DE NIEUWERE ONDERZOEKINGEN
OP HET GEBIED DER
ALGEBRAISCHE OPPERVLAKKEN.

DOOR

Dr. J. WOLFF.

REDE, GEHOUDEN 2 FEBRUARI 1916, BIJ DE OPENING VAN ZIJN LESSEN IN DE WISKUNDE, ALS PRIVAAT-DOCENT AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM.

DAMES EN HEEREN.

Mag ik uw aandacht vragen voor een korte bespreking van de nieuwere onderzoekingen op het gebied van de algebraische oppervlakken? Omdat er groote overeenkomst bestaat tusschen de methoden die men in den loop der tijden heeft toegepast bij het onderzoek van algebraische krommen en bij de oppervlakken, wil ik vooraf even herinneren aan de ontwikkelingsgeschiedenis van de theorie der algebraische krommen.

De benaming „algebraisch" voor krommen, die door een vergelijking van zekeren graad kunnen worden voorgesteld, is in de laatste helft van de 17de eeuw door LEIBNIZ ingevoerd. Daartegenover stelde hij de trancendente krommen die, zooals hij het uitdrukte, iedere algebraische vergelijking overschrijden. Reeds DESCARTES had het verschil tusschen deze beide soorten van kromme lijnen gevoeld. Een methode voor het berekenen van den stand der raaklijn, die hij had uitgedacht, gelukte hem bij de algebraische krommen, maar mislukte bij de trancendente; de methode bestond in het stellen van de voorwaarde dat 2 wortels van de vergelijking, die de snijpunten van de kromme met een rechte lijn leert vinden, gelijk zijn. Descartes noemde de krommen, waarbij die methode kon worden toegepast *meetkundige*, de andere *mechanische*, waarschijnlijk omdat de trancendente krommen, waaraan men in die dagen zijn krachten beproefde, meestal van cinematischen oorsprong waren, zooals de cycloide. Toegerust met de differentiaal- en integraalrekening kon Leibniz ook aan trancendente krommen de raaklijn trekken en zijn machtig hulpmiddel aanwenden om de vraagstukken, die toen aan de orde van den dag waren, voor beide soorten van kromme lijnen op te lossen.

Wat waren het voor eigenschappen, waarvoor men zich interesseerde? Het waren eigenschappen die blijven bestaan als men de figuren aan een beweging onderwerpt, of zooals wij het tegenwoordig uitdrukken: *metrische eigenschappen*. Maar langzamerhand kreeg men een ruimeren blik en ging zijn aandacht vestigen op tal van eigenschappen die niet alleen bewaard blijven bij iedere beweging van de figuren, maar ook als men ze aan een projectie onderwerpt. Zoo ontstond de projectieve meetkunde die de algebraische krommen leerde indeelen naar kenmerken, die tegen alle projectieve transformaties bestand zijn, zooals graad, klasse, aantal en aard van de singulariteiten. Twee figuren ging men indentiek noemen, zoodra ze door een projectieve transformatie in elkaar kunnen worden overgevoerd, zoodat men tegelijk met één exemplaar een veel grootere categorie onderzocht kon rekenen dan toen men alleen de metrische meetkunde als maatstaf aanlegde. Maar het kon weer niet uitblijven, dat men langzamerhand tot projectieve eigenschappen van de figuren kwam, die bestand bleken te zijn tegen een veel ruimere groep van transformaties dan de projectieve. Evenals de bewegingen zeer bijzondere projectieve transformaties zijn, zoo zijn deze laatsten weer bizondere gevallen van birationale transformaties, waarbij aan ieder punt van de eene figuur één en niet meer dan één punt van de andere beantwoordt, en omgekeerd.

Toen men nu alle krommen, die door zulk een transformatie uit een gegevene worden afgeleid, identiek met deze ging noemen, werd het standpunt weer ruimer, en het aantal krommen, door één exemplaar vertegenwoordigd, groeide weer aan.

Als een leek de vraag stelt, hoe een kromme of een oppervlak dat een geometer voldoend onderzocht acht, er eigenlijk uitziet, dan is hem niet altijd het doel van dergelijke onderzoekingen bekend. Hij zal zich niet verbazen, als hij hoort, dat een cirkel kan worden gelijk gesteld met een anderen cirkel, die een even grooten straal heeft, maar een ander middelpunt. Misschien voelt hij er ook wel wat voor, om alle cirkels, de groote en de kleine, over één kam te scheren, omdat hij overtuigd is dat al die figuren gelijkluidende eigenschappen hebben. Om het iets anders uit te drukken: hij kan er zich indenken, dat de geometer de meetkunde van de bewegingen en gelijkvormigheidstransformaties beoefent. Maar laat nu die leek eens in gesprek komen met iemand die zich op de projectieve meetkunde toelegt. Van hem verneemt hij, dat een cirkel gelijk staat met een hyperbool. Dan volgt protest. Alle cirkels gelijkstellen gaat er mee door, maar een cirkel met een hyperbool identificeeren strijdt met de meest elementaire beginselen van de vormleer. Nog erger: een beoefenaar van de meetkunde der birationale transformaties mengt zich in het gesprek, en komt met een mededeeling die den projectieven geometer misschien even heftig schokt als den leek: hij teekent een rechte lijn, een cirkel en een kubische kromme met een dubbelpunt en durft te zeggen dat hij die drie lijnen als gelijkwaardig beschouwt. Nog meer

verontwaardiging wekt hij op, als hij er bij vertelt dat er van iederen graad krommen zijn, die hij met een rechte lijn gelijkstelt en hiermee nog maar een klein deel van de heele categorie heeft opgesomd, aangezien er in iedere ruimte van een willekeurig aantal afmetingen nog leden van dezelfde familie te vinden zijn. — Als de projectieve geometer zich wat moeite getroost, dan kan hij den leek misschien eenige opheldering geven. Hij laat zien dat men door centrale projectie uit een cirkel een hyperbool kan krijgen, en dat deze figuren daarom alle eigenschappen, die bij zoo'n transformatie bewaard blijven, met elkaar gemeen hebben. Daar hem nu alleen zulke eigenschappen interesseeren, blijkt zijn standpunt wat ruimer dan dat van den leek, die niet verder ging dan tot gelijkvormigheidstransformaties. Den birationalen geometer zal het weinig moeite kosten, zijn projectieven vakgenoot zijn standpunt uiteen te zetten en hem van het nut daarvan te overtuigen. Hij rukt de meest ingewikkelde singulariteiten van krommen uit elkaar met behulp van een birationale transformatie, en laat zoodoende iedere categorie door een eenvoudig exemplaar vertegenwoordigen. Daarbij versmaadt hij de projectieve meetkunde niet, want verschillende projectieve eigenschappen van een exemplaar laten zich als invariante eigenschappen van de heele categorie vertolken. Hij onderzoekt een algebraische functie, een irrationaliteit, en als middel daartoe past hij birationale transformaties op de variabelen toe, waarbij hij dus in hetzelfde rationaliteitsgebied blijft. Een rechte lijn, een cirkel, een kubische kromme met een dubbelpunt, een bikwadratische met 3 dubbelpunten, zijn voor hem projectieve beelden van één en dezelfde irrationaliteit.

Natuurlijk is het aantal kenmerken voor iedere categorie in deze meetkunde kleiner dan in de projectieve. Met kenmerken, zooals graad, klasse aantal en aard van de singulariteiten, is het uit. Het *geslacht* speelt hier den hoofdrol. Langs twee wegen heeft deze theorie zich ontwikkeld. Men zou ze de analytische en de meetkundige kunnen noemen. Gewoonlijk spreekt men van een meetkundige methode, als men zich van de meetkundige taal bedient en onder anderen algebraische functies door krommen, wortels van een vergelijking door snijpunten van krommen voorstelt. Misschien is het even goed, deze methode de *algebraische* te noemen. CREMONA, ZEUTHEN, CLEBSCH en NÖTHER zijn dan de grondleggers van de algebraische theorie van de functies van één en twee veranderlijken. De andere methode, die ik daareven de analytische noemde roept bij de studie van de algebraische functies trancendenten te hulp, daarom zou men misschien beter kunnen spreken van de trancendente methode. Hierbij moeten namen als RIEMANN, WEIERSTRASS en ABEL genoemd worden.

Bij beide methoden treedt het geslacht op den voorgrond. Wegens de groote analogie met de algebraische oppervlakken wil ik even aan een paar definities voor het geslacht van een kromme herinneren, en wel twee meetkundige en een trancendente.

Een meetkundige definitie laat zich het gemakkelijkst geven als we ons voorstellen dat de kromme reeds birationaal zoodanig is getransformeerd, dat ze geen andere singulariteiten heeft dan gewone dubbelpunten. Heeft zulk een kromme den graad n, dan wordt haar geslacht aangewezen door het aantal onafhankelijke krommen van den graad n—3, die door de dubbelpunten gaan, dus zoogenaamde *adjunct-krommen* van den graad n—3. Nu is deze definitie niet zeer bevredigend, niet alleen omdat we er niet bij gezegd hebben, hoe ze gewijzigd moet worden voor een kromme met geheel willekeurige singulariteiten, maar vooral omdat ze van projectieven aard is: we hebben een bepaald projectief beeld noodig om op deze manier over het geslacht te kunnen spreken, en de invariantie van dat getal ligt alles behalve voor de hand. Maar de beschouwing van de lineaire puntreeksen, die op de kromme kunnen liggen, voert tot een zoodanige definitie van het geslacht, dat men vrij wordt van de keuze van een bepaald projectief beeld. Men kan zich zulk een lineaire puntreeks voorstellen als het geheel van alle puntgroepen, die op de kromme worden ingesneden door een lineair stelsel van andere algebraische krommen, hoewel men niet aan zulk een voorstelling gebonden is. De dimensie van dit stelsel heet de *dimensie* van de puntreeks, het aantal punten waaruit iedere groep bestaat, heet de *graad* van de reeks. De reeks heet *volledig*, als ze niet begrepen is in een lineaire reeks van denzelfden graad, maar met grootere dimensie. Het blijkt nu, dat het verschil tusschen graad en dimensie van een volledige reeks nooit een bepaald bedrag kan te boven gaan. De grootste waarde, die dat verschil kan aannemen, heet het geslacht van de kromme. Hierin ligt de invariantie van dat getal onmiddellijk opgesloten, omdat een volledige puntreeks bij birationale transformatie in een dergelijke overgaat en de karakters graad en dimensie daarbij onveranderd overgaan. We kunnen zeggen, dat we een *invariante definitie* van het geslacht gegeven hebben.

Een belangrijke puntreeks wordt ingesneden door de adjuncten van den graad n—3, het is de *kanonische reeks*. Bij een birationale transformatie worden de kanonische reeksen in elkaar overgevoerd.

Herinneren wij nu even aan een trancendente definitie van het geslacht. Men heeft dan te doen met het aantal onafhankelijke Abelsche integralen, die overal eindig zijn. Daar nu zulke integralen door een birationale transformatie in elkaar omgezet worden, ligt de de invariantie van het geslacht voor de hand. Het is dan alleen nog zaak, te bewijzen, dat we hier dezelfde invariant gedefinieerd hebben als daareven.

Een dergelijken gang van zaken hebben we bij de oppervlakken. Ook de algebraische oppervlakken hebben drie tijdperken beleefd: het metrische, het projectieve en het birationale tijdperk. Ook hier twee zeer verschillende methoden: de trancendente en de algebraische. De onderzoekingen van Clebsch en Nöther van af omstreeks 1870 vormen voor beide richtingen een belangrijken grondslag. De trancendente weg werd vooral door de Fransche wiskundigen, zooals Picard en Humbert, ingeslagen, de algebraische methoden worden door de Italianen, zooals Castelnuovo en Enriques, toegepast. Bij het onderzoek van de projectieve eigenschappen van een oppervlak staat men dikwijls voor de groote moeilijkheid, te doen te krijgen met singulariteiten van den meest grilligen aard. Kan een kromme ingewikkelde veelvoudige punten vertoonen, een oppervlak kan bedeeld zijn met veelvoudige kegelpunten en singuliere krommen, zóó samengesteld, dat het vaak ondoenlijk is, zich een voorstelling te maken van de wijze, waarop het oppervlak zich in de nabijheid daarvan gedraagt. Niets ligt meer voor de hand dan een poging, zulk een oppervlak als het ware te ontknoopen, er een oppervlak van te maken, dat zichzelf nergens meer doorsnijdt. Biedt onze ruimte voor een dergelijke ontwarring geen plaats genoeg, welnu, dan moet men zijn toevlucht maar nemen tot een ruimte van meer dan 3 afmetingen. Werkelijk gelukt het, alle mogelijke algebraische oppervlakken birationaal op die manier te vervormen, mits men zich tevreden stelt met een beeld in een ruimte van 5 dimensies. Voelt men zich in zoo'n groote ruimte niet thuis, en wenscht men zich alleen te bewegen in die van 4 afmetingen, dan moet men berusten in de aanwezigheid van eenige punten, waar het oppervlak door zichzelf heengaat. Schuwt men ook nog de vierde dimensie, en gunt men zijn oppervlak niet meer plaats dan de 3 dimensionale ruimte, dan moet men genoegen nemen met een dubbelkromme met tripelpunten. Wat komt nu op een van dergelijke beelden met de kegelpunten en veelvoudige krommen van het oorspronkelijke oppervlak overeen? Ze zijn overgegaan in krommen, die ordelijk naast andere over het nieuwe oppervlak loopen en als men ze zag, zou het wellicht veel moeite kosten, te gelooven, dat zij de afbeeldingen zijn van een kritiek gedeelte van een oppervlak, waar in groot gedrang een aantal bladen zijn samengekomen.

Dat er groote analogie bestaat tusschen krommen en oppervlakken blijkt al dadelijk hieruit, dat de definities van 't geslacht, waaraan ik daareven herinnerde, tot oppervlakken kunnen worden uitgebreid. Nemen we eerst de meetkundige definitie. Evenals een kromme vertegenwoordigd kan worden door een projectief beeld dat vrij is van hoogere singulariteiten dan gewone dubbelpunten, zoo kunnen we, zooals we daareven zagen, een oppervlak birationaal vervormen tot een beeld in de 3 dim. ruimte, dat geen andere singulariteiten heeft dan een dubbelkromme. Het door CLEBSCH en NÖTHER gedefinieerde *meetkundige geslacht* wordt nu bepaald door het aantal oppervlakken van den graad n—4, die door de dubbelkromme gaan, zoogenaamde *adjunctoppervlakken* van den graad n—4.[1] Ook deze definitie heeft iets onbevredigends, vooral omdat ze voor een bepaald projectief beeld gegeven is, en de invariantie ligt lang niet voor de hand. Maar ook hier komt men tot een directe definitie van deze invariant, als men zijn aandacht vestigt op de lineaire stelsels van algebraische krommen, die men over het oppervlak getrokken kan denken. Dit te hebben doorgevoerd is een van de groote verdiensten van Enriques. Men kan zich voorstellen, dat zulk een lineair stelsel ingesneden wordt door een lineair stelsel oppervlakken. De dimensie van dit oppervlakkensysteem heet dan de *dimensie* van het krommenstelsel. De *graad* is het aantal snijpunten van twee exemplaren buiten de eventueele basispunten, het geslacht van ieder exemplaar is bij definitie het *geslacht* van het stelsel. Het is echter mogelijk, zonder de buitenwereld te hulp te roepen, op het oppervlak zelf alles te definieeren wat men noodig heeft; voortdurend doen Enriques en Castelnuovo dat.

De karakters graad, dimensie en geslacht zijn uit den aard der zaak invarianten van het stelsel. Een stelsel heet *volledig*, als het niet deel uitmaakt van een ander lineair stelsel met denzelfden graad en grootere dimensie. Een stelsel heet *partieel begrepen in een ander*, als ieder exemplaar van het eerste een deel is van exemplaren van het tweede. In dat geval vormen de krommen, die een exemplaar van het eerste tot exemplaren van het tweede aanvullen, het *residustelsel*.

Voor we nu kunnen komen tot een directe defenitie van het meetkundige geslacht moeten we een belangrijk nieuw begrip invoeren. Denken we ons eens een lineair krommenstelsel in een plat vlak. Laat alle krommen den graad n hebben en allen twee keer door zekere vaste punten gaan. Alle krommen van den graad n—3, die één keer door diezelfde vaste punten gaan, snijden alle krommen van het beschouwde systeem in een puntgroep van de kanonische reeks. Zij vormen het zoogenaamde *adjunctstelsel*. Daar de graad van de adjunctkrommen kleiner is dan die van de krommen van het beschouwde stelsel, kan geen enkele der laatsten deel uitmaken van een adjunctkromme. Maar op een oppervlak kan dat heel anders gesteld zijn. We denken ons een krommenstelsel op een oppervlak. Het kan dan gebeuren, dat er een stelsel krommen bestaat die ieder exemplaar in een groep van de kanonische reeks ontmoeten: *het adjunctstelsel*. Maar het kan zeer goed gebeuren, dat iedere kromme van het gegeven systeem een deel is van een of meer adjunctkrommen, zoodat we het residustelsel kunnen construeeren. Dit al of niet partieel begrepen zijn in het adjunctstelsel is nu onafhankelijk van de keuze van het stelsel waarvan men uitgaat. En construeert men voor alle mogelijke stelsels de residuën ten opzichte van hun adjuncten, dan voert dat steeds tot één en het zelfde stelsel: *het kanonische* stelsel,[1] (op een projectief beeld ingesneden door alle adjunctoppervlakken van den graad n—4). *Het meetkundige geslacht* is het aantal onafhankelijke kanonische krommen. In deze definitie ligt de invariantie duidelijk opgesloten, want bij een birationale transformatie gaat een stelsel en zijn adjunct in twee dergelijke stelsels over.

Het kanonische stelsel vormt het analogon van de kanonische puntreeks op een kromme. De laatste kan men laten insnijden door alle adjuncten van den graad n—3, het kanonische stelsel wordt ingesneden door alle adjunctoppervlakken van den graad n—4.

Gemakkelijker is de trancendente definitie van het geslacht tot oppervlakken uit te breiden. Men heeft het aantal dubbele integralen te nemen, die overal eindig zijn. En de invariantie daarvan blijkt uit het in elkaar overgaan van dergelijke integralen, als men het oppervlak aan een birationale transformatie onderwerpt.[2]

Tot zoover is de analogie tusschen krommen en oppervlakken zoo volmaakt als men maar wenschen kan. In plaats van Abelsche integralen van de eerste soort neemt men de dubbele integralen van de eerste soort, die er de onmiddellijke uitbreiding van zijn. Bij gebruik van een projectief beeld heeft men in plaats van adjunctkrommen van den graad n—3 te nemen adjunctoppervlakken van den graad n—4. In plaats van puntreeksen bestudeert men stelsels van algebraische krommen op het oppervlak. Maar de definitie van het geslacht van een kromme als het grootste verschil tusschen graad en dimensie van een puntreeks, die erop kan liggen, laat zich niet zoodanig uitbreiden, dat men tot het meetkundige geslacht zou komen.[3] Een stoornis in de analogie, die zich nog

[1] M. Nöther. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. (Math. Ann. 2, 8).

[1] F. Enriques. Introduzione alle Geometria sopra le Superficie algebriche. Memorie di mat. e di fis. d. Soc. It. d. Scienze. 1896.

[2] E. Picard. Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

[3] Men komt dan tot de uitbreiding van het theorema van Riemann-Roch op oppervlakken. Verg. Castelnuovo en Enriques: Sopra alcune questioni fondamentali (Ann. di Mat Serie 3, dl. 6).

erger laat aanzien dan deze, maar die er toch mee in verband staat, wordt veroorzaakt door een onregelmatigheid, die zich bij de oppervlakken kan voordoen en die nergens haar weerga vindt bij de krommen. Gesteld we hebben een projectief beeld van een kromme, bijvoorbeeld een kromme van den graad n met enkel dubbelpunten, en we willen haar geslacht berekenen. We hebben dan na te gaan, hoeveel onderling onafhankelijke adjuncten van den graad n—3 de kromme heeft. Van zulk een adjunct hebben we alleen te vergen dat ze door de dubbelpunten gaat, en leggen haar dus zooveel voorwaarden op als het aantal dubbelpunten bedraagt, zonder bevreesd te zijn, dat er misschien een zoodanig verband tusschen de dubbelpunten zou kunnen bestaan, dat de voorwaarden die ze aan de adjunctkromme stellen, van elkaar afhankelijk zijn. Wij krijgen dan altijd de goede uitkomst. Het gevaar, te veel voorwaarden te stellen, is uitgesloten, omdat werkelijk de dubbelpunten zich tegenover de krommen van den graad n—3 gedragen als onderling onafhankelijk. Wij kunnen dat nog iets anders uitdrukken, als men de uitkomst van de geschetste rekenwijze bestempelt met den naam: „numerisch geslacht". Wij hebben dan dat bij een algebraische kromme het numerische geslacht altijd samenvalt met het werkelijke.

Nemen we nu eens een projectief beeld van een oppervlak, bijvoorbeeld een oppervlak van den graad n met een dubbelkromme. Gesteld we willen het meetkundige geslacht uitrekenen: we hebben dan na te gaan hoeveel onderling onafhankelijke oppervlakken van den graad n—4 er bestaan, die slechts aan de voorwaarde hebben te voldoen, dat ze door de dubbelkromme gaan. Wij passen dan een formule toe, die het aantal voorwaarden aangeeft, waaronder een oppervlak van voldoend hoogen graad de dubbelkromme bevat, zonder dat wij ons er aan storen, dat de graad n—4 misschien niet hoog genoeg is, om dat te mogen doen. Onze uitkomst noemen we het *numerische geslacht*, en hopen dat dit ook hier samenvalt met het meetkundige. Die hoop zou dadelijk verijdeld zijn als we eens te doen hadden met een regelvlak, want de uitkomst blijkt dan negatief te zien, en kan onmogelijk een aantal oppervlakken voorstellen. En er zijn, behalve de regelvlakken, tal van oppervlakken bekend, waarvan het numerische geslacht kleiner is dan het meetkundige. Cayley heeft deze onregelmatigheid ontdekt bij de regelvlakken,[1]) en Nöther heeft de merkwaardige stelling bewezen, dat het numerische geslacht, moge het gelijk zijn aan het meetkundige of niet, moge het positief of negatief zijn, zonder uitzondering een invariant is bij alle birationale transformaties.[1]) Zoo krijgen we al dadelijk een indeeling van de oppervlakken in twee soorten. Bij die van de eerste soort zijn de beide geslachten gelijk, bij die van de tweede soort ongelijk. De eersten heeten *regelmatig*, de anderen *onregelmatig*. Tot de eersten behooren de oppervlakken, die door een willekeurige vergelijking, b.v. in Cartesische coördinaten worden voorgesteld, tot de tweeden behalve de regelvlakken onder anderen de hyperelliptische oppervlakken van Picard, waarvan de punten één aan één correspondeeren met de puntenparen op een kromme van het geslacht 2.

Wat de definitie voor het numerische geslacht betreft, wij kunnen weer de opmerking maken dat ze voor een projectief beeld gegeven is, en daardoor voor de theorie op een gebrekkige manier is ingekleed. Op verschillende manieren hebben Castelnuovo en Enriques laten zien, hoe men zich ook hierbij geheel kan vrijmaken van de keuze van zulk een beeld. Twee voorbeelden wil ik aanvoeren, waardoor men misschien een denkbeeld krijgt van de manier waarop zij te werk gaan bij hun studie van de algebraische oppervlakken.

Wij denken ons een willekeurig lineair krommenstelsel op een oppervlak. Op ieder exemplaar snijden alle andere krommen van het stelsel een puntreeks in, die we de *karakteristieke reeks* noemen. Is het stelsel niet volledig, dan spreekt het vanzelf, dat de karakteristieke reeks dat ook niet is. Maar als het stelsel volledig is, rijst de vraag, of dan de karakteristieke reeks daardoor ook volledig is. Deze vraag is vooral daarom dringend, omdat, als we in een plat vlak een volledig stelsel hebben, de karakteristieke reeks zonder uitzondering volledig is. Het onderzoek heeft geleerd, dat dit op een oppervlak geheel anders gesteld kan zijn: ondanks de volledigheid van een stelsel kan toch de karakteristieke reeks een zeker defect hebben en dit verschijnsel hangt altijd samen met de onregelmatigheid van het oppervlak. Castelnuovo heeft in 1897 bewezen, dat het grootste defect dat een karakteristieke reeks kan aannemen juist gelijk is aan het verschil tusschen de beide geslachten.[2]) De regelmatige oppervlakken gedragen zich dus in zooverre als de platte vlakken, dat alle karakteristieke reeksen compleet zijn.

Het tweede voorbeeld ontleenen wij aan Enriques. Wij denken ons weer een krommenstelsel op het oppervlak. Neem aan dat het een adjunctstelsel heeft. Alle krommen hiervan snijden dan uit iedere kromme van het gegeven stelsel een groep van de kanonische reeks. Het is echter de vraag of de reeks die door het adjunctstelsel uit een exem-

[1]) A. Cayley. On the deficiency of certain surfaces. Mat. Ann. 3.

[1]) M. Nöther, l. c.

[2]) G. Castelnuovo. Alcune proprietà fondamentali (Ann. di mat. Serie 2, dl. 25).

plaar gesneden wordt, de complete kanonische reeks is, dan wel of ze een zeker defect heeft. Is er zulk een defect, dan staat ook dit in verband met de onregelmatigheid van het oppervlak. Enriques heeft omstreeks 1890 bewezen, dat het grootste defect dat kan voorkomen gelijk is aan het verschil van de beide geslachten.[1]) Toch was hiermee het laatste woord nog niet gezegd, want in 1906 bewees Picard langs trancendenten weg, dat voor alle stelsels dit defect even groot is, en wèl gelijk aan het verschil van de beide geslachten.[2]) In 1908 werd het meetkundige bewijs hiervan door Severi geleverd.[3]) Ook in dit opzicht gedragen zich dus de regelmatige oppervlakken als de platte vlakken. Men zou geneigd kunnen zijn, hieruit op te maken dat een regelmatig oppervlak birationaal in een plat vlak zou kunnen worden overgevoerd. Dat dit niet het geval behoeft te zijn kan men al hieraan zien, dat de beide geslachten van een plat vlak nul zijn, terwijl een oppervlak door een willekeurige vergelijking in Cartesische coördinaten voorgesteld, ook regelmatig is, zonder dat de beide geslachten nul zijn. Zelfs als een oppervlak zijn beide geslachten nul heeft, behoeft het nog niet in een plat vlak te kunnen worden getransformeerd. Geheel anders dus als bij krommen: voor het (1,1) correspondeeren met een rechte lijn, anders uitgedrukt: voor het rationaal zijn, is noodig en voldoende, dat het geslacht van de kromme nul is. Maar voor het (1,1) correspondeeren met een plat vlak, anders gezegd, voor het rationaal zijn van een oppervlak, wordt vereischt, dat de beide geslachten nul zijn, zonder dat die beide voorwaarden voldoende zijn. Castelnuovo heeft bewezen, dat als er nog één voorwaarde bij vervuld is, te weten het nul zijn van een derde invariant, genaamd het *bigenre*, de rationaliteit van het oppervlak vaststaat.

Wij kunnen de methoden van Castelnuovo en Enriques ongeveer op de volgende manier schetsen: zij denken stelsels van algebraische krommen over het oppervlak getrokken, meestal zijn ze lineair, zoodat met iedere kromme een punt kan correspondeeren in een ruimte van evenveel afmetingen als die van het stelsel. Zij voeren daarbij begrippen in, die hun beteekenis behouden als men het oppervlak birationaal gaat transformeeren. De eigenschappen van zulk een krommenstelsel kunnen in twee soorten verdeeld worden. Die van de eerste soort veranderen als men het stelsel door een ander vervangt, zooals graad, dimensie en geslacht. Die van de tweede soort zijn voor alle stelsels dezelfde en vormen dus invariante eigenschappen van het oppervlak. Al naar het

[1]) F. Enriques. Introduzione....

[2]) E. Picard, l. c. pag 438.

[3]) F. Severi, Sulla regolarita del sistema aggiunto. (Atti delle R. Acc. dei Lincei, dl. 17, 1908.)

gedrag van zulke stelsels trachten zij de algebraische oppervlakken in te deelen in verschillende soorten. Wel gebruiken zij af en toe projectieve beelden. Zoo kan het voor het onderzoek van een stelsel voordeelig zijn, tot beeld te kiezen een oppervlak dat ligt in een ruimte van dezelfde dimensie als die van het stelsel, en wel zoodanig dat het stelsel wordt afgebeeld op de hyperplanaire doorsneden van dat beeldoppervlak. Is het stelsel bij voorbeeld volledig, dan is het beeldoppervlak niet de projectie van een ander oppervlak dat van denzelfden graad is, maar in een ruimte van meer afmetingen ligt. — Maar de resultaten die zij met een bepaald beeld verkrijgen, interpreteeren zij als invariante eigenschappen, of zooals zij het gaarne uitdrukken: *zij vertalen ze in de invariante taal.* Woorden als „dubbelkromme", „veelvoudige punten" en „rechte lijnen" komen natuurlijk in dergelijke vertalingen niet voor, alle projectieve bizonderheden van een eventueel te kiezen beeld moeten worden geëlimineerd, zoodra men invariante kenmerken van het oppervlak zoekt. Zoo is het duidelijk dat bij de afbeelding, die we daareven schetsten, de graad n van het oppervlak, dat als beeld diende, vertaald moet worden als „graad n van het stelsel", de dimensie r der ruimte, waarin het beeld ligt, als „dimensie r van het stelsel", en de n snijpunten van het beeld met een platte ruimte van r—2 dimensies als „groep van de karakteristieke reeks". Deze graad en dimensie zijn projectieve bizonderheden van het beeld, ze zijn te interpreteeren als invariante kenmerken van het krommenstelsel, maar niet van het oppervlak. Als het beeldoppervlak niet de projectie is van een oppervlak van denzelfden graad, dat in een grootere ruimte ligt, dan is dat een projectieve bizonderheid van het beeld, maar zegt niets invariants omtrent het oppervlak zelf, want het beteekent alleen dat het beschouwde krommenstelsel volledig is. Het al of niet „normaal" zijn van de hyperplanaire doorsneden van het beeld verraadt het al of niet compleet zijn van de karakteristieke reeks.

Alle beoefenaars van deze birationale meetkunde hebben voor een moeilijkheid gestaan, die bij de krommen geen analogon heeft. Bij transformatie van een oppervlak kan het gebeuren, dat aan zekere punten, in plaats van nieuwe punten, geheele krommen beantwoorden, die dan de omgevingen van die punten afbeelden, zoodat ze meestal rationaal zijn. Dergelijke krommen zijn door Nöther *ausgezeichnete Curven* genoemd. Zij hebben heel wat last veroorzaakt. Zoo splitsen ze zich af van de doorsnee van het oppervlak met de adjuncten van den graad n—4. En er zijn verschillende karakters van het oppervlak, die alleen dàn invarianten zijn, als men een transformatie uitvoert, waarbij nòch exeptioneele krommen optreden, nòch verdwijnen. De vraag rees dan, of het niet mogelijk is, deze schadelijke individuën door een birationale transformatie uit den weg te ruimen. Castelnuovo en Enriques hebben den strijd tegen de exeptioneele krommen gevoerd met het gunstige gevolg, dat zij alle oppervlakken, die niet tot de bizondere categorie der regelvlakken behooren, van hun exeptioneele krommen kunnen bevrijden.[1]) Weliswaar moet men, om van deze krommen af te komen, dikwijls zijn toevlucht nemen tot ruimten van een ongehoord aantal afmetingen, maar dat doet niets aan het groote theoretische belang van dit resultaat af. — De regelvlakken, die men in deze theorie oppervlakken moet noemen, waarop een bundel rationale krommen ligt, zijn juist daardoor gekenmerkt, dat ze zich nooit van hun exeptioneele krommen laten zuiveren.

Hier wil ik de bespreking van de meetkundige of algebraische methoden afbreken en even in het kort nagaan, hoe de trancendente theorie van de algebraische oppervlakken, of, wat hetzelfde is: van de algebraische functies van twee complexe veranderlijken, zich ontwikkeld heeft. Evenals in de trancendente theorie van de functies van één variabele speelt ook hier de Analysis Situs een groote rol. Maar er treedt een belangrijke complicatie in. Eén variabele volgen we op haar vlak, voor een algebraische functie van die variabele construeeren wij een Riemannsch oppervlak, waarvan de samenhang het kenmerkende van de onderzochte irrationaliteit blijkt te zijn. Maar bij een algebraische functie van twee variabelen hebben wij te doen met een variëteit van 4 reëele afmetingen, waarvan de punten één aan één beantwoorden aan de complexe oplossingen van de gegeven vergelijking. In deze variëteit kunnen we ons gesloten lijnen en gesloten oppervlakken voorstellen en hebben dan twee soorten van samenhang te onderzoeken. De eerste samenhang wordt bepaald door het aantal gesloten lijnen, zoogenaamde *cykels*, die niet door een continue beweging in die variëteit in elkaar overvoerbaar zijn; de tweede samenhang wordt bepaald door het aantal gesloten oppervlakken, *tweedimensionale cykels* waarvoor datzelfde geldt. Op die twee soorten van cykels heeft Picard de lijnintegralen en dubbele integralen ingevoerd, die men allen in zekeren zin een uitbreiding van de Abelsche integralen bij een functie van één variabele noemen kan. Hun aantal perioden bepaalt den samenhang van de vierdimensionale variëteit, want als men een gesloten lijn verplaatst en vervormt, daarbij met zorg de plaatsen ontwijkend, waar een integraal over die lijn uitgevoerd singulariteiten zou vertoonen, dan verandert die integraal niet van waarde; iets dergelijks geldt voor de dubbele integralen, uitgestrekt over een tweedimensionale cykel. De lijnintegralen van Picard, nu, zijn van drie soorten: die van de eerste soort zijn overal eindig, die van de tweede soort laten slechts poolkrommen toe, dat wil zeggen, dat de krommen waarop zulk een integraal oneindig wordt, van dien aard zijn, dat de waarde op iederen kleinen kring die om de kromme heenloopt, nul is. De lijnintegralen van de derde soort vertoonen perioden om zekere algebraische krommen heen; deze krommen noemt Picard daarom de logarithmische krommen van die lijnintegraal.

[1]) Castelnuovo en Enriques. Sopra alcune questioni fondamentali l. c.

De door Picard ondernomen classificatie der algebraische oppervlakken naar de integralen, die men daaraan kan toevoegen, is uit den aard der zaak invariant tegenover alle birationale transformaties. Zijn invarianten zijn in de eerste plaats de aantallen onafhankelijke integralen van de eerste en tweede soort, terwijl hij bij die van de derde soort een relatieve invariant invoert. Een meetkundig aequivalent voor deze wijze van onderzoek zal wel moeilijk, zoo niet onmogelijk, te vinden zijn. Een synthetisch geometer kan dikwijls de ontwikkelingen van een onderzoeker, die de analytische meetkunde als hulpmiddel gebruikt, stap voor stap navolgen: beide methoden kan men algebraisch noemen, afgezien van de verschillende manieren, waarop men tot het getalbegrip gekomen is, of voorgeeft daartoe gekomen te zijn. Maar de trancendente methode ligt zeer ver van de meetkundige af. Uit de opmerkingen zoowel van de meetkundige als van de trancendente onderzoekers blijkt duidelijk hoezeer zij zich van de groote divergentie der beide wegen bewust zijn. Geeft men zich daarvan niet voldoende rekenschap, dan vindt men een opmerking van Picard bijna naief, waar hij een zekere band meent te bespeuren tusschen zijn methode en de geometrische, op het oogenblik dat hij, bezig zijnde met zijn dubbele integralen der tweede soort, langs trancendenten weg dus, een formule afleidt, die voorkomt in een belangrijke verhandeling van Nöther in Band 8 der Mathematische Annalen.

Ook de trancendente onderzoekers hebben moeilijkheden ontmoet, analoog met die waarmee de meetkundigen te kampen hadden, onderanderen de moeilijkheid die veroorzaakt wordt door wat we de onregelmatigheid van een oppervlak hebben genoemd. Zoo hebben de lijnintegralen reeds een geschiedenis achter den rug, die hoogst merkwaardig is en waaruit het „eendracht maakt macht" ook op dit gebied te leeren valt.

We merkten daareven op dat onregelmatigheid als een bizonderheid van een alg. opp. moet worden aangemerkt. Picard zag in dat de aanwezigheid van lijnintegralen van de 1e soort een bizonderheid is. Kan men dit nog geen verdacht verschijnsel noemen, er gebeurden andere dingen, waardoor men die lijnintegralen ernstig ging verdenken in verband te staan met de onregelmatigheid. Want Picard ging zijn hyperelliptische oppervlakken onderzoeken. Hun meetkundig geslacht is twee grooter dan het numerieke, en zie, de oppervlakken vertoonen twee lijnintegralen van de eerste soort. Een lange reeks onderzoekingen volgde toen, en dank zij de voortdurende samenwerking tusschen de Franschen en Italianen, heeft men de bewijzen in handen gekregen van hetgeen men aanvankelijk slechts vaag vermoedde. Een oppervlak heeft zooveel lijnintegralen van de eerste soort als het verschil tusschen het meetkundige en het numerieke geslacht bedraagt, en dubbel zooveel lijnintegralen van de tweede soort. Dat dit onderzoek zoo lang geduurd heeft bewijst al weer het groote verschil tusschen de beide methoden van onderzoek. Maar hoe ver ze ook van elkaar afliggen, ze hebben hier en daar ontmoetingspunten, dikwijls tot niet geringe verbazing van de onderzoekers: het gaat hun wel eens als wandelaars die in een bosch verschillende richtingen zijn uitgegaan en na lang ronddolen elkaar toch tegenkomen.

Ik wil niet te veel van uw geduld vergen en alleen opmerken, dat Picard de dubbele integralen aan een ernstig onderzoek heeft onderworpen. Die van de eerste soort hebben we al besproken, ze zijn overal eindig en hun aantal bepaalt het meetkundige geslacht. Maar ook hier geheel anders dan bij de functies van 1 var.: hier geen eenvoudig verband tusschen de aantallen dubbele integralen van de eerste en de tweede soort. Wel geeft Picard een uitdrukking voor het laatste aantal, maar er schijnt geen eenvoudige betrekking te bestaan tusschen deze invariant en de langs meetkundigen weg ontdekte reeks van invarianten.

Hiermee eindig ik dit beknopte overzicht. Ik hoop, dat degenen onder U, die nog geen gelegenheid hebben gehad om van deze onderzoekingen kennis te nemen, den indruk hebben gekregen, dat de algebraische oppervlakken waard zijn, te worden bestudeerd door wiskundigen van verschillende richting en aanleg. De analyst heeft in deze werkplaats even goed als de geometer gelegenheid tot ontplooiing van zijn talenten, en we hebben juist aan een voorbeeld kunnen zien, tot welke resultaten samenwerking leiden kan. Ik dank U allen voor de getoonde belangstelling, ik wensch verder aan de Edel Achtbare Heeren Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, aan de Edelgrootachtbare Heeren Curatoren van deze Universiteit, aan den Hooggeleerden Rector Magnificus, en aan U, Hooggeleerde Professoren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde mijn dank te brengen voor het in mij gestelde vertrouwen.

IK HEB GEZEGD.

DE NIEUWERE ONDERZOEKINGEN
OP HET GEBIED DER
ALGEBRAISCHE OPPERVLAKKEN.

DOOR

Dr. J. WOLFF.

H. J. KOERSEN — N.Z. VOORBURGWAL 336, AMSTERDAM.