Э.И. Ватутин[1], А.Д. Белышев[2], С.Е. Кочемазов[3], О.С. Заикин[3], Н.Н. Никитина[4], М.О. Манзюк[2]
E-mail: evatutin@rambler.ru
[1] Юго-Западный государственный университет, Курск
[2] Интернет-портал BOINC.ru, Москва
[3] Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
[4] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ СВЕДЕНИИ ЗАДАЧ НА БАЗЕ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ К ЗАДАЧЕ О ТОЧНОМ ПОКРЫТИИ

В работе приводится описание принципов построения бинарных матриц, с использованием которых возможно полиномиальное сведение задач на базе латинских квадратов к задаче о поиске точного покрытия.

С латинскими квадратами связан ряд открытых математических проблем, имеющих ярко выраженный комбинаторный характер [1]. К ним относится широко известная проблема, связанная с попыткой построения тройки попарно ортогональных (диагональных) латинских квадратов (ЛК/ДЛК) порядка $N=10$ (англ. MOLS/MODLS), существование которой не подтверждено, однако и не доказано, что ее построение невозможно. Для латинских квадратов общего вида наиболее эффективным подходом к отысканию ортогональных квадратов (ОЛК/ОДЛК) является подход Эйлера-Паркера [2], основанный на отыскании множества трансверсалей с последующим построением ортогонального квадрата в виде покрытия из N непересекающихся трансверсалей (в некоторых частных случаях, таких как, например, самоортогональные ДЛК (англ. SODLS) [5] или строчно-перестановочные ОДЛК, возможно использование более быстрых программных реализаций).

Для ряда комбинаторных задач возможно их полиномиальное сведение к задаче о поиске точного покрытия (англ. exact cover) с последующим ее решением с использованием алгоритма танцующих связей (англ. DLX) [3]. Впервые данный алгоритм был предложен Д. Кнутом в 2000 году для решения головоломки Пентамимо, которая также допускает запись в виде задачи о точном покрытии, в которой необходимо отыскать такое множество строк булевой матрицы, которые покроют единицами без их пересечения все столбцы.

Сведение к задаче о точном покрытии допускают следующие задачи, связанные с латинскими квадратами:

- генерация ЛК/ДЛК общего вида, нормализованных ЛК/ДЛК и ЛК/ДЛК с заданными свойствами (например, с симметриями);
- формирование множества трансверсалей и диагональных трансверсалей для заданного квадрата;

- поиск ОДЛК к заданному квадрату напрямую (без использования трансверсалей);
- формирование пар ОДЛК и редуцированных пар ОДЛК напрямую;
- формирование ОДЛК из множества трансверсалей.

Пример бинарной матрицы, используемой для поиска покрытий, для решения задачи построения множества трансверсалей для заданного ЛК порядка 3 приведен на рисунке.

	Группа 1			*Группа 2*			*Группа 3*			*Группы 4 и 5*	
	r_0	r_1	r_2	c_0	c_1	c_2	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	d_1	d_2
$a_{00} = 0$	1			1			1			1	
$a_{01} = 1$	1				1			1			
$a_{02} = 2$	1					1			1		1
$a_{10} = 1$		1		1				1			
$a_{11} = 2$		1			1				1	1	1
$a_{12} = 0$		1				1	1				
$a_{20} = 2$			1	1					1		1
$a_{21} = 0$			1		1		1				
$a_{22} = 1$			1			1		1		1	

Рис. Бинарная матрица размера $N^2 \times (3N+2)$ для формирования множества диагональных трансверсалей ЛК $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В задаче проверки случайных ДЛК на наличие ОДЛК использование сведения задачи к поиску точного покрытия через трансверсали в два этапа (поиск диагональных трансверсалей, поиск покрытия квадрата диагональными трансверсалями) с использованием разработанной реализации DLX позволило поднять темп обработки с 276 ДЛК/с до 900 ДЛК/с для однопоточной реализации на Delphi на процессоре Intel Core i7 4770 (Haswell). Данная программная реализация используется в рамках расчетного модуля в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, в котором по состоянию на февраль 2019 г. найдено 3 млн. канонических форм ОДЛК порядка 10. Ни одна из комбинаторных структур, образуемых найденными ОДЛК, к сожалению, не включается искомую тройку MODLS в своем составе.

---

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.
2. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4A. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.
3. Knuth D.E. Dancing links // arXiv:cs/0011047v1 [cs.DS], 2000. 26 p.

4. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Алгоритмическая оптимизация программной реализации процедуры получения множества трансверсалей для латинских квадратов // Визуальная аналитика 2017. Кемерово: изд-во Кузбассвузиздат, 2017. С. 44–49.
5. Bennett F.E., Beiliang Du, Hantao Zhang. Existence of self-orthogonal diagonal Latin squares with a missing subsquare // Discrete Mathematics. Vol. 261. 2003. pp. 69–86.