der Menge A, wenn es eine Folge $x_n \in A$, $x_n \to x$ gibt; A_λ sei die Menge der Limespunkte von A. Dann erfüllt A_λ die Forderungen (6) für Stufenfunktionen, wie leicht zu sehen; jeder L-Raum induziert also einen gewissen gestuften Raum und einen zugehörigen topologischen Raum mit den abgeschlossenen Hüllen (8).

Eine und dieselbe Menge kann durch verschiedene Konvergenzensysteme $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zu verschiedenen L-Räumen E, E_1 gemacht werden. Wir nennen E Unterraum zu E_1 oder E_1 Oberraum zu E, wenn $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1$. Dann ist auch $A_\lambda(E) \subset A_\lambda(E_1)$, E also auch als gestufter (und als topologischer) Raum Unterraum von E_1. Der unterste L-Raum, mit den wenigsten Konvergenzen, ist der, wo nur die durch (β) geforderten konstanten Folgen konvergent sind; das ist, als gestufter Raum, wieder der diskrete Raum mit $A_\lambda = A$. Einen obersten L-Raum kann es wegen der sogleich zu besprechenden Forderung der Verträglichkeit offenbar nur in dem trivialen Fall geben, dass E endlich ist; sein $\mathfrak{K}$ besteht aus den schliesslich konstanten Folgen. Wohl aber gibt es L-Räume ohne echten Oberraum, deren Konvergenzensystem also nicht erweiterungsfähig ist; in diesem Fall befindet sich z. B. ein kompakter metrischer Raum E, denn eine in ihm nicht konvergente Folge enthält Teilfolgen mit verschiedenen Limites und kann wegen (γ), (α) in keinem Oberraum zur Konvergenz gebracht werden.

Ein System von L-Räumen E_t, als Mengen identisch, mit den Konvergenzensystemen $\mathfrak{K}_t$ kann einen L-Raum als gemeinsamen Oberraum nur haben, wenn sie *verträglich* sind, d. h. eine Punktfolge in allen E_t, wo sie konvergent ist, denselben Limes hat. Ist dies der Fall, so ist

$$\overline{\mathfrak{K}} = \sum_t \mathfrak{K}_t$$

ein zulässiges Konvergenzensystem; es definiert einen L-Raum $\overline{E}$, welcher Oberraum und zwar unterster Oberraum aller E_t ist. Offenbar gilt dann (9) und $\overline{E}$ ist also auch als gestufter Raum (sowie als topologischer Raum) der unterste Oberraum der E_t. Die Verträglichkeit der E_t ist insbesondere gesichert, wenn sie ein geordnetes System bilden, d. h. von zweien der eine ein Unterraum des andern ist. (Sind die E_t als L-Räume unverträglich, so haben sie doch als gestufte Räume einen untersten Oberraum, der also dann entweder nicht durch einen L-Raum erzeugbar ist oder nur durch einen solchen, der nicht Oberraum der L-Räume E_t ist). Hingegen haben die E_t, ob verträglich oder nicht, stets gemeinsame L-Unterräume E mit $\mathfrak{K} \subset \prod_t \mathfrak{K}_t$ und darunter einen obersten, durch $\underline{\mathfrak{K}} = \prod_t \mathfrak{K}_t$ definiert; denn dieses Konvergenzensystem erfüllt die Axiome (α)—(γ). Ob dieses $\underline{E}$ auch als gestufter Raum der oberste Unterraum der E_t ist, bleibt fraglich.

Die Abbildung $y = \varphi(x)$ des L-Raumes E auf den L-Raum H ist im Punkte x stetig, wenn für jede Folge $x_n \to x$ zugleich $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ ist. Sie ist dann auch als Abbildung der zugehörigen gestuften Räume in x stetig, d. h. aus $x \in A_\lambda$ folgt $\varphi(x) \in \varphi(A)_\mu$; der Beweis liegt auf der Hand. Die Stetigkeit der identischen Abbildung von E auf H (E und H als Punktmengen identisch) ist damit gleichbedeutend, dass jede Konvergenz aus E auch in H gilt, also $\mathfrak{K}(E) \subset \mathfrak{K}(H)$, E Unterraum von H ist.

Ein L-Raum heisse *maximal*, wenn sein Konvergenzensystem nicht erweitert werden kann, ohne den zugehörigen gestuften Raum zu ändern. Hierüber gelten folgende Sätze:

I. *Ein maximaler L-Raum erfüllt ausser (α), (β), (γ) noch das Axiom:*
(δ) *Wenn jede Teilfolge x_p von x_n eine nach x konvergente Teilfolge x_q enthält, so konvergiert die ganze Folge x_n nach x.*

Beweis. E sei L-Raum; wir definieren eine neue Konvergenzrelation $x_n \overset{*}{\to} x$, die bedeuten soll: jede Teilfolge x_p von x_n hat eine Teilfolge $x_q \to x$. Diese Relation erfüllt (α), denn aus $x_n \overset{*}{\to} x$, $x_n \overset{*}{\to} y$ folgt: x_n hat eine Teilfolge $x_p \to x$, x_p eine Teilfolge $x_q \to y$, also $x = y$. Sie erfüllt auch (β) und endlich (γ): jede Teilfolge x_q einer Teilfolge x_p hat eine Teilfolge $x_r \to x$, also $x_p \overset{*}{\to} x$. Demnach erzeugt diese Relation einen L-Raum E^*. Mit $x_n \to x$ ist $x_n \overset{*}{\to} x$, also E^* Oberraum zu E; beide L-Räume erzeugen aber denselben gestuften Raum, $A_\lambda(E^*) = A_\lambda(E)$, denn zu $x_n \in A$, $x_n \overset{*}{\to} x$ gibt es eine Teilfolge $x_p \to x$, also $A_\lambda(E^*) \subset A_\lambda(E) \subset A_\lambda(E^*)$. E^* erfüllt (δ): wenn jede Teilfolge x_p von x_n eine Teilfolge $x_q \overset{*}{\to} x$ hat (also diese eine Teilfolge $x_r \to x$), so ist $x_n \overset{*}{\to} x$. Wenn E selbst schon (δ) erfüllt, ist mit $x_n \overset{*}{\to} x$ auch $x_n \to x$, E^* mit E identisch. Wenn E also (δ) nicht erfüllt, ist E^* echter Oberraum von E mit demselben gestuften Raum, E nicht maximal; ist E maximal, so ist in ihm (δ) erfüllt.

II. *Jeder gestufte Raum, der durch einen L-Raum erzeugt werden kann, wird durch einen maximalen L-Raum erzeugt, nämlich durch den obersten aller ihn erzeugenden L-Räume.*

Zum Beweise sei zunächst E ein L-Raum, A_λ die Menge der Limespunkte von A, $x_n \to x$ eine konvergente Folge und $X = \sum_n x_n$ die Menge ihrer verschiedenen Punkte. Dann ist

$$X + x = X_\lambda. \tag{13}$$

Es braucht hierzu nur $X_\lambda \subset X + x$ gezeigt zu werden; nun enthält aber jede Folge aus Punkten εX entweder eine Teilfolge, die zugleich Teilfolge von x_n ist, oder sie enthält ein x_k unendlich oft; sie kann also, wenn konvergent, nur nach x oder x_k konvergieren. Die Formel (13) gilt ebenso, wenn x_p eine beliebige Teilfolge von x_n und $X = \sum_p x_p$ ist, und in dieser Allgemeinheit angewandt zeigt sie, dass der Limes einer konvergenten Folge durch die Folge selbst und die Kenntnis der Stufenfunktion A_λ eindeutig bestimmt ist. Denn entweder gibt es unter den $X = \sum_p x_p$ ein $X \neq X_\lambda$ und dann ist $x = X_\lambda - X$, oder es sind alle $X = X_\lambda$; in diesem Falle, wo x allen X angehört, muss offenbar schliesslich $x_n = x$ sein, denn wären unendlich viele $x_p \neq x$, so würde $X = \sum_p x_p$ den Punkt x nicht enthalten. Hieraus geht nun hervor, dass alle L-Räume, die dieselbe Stufenfunktion A_λ haben, mit einander verträglich sind und einen untersten Oberraum haben, der wegen (9) dieselbe Stufenfunktion A_λ hat, womit II bewiesen ist.

Man kann dem Beweis auch folgende Wendung geben. E sei mit der Stufenfunktion A_λ versehen, seine Erzeugbarkeit durch einen L-Raum wird noch nicht vorausgesetzt. Wir definieren dann eine Konvergenzrelation $x_n \overset{0}{\to} x$, die bedeuten soll: *für jede Teilfolge x_p und $X = \sum\limits_p x_p$ gilt $X \dotplus x = X_\lambda$.* Das System $\mathfrak{K}_0$ dieser Konvergenzen erfüllt die Limesaxiome, wobei insbesondere der Beweis der Eindeutigkeit (α) wörtlich derselbe ist wie oben; es erzeugt also einen L-Raum E_0 mit $A_\lambda(E_0) \subset A_\lambda$. Wenn nun insbesondere E selbst ein L-Raum mit dem Konvergenzensystem $\mathfrak{K}$ ist, so folgt aus $x_n \to x$ nach (13) $x_n \overset{0}{\to} x$, also $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_0$, demnach $A_\lambda \subset A_\lambda(E_0)$ und folglich $A_\lambda(E_0) = A_\lambda$; der Raum E_0 ist der oberste, mit dem grössten Konvergenzensystem $\mathfrak{K}_0$, unter allen L-Räumen, die den gestuften Raum E induzieren.

Übrigens folgt unter den Voraussetzungen von (13) noch [1])

$$X \dotplus x = X_\alpha \tag{14}$$

(wieder für jedes $X = \sum\limits_p x_p$); denn (13) gibt $X_{\lambda\lambda} = (X \dotplus x)_\lambda = X_\lambda \dotplus x_\lambda = (X \dotplus x) \dotplus x = X \dotplus x = X_\lambda$, sodass X_λ bereits die abgeschlossene Hülle von X ist. Man kann demgemäss für einen topologischen Raum E eine Konvergenzrelation $x_n \overset{1}{\to} x$ der Bedeutung definieren: *für jede Teilfolge x_p und $X = \sum\limits_p x_p$ gilt $X \dotplus x = X_\alpha$*; sie erzeugt einen L-Raum E_1 mit $A_\lambda(E_1) \subset A_\alpha$, $A_\alpha(E_1) \subset A_\alpha$. Wenn E selbst durch einen L-Raum erzeugt wird, dessen Stufenfunktion A_λ von A_α verschieden sein kann, so ist $E_1 = E_0$ der maximale L-Raum (wie aus der Vergleichung von (13) und (14) folgt), der den gestuften oder den topologischen Raum erzeugt.

Wir haben früher (S. 494) aus der L-Stetigkeit an einer Stelle x auf die gestufte Stetigkeit geschlossen; umgekehrt gilt:

III. *Es sei $y = \varphi(x)$ Abbildung des L-Raumes E auf den maximalen L-Raum H; ist diese Abbildung an der Stelle x für die gestuften Räume stetig, so ist sie auch für die L-Räume stetig.*

Beweis. A_λ, B_μ seien die Stufenfunktionen in E, H; vorausgesetzt wird, dass mit $x \in A_\lambda$ auch $\varphi(x) \in \varphi(A)_\mu$ ist; gezeigt werden soll: mit $x_n \to x$ ist auch $y_n = \varphi(x_n) \to \varphi(x) = y$, und wegen der

[1]) Aus (14) folgt nach den Bemerkungen S. 491, dass jeder gestufte Raum der denselben topologischen Raum wie der L-Raum E erzeugt, eine Stufenfunktion $\supset A_\lambda$ hat; die Stufenfunktion des L-Raums ist die kleinstmögliche.

Maximalität von H ist also zu beweisen: für jede Teilfolge y_p und $Y = \sum\limits_p y_p$ ist $Y \dotplus y = Y_\mu$. Für $X = \sum\limits_p x_p$ ist $x = \lim x_p \in X_\lambda$, also $\varphi(x) \in \varphi(X)_\mu$ oder $y \in Y_\mu$, demnach $Y \dotplus y \subset Y_\mu$; es bleibt $Y_\mu \in Y \dotplus y$ zu zeigen. Sei $z \in Y_\mu$, sodass es eine Folge $z_n \to z$, $z_n \in Y$ gibt. Wie beim Beweis von II schliessen wir: entweder sind unendlich viele z_n einem festen y_k gleich, dann ist $z = y_k$, oder z_n enthält eine Teilfolge, die zugleich eine Teilfolge y_q von y_p ist. Wenn hierin unendlich viele $y_q = y$ sind, ist $z = y$; andernfalls lasse man die endlich vielen $y_q = y$ fort und hat nunmehr eine Teilfolge $y_q \to z$ von y_p mit $y_q \neq y$. Aus $x_q \to x$ folgt auf Grund der gestuften Stetigkeit wie oben $y \in Y'_\mu$ mit $Y' = \sum\limits_q y_q$, anderseits aus (13) wegen $y_q \to z$: $Y'_\mu = Y' \dotplus z$, demnach $y \in Y' \dotplus z$, und, da y *non* $\in Y'$, $z = y$. In allen Fällen ist also $z \in Y \dotplus y$ und damit III bewiesen.

Schliesslich betrachten wir noch in einem topologischen Raum E die Konvergenzrelation $x_n \overset{2}{\to} x$ mit der Bedeutung: *jede Umgebung von x enthält fast alle x_n.* Dieses Konvergenzensystem $\mathfrak{K}_2$ erfüllt zwar $(\beta), (\gamma)$, aber im Allgemeinen nicht das Eindeutigkeitsaxiom (α); es kann gleichzeitig $x_n \overset{2}{\to} x$, $x_n \overset{2}{\to} y$, $x \neq y$ sein (wir haben das zweite Trennungsaxiom nicht vorausgesetzt).

Ist E ein L-Raum und topologisch Unterraum von E, so ist mit $x_n \to x$ (in E) zugleich $x_n \overset{2}{\to} x$. Denn wenn U offen ist und die unendlich vielen x_p nicht enthält, so ist $X = \sum\limits_p x_p \subset E - U$ und wegen der Abgeschlossenheit von $E - U$ auch $X_\alpha \subset E - U$, $x = \lim x_p \in X_\alpha \subset E - U$, U ist keine Umgebung von x.

Da der S. 496 definierte L-Raum E_1 Unterraum von E ist, folgt insbesondere: wenn $x_n \overset{1}{\to} x$, so ist $x_n \overset{2}{\to} x$. Also $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$.

Aus $x_n \overset{2}{\to} x$, $X = \sum\limits_n x_n$ folgt $x \in X_\alpha$, da sonst $E - X_\alpha$ eine Umgebung von x wäre, die kein x_n enthielte. Aus $x_n \overset{2}{\to} x$, $x_n \in A$ folgt also $x \in A_\alpha$. Wenn $\mathfrak{K}_2$ auch das Axiom (α) erfüllt und also einen L-Raum E_2 erzeugt, so ist $A_\lambda(E_2) \subset A_\alpha$ und $A_\alpha(E_2) \subset A_\alpha$, E_2 Unterraum von E.

IV. *Ist der topologische Raum E von einem L-Raum erzeugt, so erfüllt $\mathfrak{K}_2$ das Axiom (α) und $E_2 = E_1$ ist der maximale L-Raum, der E erzeugt.*

Zunächst zeigen wir: wenn $x_n \to x$ und $x_n \overset{2}{\to} y$, so ist $y = x$. Sei $X = \sum\limits_n x_n$; nach (14) ist $X_\alpha = X \dotplus x$ abgeschlossen. Sind unendlich viele $x_n = y$, so ist ohnehin $x = y$; andernfalls kann man nach Weglassung endlich vieler x_n annehmen, dass y nicht zu X gehört; wäre nun auch noch $y \neq x$, so wäre $E - X_\alpha$ eine Umgebung von y, die kein x_n enthielte, im Widerspruch zu $x_n \overset{2}{\to} y$. Sodann sei $x_n \overset{2}{\to} x$, $x_n \overset{2}{\to} y$, $x \neq y$: hieraus wollen wir einen Widerspruch ableiten. Wäre unendlich oft $x_n = x$, so würde jede Umgebung von y den Punkt x enthalten, also $x = y$ sein; demnach ist schliesslich $x_n \neq x$, ebenso $x_n \neq y$, und mit Weglassung von Anfangsgliedern kann man annehmen, dass x, y nicht zu $X = \sum_n x_n$ gehören. Dann darf x_n überhaupt keine konvergente Teilfolge $x_p \to z$ enthalten, weil hieraus mit $x_p \overset{2}{\to} x$, wie anfangs bewiesen, $z = x$ und ebenso $z = y$ folgen würde. Also ist X abgeschlossen und $E - X$ wäre eine Umgebung von x (und von y), die kein x_n enthielte.

$\mathfrak{R}_2$ erzeugt also einen L-Raum E_2, Unterraum von E; vorher hatten wir $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$ bewiesen, und $\mathfrak{R}_1$ ist maximal, also $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1$.

Wenn E kein L-Raum ist, braucht der L-Raum E_2, wie gesagt, nicht zu existieren, es sei denn, dass E das zweite Trennungsaxiom erfüllt; existiert E_2, so bleibt es fraglich, ob $\mathfrak{R}_1$ echte Teilmenge von $\mathfrak{R}_2$ sein kann.

§ 4. Stetige Zerlegungen.

Wir nannten die Zerlegung $E = \sum_y^H E_y$ des topologischen Raumes E in disjunkte Summanden $\neq 0$ stetig, wenn sich die Menge H derart zum topologischen Raum machen lässt, dass die Abbildung $y = \varphi(x)$ (mit $x \in E_y$ gleichbedeutend) stetig wird. Wie wir fanden, ist die Abgeschlossenheit der E_y hierfür notwendig und hinreichend; unter den topologischen Räumen, die dann die gestellte Forderung erfüllen, gibt es einen untersten, den Minimalraum H, in dem *alle* und nur die Mengen als abgeschlossen gelten, deren Urbilder abgeschlossen sind; die übrigen sind die Oberräume von H. Gegenüber dieser einfachen Lösung[1]) werden die stetigen Zerlegungen vielfach noch anderen Bedingungen unterworfen, von deren Ursprung wir uns teilweise Rechenschaft ablegen wollen.

[1]) Vgl. R. Baer und F. Levi, *Stetige Funktionen in topologischen Räumen*, Math. Zeitschr. 34 (1931), S. 110—130.

(A) Verlangen wir, dass die stetige Abbildung von E auf H *doppeltstetig*, d. h. dass (nicht nur das Urbild, sondern auch) das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen sei. Dazu ist notwendig, dass das Urbild des Bildes von A

$$\bar{A} = \varphi^{-1}\varphi(A) \tag{15}$$

mit A zugleich abgeschlossen und dass H der Minimalraum sei (denn ist $A = \varphi^{-1}(B)$ abgeschlossen, so ist $\varphi(A) = B$ abgeschlossen); beides zusammen ist auch hinreichend, denn dann hat bei abgeschlossenem A das Bild $\varphi(A)$ ein abgeschlossenes Urbild $\bar{A}$ und ist abgeschlossen.

Diese Bedingung findet sich implicite bei Herrn Alexandroff[1]) und zwar auf folgendem Wege. Betrachten wir im Raum E die Urbilder, d. h. die Mengen

$$\varphi^{-1}(B) = \sum_y^B E_y \qquad (B \subset H).$$

Jede Menge $A \subset E$ enthält ein grösstes Urbild $\underline{A}$, die Summe der $E_y \subset A$, und ist in einem kleinsten Urbild $\bar{A}$ enthalten, der Summe der E_y mit $AE_y \neq 0$; das letztere ist durch (15) gegeben. Offenbar hat man

$$\underline{E - A} = E - \bar{A}, \qquad \overline{E - A} = E - \underline{A}. \tag{16}$$

Nun kommen die Festsetzungen a. a. O. (S. 557 oben) darauf hinaus, einen Raum mit den offenen Mengen $V = \varphi(U)$ zu erklären, wo U die offenen Mengen von E durchläuft. Dieser Raum erscheint von unserem Standpunkt aus als willkürlich, da er im Allgemeinen kein stetiges Bild von E ist; um ihn zu einem solchen zu machen, muss man verlangen, dass die Urbilder $\varphi^{-1}(V) = \bar{U}$ ($\bar{U}$ ist ein Urbild, also Urbild seines Bildes) offen seien, d. h. dass mit U auch $\bar{U}$ offen sei, und das ist wegen (16) damit gleichbedeutend, dass bei abgeschlossenem A auch $\underline{A}$ abgeschlossen ist.

Beiläufig könnte man auch verlangen, dass (nicht nur das Urbild, sondern auch) das Bild jeder offenen Menge offen, die Abbildung eine „innere" sei; dafür wäre notwendig und hinreichend, dass $\bar{A}$ mit A zugleich offen und H der Minimalraum sei.

[1]) P. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Math. Ann. 96 (1927), S. 555—571.

(B) Wir fordern, dass der Minimalraum H ausser dem ersten Trennungsaxiom T_1 (von zwei verschiedenen Punkten hat jeder eine zum andern disjunkte Umgebung, d. h. die Punkte sind abgeschlossene Mengen) noch eines der übrigen Trennungsaxiome erfüllt:

T_2: zwei verschiedene Punkte
T_3: ein Punkt und eine ihn nicht enthaltende abgeschlossene Menge
T_4: zwei disjunkte abgeschlossene Mengen

haben ein Paar disjunkter Umgebungen. (T_2 ist Verschärfung von T_1; T_3 mit T_1 Verschärfung von T_2; T_4 mit T_1 Verschärfung von T_3). Die Bedingung T_2 drückt sich in den Summanden E_y so aus: zwei verschiedene Summanden E_{y_1}, E_{y_2} lassen sich in disjunkte offene Mengen U_1, U_2 einschliessen, die zugleich Urbilder von der Form $U = \sum_y^V E_y = \varphi^{-1}(V)$ sind. Entsprechendes gilt von T_3, T_4.

Um den Zusammenhang dieser Trennungsforderungen (B) mit der Bedingung (A) der doppelten Stetigkeit zu erkennen, bemerken wir zunächst:

[1] *Das doppeltstetige Bild eines T_4-Raumes*[1]) *E ist ein T_4-Raum H.* Denn H ist Minimalraum; ist $U \subset E$ offen, so ist $\underline{U}$ offen und $V = \varphi(\underline{U})$ offen. Sind B, B' disjunkt und abgeschlossen, so sind ihre Urbilder A, A' disjunkt und abgeschlossen, haben also disjunkte Umgebungen U, U'. Da $\underline{U}$ das grösste Urbild $\subset U$ war, ist bereits $A \subset \underline{U}$, $A' \subset \underline{U}'$; die Bilder $V = \varphi(\underline{U})$, $V' = \varphi(\underline{U}')$ sind dann disjunkte Umgebungen von B, B'.

Andererseits haben wir in der *Bikompaktheit* (P. Alexandroff, P. Urysohn) eine mit der Abgeschlossenheit nahe verwandte Eigenschaft, die bei stetiger Abbildung erhalten bleibt und also zu doppelter Stetigkeit führen wird. Wir nehmen als Definition: der Raum E heisst bikompakt, wenn jedes E überdeckende System offener Mengen ($E = \Sigma U$) ein endliches, E überdeckendes Teilsystem hat. Demgemäss ist eine Menge $A \subset E$ bikompakt, wenn jedes A überdeckende System in A offener Mengen ($A = \Sigma A U$, U in E offen), d. h. jedes A überdeckende System in E offener Mengen ($A \subset \Sigma U$) ein endliches, A überdeckendes Teilsystem hat. Es gilt bekanntlich:

1) d. h. wo T_4 (vielleicht ohne T_1) gilt. Wenn wir von einem Raum schlechthin sprechen, setzen wir kein Trennungsaxiom, sondern nur die Axiome (1), (2), (3) über abgeschlossene Mengen voraus.

[2] *Das stetige Bild H eines bikompakten Raumes E ist bikompakt.*

[3] *Eine im bikompakten Raum E abgeschlossene Menge A ist bikompakt.*

[4] *Eine bikompakte Menge A im T_2-Raum E ist abgeschlossen.*

[5] *Ein bikompakter T_2-Raum ist auch T_4-Raum.*

[6] *Zwei disjunkte bikompakte Mengen eines T_2-Raumes haben ein Paar disjunkter Umgebungen.*

Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir die einfachen Beweise:

[2] Wird H von den offenen V, also E von den offenen $U = \varphi^{-1}(V)$ überdeckt, so wird E von endlich vielen U, H von endlich vielen $V = \varphi(U)$ überdeckt.

[3] Wird A von den U überdeckt, so wird E von $E - A$ und den U, also von $E - A$ und endlich vielen U, A von endlich vielen U überdeckt.

[6] Zunächst sei A bikompakt, $x_0 \in E - A$; x_0 und $x \in A$ haben ein Paar (von x abhängiger) disjunkter Umgebungen $U_0(x)$, $U(x)$. A wird von endlich vielen $U(x_k)$ überdeckt, dann sind $U = \Sigma U(x_k)$ und $U_0 = \Pi U_0(x_k)$ disjunkte Umgebungen von A, x_0.

Hieraus folgt alsbald [4], denn da die abgeschlossene Menge $E - U_0 \supset A$ den Punkt x_0 nicht enthält, so gehört x_0 der abgeschlossenen Hülle A_α nicht an: $x_0 \in E - A_\alpha$. Also $E - A \subset E - A_\alpha$, $A_\alpha \subset A$, $A_\alpha = A$. Sind weiter A_0, A disjunkt und bikompakt, so kann der Schluss wiederholt werden: A_0 und $x \in A$ haben disjunkte Umgebungen $U_0(x)$, $U(x)$; $U = \Sigma U(x_k)$ und $U_0 = \Pi U_0(x_k)$ sind disjunkte Umgebungen von A, A_0. [5] folgt dann aus [3] und [6].

Weiter gilt:

[7] *Jede stetige Abbildung eines bikompakten Raumes E auf einen T_2-Raum H ist doppeltstetig.*

Denn eine in E abgeschlossene Menge ist nach [3] bikompakt, ihr Bild nach [2] bikompakt und nach [4] in H abgeschlossen. Die Verbindung von [1] und [7] gibt nun z. B. folgenden Satz:

[8] *Die stetige Abbildung des bikompakten T_2-Raumes E auf den T_1-Raum H ist dann und nur dann doppeltstetig, wenn H ein T_2-Raum ist.*

Denn ist H ein T_2-Raum, so ist die Abbildung nach [7] doppeltstetig. Ist andererseits die Abbildung doppeltstetig, so ist, weil E nach [5] T_4-Raum ist, nach [1] auch H ein T_4-Raum, also, weil als T_1-Raum vorausgesetzt, auch T_2-Raum.

(C) Wieder aus anderer Quelle entspringt eine Zusatzbedingung für stetige Zerlegungen $E = \sum\limits_{y}^{H} E_y$, wenn E ein L-Raum ist und die Abbildung $y = \varphi(x)$ durch Wahl eines L-Raums H stetig gemacht werden soll. Das Konvergenzensystem von H muss dann das System $\mathfrak{L}$, bestehend aus den Konvergenzen

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \text{für} \quad x_n \to x$$

enthalten. Anders ausgedrückt: eine Konvergenz $y_n \to y$ des Systems $\mathfrak{L}$ ist damit gleichbedeutend, dass es Punkte $x_n \in E_{y_n}$, $x \in E_y$ mit $x_n \to x$ gibt. Benutzen wir den unteren abgeschlossenen Limes $\underline{\lim}\, A_n$ einer Mengenfolge $A_n \neq 0$ (die Menge aller Punkte $\lim x_n$ für $x_n \in A_n$), so ist $y_n \to y$ damit gleichbedeutend, dass es einen Punkt x gibt, der gleichzeitig zu E_y und zu $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ gehört, also mit

$$E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0.$$

Man sieht nun, dass $\mathfrak{L}$ zwar die Limesaxiome (β), (γ), aber nicht notwendig das Eindeutigkeitsaxiom (α) erfüllt, da ja $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ mit verschiedenen E_y gemeinsame Punkte haben kann; zur Sicherung der Eindeutigkeit ist notwendig und hinreichend, dass $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ höchstens mit einem E_y gemeinsame Punkte hat, also:

$$\text{mit} \quad E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0 \quad \text{ist} \quad \underline{\lim}\, E_{y_n} \subset E_y.$$

Wenn dies für alle y, y_n erfüllt ist, definiert $\mathfrak{L}$ einen L-Raum H, der unsere Aufgabe löst; die übrigen Räume dieser Art sind die Oberräume des Minimalraums H. Übrigens ist die Bedingung mit der folgenden, anscheinend schärferen, gleichwertig:

$$\text{mit} \quad E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0 \quad \text{ist} \quad \overline{\lim}\, E_{y_n} \subset E_y,$$

wobei der obere abgeschlossene Limes $\overline{\lim}\, A_n$ die Menge aller Punkte $\lim x_p$ (A_p Teilfolge von A_n, $x_p \in A_p$) bedeutet [1]).

Auf weitere ähnliche Bedingungen für stetige Zerlegungen wollen wir nicht eingehen. Die betrachteten drei, so verschiedener Herkunft sie auch sind, erweisen sich doch im Falle eines kompakten metrischen Raumes E als gleichwertig.

[1]) C. Kuratowski, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. 11 (1928), p. 169—185; insbesondere p. 171. Vgl. auch P. Alexandroff, a. a. O., S. 568.

Grundzüge des Systemenkalküls.

Erster Teil *).

Von

Alfred Tarski (Warschau).

Die Ergebnisse, die in der vorliegenden Mitteilung dargestellt werden, gehören zur allgemeinen Metamathematik (die ich früher auch als allgemeine Methodologie der deduktiven Wissenschaften bezeichnet habe), also zu einer Disziplin, deren Aufgabe es ist, den Sinn von allgemeinen metamathematischen Begriffen, die sich uns bei der Untersuchung der verschiedensten konkreten deduktiven Theorien aufdrängen, zu präzisieren und die Grundeigenschaften dieser Begriffe festzustellen. Dabei sollen hier nur diejenigen Theorien berücksichtigt werden, deren Aufbau eine logische Basis in größerem oder kleinerem Umfange, mindestens aber den ganzen Aussagenkalkül voraussetzt.

In einer früheren Mitteilung: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik* (im folgenden als T_1 zitiert) [1]) habe ich ein

*) *Anmerkung der Redaktion.* Der zweite Teil der vorliegenden Abhandlung ist gleichzeitig mit dem ersten eingegangen und wird — im Einverständnis mit dem Verfasser — im nächsten Band der *„Fundamenta Mathematicae“* veröffentlicht werden.

[1]) C. R. des séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIII, 1930, Classe III, S. 22—29. Überdies werde ich mich in den weiteren Überlegungen auf meine folgenden Arbeiten berufen:

Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37, 1930, S. 361—404 (das ist die Ausführung desjenigen Teils der Mitteilung T_1, der deduktive Wissenschaften von beliebigem Charakter behandelt; hier als T_2 zitiert);

Sur les ensembles définissables de nombres réels. I, Fund. Math. 17, 1931, S. 210—239 (zitiert als T_3);