ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2013. Том 20, № 1. С. 58–76

УДК 519.1+519.173+519.176

МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ КЛАССА ГРАФОВ С ФИКСИРОВАННЫМИ ДИАМЕТРОМ И ЧИСЛОМ ВЕРШИН *)

Т. И. Федоряева

Аннотация. Изучаются мажоранты (миноранты) класса n-вершинных графов диаметра d, т. е. экстремальные графы, на которых достигаются точные верхние (нижние) оценки числа различных шаров радиуса i для любого $i \geqslant 0$. Явно описываются миноранты при всех значениях параметров n и d. Устанавливается, когда в классе n-вершинных графов диаметра d существуют мажоранты, и описываются такие экстремальные графы.

Ключевые слова: граф, метрический шар, радиус шара, число шаров, оценка числа шаров, экстремальный граф.

Введение

Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве обыкновенного связного графа G с обычным расстоянием между вершинами (т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины). В [4, 5] сформулирована задача нахождения точных верхних и точных нижних оценок числа различных шаров радиуса i в графах из заданного класса Ω, т. е.

$$\overline{\tau}_i(\Omega) = \max_{G \in \Omega} \tau_i(G) \quad \text{и} \quad \underline{\tau}_i(\Omega) = \min_{G \in \Omega} \tau_i(G).$$

В дальнейшем эта задача решена [5, 6] для графов наперёд фиксированного «объема»: класса Γ_n (T_n) всех n-вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) и класса $\Gamma_{n,d}$ ($T_{n,d}$) всех n-вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) диаметра d. Таким образом, для любого $i \geqslant 0$ установлены точные значения $\underline{\tau}_i(\Omega)$ и $\overline{\tau}_i(\Omega)$, где Ω — один из классов T_n, Γ_n, $\mathrm{T}_{n,d}$ и $\Gamma_{n,d}$. Заметим, что для классов графов Γ_n, T_n, $\mathrm{T}_{n,d}$ в [5] доказана достижимость точных верхних (точных нижних) оценок числа

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00997).

различных шаров заданного радиуса в одном и том же графе из соответствующего класса независимо от рассматриваемого радиуса шаров и описаны такие экстремальные графы.

Определение 1. Граф $G \in \Omega$ назовём *мажорантой класса* Ω, если $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Omega)$ при всех $i \geqslant 0$.

Определение 2. Граф $G \in \Omega$ назовём *минорантой класса* Ω, если $\tau_i(G) = \underline{\tau}_i(\Omega)$ при всех $i \geqslant 0$.

В случае, когда в графе достигается только часть точных оценок, приходим к понятиям *частичной мажоранты и миноранты.*

Определение 3. Граф $G \in \Omega$ назовём (k, m)-*мажорантой класса* Ω, если $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Omega)$ при $k \leqslant i \leqslant m$.

Определение 4. Граф $G \in \Omega$ назовём (k, m)-*минорантой класса* Ω, если $\tau_i(G) = \underline{\tau}_i(\Omega)$ при $k \leqslant i \leqslant m$.

Числа $\tau_i(G)$, $i \geqslant 0$, образуют вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_i(G), \tau_{i+1}(G), \ldots)$, называемый *вектором разнообразия шаров* графа G $[2, 3]$. В случае фиксированного диаметра графов можно ограничиться длиной $d+1$ для этих векторов, поскольку $\tau_i(G) = 1$ при $i \geqslant d(G)$ (впервые векторы такого вида рассмотрены в [1]). В этих терминах наличие мажоранты и миноранты означает существование для рассматриваемого класса графов соответственно наибольшего и наименьшего вектора разнообразия шаров относительно естественного порядка.

В [5] доказано, что n-вершинная цепь P_n есть мажоранта классов Γ_n и T_n, полный граф K_n — миноранта класса Γ_n, а минорантой класса T_n являются звезда $K_{1,n-1}$ при $n \geqslant 2$ и граф K_1 при $n = 1$. Такие экстремальные графы в классах Γ_n и T_n оказываются единственными с точностью до изоморфизма. В классе деревьев $\mathrm{T}_{n,\,d}$ также существуют мажоранта и миноранта. Для произвольных n и d явно построены деревья $\overline{D}_{n,\,d}$, $\underline{D}_{n,\,d} \in \mathrm{T}_{n,\,d}$, являющиеся мажорантой и минорантой класса n-вершинных деревьев диаметра d соответственно, а также с точностью до изоморфизма подсчитаны и найдены все такие экстремальные деревья [5].

В настоящей работе устанавливается, когда в классе n-вершинных графов диаметра d существуют мажоранты и миноранты, и описываются такие экстремальные графы. В разд. 2 показывается, что миноранты класса $\Gamma_{n,\,d}$ имеются при всех значениях параметров n и d, с точностью до изоморфизма они описываются в теореме 2. В разд. 3–5 доказывается, что в классе графов $\Gamma_{n,\,d}$ в зависимости от соотношений между n и d либо существует мажоранта, либо такого экстремального графа не существует, но есть частичные $(0, n-d-1)$- и $(n-d, d)$-мажоранты, причём они являются максимально возможными частичными мажорантами. В каждом из этих случаев описываются соответствующие экстремальные графы. При изучении мажорант класса $\Gamma_{n,d}$ выделяются следующие три случая для параметров n, d: $n \geqslant 2d$, $d+1 \leqslant n \leqslant d+1+\lfloor d/2 \rfloor$ и $d+1+\lfloor d/2 \rfloor < n < 2d$.

В разд. 3 исследуются мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$ в случае $n \geqslant 2d$. При $n \geqslant d+1+t$ и $0 < t < d$ построены серии $(0,t)$-мажорант $H^{i,j}_{n,d,t}$, $\widetilde{H}^{i,m}_{n,d,t}$ класса $\Gamma_{n,d}$ (утверждения 3 и 4). В частности, при $t = d-1$ эти графы являются мажорантами класса $\Gamma_{n,d}$. В рассматриваемом случае показано, что все мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$ — это в точности графы из $\Gamma_{n,d}$ с полным разнообразием шаров (теорема 4). Далее, исследуется вопрос единственности таких мажорант. Только при $n = 2d \geqslant 6$ или $d \leqslant 1$ существует единственная мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$ — $2d$-вершинный цикл при $d \geqslant 3$ и полный граф K_n при $d \leqslant 1$ (теорема 5).

В разд. 4 при $d+1 \leqslant n \leqslant d+1+\lfloor d/2 \rfloor$ исследуются мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$. В этом случае также существует мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$. В теореме 6 с точностью до изоморфизма явно описываются все такие мажоранты.

В разд. 5 при $d+1+\lfloor d/2 \rfloor < n < 2d$ исследуются мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$. В теореме 10 доказывается, что мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$ не существует. Однако существуют $(0, n-d-1)$- и $(n-d, d)$-мажоранты, причём в классе $\Gamma_{n,d}$ не существует $(0, n-d)$- и $(n-d-1, d)$-мажорант. Таким образом, все точные верхние оценки $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$, $i \geqslant 0$, не достигаются в одном графе, но каждая из следующих двух последовательностей оценок $\{\overline{\tau}_0(\Gamma_{n,d}), \overline{\tau}_1(\Gamma_{n,d}), \ldots, \overline{\tau}_{n-d-1}(\Gamma_{n,d})\}$ и $\{\overline{\tau}_{n-d}(\Gamma_{n,d}), \overline{\tau}_{n-d+1}(\Gamma_{n,d}), \ldots, \overline{\tau}_d(\Gamma_{n,d})\}$ реализуется в одном и том же соответствующем графе. Далее, для класса $\Gamma_{n,d}$ в теореме 9 явно описываются $(0, n-d-1)$-мажоранты с точностью до изоморфизма на основе результатов [7], а в теореме 8 характеризуются $(n-d, d)$-мажоранты в терминах существования подграфа с некоторыми заданными метрическими условиями. Теорема 8 также показывает следующее нетривиальное свойство векторов разнообразия шаров в этом случае: достижимость в произвольном графе точной верхней оценки $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ при одном достаточно большом радиусе $i \geqslant n-d$ означает реализуемость в этом же графе всех оценок $\overline{\tau}_{n-d}(\Gamma_{n,d})$, $\overline{\tau}_{n-d+1}(\Gamma_{n,d}), \ldots, \overline{\tau}_d(\Gamma_{n,d})$. Аналог этой теоремы также справедлив и для случая $d+1 \leqslant n \leqslant d+1+\lfloor d/2 \rfloor$ (теорема 7).

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [8].

Для графа G обозначим через $V(G)$ множество вершин, $\rho_G(x,y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y, $B_i^G(x)$ — шар радиуса i с центром в вершине $x \in V(G)$ относительно метрики ρ_G. Множество всех вершин графа G, лежащих на всех кратчайших цепях, соединяющих вершины x и y, называется *интервалом* $[x,y]_G$. Естественным образом определяются полуоткрытый интервал $[x,y)_G$ и открытый интервал $(x,y)_G$. Для простой цепи P графа G, содержащей вершины x и y, через $P[x,y)$ и $P(x,y)$ будем обозначать полуоткрытый интервал $[x,y)_P$ и открытый интервал $(x,y)_P$ соответственно. В приведённых выше обозначениях будем опускать индекс G, если понятно, о каком графе G идёт речь, и для краткости вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$.

Граф G содержит *кратчайшую цепь* $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, если существует цепь P графа G с концами v_1, v_n такая, что $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(P)$, $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \rho_G(v_i, v_{i+1}) = \rho_G(v_1, v_n)$ (причём неравенство $v_i \neq v_{i+1}$ не обязательно). В таком случае будем писать $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Всюду далее считаем, что рассматриваемый класс графов $\Gamma_{n,\,d}$ непуст, т. е. $n \geqslant d+1 \geqslant 2$ или $n = d+1 = 1$. В статье для любого рассматриваемого графа G через P будем обозначать его произвольно зафиксированную диаметральную цепь, через a и b — концы цепи P, через a_i и b_i — вершины цепи P такие, что $\rho(a, a_i) = \rho(b, b_i) = i$, $0 \leqslant i \leqslant d(P)$.

1. Предварительные сведения

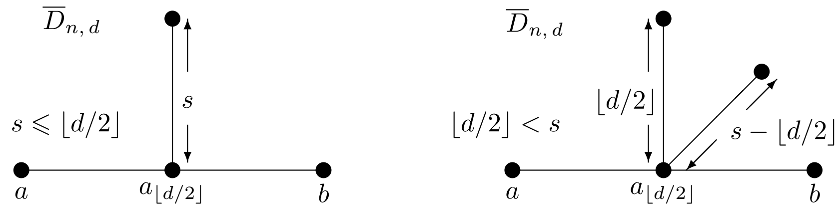
В [5, 6] для любого d определено дерево $\overline{D}_{n,\,d} \in T_{n,\,d}$, а при нечётном d — граф $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,\,d} \in \Gamma_{n,\,d}$. Нам потребуются графы $\overline{D}_{n,\,d}$, $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,\,d} \in \Gamma_{n,\,d}$ при $n = d + 1 + s$ и $s < 2\lfloor d/2 \rfloor$ (в частности, при $n < 2d$), приведённые на рис. 1 и 2, где

$$\rho(a_{\lfloor d/2 \rfloor}, a) = \rho(b_{\lfloor d/2 \rfloor}, b) = \lfloor d/2 \rfloor,$$

$$\rho(a_{\lfloor d/2 \rfloor}, c_i) = \rho(b_{\lfloor d/2 \rfloor}, c_i) = \rho(c_0, c_1) = 1.$$

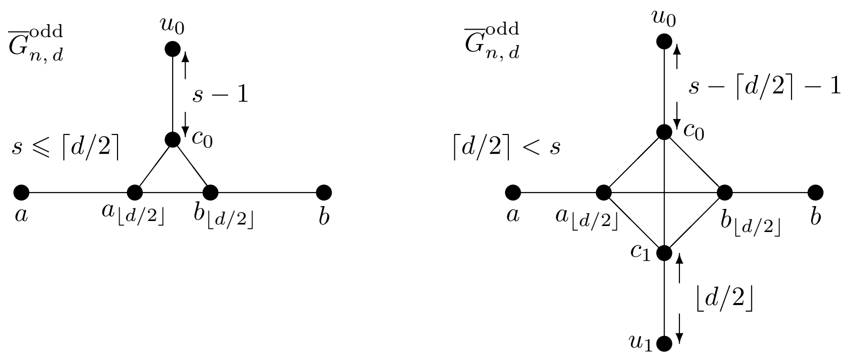
Отметим, что при $s = 0$ каждый из графов $\overline{D}_{n,\,d}$ и $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ представляет собой n-вершинную цепь.

Используя формулы для вычисления компонент вектора разнообразия шаров графов $\overline{D}_{n,\,d}$ и $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ (см. [5, следствие 2; 6, утверждение 3]), нетрудно доказать следующие утверждения.



(a) (b)

Рис. 1



(a) (b)

Рис. 2

Утверждение 1. *Пусть $n = d + 1 + s$ и $s < 2\lfloor d/2 \rfloor$. Тогда*

$$\tau_i(\overline{\mathrm{D}}_{n,d}) = \begin{cases} n & \text{при } 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ n + d + \lfloor d/2 \rfloor - 3i & \text{при } s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + s \text{ и } i < d, \\ 2(d-i)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor + s < i < d, \\ n + d + 2\lfloor d/2 \rfloor - 4i & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant s, \\ 2(d + \lfloor d/2 \rfloor) + 1 - 3i & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < s < i < d, \\ 1 & \text{при } i \geqslant d. \end{cases}$$

Утверждение 2. *Пусть $n = d + 1 + s$, $s < 2\lfloor d/2 \rfloor$, d нечётно. Тогда*

$$\tau_i\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big) = \begin{cases} 3(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < s \leqslant i < d, \\ \tau_i(\overline{D}_{n,d}) & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [3] введён вектор $\Delta_d = \big(\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d\big)$, где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1 & \text{при } 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1 & \text{при } i \geqslant d, \end{cases} \tag{1}$$

и вычислен вектор разнообразия шаров простой цепи.

Лемма 1 [3]. *Пусть P — простая цепь длины d. Тогда*

(i) *вектор разнообразия шаров Δ_d цепи P равен $\left(\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d\right)$;*

(ii) *если $x, y \in P$, $x \neq y$ и $B_l^P(x) = B_l^P(y)$, то $B_l^P(x) = P$.*

Определение 5 [6]. Для произвольной вершины x графа G набор $(P_a, a', P_b, b', P, x')$ назовём *x-конфигурацией*, если $a', b', x' \in G$ и $P = (a, a', b', b)$ — диаметральная цепь, а $P_a = (a, a', x', x)$, $P_b = (b, b', x', x)$ — кратчайшие цепи графа G такие, что $P_a \cap P = P[a, a']$, $P_b \cap P = P[b, b']$, $P_a \cap P_b = P_a[x', x]$ (рис. 3).

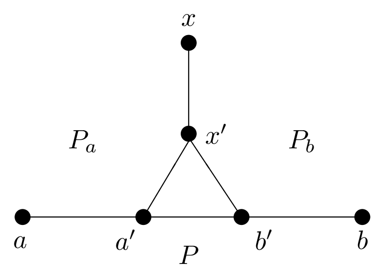


Рис. 3

Нетрудно показать, что для любой вершины x существует x-конфигурация, причём вершины a', b', x' либо попарно различны, либо совпадают [6, лемма 5].

Для произвольного графа в [6] определены свойство i-пересекаемости, множество вершин $M_i(P)$, подмножество $M_i^*(P) \subseteq M_i(P)$ и доказана

Лемма 2. *Пусть $G \in \Gamma_{n,\,d}$, $i > \lfloor d/2 \rfloor$ и $i > s = n - d - 1$. Тогда*

(i) $\tau_i(G) = \Delta_i^d + |M_i^*(P)|$;

(ii) *если в графе G не выполняется свойство i-пересекаемости, то*

$$|M_i^*(P)| < \min\{\lfloor d/2 \rfloor + s, d\} - i;$$

(iii) *если $M_i^*(P) \neq \varnothing$ и выполняется свойство i-пересекаемости в графе G, то*

$$|M_i^*(P)| = \min\{\rho(a, x), \rho(b, x)\} - i \leqslant \min\{\lfloor d/2 \rfloor + s, d\} - i,$$

где $x \in M_i(P)$ и $\rho(a, x) = \max\limits_{y \in M_i(P)} \rho(a, y)$.

Для доказательства леммы 2 см. леммы 4, 7 и 8 из [6].

Значения компонент вектора разнообразия шаров произвольной миноранты и мажоранты класса $\Gamma_{n,\,d}$ (если они существуют) дают результаты из [5, 6].

Теорема 1. *Пусть $k \leqslant m$ и графы $\underline{G}$, $\overline{G} \in \Gamma_{n,\,d}$. Тогда*

(i) *граф $\underline{G}$ является (k,m)-минорантой класса $\Gamma_{n,\,d}$ тогда и только тогда, когда для любого $i = k, k+1, \ldots, m$ выполняется равенство*

$$\tau_i(\underline{G}) = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ \Delta_i^d, & \text{если } 1 \leqslant i < d, \\ 1, & \text{если } i \geqslant d; \end{cases}$$

(ii) *граф $\overline{G}$ является (k,m)-мажорантой класса $\Gamma_{n,\,d}$ тогда и только тогда, когда для любого $i = k, k+1, \ldots, m$ выполняется равенство*

$$\tau_i(\overline{G}) = \begin{cases} n, & \text{если } 0 \leqslant i < d \text{ и } i \leqslant \max\{\lfloor d/2 \rfloor, s\}, \\ 3(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < s < i < d, \\ n + d + \lfloor d/2 \rfloor - 3i, & \text{если } s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + s \text{ и } i < d, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor + s < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geqslant d, \end{cases}$$

где $s = n - d - 1$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно использовать формулы для вычисления $\underline{\tau_i}(\Gamma_{n,\,d})$ (см. [5, следствие 6]) и $\overline{\tau_i}(\Gamma_{n,\,d})$ (см. [6, теорема 2].

2. Миноранты класса $\Gamma_{n,\,d}$

Для произвольного упорядоченного разбиения $(n_0, n_1, \ldots, n_d)$ числа n на $d+1$ слагаемых определим граф $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$ следующим образом. Рассмотрим попарно вершинно-непересекающиеся полные графы K_{n_0}, $K_{n_1}, \ldots, K_{n_d}$. Соединим рёбрами каждую вершину графа K_{n_i} со всеми вершинами графа $K_{n_{i+1}}$ при $i = 0, \ldots, d-1$. Полученный граф обозначим через $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$ (рис. 4). Очевидно, что $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d} \in \Gamma_{n,\,d}$.

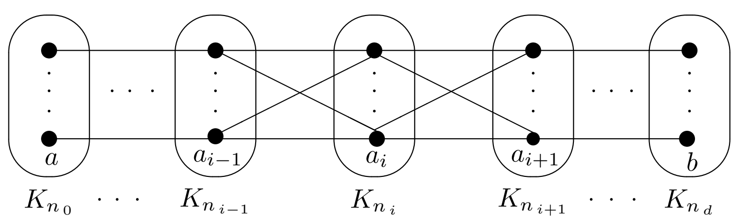


Рис. 4

В теореме 2 описываются миноранты класса $\Gamma_{n,\,d}$.

Теорема 2. *Граф G является минорантой класса $\Gamma_{n,\,d}$ тогда и только тогда, когда существует упорядоченное разбиение $(n_0, n_1, \ldots, n_d)$ числа n на $d+1$ слагаемых такое, что $G \cong P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$.*

Доказательство. Пусть G — миноранта класса $\Gamma_{n,\,d}$. Поскольку класс $\Gamma_{n,\,d}$ при $d \leqslant 1$ содержит единственный с точностью до изоморфизма граф K_n, не уменьшая общности, будем считать, что $d \geqslant 2$. По теореме 1 имеем $\tau(G) = \big(n, \Delta_1^d, \Delta_2^d, \ldots, \Delta_d^d\big)$. Так как диаметральная цепь P графа G является его изометричным подграфом, выполняется свойство

$$\forall i\ \forall x, y \in P\ \big(B_i^P(x) \neq B_i^P(y) \Rightarrow B_i^G(x) \neq B_i^G(y)\big).$$

Кроме того, $\tau(P) = \big(\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d\big)$ по лемме 1. Следовательно, в графе G центры всех различных шаров радиуса 1 можно выбрать из P.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in G \setminus P$. По доказанному существует вершина $v_P \in P$ такая, что

$$B_1^G(v) = B_1^G(v_P). \tag{2}$$

В силу изометричности подграфа P получаем

$$B_1^G(v) \cap P = B_1^P(v_P), \tag{3}$$

т. е. вершина v смежна с v_P, а также со всеми вершинами цепи P, соседними с v_P в P, и несмежна с остальными вершинами цепи P. Учитывая неравенство $d \geqslant 2$, нетрудно доказать однозначность выбора вершины $v_P \in P$ со свойствами (2) и (3). Далее полагаем $u_P = u$, если $u \in P$.

Выясним вид графа G. Пусть a, b — концы диаметральной цепи P. Рассмотрим порождённый подграф G_i с множеством вершин $V_i = \{v \mid v \in G, v_P = a_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Множества $V_0, \ldots, V_d$ образуют разбиение множества вершин графа G. Причём G_i — полный граф, так как $B_1^G(u) = B_1^G(u_P) = B_1^G(v_P) = B_1^G(v)$ для любых вершин $u, v \in V_i$. Теперь пусть $u \in V_i$, $v \in V_j$ и $i \neq j$. Если $|i-j| = 1$, то $u \in B_1^G(v_P) = B_1^G(v)$ в силу (2) и (3), т. е. u, v — смежные вершины. Если $|i-j| \neq 1$, аналогично получаем $u \notin B_1^G(v_P) = B_1^G(v)$. Таким образом, графы G и $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$ изоморфны, где $n_i = |V_i|$.

Докажем обратное утверждение. Вычислим вектор разнообразия шаров графа $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$. Очевидно, что $B_k^G(a_i^r) = \big\{a_j^s \mid a_j \in B_k^P(a_i),\ s = 1, \ldots, n_j\big\}$ для любого $k \geqslant 1$, где $a_i^1, \ldots, a_i^{n_i}$ — все вершины графа K_{n_i} (см. рис. 4). Следовательно, $\tau_k(P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}) = \tau_k(P)$ при $k \geqslant 1$. В силу леммы 1 получаем $\tau(P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}) = \big(n, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d\big)$. По теореме 1 граф $P_{n_0,\,n_1,\ldots,\,n_d}$ — миноранта класса $\Gamma_{n,\,d}$. Теорема 2 доказана.

3. Мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$ при $n \geqslant 2d$

Нам потребуются графы с *локальным t-разнообразием шаров*, т. е. графы, обладающие свойством $\tau_i(G) = |V(G)|$ для всех $i \leqslant t$ [1], где t — фиксированное неотрицательное целое число. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется *графом полного разнообразия шаров*. В случае $n \geqslant d + 1 + t$ модифицируем графы $H_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$, обладающие локальным t-разнообразием шаров и построенные в [5] для всех допустимых значений параметров n, d и t. Рассмотрим k и r такие, что

$$n = d + 1 + kt + r, \quad k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant r < t, \quad 0 < t < d. \tag{4}$$

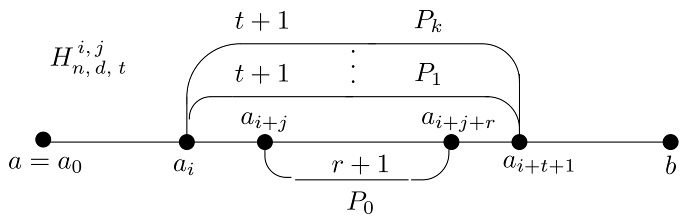


Рис. 5

Для любых $i = 0, 1, \ldots, d - t - 1$, $j = 0, 1, \ldots, t + 1 - r$ и $m = 0, 1, \ldots, t - r$ определим графы $H^{i,j}_{n,d,t}$ и $\widetilde{H}^{i,m}_{n,d,t}$ следующим образом. Добавим к простой цепи P с концами a, b длины d простые цепи $P_1, \ldots, P_k$ длины $t + 1$ такие, что a_i, a_{i+t+1} — концевые вершины каждой из этих цепей и

$$V(P_q) \cap V(P_l) = V(P_q) \cap V(P) = \{a_i,\, a_{i+t+1}\} \quad \text{при } q \neq l.$$

Если $r > 0$, то к полученному графу H добавим простую цепь P_0 длины $r + 1$ с концевыми вершинами a_{i+j}, a_{i+j+r} такую, что $V(P_0) \cap V(H) = \{a_{i+j},\, a_{i+j+r}\}$. В случае $r = 0$ к H ничего не добавляем. Полученный граф обозначим через $H^{i,j}_{n,d,t}$ (рис. 5). Для краткости при $j = 0$ и $i = j = 0$ граф $H^{i,j}_{n,d,t}$ будем обозначать через $H^{i}_{n,d,t}$ и $H_{n,d,t}$ соответственно (эти обозначения согласуются с [5, 7]).

При $k \geqslant 2$ определим граф $\widetilde{H}^{i,m}_{n,d,t}$ (рис. 6). Его построение аналогично, за исключением того, что P_1 имеет концевые вершины a_i, a_{i+t} и $V(P_1) \cap V(P_l) = \{a_i\}$ при $l \geqslant 2$, $V(P_1) \cap V(P) = \{a_i, a_{i+t}\}$.

Утверждение 3. *Пусть $n \geqslant d + 1 + t$, $0 < t < d$, $i = 0, 1, \ldots, d - t - 1$ и $j = 0, 1, \ldots, t + 1 - r$. Тогда граф $H^{i,j}_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$ обладает локальным t-разнообразием шаров. При этом $\tau\big(H^{i,j}_{n,d,t}\big) = \big(n, \ldots, n, \Delta^d_{t+1}, \Delta^d_{t+2}, \ldots, \Delta^d_d\big)$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $r = 0$;
(ii) $i + j + r \leqslant t + 1$;
(iii) $d - i - j \leqslant t + 1$;
(iv) $t \geqslant \lfloor (d-1)/2 \rfloor$.

Доказательство. Идеи этого доказательства близки к идеям доказательства локального t-разнообразия шаров графов $H_{n,d,t}$ в [5] и вычисления его вектора разнообразия для случая $n = d + 1 + t$ в [7].

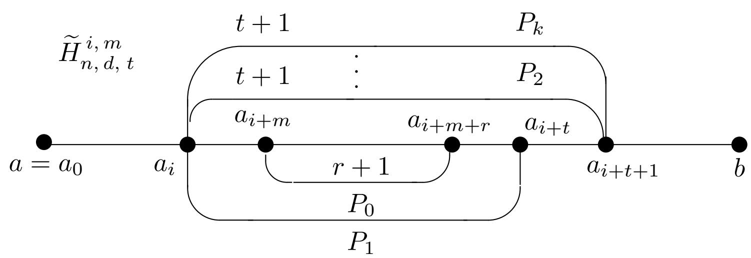


Рис. 6

Непосредственно из определения графа имеем $H^{i,j}_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$. Пусть x и y — различные вершины графа $H^{i,j}_{n,d,t}$. Покажем, что $B_t(x) \neq B_t(y)$. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Пусть $x \in P_0(a_{i+j}, a_{i+j+r})$ и $y \in P[a, a_i) \cup P[b, a_{i+t+1})$. Тогда $\rho(x, a_{i+t}) \leqslant t$ и $\rho(x, a_{i+1}) \leqslant t$. Следовательно, $a_{i+t} \in B_t(x) \setminus B_t(y)$ или $a_{i+1} \in B_t(x) \setminus B_t(y)$.

Случай 2. Пусть $x \in P_0(a_{i+j}, a_{i+j+r})$ и $y \in P(a_{i+j}, a_{i+j+r})$. Тогда $\rho(x, a_{i+j}) \neq \rho(y, a_{i+j})$ или $\rho(x, a_{i+j+r}) \neq \rho(y, a_{i+j+r})$. Пусть, например, $\rho(x, a_{i+j}) > \rho(y, a_{i+j})$ (альтернативные случаи аналогичны). Так как

$$P[a_i, a_{i+j}] \cup P_0[a_{i+j}, a_{i+j+r}] \cup P[a_{i+j+r}, a_{i+t+1}] \cup P_1[a_{i+t+1}, a_i]$$

и $P[a_i, a_{i+t+1}] \cup P_1[a_{i+t+1}, a_i]$ — простые циклы диаметра $t+1$, существует вершина $z \in P_1[a_i, a_{i+t+1}]$ такая, что $\rho(x, z) = \rho(x, a_{i+j}) + \rho(a_{i+j}, z) = t+1$. Следовательно, $z \in B_t(y) \setminus B_t(x)$.

Случай 3. Пусть не выполняются случаи 1 и 2. В [5] замечено следующее достаточное условие несовпадения шаров с центрами в различных вершинах:

$$\forall x, y \in G \ \big((x \neq y \ \& \ e_G(x, y) \geqslant i + 1) \Rightarrow B^G_i(x) \neq B^G_i(y)\big), \tag{5}$$

где $e_G(x, y)$ — наибольшая длина кратчайшей цепи графа G с концом x, содержащей y. Используя (5), легко показать, что $B_t(x) \neq B_t(y)$. Таким образом, граф $H^{i,j}_{n,d,t}$ обладает локальным t-разнообразием шаров.

Вычислим вектор $\tau\big(H^{i,j}_{n,d,t}\big)$. Возьмём вершину $x \in H^{i,j}_{n,d,t} \setminus P$ и выберем $y \in P[a_i, a_{i+t+1}]$ следующим образом. Если выполняется условие (i) или (ii), то $\rho(y, a_{i+t+1}) = \rho(x, a_{i+t+1})$. Если выполняется условие (iii), то $\rho(y, a_i) = \rho(x, a_i)$. Пусть теперь выполняется условие (iv). Очевидно, что $\rho(x, u) \leqslant \lfloor (d+1)/2 \rfloor \leqslant t+1$ для некоторой вершины $u \in \{a, b\}$. Рассмотрим вершину y такую, что $\rho(y, v) = \rho(x, v)$, где $v \in \{a, b\}$ и $v \neq u$. Нетрудно понять, что $B_{t+1}(x) = B_{t+1}(y)$ в каждом рассмотренном случае. Следовательно, центры всех различных шаров радиуса $l > t$ можно выбрать из P. По лемме 1 имеем $\tau(P) = \big(\Delta^d_0, \Delta^d_1, \ldots, \Delta^d_d\big)$, причём если $x, y \in P$, $x \neq y$ и $B^P_l(x) = B^P_l(y)$, то $B^P_l(x) = P$. Следовательно, $B_l^{H^{i,j}_{n,d,t}}(x) = B_l^{H^{i,j}_{n,d,t}}(y) = H^{i,j}_{n,d,t}$ при $l > t$. Таким образом, $\tau_l\big(H^{i,j}_{n,d,t}\big) = \tau_l(P) = \Delta^d_l$ при $l > t$. Утверждение 3 доказано.

Роль условий (i)–(iv) утверждения 3 объясняет

Замечание 1. Нетрудно доказать, что если условия (i)–(iv) утверждения 3 не выполняются, то $\tau_{t+1}\big(H^{i,j}_{n,d,t}\big) > \Delta^d_{t+1}$.

Утверждение 4. *Пусть $n \geqslant d+1+2t$, $0 < t < d$, $i = 0, 1, \ldots, d-t-1$ и $j = 0, 1, \ldots, t-r$. Тогда граф $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$ обладает локальным t-разнообразием шаров. При этом $\tau\big(\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}\big) = \big(n, \ldots, n, \Delta^d_{t+1}, \Delta^d_{t+2}, \ldots, \Delta^d_d\big)$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $i \leqslant 1$;

(ii) $d = i + t + 1$;

(iii) $t \geqslant \lfloor (d-1)/2 \rfloor$.

Доказательство. Пусть x, y — различные вершины графа $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}$. Случай $x \in P_1(a_i, a_{i+t})$ и $y \in P[a, a_i) \cup P[b, a_{i+t+1})$ аналогичен случаю 1 утверждения 3, а случай $x \in P_1(a_i, a_{i+t})$ и $y \notin P[a, a_i) \cup P[b, a_{i+t+1})$ — случаю 3. Пусть теперь x, $y \notin P_1(a_i, a_{i+t})$. Граф $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t} \setminus P_1(a_i, a_{i+t})$ изоморфен $H^{i,j}_{n-t,d,t}$ и является изометричным подграфом графа $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}$. В силу утверждения 3 получаем $B_t(x) \neq B_t(y)$. Вычисление вектора разнообразия шаров графа $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}$ аналогично вычислению вектора $\tau\big(H^{i,j}_{n,d,t}\big)$. Утверждение 4 доказано.

Замечание 2. Нетрудно доказать, что если все условия (i)–(iii) утверждения 4 не выполняются, то $\tau_{t+1}\big(\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}\big) > \Delta^d_{t+1}$.

Перейдём к изучению мажорант класса $\Gamma_{n,d}$ для рассматриваемого случая. Очевидно, что если диаметр графов из некоторого класса Ω не превосходит d, то всякая $(0,d)$-мажоранта (всякая $(0,d)$-миноранта) класса Ω является его мажорантой (минорантой), и наоборот. Также непосредственно из определений вытекает следующее свойство частичных мажорант произвольного класса графов с фиксированным числом вершин.

Лемма 3. *Пусть в классе графов $\Omega \subseteq \Gamma_n$ существует граф с локальным t-разнообразием шаров. Тогда граф G является $(0,t)$-мажорантой класса Ω тогда и только тогда, когда граф $G \in \Omega$ обладает локальным t-разнообразием шаров.*

Однако в общем случае $(0,t)$-мажоранта произвольного класса графов с фиксированным числом вершин может не обладать локальным t-разнообразием шаров. Например, $(0,n-2)$-мажоранта P_n класса Γ_n не является графом полного разнообразия шаров при $n > 3$ в силу леммы 1.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2d$. Тогда*

(i) *при $d \leqslant 1$ граф K_n является мажорантой класса $\Gamma_{n,d}$;*

(ii) *при $d \geqslant 2$ граф $H_{n,d,d-1}$ является мажорантой класса $\Gamma_{n,d}$.*

Доказательство. Так как K_n — единственный (с точностью до изоморфизма) граф класса $\Gamma_{n,d}$ при $d \leqslant 1$, получаем (i). При $n \geqslant 2d \geqslant 4$ граф $H_{n,d,d-1} \in \Gamma_{n,d}$ обладает полным разнообразием шаров по утверждению 3. Тем самым (ii) вытекает из леммы 3. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *При $n \geqslant 2d > 0$ граф $G \in \Gamma_{n,d}$ тогда и только тогда является мажорантой класса $\Gamma_{n,d}$, когда граф G обладает полным разнообразием шаров.*

Доказательство. Графы K_n при $d = 1$ и $H_{n,d,d-1}$ при $d \geqslant 2$ являются графами полного разнообразия шаров, поэтому утверждение теоремы 4 следует из леммы 3. Теорема 4 доказана.

Выясним при каких значениях параметров n, d для рассматриваемого случая существуют неизоморфные мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$. Пусть выполняется (4). Используя утверждения 3, 4 и лемму 3, получаем следующие свойства:

(a) если $r > 0$, то графы $H^{i,j}_{n,d,t}$, $j = 0, 1, \ldots, \lfloor (t+1-r)/2 \rfloor$, — попарно не изоморфные $(0,t)$-мажоранты;

(b) если $k > 1$, то графы $H^{i,j}_{n,d,t}$, $\widetilde{H}^{i,j}_{n,d,t}$, $j \leqslant t - r$, — попарно не изоморфные $(0,t)$-мажоранты;

(c) если $t < d - 2$, то графы $H^{i,j}_{n,d,t}$, $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$, — попарно не изоморфные $(0,t)$-мажоранты.

Таким образом, если существует единственная $(0,t)$-мажоранта, то $n = d + 1 + t$ и $d - 2 \leqslant t \leqslant d - 1$. Кроме того, графы $\overline{D}_{4,2}$, $H_{4,2,1}$ (рис. 7) обладают полным разнообразием шаров в силу утверждений 1 и 3. Следовательно, если в $\Gamma_{n,\,d}$ имеется единственная мажоранта, то $n = 2d \geqslant 6$ или $d \leqslant 1$. Обратно, при $n = 2d \geqslant 6$ по следствию 2 из [7] существует единственный граф диаметра d с полным разнообразием шаров, а именно, $2d$-вершинный цикл $H_{2d,\,d,\,d-1}$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 2d$. Тогда в классе $\Gamma_{n,\,d}$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) мажоранта тогда и только тогда, когда $n = 2d \geqslant 6$ или $d \leqslant 1$, причём такой мажорантой являются $2d$-вершинный цикл $H_{2d,\,d,\,d-1}$ при $d \geqslant 3$ и полный граф K_n при $d \leqslant 1$.*

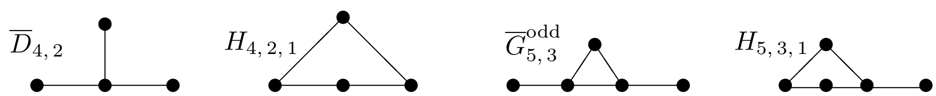


Рис. 7

4. Мажоранты класса $\Gamma_{n,\,d}$ при $d+1 \leqslant n \leqslant d+1+\lfloor d/2\rfloor$

В этом разделе показывается, что в рассматриваемом случае существуют мажоранты класса $\Gamma_{n,\,d}$, и они описываются с точностью до изоморфизма.

Лемма 4. *Пусть $n = d+1+s$, $0 \leqslant s \leqslant \lfloor d/2\rfloor < i < \lfloor d/2\rfloor + s$, $G \in \Gamma_{n,\,d}$ и $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$. Тогда граф G изоморфен при чётном d дереву $\overline{D}_{n,\,d}$, а при нечётном d — одному из графов $\overline{G}^{\text{odd}}_{n,\,d}$, $\overline{D}_{n,\,d}$.*

Доказательство. В силу леммы 2(i), теоремы 1 и (1) получаем

$$|M_i^*(P)| = \tau_i(G) - \Delta_i^d = n + d + \lfloor d/2\rfloor - 3i - \Delta_i^d = \lfloor d/2\rfloor + s - i > 0.$$

Так как $\lfloor d/2\rfloor + s \leqslant d$, ввиду пп. (ii) и (iii) леммы 2 имеем

$$|M_i^*(P)| = \min\{\rho(a,x), \rho(b,x)\} - i,$$

где $x \in M_i(P)$ и $\rho(a,x) = \max\limits_{y\in M_i(P)} \rho(a,y)$. Следовательно,

$$\rho(v,x) \geqslant \rho(u,x) = \lfloor d/2\rfloor + s \tag{6}$$

для некоторых различных вершин $u, v \in \{a,b\}$. Рассмотрим произвольную x-конфигурацию $(P_a, a', P_b, b', P, x')$ (см. рис. 3). Используя (6) и кратчайшие цепи P_a, P_b, получаем

$$\rho(w,w') = \rho(w,x) - \rho(w',x) \geqslant \lfloor d/2\rfloor + s - |V(G\setminus P)| \geqslant \lfloor d/2\rfloor$$

для любой вершины $w \in \{a, b\}$. Так как P — диаметральная цепь, имеем $\rho(a', b') \leqslant 1$, причём либо $u' \neq v'$, $\rho(u, u') = \rho(v, v') = \lfloor d/2 \rfloor$ и d нечётно, либо $u' = v'$, $\rho(u, u') = \lfloor d/2 \rfloor$, $\rho(v, v') = \lceil d/2 \rceil$ в силу (6) и условия $P_u = (u, u', x)$, $P_v = (v, v', x)$. Учитывая (6), получаем

$$\rho(u, u') = \lfloor d/2 \rfloor, \quad \rho(u', x) = s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor \tag{7}$$

и $\rho(u', x') \leqslant \rho(v', x')$, так как $P_u = (u, u', x', x)$ и $P_v = (v, v', x', x)$ — кратчайшие цепи. В силу (7) и определения x-конфигурации $(P_a, a', P_b, b', P, x')$ имеем $V(G) = V(P) \cup V(P_u)$. Кроме того, $P_v(v', x') \cap (P \cup P_u) = \varnothing$, поэтому $\rho(v', x') \leqslant 1$. Тем самым

$$\rho(a', b') \leqslant 1, \quad \rho(a', x') \leqslant 1, \quad \rho(b', x') \leqslant 1. \tag{8}$$

Так как P, P_a, P_b — кратчайшие цепи, в силу (8) все рёбра графа G содержатся среди рёбер графа $P \cup P_a \cup P_b$, т. е.

$$G = P \cup P_a \cup P_b. \tag{9}$$

Учитывая, что вершины a', b', x' либо попарно различны, либо совпадают, возможны два случая.

Случай 1. $a' = b' = x'$. В силу (7) и (9) заключаем, что граф G изоморфен дереву $\overline{D}_{n,d}$ (см. рис. 1(a)).

Случай 2. Вершины a', b', x' попарно различны. Тогда $\rho(a, a') = \rho(b, b') = \lfloor d/2 \rfloor$ и d нечётно. В силу (8) имеем $\rho(a', b') = \rho(a', x') = \rho(b', x') = 1$. Из (7) и (9) заключаем, что граф G изоморфен графу $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ (см. рис. 2(a) при $s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$).

Лемма 4 доказана.

Теорема 6. *Пусть $d + 1 \leqslant n \leqslant d + 1 + \lfloor d/2 \rfloor$. Тогда в классе $\Gamma_{n,d}$ с точностью до изоморфизма верны следующие утверждения*:

(i) *графы $\overline{D}_{4,2}$, $H_{4,2,1}$ (см. рис. 7) — все мажоранты при $d = 2$, $n = 4$;*

(ii) *дерево $\overline{D}_{n,d}$ (см. рис. 1) — единственная мажоранта при чётном d и $n \neq 4$;*

(iii) *графы $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{5,3}$, $H_{5,3,1}$ (см. рис. 7) — все мажоранты при $d = 3$ и $n = 5$;*

(iv) *графы $\overline{D}_{n,d}$, $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ (см. рис. 1 и 2) — все мажоранты при нечётном d и $n \neq 5$.*

Замечание 3. Графы $\overline{D}_{n,d}$ и $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ при $n = d + 1$ (и только при таких n и d) изоморфны.

Замечание 4. В условиях теоремы 6 если d чётно и $n = 4$ (d нечётно и $n = 5$), то $d = 2$ ($d = 3$).

Доказательство. При $n = d + 1$ класс $\Gamma_{n,d}$ содержит единственный с точностью до изоморфизма граф ($\overline{D}_{n,d}$ и $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ изоморфны в этом случае). Поэтому можно считать, что $n \geqslant d + 2$. Тогда $d \geqslant 2$ и $n < d + 1 + 2\lfloor d/2 \rfloor$.

Из утверждения 1 и теоремы 1 получаем, что граф $\overline{D}_{n,d}$ — мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$. Кроме того, по утверждению 2 при нечётном d имеем $\tau_i(\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}) = \tau_i(\overline{D}_{n,d})$ для всех i, т. е. граф $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ также является мажорантой класса $\Gamma_{n,d}$. В силу теоремы 1 и утверждения 3 графы $H_{4,2,1}$ и $H_{5,3,1}$ являются мажорантами классов $\Gamma_{4,2}$ и $\Gamma_{5,3}$ соответственно.

Покажем, что других мажорант класса $\Gamma_{n,d}$ нет. Пусть G — произвольная такая мажоранта. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $n = d+2$. Пусть $x \notin P$. Нетрудно понять, что с точностью до изоморфизма граф G имеет один из трёх видов, изображённых на рис. 8, причём $\tau_{\lfloor d/2 \rfloor}(G) = n$ в силу теоремы 1. Здесь

$\rho(a, z) \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ и $\rho(x, z) = \rho(y, z) = 1$ на рис. 8(a);

$\rho(x, y) = \rho(x, z) = \rho(y, z) = 1$ на рис. 8(b);

$1 \leqslant \rho(x, x') \leqslant 2$, $\rho(x, y) = \rho(x, z) = 1$ и $\rho(x', y) = \rho(x', z) = 1$ на рис. 8(c).

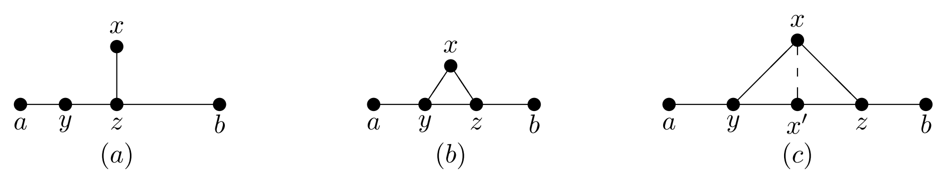


Рис. 8

Когда G имеет вид, как на рис. 8(a), очевидно, что $B_{\lfloor d/2 \rfloor}(x) = B_{\lfloor d/2 \rfloor}(y)$ при $\rho(a, z) < \lfloor d/2 \rfloor$, а при $\rho(a, z) = \lfloor d/2 \rfloor$ граф G изоморфен $\overline{D}_{n,d}$. Когда G имеет вид, как на рис. 8(b), $B_{\lfloor d/2 \rfloor}(x) = B_{\lfloor d/2 \rfloor}(y)$ при $\rho(a, y) < \lfloor d/2 \rfloor$, а также $B_{\lfloor d/2 \rfloor}(x) = B_{\lfloor d/2 \rfloor}(z)$ при $\rho(b, z) < \lfloor d/2 \rfloor$, а в случае $\rho(a, y) = \rho(b, z) = \lfloor d/2 \rfloor$ граф G равен $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$. Когда G имеет вид, как на рис. 8(c), $B_1(x) = B_1(x')$ при $\rho(x, x') = 1$, а также $B_2(x) = B_2(x')$ при $\rho(x, x') = 2$, а в случае $d = 2$ ($d = 3$) и $\rho(x, x') = 2$ граф G изоморфен $H_{4,2,1}$ ($H_{5,3,1}$). Тем самым граф G имеет требуемый вид.

Случай 2. $n \geqslant d + 3$. Тогда существует i такое, что $\lfloor d/2 \rfloor < i < \lfloor d/2 \rfloor + s$, где $s = n - d - 1$. По лемме 4 граф G имеет требуемый вид.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Пусть $d+1 \leqslant n \leqslant d+1+\lfloor d/2 \rfloor$ и $G \in \Gamma_{n,\,d}$. Тогда*

(i) *если $\lfloor d/2 \rfloor < i < n - \lceil d/2 \rceil - 1$, то $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ в том и только том случае, когда граф G является мажорантой класса $\Gamma_{n,\,d}$;*

(ii) *$\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d}) = \Delta_i^d$, если $i \geqslant n - \lceil d/2 \rceil - 1$.*

Доказательство. Утверждение (i) непосредственно вытекает из леммы 4, теоремы 6 и замечания 4.

Докажем утверждение (ii). В силу леммы 1 можно считать, что $n \geqslant d+2$. Тогда $i \geqslant n - \lceil d/2 \rceil - 1 > \lfloor d/2 \rfloor \geqslant 1$ и $i \geqslant n-d$. Ввиду пп. (ii) и (iii) леммы 2 получаем $M_i^*(P) = \varnothing$, так как $\min\{n - \lceil d/2 \rceil - 1, d\} \leqslant i$. Тогда $\tau_i(G) = \Delta_i^d$ в силу утверждения (i) леммы 2. Теорема 7 доказана.

5. Мажоранты класса $\Gamma_{n,\,d}$ при $d+1+\lfloor d/2 \rfloor < n < 2d$

В этом разделе показывается, что в рассматриваемом случае не существует мажоранты класса графов $\Gamma_{n,\,d}$, и описываются его максимально возможные частичные $(0, n-d-1)$- и $(n-d, d)$-мажоранты.

Теорема 8. *Пусть $d+1+\lfloor d/2 \rfloor < n < 2d$, $n-d \leqslant i < d$ и $G \in \Gamma_{n,\,d}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *граф G является $(n-d, d)$-мажорантой класса $\Gamma_{n,\,d}$;*

(ii) *граф G имеет x-конфигурацию $(P_a, a', P_b, b', P, x')$ (см. рис. 3) такую, что P_a, P_b, P — диаметральные цепи графа G и $\rho(a,a') > 2d-n$, $\rho(b,b') > 2d-n$, $\rho(x,x') > 2d-n$;*

(iii) *$\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$.*

Доказательство. Докажем (iii)$\Rightarrow$(ii). Пусть $n = d+1+s$. В силу леммы 2(i), теоремы 1 и (1) получаем

$$|M_i^*(P)| = \tau_i(G) - \Delta_i^d = 3(d-i) + 1 - \Delta_i^d = d - i > 0.$$

Так как $\min\{\lfloor d/2 \rfloor + s, d\} = d$, ввиду пп. (ii) и (iii) леммы 2 имеем

$$\rho(v,x) \geqslant \rho(u,x) = d \tag{10}$$

для некоторых различных вершин $u, v \in \{a, b\}$, где $x \in M_i(P)$ и $\rho(a,x) = \max\limits_{y \in M_i(P)} \rho(a,y)$. Рассмотрим произвольную x-конфигурацию $(P_a, a', P_b, b', P, x')$ (см. рис. 3). В силу (10) P_a, P_b — диаметральные цепи графа G. Следовательно,

$$\rho(w,w') = \rho(w,x) - \rho(w',x) \geqslant d - |V(G \setminus P)| \geqslant d - s > 2d - n$$

для любой вершины $w \in \{a, b\}$. Так как $|V(P_b)| = d+1$, аналогично получаем $\rho(x,x') = \rho(x,a) - \rho(x',a) \geqslant d - |V(G \setminus P_b)| > 2d - n$.

Докажем (ii)⇒(i). Пусть $n-d \leqslant i < d$. Тогда $\rho(a,a') > 2d-n \geqslant d-i$. Аналогично $\rho(b,b') > d-i$ и $\rho(x,x') > d-i$. Поэтому существуют вершины $a'' \in P(a,a')$, $b'' \in P(b,b')$ и $x'' \in P_a(x,x')$ такие, что

$$\rho(a,a'') = \rho(b,b'') = \rho(x,x'') = d-i. \qquad (11)$$

Используя диаметральные цепи P_a, P_b, P и (5), (11), нетрудно доказать, что все шары радиуса i с центрами из $P[a,a'') \cup P[b,b'') \cup P_a[x,x'') \cup \{a'\}$ различны. Следовательно,

$$\tau_i(G) \geqslant \rho(a,a'') + \rho(b,b'') + \rho(x,x'') + 1 = 3(d-i)+1.$$

С другой стороны,

$$\tau_i(G) \leqslant \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = 3(d-i)+1$$

по теореме 1. Значит, $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$. Таким образом, граф G является $(n-d,d)$-мажорантой в $\Gamma_{n,d}$.

Утверждение (i)⇒(iii) очевидно. Теорема 8 доказана.

Теорема 8 позволяет строить примеры $(n-d,d)$-мажорант класса $\Gamma_{n,d}$, имеющих разнообразное строение «внутренности треугольника» с вершинами a', b', x' (см. рис. 3). На рис. 9 приведены примеры таких $(n-d,d)$-мажорант.

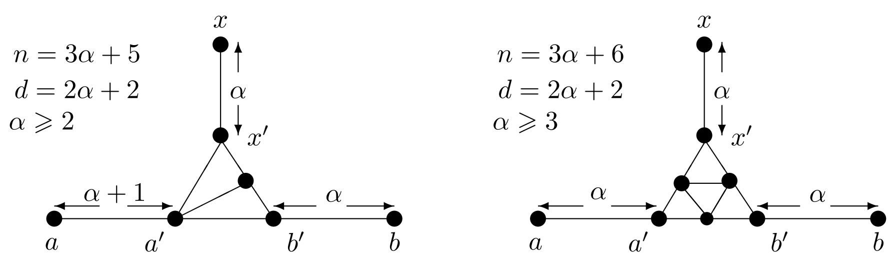


Рис. 9

Теорема 9. *Пусть $d+1+\lfloor d/2\rfloor < n < 2d$. Тогда графы $H^i_{n,d,n-d-1}$, $i = 0,1,\dots,\lfloor(2d-n)/2\rfloor$, — все $(0,n-d-1)$-мажоранты класса $\Gamma_{n,d}$ с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $t = n-d-1$. Тогда $\lfloor d/2\rfloor < t < d$. В [7] доказано, что с точностью до изоморфизма все графы из $\Gamma_{n,d}$ с локальным t-разнообразием шаров при $\lfloor d/2\rfloor < t < d$ суть в точности графы $H^i_{n,d,t}$, $i = 0,\dots,\lfloor(d-t-1)/2\rfloor$. Остаётся воспользоваться леммой 3. Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Пусть $d+1+\lfloor d/2\rfloor < n < 2d$. Тогда в классе $\Gamma_{n,d}$*

(i) *не существует мажоранты;*

(ii) *граф $H_{n,d,n-d-1}$ является $(0,n-d-1)$-мажорантой, причём не существует $(0,n-d)$-мажоранты;*

(iii) *граф $\overline{D}_{n,d}$ (граф $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$) при чётном d (при нечётном d) является $(n-d,d)$-мажорантой, причём не существует $(n-d-1,d)$-мажоранты.*

Доказательство. Докажем утверждение (ii). По теореме 9 граф $H_{n,d,n-d-1}$ — $(0,n-d-1)$-мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$. Предположим, что существует некоторая $(0,n-d)$-мажоранта G класса $\Gamma_{n,d}$. Тогда граф G изоморфен $H^i_{n,d,n-d-1}$ для некоторого i и

$$\tau_{n-d}(G)=\tau_{n-d}\big(H^i_{n,d,n-d-1}\big)=\Delta^d_{n-d}$$

по теореме 9 и утверждению 3. С другой стороны, в силу теоремы 1 и (1) получаем $\tau_{n-d}(G)=3(2d-n)+1>\Delta^d_{n-d}$; противоречие.

Утверждение (i) непосредственно следует из (ii).

Докажем (iii). Очевидно, что $\lfloor d/2\rfloor > 2d-n$ и графы $\overline{D}_{n,d}$, $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ (см. рис. 1(b) и 2) имеют x-конфигурацию, требуемую в утверждении (ii) теоремы 8. По теореме 8 графы $\overline{D}_{n,d}$ и $\overline{G}^{\mathrm{odd}}_{n,d}$ являются $(n-d,d)$-мажорантами при чётном и нечётном d соответственно.

Предположим, что граф G является $(n-d-1,d)$-мажорантой класса $\Gamma_{n,d}$. По теореме 1 имеем $\tau_{n-d-1}(G)=n$. Кроме того, $n\geqslant\tau_i(G)\geqslant\tau_{i+1}(G)$ для любого i. Следовательно, граф G есть $(0,n-d-1)$-мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$. Поэтому G — мажоранта класса $\Gamma_{n,d}$; противоречие утверждению (i). Теорема 10 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 5–12.
2. **Федоряева Т. И.** О разнообразии метрических шаров в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. XIV Междунар. конф. (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005. — С. 159.
3. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 74–84.
4. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Тр. VII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 4–6 марта 2006 г.). — М.: Изд-во МГУ, 2006. — С. 374–378.

5. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 47–67.
6. **Федоряева Т. И.** Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 74–92.
7. **Федоряева Т. И.** О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 65–74.
8. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

Федоряева Татьяна Ивановна,
e-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Статья поступила
23 марта 2012 г.

Переработанный вариант —
17 мая 2012 г.