第二章　匹配、覆盖和填装

给定一个图，如果我们希望找到它的尽可能多的独立边，应该怎么做呢？我们是否可以将图中所有顶点两两配对成独立边呢？如果不行，又如何肯定这不可能呢？有点出乎意料地是，这一基本问题不仅是许多应用问题的核心，也产生了若干相当有趣的图论问题。

在图$G = (V, E)$中，独立边构成的集合M称为一个**匹配** (matching)。设$U \subseteq V$，如果U中的每个顶点都与M中的一条边相关联，则称M是U的一个匹配，或者说U中的顶点被M**匹配** (matched)， 而其他不与M中任何边相关联的顶点称为**非匹配** (unmatched)顶点。

k–正则的支撑子图称为一个k–**因子** (k–factor)。所以，一个子图$H \subseteq G$是G的1–因子当且仅当$E(H)$是V的一个匹配。如何刻画具有1–因子的图，即刻画包含所有顶点的匹配，是我们本章中前两节要讨论的主要问题。

给定图族$\mathcal{H}$，匹配问题的一个推广就是在已知图G中寻找尽可能多的顶点不相交的子图，使得每个子图都同构于$\mathcal{H}$中的一个元素，这就是所谓的**填装** (packing)问题，它和**覆盖** (covering)问题紧密相关。覆盖问题是指在G中找到一个尽可能小的顶点集，使得G中任意一个子图，只要同构于$\mathcal{H}$中的一个元素，就与这个顶点集相交。显然，如果$\mathcal{H}$中的k个子图可以不相交地填充到G中，则任何覆盖必须包含至少k个顶点。假如不存在恰好只有k个顶点的覆盖，那么是否总是存在最多$f(k)$个顶点的覆盖呢（这里的$f(k)$只依赖于$\mathcal{H}$而不依赖于G)？在2.3节中，我们将证明当$\mathcal{H}$是一族圈时，总存在这样一个函数f。

在2.4节，我们会考虑边的填装和覆盖：在一个给定图中，我们能找到多少棵边不相交的支撑树呢？至少需要多少棵树才能覆盖图中所有的边呢？在2.5节，我们将证明一个有向图的路覆盖定理，它蕴含着偏序上的著名Dilworth对偶定理。

2.1　二部图中的匹配

在这一节，我们总是假设$G = (V, E)$是一个具有二部划分$\{A, B\}$的固定二部图。设a，a'等表示属于A的顶点，而b，b'等表示属于B的顶点。

如何找到G中包含尽可能多条边的匹配呢？对于G的任意匹配M，一条关于M的**交错路** (alternating path)是指G中一条从A中非匹配顶点出发，其边在$E \setminus M$和M中交错出现的

路。注意到，这里的路允许是平凡的，即只包含初始顶点。若交错路P结束于B中一个非匹配顶点，则称P为**增广路** (augmenting path)（图2.1.1）。我们可以通过P将M扩充成一个更大的匹配：M和$E(P)$的对称差仍是一个匹配（考虑关联一个给定顶点的边），并且被匹配的顶点集增加了两个顶点，即P的端点。

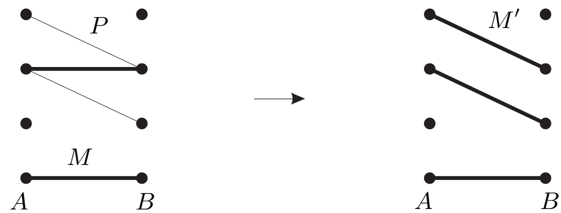

图 2.1.1: 通过交错路P对匹配M进行扩充

交错路在寻找更大的匹配中发挥了重要的作用。事实上，从任何一个匹配开始，通过不断地运用增广路对匹配进行改进，直到匹配不能进行任何改进为止，这样所得到的匹配是最优的，即它具有最大可能的边数（练习1）。寻找最大匹配的算法问题最终归结为寻找增广路的问题，这是一个非常有趣并且更容易理解的算法问题。

第一个定理通过某种对偶条件刻画了G中具有最大基数的匹配。对于集合$U \subseteq V$，如果G中的每条边都与U中的一个顶点相关联，则称U是E的一个**（顶点）覆盖**（(vertex) cover）。

定理 2.1.1 (König 1931)
G中匹配的最大基数等于其边的顶点覆盖的最小基数。

证明： 设M是G中具有最大基数的匹配。从M的每一条边中选择一个端点组成集合U如下：如果存在一条交错路终止于这条边在B中的端点，则选择此端点；否则，选择这条边在A中的端点（图2.1.2）。下面证明这$|M|$个顶点构成的集合U覆盖E。由于E的任何一个顶点覆盖必须覆盖M，因此不存在少于$|M|$个顶点的覆盖，所以定理成立。

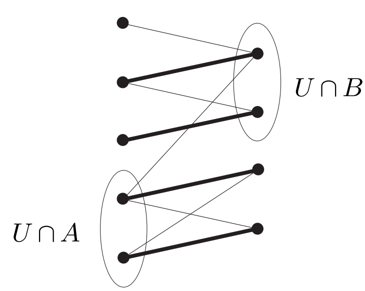

图 2.1.2: 顶点覆盖U

注意到，如果交错路P的一个端点是B中的一个顶点b，那么$b \in U$：因为M是最大匹配，而P不是一个增广路，因此b被匹配到A中的某个顶点a，然而当构造U时，考虑到边$ab \in M$，我们会把b放入U中。

为了证明U覆盖E，取定E中的任意边ab，如果$a \in U$，问题得证；因此我们可以假定$a \notin U$。为了证明$b \in U$，只需论证存在某个交错路具有端点b。如果a不被任何顶点匹配，则ab就是这样一个交错路；否则，对某个顶点$b' \in B$，我们有$ab' \in M$。由于$a \notin U$，因此存在一条交错路P结束于b'。根据b是否属于P，要么Pb要么$Pb'ab$是一条结束于b的交错路。 □

让我们回到原来的主题，即寻找1–因子存在的充分必要条件。在二部图的情形，我们也可以考虑更一般性的问题，即G什么时候包含一个饱和A的匹配；这时如果$|A| = |B|$，它将成为G的1–因子，这也是G包含1–因子的必要条件。

存在饱和A的匹配的一个明显必要条件是A的每一个子集在B中都有足够多的邻点，即对所有的$S \subseteq A$，有

$$|N(S)| \geqslant |S|.$$

下述的**婚姻定理**（marriage theorem）表明，事实上，这个显而易见的必要条件也是充分的：

定理 2.1.2 (Hall 1935)
G包含饱和A的匹配当且仅当，对所有的$S \subseteq A$均有$|N(S)| \geqslant |S|$。

我们给出三个证明，每个具有不同的特点。[1] 在所有的证明中，我们假定G满足婚姻条件，目标是找到一个饱和A的匹配。

证明1: 设M是G的任意匹配且包含一个非匹配顶点$a \in A$，我们证明存在一个关于M的的增广路。

设A'是A中满足可以从a经过一条非平凡交错路到达的顶点的集合，而$B' \subseteq B$是这些路上所有倒数第二个顶点的集合。这些路的最后一条边都在M中，因此$|A'| = |B'|$，由婚姻条件知，存在从$S = A' \cup \{a\}$中的一个顶点v到$B \setminus B'$中的一个顶点b的边。

因为$v \in A' \cup \{a\}$，所以存在一条从a到v的交错路P。注意到$b \notin P$，并且P在B中的顶点属于B'，因此Pvb是一条从a到b的交错路。如果b是被匹配的，比如说$a'b \in M$，那么$Pvba'$是一条交错路使得b属于B'，但是$b \notin B'$，因此b是不被匹配的，故Pvb就是要找的增广路。 □

[1]这个定理也可以很容易地从König定理推出（见练习5）。

证明2: 我们对$|A|$用归纳法。当$|A|=1$时，结论显然成立。假设$|A|\geqslant 2$，且当$|A|$较小时，婚姻条件可以保证饱和A的匹配的存在性。

若对每个非空子集$S\subsetneqq A$均有$|N(S)|\geqslant|S|+1$，则任选一条边$ab\in G$，并考虑图$G':=G-\{a,b\}$，那么每个非空子集$S\subseteq A\setminus\{a\}$都满足：

$$|N_{G'}(S)|\geqslant|N_G(S)|-1\geqslant|S|,$$

故由归纳假设知，G'包含$A\setminus\{a\}$的一个匹配，连同边ab，就得到了G中一个饱和A的匹配。

假设存在A的一个非空真子集A'，使得对于$B':=N(A')$有$|B'|=|A'|$。由归纳假设，图$G':=G[A'\cup B']$包含饱和A'的一个匹配。然而$G-G'$也满足婚姻条件：对任何满足$|N_{G-G'}(S)|<|S|$的集合$S\subseteq A\setminus A'$，有$|N_G(S\cup A')|<|S\cup A'|$，与假设矛盾。同样由归纳法得，图$G-G'$包含饱和$A\setminus A'$的一个匹配，把这两个匹配放在一起从而得到了$G$中一个饱和$A$的匹配。 □

在最后的证明中，设H是G的一个满足婚姻条件且包含A的边极小子图。注意到，对每个$a\in A$，把$S=\{a\}$代入婚姻条件可知$d_H(a)\geqslant 1$。

证明3: 我们证明对每个顶点$a\in A$均有$d_H(a)=1$。由婚姻条件，不存在H的两条边在B中有公共顶点，因此H的边构成了饱和A的一个匹配。

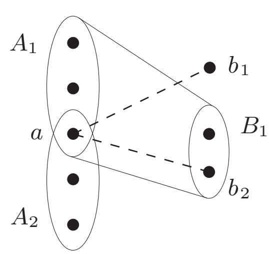

图 2.1.3: B_1包含b_2但不包含b_1

假设a在H中有两个不同的邻点b_1和b_2，由H的定义知，图$H-ab_1$和图$H-ab_2$不满足婚姻条件。因此，对$i=1,2$，存在一个包含a的集合$A_i\subseteq A$使得对$B_i:=N_{H-ab_i}(A_i)$，有$|A_i|>|B_i|$ (图2.1.3)。由$b_1\in B_2$和$b_2\in B_1$知：

$$\begin{aligned}|N_H(A_1\cap A_2\setminus\{a\})| &\leqslant |B_1\cap B_2|\\ &= |B_1|+|B_2|-|B_1\cup B_2|\\ &= |B_1|+|B_2|-|N_H(A_1\cup A_2)|\\ &\leqslant |A_1|-1+|A_2|-1-|A_1\cup A_2|\\ &= |A_1\cap A_2|-2\\ &= |A_1\cap A_2\setminus\{a\}|-1.\end{aligned}$$

所以H不满足婚姻条件，与假设矛盾。 □

最后这个证明有一个漂亮的‘对偶’命题：对每个$b \in B$均有$d_H(b) \leqslant 1$。细节参考练习6及其提示。

推论 2.1.3 每一个k–正则二部图($k \geqslant 1$)包含1–因子。

证明： 若G是k–正则的，则显然有$|A| = |B|$；由定理2.1.2，只需证明G包含一个饱和A的匹配。对每个集合$S \subseteq A$，共有$k\ |S|$条边与$N(S)$相关联，且这些边属于G中与$N(S)$相关联的$k\ |N(S)|$条边中的一部分，所以$k\ |S| \leqslant k\ |N(S)|$，即$G$确实满足婚姻条件。 □

在某些实际应用问题中，匹配不是以图的全局性为考量来选取的，而是通过在局部做独立的决定而由相关的顶点逐步形成的。一个典型的情形就是顶点对于选取哪条边来匹配顶点是有优先考量的，而不是对所有的关联边一视同仁。这样，若M是一个匹配，$e = ab$是一条不属于M的边，且a和b都倾向于e胜过它们当前的匹配边（若它们是被匹配的话），那么a和b可能倾向包含e而抛弃先前的匹配边，从而在局部上改变了M。因此，匹配M尽管可能是最大的，但却是不稳定的。

更正式地，由$E(v)$上的线性序$\leqslant_v$所形成的序族$(\leqslant_v)_{v \in V}$被称为G的一个**优先集** (set of preferences)。如果对每条边$e \in E \setminus M$，都存在一条边$f \in M$使得e和f有一个公共顶点v且$e <_v f$，则称匹配M在G中是**稳定的** (stable)。下面的结果通常被称为**稳定婚姻定理** (stable marriage theorem)。关于这个定理的其它证明参见练习16和17.

定理 2.1.4 (Gale & Shapley 1962)
对任意给定优先集，G都包含一个稳定匹配。

证明：对于G中的匹配M和M'（$M' \neq M$），如果M比M'使得B中的顶点更快乐，也就是说，对每一个顶点b，如果与b相关联的边$f' \in M'$以及边$f \in M$总是满足$f' \leqslant_b f$，那么我们称匹配M在G中比匹配$M' \neq M$ **更好**（better）；我们将构造一序列越来越好的匹配。因为这些匹配对每个顶点b最多增加$d(b)$次快乐，因此这个过程一定会结束。

给定一个匹配M，若$e = ab \in E \setminus M$且以b为端点的边$f \in M$满足$f <_b e$，则称顶点$a \in A$对于$b \in B$是**可接受的** (acceptable)；如果a是非匹配的，或者它的匹配边$f \in M$满足：对所有使得a对于b是可接受的边$e = ab$都有$f >_a e$，则称$a \in A$与M **相处快乐** (happy with)。

从空匹配开始，让我们构造一个匹配序列使得A中所有顶点是快乐的。给定这样一个匹配M，考察未被匹配的但对某个$b \in B$是可接受的顶点$a \in A$（如果不存在这样的a，则终止序列），添加$\leqslant_a$–极大边ab到M使得a对于b是可接受的，并从M中删除以b为端点的边。

显然，在我们的序列中每个匹配都比前一个更好，同时它们都使得A中顶点是快乐的（从一开始就是这样，即$M = \emptyset$时）。所以，这个序列将继续进行下去直到终止于匹配M，使得A中没有非匹配顶点对于它在B中的所有邻点是可接受的。由于A中每个被匹配的顶点与M相处是快乐的，故这个匹配是稳定的。 □

尽管婚姻定理的表述看起来比较局限，但它在图论及其它领域中都属于应用最为广泛的图论定理之一。然而，将一个问题重新叙述为二部图的匹配的形式通常需要灵活掌握。作为一个简单的例子，我们现在用婚姻定理来推导图论中最早的结果之一，这个结果的原始证明一点也不那么简单，当然也不简短。

推论 2.1.5 (Petersen 1891)
每个具有大于零偶数顶点度的正则图都有2–因子。

证明： 设G是一个$2k$–正则图（$k \geqslant 1$），不妨设G是连通的。由定理1.8.1知，图G包含一个欧拉环游$v_0e_0 \dots e_{\ell-1}v_\ell$，且$v_\ell = v_0$。用一对顶点$(v^-, v^+)$代替每个顶点$v$，用边$v_i^+ v_{i+1}^-$代替每一条边$e_i = v_iv_{i+1}$（图2.1.4），得到的二部图$G'$是$k$–正则的，故由推论2.1.3知，$G'$有1–因子。将每个顶点对$(v^-, v^+)$整合成一个顶点$v$，那么$G'$的1–因子就转化成$G$的一个2–因子。□

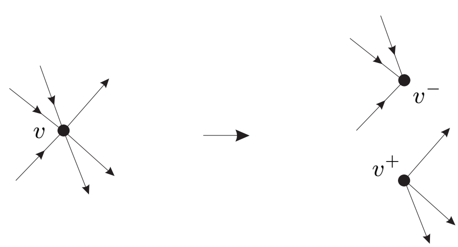

图 2.1.4: 推论2.1.5的证明中顶点的分裂过程

2.2 一般图中的匹配

给定图G，我们用$\mathcal{C}_G$表示它的分支的集合，用$q(G)$表示$\mathcal{C}_G$中**奇分支** (odd component)（即阶为奇数的分支）的个数。 若G有1–因子，显然对所有的$S \subseteq V(G)$有

$$q(G - S) \leqslant |S|$$

这是因为$G - S$的每个奇分支都有一条因子边与S相连。

同时，1–因子存在的这个明显必要条件也是充分的：

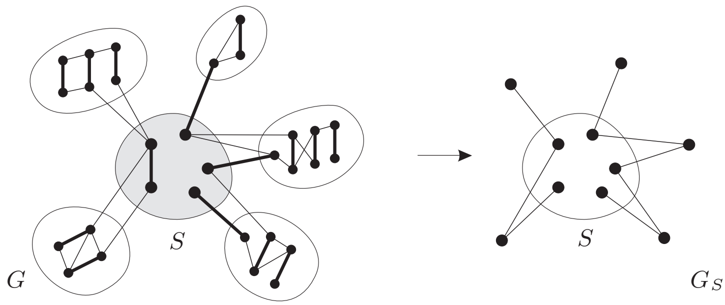

图 2.2.1: $q=3$时Tutte条件$q(G-S)\leqslant|S|$，以及定理2.2.3中的收缩图G_S

定理 2.2.1 (Tutte 1947)
图G有1–因子当且仅当对所有的$S\subseteq V(G)$，有$q(G-S)\leqslant|S|$。

证明： 设$G=(V,E)$是不含1–因子的图。我们的目标是找到一个与Tutte条件相悖的坏集合$S\subseteq V$。

不妨设G是不含1–因子的边极大图，即如果G'是由G通过增加边得到的图，且$S\subseteq V$对G'而言是个坏集合，那么S对G也是一个坏集合：$G'-S$的任何奇分支都是$G-S$的某些分支的并，这些分支中总有一个仍是奇的。

那么G是怎样的一个图呢？如果G有一个坏集合S，那么由它的边极大性和定理的条件不难看出：

$$G-S\text{的所有分支都是完全的，且每个顶点 } s\in S\text{与 } G-s \text{ 的所有顶点相邻接。} \qquad (*)$$

反过来，如果集合$S\subseteq V$满足$(*)$，那么集合S或者空集一定是坏的：如果S不是坏集合，我们可以将$G-S$的奇分支与S中不同的顶点连接起来，并把剩下的顶点两两配对；除非$|G|$是奇数，而在这种情况下$\emptyset$是个坏集合。

因此，只需证明G有一个满足$(*)$的顶点集合S。令S表示与其它每个顶点都相邻的顶点的集合。如果这个集合S不满足$(*)$，那么存在$G-S$的一个分支包含不相邻的顶点aa'。令abc依次表示该分支中一条最短a–a'路上的前三个顶点，则$ab,bc\in E$而$ac\notin E$。因为$b\notin S$，故存在顶点$d\in V$使得$bd\notin E$。由G的极大性知，$G+ac$中存在V的一个1–因子M_1，$G+bd$中存在V的一个1–因子M_2。

令$P=d\ldots v$表示G中一条从d开始的极长路，它以M_1中的边为起始边，并交替地包含M_1和M_2中的边（图2.2.2）。若P的最后一条边属于M_1，则$v=b$，因为其他情况下，P可继续走下去；这时，令$C:=P+bd$。若P的最后一条边属于M_2，则由P的极大性知，以v为端点的M_1–边一定是ac，所以$v\in\{a,c\}$；这时，令C表示圈$dPvbd$。在每一种情况下，C都是一个偶圈，它的边每隔一条在M_2中，且唯一不属于E的边是bd。用$C-M_2$的边替换M_2中在C上的边，我们得到了V的一个包含在E中的1–因子，矛盾。 □

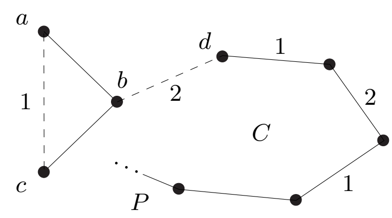

图 2.2.2: 若S不满足$(*)$，导出矛盾

推论 2.2.2 (Petersen 1891)
每个无桥的立方图都有1–因子。

证明： 我们证明任何一个无桥立方图G都满足Tutte条件。给定$S \subseteq V(G)$，考虑$G-S$的奇分支C。因为G是立方的，所以C中顶点（在G中的）度数之和为奇数，但是这个度数和中由C中的边产生的部分为偶数，故G有奇数条S–C边，从而至少有3条这样的边（因为G不含桥）。所以S和$G-S$之间的边的总数至少为$3q(G-S)$。然而，由于G是立方图，所以S和$G-S$之间边的总数至多为$3|S|$，从而$q(G-S) \leqslant |S|$，正如所希望的那样。 □

为了使匹配理论中所运用的技巧更清楚明了，现给出Tutte定理的第二个证明。事实上，我们将证明一个更强的结果，这个结果从匹配的角度给出了任意图上的一个有趣结构。如果它满足Tutte定理的条件，那么这个结构将立即蕴含着一个1–因子。

非空图$G=(V,E)$称为**因子临界的** (factor-critical)，如果G不包含1–因子但对每个顶点$v \in G$，图$G-v$包含1–因子。给定集合$S \subseteq V$，令G_S是由G通过把分支$C \in \mathcal{C}_{G-S}$收缩成单个顶点，并删除S内部的边而得到的图。（正式地，图G_S的顶点集为$S \cup \mathcal{C}_{G-S}$，而边集为$\{sC \mid \exists c \in C \text{ 使得 } sc \in E\}$；见图2.2.1。）如果（二部[2]）图$G_S$包含饱和$S$的一个匹配，我们称顶点集合$S$与$\mathcal{C}_{G-S}$是**可匹配的** (matchable)。

定理 2.2.3 每个图$G=(V,E)$都包含一个顶点集S满足下面两条性质：

(i) S与$\mathcal{C}_{G-S}$是可匹配的；

(ii) $G-S$的每个分支都是因子临界的。

给定任意这样的集合S，图G包含1–因子当且仅当$|S|=|\mathcal{C}_{G-S}|$。

给定任意图G，Tutte定理的结论很容易由这个结果推出。事实上，由(i)和(ii)，我们可得$|S| \leqslant |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G-S)$（因为因子临界图一定有奇数阶）；从而Tutte条件$q(G-S) \leqslant |S|$蕴含着$|S|=|\mathcal{C}_{G-S}|$，由定理2.2.3的最后一部分论述知1–因子存在。

[2] S或$\mathcal{C}_{G-S}$为空集的这两种（允许的）情形除外。

定理2.2.3的证明： 首先注意到定理的最后部分的论断可以立即由论断(i)和(ii)推出：若G有1–因子，则$q(G-S)\leqslant|S|$，从而如上述有$|S|=|\mathcal{C}_{G-S}|$；反过来，如果$|S|=|\mathcal{C}_{G-S}|$，那么由(i)和(ii)可直接推出1–因子的存在。

下面对$|G|$用归纳法来证明满足(i)和(ii)的集合S的存在性。对$|G|=0$，可令$S=\emptyset$。对给定图G且$|G|>0$，假设对包含较少顶点的图结论成立。

考虑不满足Tutte条件的最坏情况下的集合$T\subseteq V$，即

$$d(T):=d_G(T):=q(G-T)-|T|$$

是最大的，并令S是满足上述条件的最大的这种集合T。注意到$d(S)\geqslant d(\emptyset)\geqslant 0$。

首先证明每个分支$C\in\mathcal{C}_{G-S}=:\mathcal{C}$是奇的。如果$|C|$是偶数，任取一个顶点$c\in C$，考虑$T:=S\cup\{c\}$。由于$C-c$是奇数阶的，它至少有一个奇分支，这个分支也是$G-T$的一个分支。因此，

$$q(G-T)\geqslant q(G-S)+1 \qquad \text{且} \qquad |T|=|S|+1,$$

所以$d(T)\geqslant d(S)$，这与S的选择矛盾。

下面证明结论(ii)，即每个$C\in\mathcal{C}$是因子临界的。假设存在$C\in\mathcal{C}$和$c\in C$使得$C':=C-c$不含1–因子。由归纳假设（以及前面所证的事实，即对固定的G本定理蕴涵着Tutte定理），存在集合$S'\subseteq V(C')$满足：

$$q(C'-S')>|S'|.$$

既然$|C|$是奇数，那么$|C'|$是偶数，从而$q(C'-S')$和$|S'|$要么同为偶数，要么同为奇数，故它们不可能恰好相差1。因此我们可以将上面的不等式改进为：

$$q(C'-S')\geqslant|S'|+2,$$

从而$d_{C'}(S')\geqslant 2$，所以对于$T:=S\cup\{c\}\cup S'$，我们有

$$d(T)\geqslant d(S)-1-1+d_{C'}(S')\geqslant d(S),$$

其中，第一个‘-1’来自于C作为奇分支的减少，第二个‘-1’来自于集合T包含c。和前面一样，这与S的选择矛盾。

余下还需证明S与$\mathcal{C}_{G-S}$匹配。如果不成立，则由婚姻定理知，存在一个集合$S'\subseteq S$与$\mathcal{C}$中少于$|S'|$个分支相连接。由于$\mathcal{C}$的其它分支也是$G-(S\setminus S')$的分支，故集合$T=S\setminus S'$满足$d(T)>d(S)$，这与S的选择矛盾。 □

让我们再一次考察定理2.2.3中的集合S以及G中的任意匹配M。和前面一样，记$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$，另外$k_S$表示$M$中至少有一个端点属于$S$的边的数目，$k_{\mathcal{C}}$表示$M$中两个端点全在$G-S$中的边的个数。由于每个$C \in \mathcal{C}$为奇数阶，故它的顶点中至少有一个不与第二种类型的边相关联。因此，每个匹配M都满足：

$$k_S \leqslant |S| \quad \text{且} \quad k_{\mathcal{C}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\Big). \tag{1}$$

此外，G包含一个匹配M_0同时满足上述两种情况的等式：首先根据(i)在S与$\bigcup\mathcal{C}$之间选择$|S|$条边，然后用(ii)在每个分支$C \in \mathcal{C}$中找到一个合适的且包含$\frac{1}{2}(|C|-1)$条边的集合。这样，这个匹配M_0恰有

$$|M_0| = |S| + \frac{1}{2}\Big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\Big) \tag{2}$$

条边。

把(1)和(2)合起来，我们看到每一个具有最大基数的匹配M使得(1) 中的不等式取等号：由$|M| \geqslant |M_0|$和(2)知，M包含至少$|S| + \frac{1}{2}\big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\big)$条边，从而(1)中的两个不等式都不可能是严格的。但是，(1)中的等式还表明M具有上述结构：由$k_S = |S|$知，每个顶点$s \in S$是满足$t \in G-S$的边$st \in M$的一个端点；由$k_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\big)$知，对每个$C \in \mathcal{C}$，$M$恰包含$C$的$\frac{1}{2}\left(|C|-1\right)$条边。最后，因为后面提到的这些边在每个$C$中只错过了一个顶点，那么对于不同的$s$上述的边$st$的端点$t$属于不同的分支$C$中。

注意到，看似技术性的定理2.2.3隐藏了大量的结构信息：它包含了关于任意图中最大匹配的详细且本质性的描述。关于这个结构性定理的完整描述（它通常被称为**Gallai-Edmonds 匹配定理** (Gallai-Edmonds matching theorem))的出处，我们将在本章结尾的注解中给出。

2.3 Erdös-Pósa定理

在2.1节中，König和Hall定理的主要魅力所在是，只要某个很明显的障碍子图不出现，我们想要的匹配就存在了。例如，在König定理中，除非可用少于k个顶点来覆盖图中的所有边，否则我们总可以找到k条独立边。

更一般地，如果G是一个任意图(不必是二部图)，而$\mathcal{H}$是任意图族，我们尝试把$\mathcal{H}$中(可能相同的)若干图不相交地填装到G中。设最多可能填装的图的个数为k，将k和G中可以覆盖$\mathcal{H}$中的所有子图的顶点最小数s进行比较。如果s有一个独立于G的、关于k的函数作为上界，则称$\mathcal{H}$ **具有Erdös-Pósa性质** (Erdös-Pósa property)。(所以，严格地说，$\mathcal{H}$有这个性质意味着，存在一个$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$的函数$k \mapsto f(k)$使得对于每个$k$和$G$，或者$G$包含$k$个不相交子图，其中每个都和$\mathcal{H}$中的一个图同构，或者存在一个至多有$f(k)$个顶点的集合$U \subseteq V(G)$使得$G-U$没有子图属于$\mathcal{H}$。)

在这一节，我们的目标是证明Erdös-Pósa定理，即所有圈组成的图族具有这样的性质：我们能够找到一个函数f (大约是$4k\log k$) 使得每个图或者包含k个不相交的圈，或者包含一个至多有$f(k)$个顶点的集合覆盖所有圈。

我们先证明立方图中一个更强的命题。对于$k\in\mathbb{N}$，令

$$s_k := \begin{cases} 4kr_k & \text{如果} \quad k \geqslant 2 \\ 1 & \text{如果} \quad k \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{这里} \quad r_k := \log k + \log\log k + 4.$$

引理 2.3.1 设$k\in\mathbb{N}$，且H是一个立方多重图。若$|H|\geqslant s_k$，则H包含k个不相交的圈。

证明*:* 我们对k用数学归纳法。当$k\leqslant 1$时，这个结论显然成立。设$k\geqslant 2$，归纳假设命题对于$k-1$成立。设C是H中的一个最短圈。

我们首先证明$H-C$包含一个立方多重图的细分H'使得$|H'|\geqslant |H|-2|C|$。设m是C和$H-C$之间的边数。由于H是立方图且$d(C)=2$，所以我们有$m\leqslant |C|$。现在我们考虑$V(H)$的二部划分$\{V_1,V_2\}$。首先令$V_1:=V(C)$并且允许$V_2=\emptyset$。如果$H[V_2]$有一个顶点的度数至多为1，那么我们把这个顶点移动到V_1中，从而获得一个新的划分$\{V_1,V_2\}$，且划分的两个部分之间的边数更少。假设存在n个这样的移动（我们的假设蕴含着$n\leqslant 3$，但这里我们并不需要这个），但没有更多的，那么得到的划分$\{V_1,V_2\}$的两个部分之间的边数至多是$m-n$，并且$H[V_2]$至多有$m-n$个顶点的度小于3，这是因为这些顶点都和一条横跨两部分的边关联。由于不能把这些顶点移动到V_1中去，所以这些顶点在$H[V_2]$中的度数恰好为2。设H'是在$H[V_2]$中压缩这些度为2的顶点后得到的立方多重图，则得到所需的结果

$$|H'|\geqslant |H|-|C|-n-(m-n)\geqslant |H|-2|C|.$$

要完成证明，只需证明$|H'|\geqslant s_{k-1}$。由推论1.3.5知$|C|\leqslant 2\log|H|$ (或者，如果$|C|=g(H)\leqslant 2$，则$|H|\geqslant s_k$) 以及$|H|\geqslant s_k\geqslant 6$，则

$$|H'|\geqslant |H|-2|C|\geqslant |H|-4\log|H|\geqslant s_k-4\log s_k.$$

（在最后一个不等式中，用到了函数$x\mapsto x-4\log x$在$x\geqslant 6$时的递增性。）

接下来只需证明$s_k-4\log s_k\geqslant s_{k-1}$。当$k=2$时，显然成立，因此我们假设$k\geqslant 3$，则$r_k\leqslant 4\log k$ （这对于$k\geqslant 4$时显然成立，而对$k=3$的情形还需要若干计算），那么

$$\begin{aligned} s_k-4\log s_k &= 4(k-1)r_k+4\log k+4\log\log k+16-(8+4\log k+4\log r_k) \\ &\geqslant s_{k-1}+4\log\log k+8-4\log(4\log k) \\ &= s_{k-1}. \end{aligned}$$

□

定理 2.3.2 (Erdös & Pósa 1965)

存在一个函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意$k\in\mathbb{N}$，每个图或者包含$k$个不相交的圈，或者存在一个至多有$f(k)$个顶点的集合与所有圈相交。

证明*:* 我们证明当$f(k) := \lfloor s_k + k - 1 \rfloor$时结论成立。给定整数$k$，并设$G$是一个任意图。不妨设$G$包含一个圈，则它有一个极大子图$H$使得$H$中每个顶点的度数为2或3。设$U$是$H$中度数为3的顶点的集合。

设$\mathcal{C}$是图G中与U不相交，且与H恰好交于一个顶点的所有圈的集合。设$Z \subseteq V(H) \setminus U$是这些顶点的集合。对于每个$z \in Z$选出一个圈$C_z \in \mathcal{C}$与$H$恰好交于$z$，设$\mathcal{C}' := \{C_z \mid z \in Z\}$，由$H$的极大性，$\mathcal{C}'$中的圈互不相交。

设$\mathcal{D}$是H的与Z不相交的2–正则分支的集合，则$\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$是另一个互不相交的圈集。如果$|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \geqslant k$，证明完成；否则，可以在$\mathcal{D}$中的每个圈上取一个顶点添加到$Z$中，得到一个集合$X$，它至多有$k-1$个顶点，且与$\mathcal{C}$中的所有圈以及$H$的所有2–正则分支相交。现在考虑$G$中任意不与$X$相交的圈。由$H$的极大性知，它与$H$相交，但不是$H$的分支，也不在$\mathcal{C}$中，而且不包含$U$外的任意两个不同顶点之间的$H$–路(由$H$的极大性)，从而这个圈与$U$相交。

我们已经证明G中的每个圈与$X \cup U$相交。由于$|X| \leqslant k-1$，除非H包含k个互不相交的圈，否则我们只需证明$|U| < s_k$。对压缩H中的2度顶点得到的多重图运用引理2.3.1即可得到所要的结论。 □

可以把定理2.3.2的证明进行修改给出一个关于填装边不交圈和用边覆盖这些圈的类似结果，证明梗概见第七章的练习22。另外一个应用Ramsey定理的简单证明见第九章的练习6。

在第12章我们将会再次见到Erdös-Pósa性质。在那里，定理2.3.2的一个非常重要的推广将会是图子式理论中一个令人意外的简单推论。

2.4　树填装和荫度

在这一节，我们考虑关于边的而不是顶点的填装和覆盖。在一个给定的连通图中，能找到多少棵边不交的支撑树呢？如果不要求边不相交，至少需要多少棵树才可以覆盖给定图的所有边呢？这两个问题已经由两个经典定理给出了答案，但这里我们不提供两个定理的直接证明，而是通过证明Bowler和Carmesin最近得到的一个更一般性的漂亮结果（填装–覆盖定理），把这两个定理作为推论导出。

为了了解树填装问题的背景，先假设我们的图代表一个通信网络，对任意两个顶点，我们希望找到它们之间k条边不相交的路。在下一章中，Menger定理（定理3.3.6）将会揭示只要图是k–边连通的，这些路就存在，显然这个条件也是必要的。Menger定理是一个很好的定理，但是它没有告诉我们怎样找到这些路；特别是，即使已经找到一对顶点之间的这些路，也不一定对寻找另外一对顶点之间的路有帮助。如果一个图有k棵边不交的支撑树，那么就有k条这样的路，每棵树中有一条。只要把这些树储存在电脑中，那么对任意给定的一对顶点就可以很快地找到k条边不交路。

什么时候一个图G有k棵边不交的支撑树呢？如果有，这个图必定是k–边连通的。反之，很容易看到结论不一定成立(如$k=2$时)；的确，多大的边连通性蕴含k棵边不交支撑树的存在并不容易看出。(但是可以参考下面的推论2.4.2。)

我们还有另外一个必要条件：若G有k棵边不交的支撑树，那么把$V(G)$任意地划分成r个部分，G的每棵支撑树至少有$r-1$条**交叉边** (cross-edges)，即那些两个端点位于不同部分中的边(为什么？)。因此，若G有k棵边不交的支撑树，则它至少有$k(r-1)$条交叉边。这个条件也是充分的：

定理 2.4.1 (Nash-Williams 1961; Tutte 1961)
一个多重图包含k棵边不交的支撑树，当且仅当，对顶点集的任意划分P，它有至少$k(|P|-1)$条交叉边。

定理2.4.1有一个惊人的推论：为了确保k棵边不交支撑树的存在性，只要把边连通度提高到$2k$即可。

推论 2.4.2 *每个$2k$–边连通多重图G有k棵边不交的支撑树。*

证明*:* 在图G的任意顶点划分中，每个划分类与别的类之间至少有$2k$条边相连。因此，对于任意划分为r个类的划分，G有至少$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} 2k = kr$条交叉边，由定理2.4.1知，结论成立。
□

注意到，定理2.4.1中关于交叉边数的条件只需要对那些划分类是连通顶点集的划分P成立即可：对于任何被P细化的划分，如果它有足够多的边数（即使它的划分类更多），那么P也如此。因此树填装定理说明，只要一个多重图的收缩子式有足够多的边数来保证k棵边不交支撑树的存在，那么这个多重图本身也包含k棵边不交支撑树。

在8.6节我们还会见到定理2.4.1，在那里我们将证明它的无限形式。无限形式并不基于普通的支撑树（不会成立），而是使用‘拓扑支撑树’：由图和它在无穷远处的末端所组成的拓扑空间是紧致的，在这个空间上存在着类似的结构。

其次，我们讨论填装问题的对偶，即覆盖问题。为了方便讨论，我们对填装问题重新叙述。给定多重图G的若干给定子图，如果这些子图的边集划分$E(G)$，我们称它们组成G的**边分解** (edge-decomposition)。因此支撑树问题可以重新叙述如下：图G可以边分解成多少个连通的支撑子图呢？因为支撑子图是连通的当且仅当它在每一个键中均有边，所以填装问题在这个新的诠释下可以看成定理1.5.1和1.9.4的‘对偶’：给定图G可以最少边分解成多少个无圈子图（它的补图和所有的回路相交）呢？

给定若干个图（不一定是G的子图），如果G的每一条边都属于它们中的至少一个，我们称这些图**覆盖** (cover)G的边。那么对偶问题变成：对于哪个多重图G，我们可以用最多k棵树覆盖G的边。

一个明显的必要条件是，每个集合$U \subseteq V(G)$，可导出最多$k(|U|-1)$条边，其中每个树不超过$|U|-1$条边。也可以叙述成树填装问题的对偶形式：G中没有一个删除子式（子图）G'使得G'的边数太大不能被k棵树覆盖。

和以前一样，这个条件也是充分的。

定理 2.4.3 (Nash-Williams 1964)
一个多重图$G=(V,E)$的边可以被最多k棵树覆盖，当且仅当对任意非空集合$U \subseteq V$，有$\|G[U]\| \leqslant k(|U|-1)$。

覆盖图的所有边所需要的树的最少个数称为图的**荫度** (arboricity)。由定理2.4.3知，图的荫度是衡量最大局部密度的一个指标：一个图有小的荫度当且仅当它是‘无处稠密’的，也就是说，不包含具有较大$\varepsilon(H)$的子图H。

我们现在终于可以叙述填装–覆盖定理。在1.10节我们曾经提到，当构成多重图G的收缩子式G/P时，我们保留了不同划分类之间G的所有边：划分P的两个类U,U'之间的所有边成为G/P的平行边。

定理 2.4.4 *对任意连通多重图$G=(V,E)$和每个$k \in \mathbb{N}$，存在V的一个划分P使得具有$U \in P$的每个$G[U]$包含k 条边不交的支撑树，而且G/P的边可以被k棵支撑树覆盖。*

在证明填装–覆盖定理前，我们先推出定理2.4.1和2.4.3。

从定理2.4.4证明定理2.4.1.
假定对$V(G)$的每一个划分P，多重图G都有至少$k(|P|-1)$条交叉边。设P是定理2.4.4中的划分，同时定理保证G/P有k条支撑树覆盖它的所有边。因为$\|G/P\| \geqslant k(|P|-1)$，所以这些树是边不交的。结合由定理2.4.4所保证的$G[U]$中的边不交支撑树，我们得到G的k棵支撑树。 □

从定理2.4.4证明定理2.4.3.
假定每一个$U \subseteq V$导出G中至多$k(|U|-1)$条边。设C是G的一个分支，而P是定理2.4.4中提供的$V(C)$的划分。对每个$U \in P$，$G[U]$中k棵边不交支撑树（存在性由定理保证）的每一棵都包含$|U|-1$条边，因此$G[U]$的所有边都属于这些树。把这些树和覆盖C/P中边的支撑树（存在性由定理2.4.4保证）结合起来就得到C的k棵支撑数。进一步，这些树可以组合成为覆盖G中所有边的k棵森林，加上边后就成为我们需要的k棵树。 □

虽然填装–覆盖定理是一个极具影响的结果，但它的证明却出奇的短和漂亮。作为准备，先引进几个概念。给定图G的一棵支撑树T，一条弦e以及它的基本圈C_e上的一条

边$f \in T$，那么$T' = T + e - f$是另外一棵支撑树：因为T'还是连通的，并且和T拥有相同的边数，由推论1.5.3知，T'是棵支撑树。我们称T'是由T通过把e交换成f 而得到的树。

设$\mathcal{T} = (T_1, \ldots, T_k)$是$G$的一族支撑树，我们称边序列$e_0, \ldots, e_n$是$\mathcal{T}$起始于$e_0$的交换链 (exchange chain)，如果$e_n$不是这些树的边，但对于每一个$i < n$存在$j =: j(i)$使得$e_i \in T_j$，而$e_{i+1}$是$T_j$的弦并且$e_{i+1}$关于$T_j$的基本圈包含$e_i$。

对于任意这样一族支撑树$\mathcal{T}$，我们记$E(\mathcal{T}) := \bigcup \{ E(T) \mid T \in \mathcal{T} \}$。

引理 2.4.5 *如果e_0是$\mathcal{T}$的交换链的起始边，且属于两棵树，则存在G的一个k棵支撑树的族$\mathcal{T}'$ 使得$E(\mathcal{T}) \subsetneq E(\mathcal{T}')$。*

证明： 我们选择$e_0, \ldots, e_n$使得在所有起始于e_0的$\mathcal{T}$的交换链中，序列$e_0, \ldots, e_n$具有最短长度，那么不存在e_i可以属于任何e_ℓ（关于$\mathcal{T}$中任何树）的基本圈中，这里$\ell > i + 1$。否则，我们可以从e_i 直接跳到e_ℓ或$e_{\ell+1}$，从而得到更短的序列。

从$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}$开始，对$i = 0, \ldots, n-1$归纳定义$\mathcal{T}^{i+1}$：对$j = j(i)$用$T_j^i + e_{i+1} - e_i =: T_j^{i+1}$代替$\mathcal{T}^i = (T_1^i, \ldots, T_k^i)$中的树$T_j^i$；同时，对于其它$j$，令$T_j^{i+1} := T_j^i$。注意到，对$j = j(i)$，序列的最小性蕴含着，如果$T_j$的边$e$属于关于$e_{i+1}$的基本圈，那么它也在$T_j^i$中：否则，存在某个$i' < i$使得$e = e_{i'}$和$\ell := i + 1 > i' + 1$产生矛盾。所以，如果$T_j^i$是$G$的一棵支撑树，根据归纳假定，$T_j^{i+1}$也是一棵支撑树。

显然，$\mathcal{T}' := (T_1^n, \ldots, T_k^n)$满足$E(\mathcal{T}') = E(\mathcal{T}) \cup \{e_n\}$。 □

定理2.4.4的证明：

设$\mathcal{T} = (T_1, \ldots, T_k)$是$G$的$k$棵支撑树的族，它使得$E(\mathcal{T})$极大。设$D$是$G$中$\mathcal{T}$的所有交换链的起始边的集合。因为$E(\mathcal{T})$之外的每条边形成一个单边交换链，所以$D$包含所有不在$E(\mathcal{T})$中的边。设$P$是$V$的一个划分使得划分类恰好是$(V, D)$的分支的顶点集。

我们先证明定理中关于填装的部分，给定$U \in P$，对任意$j = 1, \ldots, k$，设S_j是$T_j[U]$中由D的边所组成的子图。由$\mathcal{T}$的极大性和引理2.4.5知，D中没有边可以属于两个T_j，所以这些森林S_j是边不交的。

下一步我们证明S_j是连通的。因为D的边组成U的一个连通多重图，因此我们只需要证明，对每一条边$uu' \in D$且$u, u' \in U$，存在S_j中的一条u–u' 路。如果uu'属于T_j，这样的路在T_j中显然存在，所以S_j也有这样的路。如果uu'不属于T_j，则路uT_ju'中的任意边e也属于D，所以也属于S_j：如果$e_0, \ldots, e_n$是具有$e_0 = uu' \in D$的交换链，由于e在关于$\mathcal{T}$的e_0的基本圈上，故$e, e_0, \ldots e_n$ 是一条交换链，从而e属于D。

因为每个T_j导出P的划分类上的连通子图S_j，收缩这些S_j就把T_j变为G/P的支撑树T_j'。因为$E \setminus E(\mathcal{T}) \subseteq D$，所以这些$T_j'$覆盖$G/P$的所有边。 □

填装–覆盖定理从本质上和树填装定理以及覆盖定理不同。在后两个定理中，填装或覆盖的存在是由关于图的结构方面的结果来保证的，即要求对所有的某种子式都满足某个数值条件：对树填装定理是收缩子式，而对覆盖定理是删除子式（子图）。这种表达形式使得这两个定理更有价值：它们用关于很多小的子图不太有价值的数据信息，来交换一个图的更有价值的结构信息。

而填装–覆盖定理是对每一个图给出结构性的结论：既没有数量性的假定，也没有定性的假定。

填装–覆盖定理可以有两种不同的无限图推广，参见第8章练习18和125。

2.5 路覆盖

让我们再次回到二部图的König对偶定理，即定理2.1.1。如果对图G的每条边给一个从A到B的定向，那么这个定理告诉我们需要多少条边不交有向路来覆盖G的所有顶点：每条有向路的长度是0或1，明显地，在这样的‘路覆盖’中，当路的条数最少时，就是当它包含尽可能多长度为1的路时；换句话说，当它包含最大基数的匹配时。

在这一节我们把上面的问题进行推广：在一个给定的有向图中需要多少条有向路来覆盖它的整个顶点集？当然，这个问题在无向图中也可以提出。然而，在无向图的情况这个问题比较简单（作为练习），同时有向图的情形也有一个有趣的推论。

有向路 (directed path)是一个有向图$P \neq \emptyset$，它的顶点$x_0, \ldots, x_k$各不相同且所有边$e_0, \ldots, e_{k-1}$满足e_i是一条由x_i指向x_{i+1}的边，其中$i < k$。在这一节，路始终指‘有向路’。上面提到的顶点x_k称作路P的**最终顶点** (last vertex)，当$\mathcal{P}$是一个路的集合时，我们把最终顶点的集合记作$\operatorname{ter}(\mathcal{P})$。一个有向图$G$的**路覆盖** (path cover)是$G$中若干不相交路的集合，它们可以覆盖$G$中所有的顶点。

定理 2.5.1 (Gallai & Milgram 1960)
每个有向图G有一个路覆盖$\mathcal{P}$和一个顶点独立集$\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ 使得对每个$P \in \mathcal{P}$，有$v_P \in P$。

证明*:* 显然，图G总是有路覆盖，例如那些平凡路。我们通过对$|G|$用归纳法来证明：对于G的任意具有极小$\operatorname{ter}(\mathcal{P})$的路覆盖$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$，存在一个顶点集$\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$符合要求。对每个$i$，记$v_i$为$P_i$的最终顶点。

若$\operatorname{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \ldots, v_m\}$是独立的，则无须再证，因此不妨假设$G$有一条从$v_2$到$v_1$的边。因为$P_2v_2v_1$也是一条路，由$\operatorname{ter}(\mathcal{P})$的极小性知$v_1$不是$P_1$中唯一的顶点；设$v$是$P_1$中先于$v_1$的顶点，那么$\mathcal{P}' := \{P_1v, P_2, \ldots, P_m\}$是$G' := G - v_1$的路覆盖（图2.5.1）。显然，任意在$G'$中代表$\mathcal{P}'$的独立集对$G$中的$\mathcal{P}$也成立，所以我们需要确定的是，是否可以对$\mathcal{P}'$使用归纳假设。因此只需证明$\operatorname{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \ldots, v_m\}$在$G'$的所有路覆盖的最终顶点集合中是极小的。

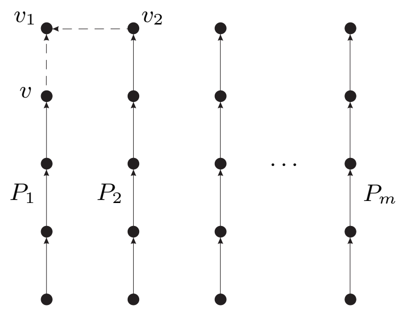

图 2.5.1: G和G'的路覆盖

假设G'有路覆盖$\mathcal{P}''$且$\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneq \mathrm{ter}(\mathcal{P}')$。如果一条路$P \in \mathcal{P}''$结束于$v$，我们可以把$\mathcal{P}''$中的$P$用$Pvv_1$来代替，从而得到$G$的一个路覆盖，它的最终顶点集是$\mathrm{ter}(P)$的真子集，这与$\mathcal{P}$的选取矛盾。如果一条路$P \in \mathcal{P}''$结束于$v_2$（同时不存在路结束于$v$），我们类似地把$\mathcal{P}''$中的$P$由$Pv_2v_1$代替，从而与$\mathrm{ter}(P)$的极小性矛盾。因此$\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subseteq \{v_3, \ldots, v_m\}$，但此时$\mathcal{P}''$和平凡路$\{v_1\}$一起构成$G$的路覆盖，与$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$的极小性矛盾。 □

作为定理2.5.1的推论，我们得到偏序集理论中的一个经典结果。前面提到过，在偏序集$(P, \leqslant)$中，如果一个子集的元素是两两可比较的，那么它是一个**链** (chain)；如果它的元素是两两不可比较的，称它为一个**反链** (antichain)。

推论 2.5.2 (Dilworth 1950)
在每个有限偏序集$(P, \leqslant)$中，并集为P的最少链数等于P中反链的最大个数。

证明*:* 若A是P中基数最大的反链，则显然P不能被少于$|A|$条链覆盖。反过来，把定理2.5.1应用到顶点集为P的有向图上，这里边集为$\{(x, y) \mid x < y\}$，则$|A|$条链是足够的。 □

练习

1. 设M是二部图G的一个匹配，证明：若M是次最优的（即比G的某个匹配包含较少边），则G包含一条关于M的增广路。这一结论是否可以推广到非二部图的匹配上？

2. 描述一个最有效的算法，在二部图中寻找一个具有最大基数的匹配。

3. 证明：若在两个无限集合A和B之间存在两个单射$A \to B$和$B \to A$，则存在一个双射$A \to B$。

4. 两个人玩一个游戏：在某个固定的图G中，他们交替地构造一条路。如果$v_1 \dots v_n$是到目前为止已经构造的路，下一个游戏者就要找到一个顶点v_{n+1}使得$v_1 \dots v_{n+1}$还是一条路，不能进一步延长这条路的游戏者就输掉了这局游戏。对什么图G，第一个游戏者有一个必胜策略；对什么图，第二个游戏者必胜呢？

5. 从König 定理推导婚姻定理。

6. 设G和H是如Hall定理的第三个证明中所定义的图。证明：对每个$b \in B$，总有$d_H(b) \leqslant 1$，并推导出婚姻定理。

7. 在婚姻定理的第一个证明中，我们用到图是有限的这一假设吗？如果用到，是否可以适度调整使它对无限图也成立？

8. 设k是一个整数。证明：有限集分成若干k–子集的任意两个划分包含一个公共代表系。

9. 设$A_1, \dots, A_n$是有限集A的子集，而$d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$。证明：对所有$k \leqslant n$，存在满足$|D_k| = d_k$的不交子集$D_k \subseteq A_k$当且仅当对所有$I \subseteq \{1, \dots, n\}$有

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geqslant \sum_{i \in I} d_i .$$

10.$^+$ 证明：在n个元素的集合X中，不可能存在多于$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集使得其中任何一个不包含另一个。

(提示：构造$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$条链来覆盖$X$的幂集格。)

11. 设G是一个具有二部划分$\{A, B\}$的二部图。假定$\delta(G) \geqslant 1$，且对每一个满足$a \in A$的边ab有$d(a) \geqslant d(b)$，证明G包含一个饱和A的匹配。

12.$^-$ 找到一个二部图以及它的一个优先集使得它没有最大匹配是稳定的，同时没有稳定匹配是最大的。找到一个非二部图以及它的一个优先集使得这个图没有稳定匹配。

13.$^-$ 考虑稳定婚姻定理的证明中所描述的算法。注意到，一旦B中的一个顶点被匹配，以后它始终被匹配而且随着它的匹配边的变化而变得更快乐。另一方面，证明：对于A的一个给定顶点，随着每一步变化（除了它不被匹配的阶段外），与它关联的匹配边的序列会变得更不快乐。

14. 证明：一个给定图的所有稳定匹配覆盖相同的顶点集（特别地，它们的大小都相等）。

15.$^+$ 证明：在定理2.1.4的证明中使用的算法产生一个匹配M使得没有其他稳定匹配让A中的顶点更快乐，或者让B中的顶点（比它在M中）更不快乐。讨论快乐的情形时，只考虑被匹配的顶点。

16.$^+$ 证明：下面这个‘明显的’算法并不一定给出二部图的稳定匹配。从任意匹配开始，若当前的匹配不是极大的，则增加一条边；如果它是极大的但不是稳定的，则把产生不稳定性的边加进去，同时删去当前任何与它的端点匹配的边。

17. 证明：有限集P上的两个偏序 $\leqslant_1, \leqslant_2$ 的并包含一个‘支配反链’A，即集合 $A \subseteq P$ 使得 A 中的任何两个因素在 $\leqslant_1$ 或 $\leqslant_2$ 中都不相关，同时对每一个 $x \in P$ 存在一个元素 $a \in A$ 使得 $x \leqslant_1 a$ 或者 $x \leqslant_2 a$。推导定理2.1.4.

18. 当G是森林时，找出定理2.2.3中的S。

19. 一个图G叫做（顶点）**传递的** (transitive graph)，如果对任意两个顶点$v, w \in G$存在G的一个自同构把v映射到w。利用定理2.2.3之后的讨论，证明每一个偶数阶的传递连通图包含1–因子。

20$^+$. 证明：图G包含k条独立边当且仅当对所有集合$S \subseteq V(G)$有$q(G-S) \leqslant |S| + |G| - 2k$。

21.$^-$ 构造不包含1–因子的立方图。

22.$^+$ 从Tutte定理推出婚姻定理。

23.$^-$ 否定König定理（2.1.1）在非二部图中的类似命题，但是证明$\mathcal{H} = \{K^2\}$具有Erdős-Pósa性质。

24. 设T是一棵树，$\mathcal{T}$是 T的所有子树的集合。证明：$\mathcal{T}$中不交树的最大个数等于集合X的最小基数，这里X是一个顶点集合使得$T - X$不包含$\mathcal{T}$中的任何一棵子树。

25. 对于立方图，引理2.3.1比Erdös-Pósa定理要强很多。对任意$k \in \mathbb{N}$，通过找到一个函数$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得每一个最小度$\geqslant 3$且阶至少为$g(k)$的多重图都包含k个不交的圈，从而把引理2.3.1推广到最小度$\geqslant 3$的任意多重图上；或者证明这样的函数g根本不存在。

26. 给定图G，令$\alpha(G)$表示G中独立顶点集的最大阶数。证明：G的顶点可以被最多$\alpha(G)$个不交的子图覆盖，其中每个子图同构于一个圈或K^2或K^1。

27. 证明：如果G有两个边不交的支撑树，那么它就有一个连通的支撑子图使得所有顶点的度为偶数。

28. 在定理2.4.1，2.4.3和2.4.4的证明中，只有一个地方我们用到了图是多重图这一条件，请指出它。

29. 从下面定理2.4.1的简单‘证明’中找出错误。如果一个划分至少有两个部分并且至少一个类包含多于一个元素，则称这个划分是**非平凡的**。我们对$|V| + |E|$用归纳法来证明，

如果V的每个具有r个部分的非平凡划分都有至少$k(r-1)$条交叉边，那么$G=(V,E)$包含k个边不交的支撑树。如果我们允许k个K^1的拷贝作为K^1的一族k个边不交的支撑树，那么归纳法对于$G=K^1$平凡地成立。下面考虑归纳步骤：如果V的每个具有r个部分的非平凡划分有多于$k(r-1)$条交叉边，则删除G的一条边，根据归纳法结论得证。因此V有一个非平凡划分$\{V_1,\ldots,V_r\}$恰好有$k(r-1)$条交叉边。假定$|V_1|\geqslant 2$，如果$G':=G[V_1]$有k个不交的支撑树，把这些树和G/V_1中存在的k个不交的支撑树（存在性由归纳法保证）结合起来即可。所以我们可以假设G'中没有k个不交的支撑树，那么由归纳法知它有一个非平凡的顶点划分$\{V'_1,\ldots,V'_s\}$拥有少于$k(s-1)$条交叉边，因此$\{V'_1,\ldots,V'_s,V_2,\ldots,V_r\}$是一个具有$r+s-1$个部分的非平凡划分且拥有少于$k(r-1)+k(s-1)=k((r+s-1)-1)$条交叉边，矛盾。

30. 图G称作**平衡的** (balanced)，如果对每一个子图$H\subseteq G$有$\varepsilon(H)\leqslant\varepsilon(G)$。

    (i) 找到几类自然的平衡图。

    (ii) 证明：平均度是平衡图荫度的上界。那么ε或者$\varepsilon+1$是否是荫度的上界呢？

    (iii) 用平衡图或其它图来刻画图族$\mathcal{G}$：对每一个导出子图$H\subseteq G$均有$\varepsilon(H)\geqslant\varepsilon(G)$。

31. 把König定理和Dilworth定理重新叙述成为纯粹的存在形式，而不使用不等式。

32.$^-$ 不使用对应的有向形式，直接证明Gallai-Milgram定理的无向形式。

33. 由Gallai-Milgram定理推出婚姻定理。

34.$^-$ 证明：至少有$rs+1$ 个元素的偏序集要么包含长度为$r+1$的链，要么包含阶为$s+1$的反链。

35. 证明下面Dilworth定理的对偶形式：在每个有限偏序集$(P,\leqslant)$中，并集为P的反链的最小个数等于P中最长链的长度。

36. 从Dilworth定理推出König 定理。

37. 找到一个偏序集满足它既没有无限的反链也不是有限多个链的并。

注解

有一本非常容易阅读且内容全面的关于有限图匹配的专著：L. Lovász & M. D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Math. 29，North Holland 1986。另两个综合性的专著是A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003，和A. Frank, *Connections in combinatorial optimization*, Oxford University Press 2011。这一章介绍的结果的参考资料都可以在这些书中找到。

如同我们在第3章将要看到的，König 定理(1931)不过是更广义的Menger定理（1929）的二部图情形。那时候，虽然Hall定理的证明出现的更晚（1935），但是这两个定理都没有Hall的婚姻定理更有名。直到今天，Hall定理仍然是图论中应用最广泛的结果之一。前两个证明是传统方法；第三个证明中运用的边极小子图的方法，可以追朔到Rado (1967)的文章，我们这里的版本以及它的对偶(练习6)来自于Kriesell。

更多关于稳定婚姻定理的结果，可参见D. Gusfield & R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press 1989；也可参考A. Tamura, Transformation from arbitrary matchings to stable matchings, *J. Comb. Theory A*, 62 (1993), 310–323。有些特别有价值的应用罗列在网站

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2012

的‘Advanced Information’部分。

Tutte 1–因子定理的证明是基于Lovász 1975年的证明。Tutte定理的推广（即定理2.2.3）以及它之后的非正式讨论是匹配完全结构定理的简化形式，它由Gallai (1964)和 Edmonds (1965)独立完成。关于这个定理的详细阐述和讨论，参见Lovász & Plummer的专著。

定理2.3.2来自于P. Erdös & L. Pósa，On independent circuits contained in a graph, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 347–352。这里的证明主要源自M. Simonovits，A new proof and generalization of a theorem of Erdös and Pósa on graphs without $k+1$ independent circuits，*Acta Sci. Hungar* 18 (1967), 191–206。在引理2.3.1的证明中，用一个不变量来限制另外一个不变量所涉及的计算是常见的证明技巧，本书中没有强调图论的这个方向，但它也是比较典型的方法。

对于有向图，B. Reed, N. Robertson, P. D. Seymour和R. Thomas给出一个和 Erdös-Pósa 定理十分相似的结论，见B. Reed, N. Robertson, P. D. Seymour & R. Thomas, Packing directed circuits, *Combinatorica* 16 (1996), 535–554。它的证明比无向的情形要困难很多；参见12.6节，特别是定理12.6.5，它反映出这个技巧的一个侧面。

树填装定理（即定理2.4.1）由 Nash-Williams 和 Tutte 独立证明，这两篇论文都收录在*J. London Math. Soc.* 36 (1961)中。树覆盖定理（即定理2.4.3）出自C.St.J.A. Nash-Williams, Decompositions of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* 39 (1964), 12。填装–覆盖定理中划分的存在性由B. Jackson & T. Jordán, Brick partitions of graphs, Discrete Math. 310 (2010), 270–275第一次明确地给出了构造。这个划分可能不唯一，但它本身就很有价值，更多的讨论可以参见文章本身或前面提到 Frank 的专著。

填装–覆盖定理本身以及它的证明并不依赖于经典的树填装定理或覆盖定理，但蕴含着这两个定理，取自 N. Bowler & J. Carmesin, Matroid intersection, base packing and base covering for infinite matroids, *Combinatorica* 35 (2015), 153–180。

人们早就了解树填装定理或覆盖定理可以自然地用拟阵来表示，参见前面提到的Schrijver 专著。然而，直到最近对无限拟阵进行公理化（使得系统性研究变得可能）时，在把关于有限拟阵中的数量化结果转化成无限拟阵的结构性结果的过程中，Bowler 和Carmesin 发现了填装–覆盖定理。他们文章的主要焦点是展示拟阵中填装–覆盖定理的无限形式（即填装–覆盖猜想）在无限拟阵理论的研究中是如何扮演着中心角色的。这个猜想蕴含着包括无限图的 Aharoni-Berger 定理（即定理8.4.2，它是图论中最深刻的定理之一）在内的很多结果。

填装–覆盖定理可以用两种方式推广到无限图：一是使用普通的支撑树（第八章练习18），另外是使用‘拓扑’支撑树（第八章练习125）。Bowler 和 Carmesin 在他们的文章中也指出，这两种无限形式的推广也是无限填装–覆盖猜想的推论，分别对应于有限性拟阵（finitary matroid）和余有限性拟阵（cofinitary matroid）。

类似于推论2.4.2，我们可以问多大的顶点连通性可以保证 k 棵以一个给定顶点 r 为根的支撑树 $T_1,\dots,T_k$ 的存在性，同时满足对每个顶点 v，k 条路 vT_ir 是独立的。例如，如果G是一个圈，那么去掉r的左边或右边的边得到两棵这样的支撑树。在A. Itai & A. Zehavi, Three tree-paths, *J. Graph Theory* 13 (1989)，175–187中，他们猜想$\kappa \geqslant k$是充分的。这个猜想对$k \leqslant 4$时已经得到证明；参见S. Curran, O. Lee & X. Yu, Chain decompositions and independent trees in 4–connected graphs, *Proc. 14th Ann. ACM SIAM symposium on discrete algorithms* (Baltimore 2003), 186–191。

定理2.5.1出自于T. Gallai & A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphent heoretischen Satzes von Rédei，*Acta Sci. Math. (Szeged)* 21 (1960), 181–186。