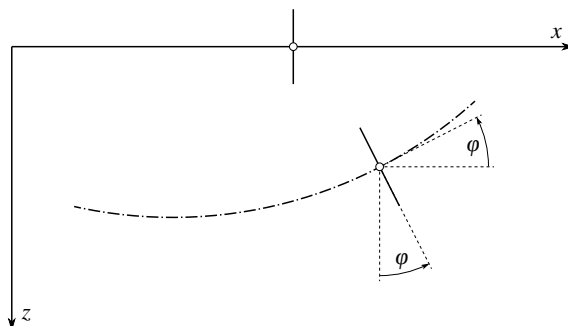


3.2.2 Navierova-Bernoulliho hypotéza

V předchozím článku jsme vyslovili hypotézu o zachování rovinnosti průřezu, která umožnila pracovat s představou pootočení průřezu a definovat křivost elementárního segmentu. Důsledkem hypotézy o zachování rovinnosti bylo lineární rozložení poměrného protažení po průřezu, které pro lineárně pružný materiál vede k lineárnímu rozložení napětí. Odvodili jsme také vztah mezi křivostí a ohybovým momentem a ukázali, jak pro daný moment spočítat napětí. Diferenciální vztah mezi pootočením a křivostí jsme využili k výpočtu pootočení integrací křivosti.

K úplnému popisu ohýbaného prutu jsou ale nezbytné ještě další rovnice, které umožní výpočet průhybu nebo řešení staticky neurčitých případů podepření (pro něž zatím neumíme stanovit průběh ohybových momentů). V tomto článku představíme jednu z těchto rovnic a ukážeme, jak na staticky určité konstrukci spočítat průhyb. V následujícím článku doplníme ještě rovnice rovnováhy a poté všechny odvozené rovnice spojíme do tzv. diferenciální rovnice ohybové čáry, která je univerzálním nástrojem pro popis nosníků bez ohledu na jejich statickou určitost.

Zaměříme se nyní na otázku, jak se pod vlivem zatížení nosník prohýbá a jak to souvisí s jeho deformací, např. se zakřivením jednotlivých segmentů. Z původně přímé střednice prutu se při ohybu ve svislé rovině stane křivka. Její tvar lze popsat pomocí funkce $w(x)$, která souřadnici x přiřazuje hodnotu svislého posunu (neboli průhybu) odpovídajícího průřezu. Přesněji řečeno se jedná o svislý posun těžiště tohoto průřezu, tj. posun toho bodu, který leží na střednici prutu. Již dříve jsme zmínili obvyklý předpoklad, že tvar a rozměry průřezu se při deformaci prutu nijak významně nemění (např. obdélníkový průřez si i po deformaci zachová obdélníkový tvar se stejnými délkami stran). Každý průřez se tedy při ohybu prutu posouvá a otáčí jako tuhý útvar, přičemž posun se odehrává ve svislém směru (směru souřadnicové osy z) a je popsán funkcí $w(x)$, zatímco otáčení průřezu se odehrává kolem vodorovné osy kolmé na střednici prutu (tj. kolem osy rovnoběžné se souřadnicovou osou y) a je popsáno již dříve zavedenou funkcí $\varphi(x)$.



Obrázek 3.12: Zachování kolmosti průřezu na deformovanou střednici a jeho důsledky.

Obecně by bylo možno svislý posun průřezu a jeho pootočení považovat za dvě nezávislé funkce.⁶ Pro dostatečně štíhlé pruty je však možné zavést předpoklad označovaný jako *Navierova-Bernoulliho hypotéza*, podle které **průřezy po deformaci zůstávají kolmé na deformovanou střednici**. Tento předpoklad byl formulován na základě

⁶Skutečně existuje teorie prutů, která pracuje s nezávislými funkcemi průhybu a pootočení a bere v úvahu smykové zkosení elementárních segmentů. Bývá označována za Mindlinovu nebo Timošenkovu teorii a je vhodná pro zprůměrný popis prutů s nízkou štíhlostí, například krátkých konzol.

intuice, pozorování a měření a jeho oprávněnost lze ověřit i moderními numerickými metodami, které umožňují přesnější modelování prutů chápaných jako trojrozměrná tělesa.

Jakmile je Navierova-Bernoulliho hypotéza přijata, stačí k jednoznačnému určení polohy všech bodů ohýbaného prutu po deformaci průhybová funkce $w(x)$. Na základě znalosti tvaru střednice po deformaci (tedy grafu funkce $w(x)$) lze totiž sestavit v každém bodě deformované střednice její normálu. Přitom odchylka normály od svislice přímo odpovídá pootočení průřezu $\varphi(x)$. Graficky je to znázorněno na obr. 3.12. Jak je vidět, úhel mezi normálou ke střednici a svislou přímkou je stejný jako úhel mezi tečnou ke střednici a vodorovnou přímkou. Z matematiky je známo, že tangenta tohoto úhlu odpovídá derivaci funkce $w(x)$, jejímž grafem je deformovaná střednice. Vztah mezi průhybem a pootočením bychom tedy mohli zapsat ve tvaru

$$\tan \varphi(x) = -w'(x) \quad (3.60)$$

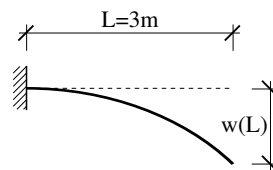
Záporné znaménko souvisí s tím, že průhyby jsou chápány jako kladné, pokud směřují dolů, zatímco pootočení průřezu je kladné, pokud při pohledu proti kladné poloose y dochází k rotaci v kladném smyslu (tj. proti hodinovým ručičkám). Jestliže je funkce $w(x)$ rostoucí, je její derivace $w'(x)$ kladná, ale průřezy se otáčejí v záporném smyslu a pootočení $\varphi(x)$ je záporné.

Vztah (3.60) sice umožňuje z dané průhybové funkce vypočítat pootočení libovolného průřezu, nevýhodou je však přítomnost goniometrické funkce tangens, která dává tomuto vztahu nelineární charakter. Na většině prutových konstrukcí používaných ve stavební praxi se průřezy otáčejí jen o velmi malé úhly a rozdíl mezi samotným pootočením (vyjádřeným v obloukové míře) a jeho tangentou je pak zanedbatelný. Díky tomu můžeme nelineární vztah (3.60) s dostatečnou přesností nahradit lineárním vztahem

$$\varphi(x) = -w'(x) \quad (3.61)$$

a linearita všech základních rovnic pak zůstane zachována, což významně usnadňuje následné výpočty. Pro danou průhybovou funkci $w(x)$ lze odpovídající pootočení vypočítat pouhým vyhodnocením derivace (a změnou znaménka). Jestliže je naopak známa funkce pootočení $\varphi(x)$, je při výpočtu odpovídajícího průhybu potřeba integrovat.

PŘÍKLAD 3.7 Pro konzolu z Příkladu 3.5 vypočtete průhyb jejího volného konce.



Obrázek 3.13: Průhyb konce konzoly.

Řešení: Podobně jako jsme v Příkladu 3.6 určili pootočení konce integrací křivosti, můžeme nyní určit průhyb konce integrací pootočení. K tomu však potřebujeme kompletní popis funkce $\varphi(x)$ popisující pootočení, nikoli jen její hodnotu $\varphi(L)$ pro $x = L$. Proto se musíme vrátit k Příkladu 3.6 a provést výpočet pootočení v obecném průřezu o souřadnici x . Ukážeme dva postupy, které jsou z matematického hlediska zcela rovnocenné, ale jeden z nich může být pro čtenáře srozumitelnější. První postup je založen na určitém integrálu, druhý na neurčitém.

Postup založený na určitém integrálu: Podle základní věty integrálního počtu (známé z matematiky) je určitý integrál funkce f od a do b roven rozdílu hodnot její primitivní funkce F v těchto bodech:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.62)$$

Přitom funkce F je primitivní funkcí funkce f , pokud platí $F' = f$. Uvedený vztah tedy můžeme přepsat jako

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.63)$$

V našem případě roli funkce F hraje pootočení φ . Podle (3.37) je jeho derivace rovna křivosti κ . Můžeme tedy psát

$$\int_a^b \kappa(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (3.64)$$

Tento vztah jsme vlastně již využili v Příkladu 3.6 s volbou mezí $a = 0$ a $b = L$, viz (3.56). Nyní můžeme horní mez nastavit jako souřadnici obecného průřezu x , ve kterém chceme vypočítat pootočení $\varphi(x)$. Bylo by však chybou do (3.64) dosadit místo b symbol x a jinak nic neměnit, protože proměnná x je zde již přítomna jako integrační proměnná. Pokud chceme tento symbol použít pro horní mez, musíme integrační proměnnou označit jinak. To je přípustné, protože se jedná jen o formální symbol. Podstatné je, v jakých mezích se integrační proměnná mění a jak na ní závisí integrovaná funkce, ale konkrétní označení integrační proměnné je zcela libovolné (pokud nekoliduje s jiným symbolem použitým ve stejné rovnici). Proto je nejprve potřeba místo x napsat ve (3.64) například ξ a teprve pak lze horní mez označit jako x :

$$\int_0^x \kappa(\xi) d\xi = \varphi(x) - \varphi(0) \quad (3.65)$$

Po dosazení konkrétního tvaru funkce $\kappa(\xi)$ podle (3.54) a nulové hodnoty $\varphi(0)$ odtud plyne

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x \frac{f_z}{2EI} (\xi^2 - L^2) d\xi = \frac{f_z}{2EI} \left[\frac{\xi^3}{3} - L^2 \xi \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = \frac{f_z}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - L^2 x \right) \\ &= \frac{f_z}{6EI} (x^3 - 3L^2 x) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Získali jsme tedy kompletní popis funkce $\varphi(x)$, která popisuje pootočení jednotlivých průřezů. Pro kontrolu můžeme dosadit $x = L$ a ověřit, že hodnota $\varphi(L) = -f_z L^3 / 3EI$ souhlasí s výsledkem Příkladu 3.6, viz (3.57).

Celý postup nyní zopakujeme ještě jednou při přechodu od pootočení $\varphi(x)$ k průhybu $w(x)$. Integrací rovnice (3.61) a dosazením $w(0) = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} w(x) &= w(0) + \int_0^x w'(\xi) d\xi = - \int_0^x \varphi(\xi) d\xi = - \int_0^x \frac{f_z}{6EI} (\xi^3 - 3L^2 \xi) d\xi = \\ &= - \frac{f_z}{6EI} \left[\frac{\xi^4}{4} - 3L^2 \frac{\xi^2}{2} \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = - \frac{f_z}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} - 3L^2 \frac{x^2}{2} \right) = \frac{f_z}{24EI} (6L^2 x^2 - x^4) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Odvozená funkce popisuje deformovanou střednici a její hodnota v bodě $x = L$ představuje průhyb volného konce konzoly:

$$w(L) = \frac{5f_z L^4}{24EI} \quad (3.68)$$

Postup založený na neurčitém integrálu: Podstata výpočtu zůstává stejná, ale matematický zápis je založen na neurčitém integrálu, ve kterém se objeví integrační konstanta. Jestliže podle (3.37) je derivace funkce $\varphi(x)$ rovna funkci $\kappa(x)$, pak samotnou funkci $\varphi(x)$ můžeme zapsat jako neurčitý integrál z funkce $\kappa(x)$. Po dosazení konkrétního tvaru funkce $\kappa(x)$ podle (3.54) provedeme integraci a nezapomeneme na integrační konstantu:

$$\varphi(x) = \int \kappa(x) dx = \int \frac{f_z}{2EI} (x^2 - L^2) dx = \frac{f_z}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - L^2 x \right) + C_1 \quad (3.69)$$

Konkrétní hodnotu konstanty C_1 pak určíme z podmínky $\varphi(0) = 0$, která popisuje skutečnost, že na levém konci konzoly je vazba zabraňující jeho otáčení. Po dosazení vyjde $C_1 = 0$. Obdobný postup pak aplikujeme ještě jednou na rovnici (3.61), ze které dostaneme

$$w(x) = - \int \varphi(x) dx = - \int \frac{f_z}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - L^2 x \right) dx = - \frac{f_z}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - L^2 \frac{x^2}{2} \right) + C_2 \quad (3.70)$$

Z podmínky $w(0) = 0$ pak plyne, že i integrační konstanta C_2 je nulová. Výsledný tvar funkce $w(x)$ tedy souhlasí s předchozím řešením (3.67).

3.2.3 Podmínky rovnováhy elementárního segmentu prutu

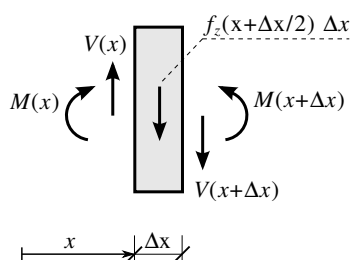
K úplnému popisu ohýbaného prutu zbývá odvodit statické rovnice, které zajišťují rovnováhu mezi vnitřními a vnějšími silami. Podobně jako pro osově namáhaný prut vyjdeme z rovnováhy elementárního segmentu prutu, ale tentokrát použijeme silovou podmínku v příčném směru a momentovou podmínku. Vnitřní a vnější síly, které se v těchto podmínkách uplatní, jsou znázorněny na obr. 3.14. V průřezu na levém okraji segmentu působí posouvající síla $V(x)$ a ohybový moment $M(x)$, zatímco v průřezu na pravém okraji je to posouvající síla $V(x + \Delta x)$ a ohybový moment $M(x + \Delta x)$. Pokud je posouvající síla kladná, působí na levém okraji nahoru a na pravém dolů. Kladný ohybový moment působí na levém okraji v záporném smyslu (po ručičkách) a na pravém okraji v kladném smyslu (proti ručičkám). Kromě toho může být prut zatížen spojitě rozloženými vnějšími příčnými silami o intenzitě $f_z(x)$. Na segmentu o délce Δx je výslednicí takového zatížení elementární síla $f_z(x + \Delta x/2) \Delta x$, jejíž kladná orientace je souhlasná s kladnou poloosou z , tedy dolů.

Nejprve zapíšeme silovou podmínku rovnováhy v příčném směru, tedy ve směru osy z . Objeví se v ní posouvající síly a výslednice příčného zatížení:

$$-V(x) + V(x + \Delta x) + f_z(x + \Delta x/2) \Delta x = 0 \quad (3.71)$$

Po vydělení délkou segmentu Δx a limitním přechodu $\Delta x \rightarrow 0$ dostaneme diferenciální podmínku rovnováhy

$$V'(x) + f_z(x) = 0 \quad (3.72)$$



Obrázek 3.14: Síly a momenty působící na elementární segment prutu při ohybu.

kteřá má stejný tvar jako obdobná podmínka (2.36) pro osově namáhaný prut, jen s tím rozdílem, že normálová síla je nahrazena posouvající silou a podélné zatížení příčným. Není divu, vždyť obě rovnice byly odvozeny obdobným způsobem, jedna z podmínky rovnováhy ve směru osy x a druhá ve směru osy z .

Při ohybu je ale třeba vzít v úvahu i momentovou podmínku rovnováhy elementárního segmentu, ve které se uplatní posouvající síly a ohybové momenty. Příčné zatížení z ní vypadne, takže odvozená rovnice bude popisovat vztah mezi vnitřními silami. Momentovou podmínku zapíšeme například vzhledem k vodorovné těžištové ose průřezu o souřadnici $x + \Delta x/2$ (tedy průřezu uprostřed uvažovaného segmentu). Tato přímka se v průmětu do roviny xz jeví jako bod ve středu elementárního segmentu a můžeme si představit, že v rovině xz zapisujeme moment k tomuto bodu. Výslednice vnějšího zatížení působí ke zvolenému bodu na nulovém rameni a v momentové podmínce rovnováhy se proto neobjeví. Obě posouvající síly působí na rameni $\Delta x/2$ a pokud jsou kladné, je jejich moment k tomuto bodu záporný. Po přidání účinků ohybových momentů výslednou podmínku zapíšeme jako

$$-M(x) + M(x + \Delta x) - V(x) \frac{\Delta x}{2} - V(x + \Delta x) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (3.73)$$

a po vydělení délkou segmentu Δx ji upravíme na tvar

$$\frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2}V(x) - \frac{1}{2}V(x + \Delta x) = 0 \quad (3.74)$$

První člen v limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$ přejde v derivaci $M'(x)$ a zbývající dva členy dají v limitě dohromady $-V(x)$. Výsledná diferenciální podmínka

$$M'(x) - V(x) = 0 \quad (3.75)$$

se dá přepsat jako

$$M'(x) = V(x) \quad (3.76)$$

a slovně vyjádřit tvrzením, že **derivace ohybového momentu je rovna posouvající síle**.

Rovnice (3.72) a (3.76) jsou známy ze stavební mechaniky jako tzv. *Schwedlerovy věty*. Do stejné skupiny patří i rovnice (2.36) odvozená ze silové podmínky rovnováhy v podélném směru. Tyto diferenciální podmínky rovnováhy hrají při analýze prutů významnou úlohu a pro zvýraznění jsou shrnuty v tab. 3.2.

Podobně jako (2.36), i rovnice (3.72) a (3.76) byly odvozeny za (nevysloveného) předpokladu, že silové zatížení je spojitě rozloženo po délce prutu. Pokud na prut působí i osamělé síly nebo osamělé momenty, je třeba v odpovídajících průřezích zapsat

Tabulka 3.2: Schwedlerovy věty.

podélná	příčná	momentová
$N' + f_x = 0$	$V' + f_z = 0$	$M' = V$

podmínky pro skoky příslušné vnitřní síly. Postup při jejich odvození je zcela analogický jako v článku 2.2.1 při odvození rovnice (2.38) pro podélné zatížení. Jestliže na prut v průřezu x_i působí příčná osamělá síla \bar{F}_{zi} (kladná směrem dolů, souhlasně s kladnou poloosou z), pak vznikne nespojitost v průběhu posouvající síly a pro její hodnoty V_i^- těsně vlevo od průřezu a V_i^+ těsně vpravo od průřezu bude platit

$$V_i^- - V_i^+ = \bar{F}_{zi} \quad (3.77)$$

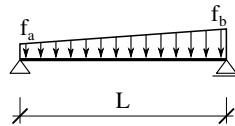
Podobně pokud na prut v průřezu x_i působí osamělý moment \bar{M}_i (kladný proti hodinovým ručičkám), pak vznikne nespojitost v průběhu ohybového momentu a pro jeho hodnoty M_i^- těsně vlevo od průřezu a M_i^+ těsně vpravo od průřezu bude platit

$$M_i^- - M_i^+ = \bar{M}_i \quad (3.78)$$

Při pohybu po prutu zleva doprava má skok při přechodu přes zatížený průřez stejnou velikost, ale opačné znaménko, než působící vnější síla nebo moment.

Schwedlerovy věty umožňují ze známého průběhu ohybového momentu odvodit odpovídající průběh posouvající síly a také určit zatížení, které tyto vnitřní síly vyvolalo. Jestliže je naopak dáno silové zatížení a jsou známy reakce (např. jsou vypočteny z podmínek rovnováhy celé konstrukce), lze vnitřní síly získat integrací rovnic (3.72) a (3.76), s případným uvážením podmínek nespojitosti (3.77) a (3.78) v průřezích zatížených osamělými silami a momenty.

PŘÍKLAD 3.8 Na prostý nosník o rozpětí L působí spojité zatížení, jehož intenzita se lineárně mění od hodnoty f_a na levém konci do hodnoty f_b na pravém konci. Určete průběh ohybového momentu.



Obrázek 3.15: Prostý nosník s lineárně proměnným zatížením.

Řešení: Zadané zatížení lze popsat lineární funkcí

$$f_z(x) = \frac{f_a \cdot (L - x) + f_b x}{L} = f_a \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + f_b \frac{x}{L} \quad (3.79)$$

Po dosazení této známé funkce do diferenciální podmínky rovnováhy (3.72) dostaneme rovnici

$$V'(x) = -\frac{f_a \cdot (L - x) + f_b x}{L} \quad (3.80)$$

a po integraci

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int \frac{f_a \cdot (L - x) + f_b x}{L} dx = -\frac{1}{L} \left[f_a \cdot \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_b \frac{x^2}{2} \right] + C_1 = \\ &= \frac{f_a}{2L} (x^2 - 2Lx) - \frac{f_b}{2L} x^2 + C_1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

kde C_1 je integrační konstanta, která odpovídá hodnotě posouvající síly na levém konci prutu, $V(0)$. Mohli bychom ji určit ze znalosti silové reakce v levé podpoře, kterou lze vzhledem ke statické určitosti daného nosníku vypočítat z podmínek rovnováhy celku (nejpohodlněji z momentové podmínky rovnováhy k pravému konci prutu). Místo toho můžeme určení integrační konstanty odložit a dosadit (3.81) do (3.76). Další integrace vede k funkci popisující průběh ohybového momentu ve tvaru

$$\begin{aligned} M(x) &= \int V(x) dx = \int \left[\frac{f_a}{2L}(x^2 - 2Lx) - \frac{f_b}{2L}x^2 + C_1 \right] dx = \\ &= \frac{f_a}{6L}(x^3 - 3Lx^2) - \frac{f_b}{6L}x^3 + C_1x + C_2 \end{aligned} \quad (3.82)$$

kde C_2 je další integrační konstanta, která odpovídá hodnotě ohybového momentu na levém konci prutu, $M(0)$. Jelikož na levý konec nepůsobí žádný osamělý moment (ani předepsané momentové zatížení, ani momentová reakce), musí být $M(0) = 0$ a tedy $C_2 = 0$. I na pravém konci nosníku je ohybový moment nulový a z podmínky $M(L) = 0$ dostaneme po dosazení $x = L$ a $C_2 = 0$ do (3.82) rovnici

$$\frac{f_a}{6L}(L^3 - 3L^3) - \frac{f_b}{6L}L^3 + C_1L = 0 \quad (3.83)$$

$$-\frac{1}{L} \left[f_a \left(L \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} \right) + f_b \frac{L^3}{6} \right] + C_1L = 0 \quad (3.84)$$

ze které získáme integrační konstantu

$$C_1 = f_a \frac{L}{3} + f_b \frac{L}{6} \quad (3.85)$$

Stojí za zmínku, že stejný výsledek bychom dostali při výpočtu reakce v levé podpoře z podmínky rovnováhy celého nosníku. Po dosazení vypočtených integračních konstant do (3.81) a (3.82) zapíšeme funkce popisující průběhy posouvající síly a ohybového momentu jako

$$V(x) = \frac{f_a}{6L}(3x^2 - 6Lx + 2L^2) + \frac{f_b}{6L}(-3x^2 + L^2) \quad (3.86)$$

$$M(x) = \frac{f_a}{6L}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x) + \frac{f_b}{6L}(-x^3 + L^2x) \quad (3.87)$$

Všimněte si, že příčné zatížení bylo popsáno lineární funkcí proměnné x , pro posouvající sílu jsme dostali kvadratickou funkci a pro ohybový moment kubickou funkci. To je přímým důsledkem Schwedlerových vět.

V předchozím příkladu hrála důležitou roli skutečnost, že na koncích nosníku byly známy dvě hodnoty vnitřních sil, konkrétně hodnoty $M(0) = 0$ a $M(L) = 0$ ohybového momentu, takže bylo možné jednoznačně určit integrační konstanty C_1 a C_2 . To souvisí se skutečností, že jsme řešili staticky určitou úlohu. Kdyby byl nosník vlevo vetknut a pravý konec měl volný, použili bychom podmínky $M(L) = 0$ a $V(L) = 0$ a opět by bylo možné integrační konstanty určit. Naopak pro oboustranně vetknutý nosník není předem známa hodnota ohybového momentu ani posouvající síly v žádném průřezu a integrační konstanty tímto způsobem určit nelze. Při výpočtu vnitřních sil na staticky neurčitým nosníkem nevystačíme s podmínkami rovnováhy a musíme vzít v úvahu i další základní rovnice. To bude podrobně rozebráno v následujícím článku.

3.2.4 Diferenciální rovnice ohybové čáry

Pokud přijmeme Navierovu-Bernoulliho hypotézu, je přemístění ohýbaného prutu jednoznačně popsáno průhybovou funkcí $w(x)$. Funkci $\varphi(x)$ popisující pootočení totiž získáme podle (3.61) jako záporně vzatou derivaci průhybové funkce. Jakmile víme, kam se posune těžiště průřezu a jak se průřez pootočí, můžeme snadno určit novou polohu libovolného bodu tohoto průřezu. Do schématu základních veličin a rovnic na obr. 3.16 tedy zapíšeme $w(x)$ jako funkci charakterizující přemístění, zatímco $\varphi(x)$ považujeme za pomocnou veličinu.

Přetvoření elementárního segmentu je při ohybu popsáno pomocí křivosti κ , ze které lze podle (3.38) odvodit poměrné protažení libovolného podélného vlákna. Proto za základní veličinu popisující přetvoření považujeme funkci $\kappa(x)$. Spojením vztahů (3.37) a (3.61) odvodíme rovnici

$$\kappa(x) = \varphi'(x) = (-w'(x))' = -w''(x) \quad (3.88)$$

která popisuje vztah mezi přemístěním a přetvořením a představuje *geometrickou rovnici ohýbaného prutu*.

Vnitřní silou související s ohybem je ohybový moment $M(x)$, který je při lineárně pružném chování materiálu přímo úměrný křivosti podle *průřezové rovnice* (3.40). Vztahy mezi vnitřními a vnějšími silami jsou popsány Schwedlerovými větami (3.72) a (3.76), ve kterých se objevuje také posouvající síla $V(x)$. Jelikož posouvající sílu lze podle (3.76) jednoznačně odvodit z daného průběhu ohybového momentu, považujeme ji za pomocnou veličinu a do schématu základních veličin a rovnic na obr. 3.16 zařadíme pouze ohybový moment. Spojením Schwedlerových vět (3.72) a (3.76) získáme rovnici

$$-M''(x) = f_z(x) \quad (3.89)$$

která popisuje přímý vztah mezi ohybovým momentem a příčným zatížením a představuje tak *statickou rovnici ohýbaného prutu*. Tím je schéma základních rovnic úplné.

$$\begin{array}{ccc} w(x) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 w}{dx^2}) = f_z} & f_z(x) \\ \kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \downarrow & & \uparrow -\frac{d^2 M}{dx^2} = f_z \\ \kappa(x) & \xrightarrow{M = EI \kappa} & M(x) \end{array}$$

Obrázek 3.16: Základní veličiny a rovnice pro ohýbaný prut.

Ve třech základních rovnicích na obr. 3.16 se objevují tři neznámé funkce $w(x)$, $\kappa(x)$ a $M(x)$. Geometrická a statická rovnice mají diferenciální charakter (objevují se v nich derivace), zatímco průřezová rovnice je algebraická. Při řešení diferenciálních rovnic jsou zapotřebí i okrajové podmínky. Ve staticky určitém případě jsou k dispozici dvě okrajové podmínky zapsané pomocí vnitřních sil a statickou rovnici s těmito okrajovými podmínkami lze jednoznačně vyřešit nezávisle na ostatních rovnicích. Ve staticky neurčitém případě je pro vnitřní síly k dispozici jen jedna nebo dokonce žádná okrajová podmínka a statickou rovnici pak nelze řešit samostatně (resp. lze, ale řešení není jednoznačné). Proto je výhodné základní rovnice zkombinovat a sestavit rovnici, ke které bude vždy k dispozici dostatečný počet okrajových podmínek. K tomu stačí na základě

geometrické a průřezové rovnice vyjádřit momentovou funkcí pomocí průhybové funkce jako

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) = -EI(x)w''(x) \quad (3.90)$$

a toto vyjádření pak dosadit do statické rovnice. Popsaný postup vede k tzv. *diferenciální rovnici ohybové čáry* ve tvaru

$$[EI(x)w''(x)]'' = f_z(x) \quad (3.91)$$

Jedinou neznámou je zde průhybová funkce $w(x)$. Z matematického hlediska se jedná o obyčejnou lineární diferenciální rovnici 4. řádu. Pokud je ohybová tuhost průřezu EI po délce prutu konstantní (prut s konstantním průřezem vyrobený z homogenního materiálu), pak lze (3.91) zjednodušit na

$$EIw^{IV}(x) = f_z(x) \quad (3.92)$$

kde horní index IV představuje čtvrtou derivaci podle souřadnice x .

Pro obyčejnou diferenciální rovnici 4. řádu jsou zapotřebí dvě okrajové podmínky na každém konci prutu, tedy celkem čtyři. Konkrétní podoba těchto podmínek závisí na způsobu podepření a zatížení koncových průřezů:

- Pokud je na konci prutu vazba zabraňující příčnému posunu, je zde předepsána hodnota průhybu w (zpravidla nulovou hodnotou). Pokud naopak taková vazba chybí, lze na konci prutu určit hodnotu posouvající síly V , která odpovídá příčné vnější síle působící na tento konec.
- Pokud je na konci prutu vazba zabraňující rotaci, je zde předepsána hodnota pootočení φ (zpravidla nulovou hodnotou). Pokud naopak taková vazba chybí, lze na konci prutu určit hodnotu ohybového momentu M , která odpovídá vnějšímu momentu působícímu na tento konec.

Z uvedených pravidel vyplývá, že na každém konci předepisujeme

buď průhyb, nebo posouvající sílu

a

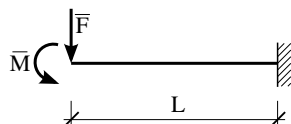
buď pootočení, nebo ohybový moment.

Na každém konci se tak předepisují vždy dvě okrajové podmínky a tím je zaručeno, že celkem budou předepsány vždy čtyři, bez ohledu na způsob podepření. To platí pro staticky určité i neurčité nosníky.

Průhyb a pootočení jsou veličiny geometrické, související s přemístěním. Proto o odpovídajících okrajových podmínkách mluvíme jako o *geometrických*, případně jako o *kinematických*. Posouvající síla a ohybový moment jsou veličiny statické a o odpovídajících okrajových podmínkách mluvíme jako o *statických*. Z matematického hlediska by okrajové podmínky pro diferenciální rovnici n -tého řádu měly být zapsány pomocí hodnot hledané funkce a jejích derivací nejvýše do řádu $n - 1$ (v našem případě tedy až do 3. řádu). Průhyb představuje přímo hodnotu hledané průhybové funkce a pootočení odpovídá její záporně vzaté první derivaci. Ohybový moment pak podle (3.90) souvisí s druhou derivací průhybu a pro posouvající sílu po dosazení (3.90) do Schwedlerovy věty (3.76) najdeme souvislost se třetí derivací průhybu (v případě proměnného průřezu s kombinací druhé a třetí):

$$V(x) = M'(x) = -[EI(x)w''(x)]' \quad (3.93)$$

PŘÍKLAD 3.9 Zapište okrajové podmínky pro konzolu konstantního průřezu, která je vetknutá na pravém konci a na volném levém konci je zatížena svislou silou \bar{F} a osamělým momentem \bar{M} .



Obrázek 3.17: Konzola zatížená silou a momentem.

Řešení: Jelikož je levý konec nepodepřený, budou zde předepsány dvě statické okrajové podmínky, jedna pro ohybový moment a druhá pro posouvající sílu. Je však třeba dát pozor na znaménka. Působí-li na levém konci předepsaná vnější síla \bar{F} dolů, vzniká zde záporná posouvající síla. Podobně působí-li na levém konci předepsaný vnější moment \bar{M} v kladném smyslu, vzniká zde záporný ohybový moment. Proto zapíšeme statické okrajové podmínky na levém konci jako

$$V(0) = -\bar{F} \quad (3.94)$$

$$M(0) = -\bar{M} \quad (3.95)$$

Uvědomte si, že na volném pravém konci by tomu bylo naopak a záporná znaménka by zmizela. V našem případě je však pravý konec vetknutý, a proto zde zapíšeme geometrické okrajové podmínky

$$w(L) = 0 \quad (3.96)$$

$$\varphi(L) = 0 \quad (3.97)$$

Okrajové podmínky (3.94)–(3.97) byly zapsány pomocí veličin, který mají názorný význam. Při formálním matematickém řešení úlohy je můžeme přepsat pomocí derivací hledané funkce. Pro ohybový moment a posouvající sílu platí vztahy (3.90) a (3.93). Jestliže má prut konstantní ohybovou tuhost průřezu, zjednoduší se (3.93) na $V(x) = -EIw'''(x)$. Proto můžeme okrajové podmínky (3.94)–(3.95) přepsat jako

$$w'''(0) = \frac{\bar{F}}{EI} \quad (3.98)$$

$$w''(0) = \frac{\bar{M}}{EI} \quad (3.99)$$

Podmínka (3.96) je už přímo zapsána pomocí hledané funkce. Podmínku (3.97) přepíšeme s využitím vztahu (3.61) jako

$$w'(L) = 0 \quad (3.100)$$

PŘÍKLAD 3.10 Pro konzolu z příkladu 3.9 vypočtěte průhybovou funkci $w(x)$ a určete průhyb a pootočení volného konce.

Řešení: Po délce konzoly není předepsáno spojité zatížení, takže řešíme diferenciální rovnici ohybové čáry s nulovou pravou stranou ve tvaru

$$EIw^{IV}(x) = 0 \quad (3.101)$$

Jinými slovy, máme najít takovou funkci $w(x)$, jejíž čtvrtá derivace je nulová. To obecně platí pro jakýkoli kubický polynom ve tvaru

$$w(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (3.102)$$

kde C_1 až C_4 jsou zatím libovolné integrační konstanty. Jejich hodnoty určíme z okrajových podmínek, které byly sestaveny v příkladu 3.9.

Po dosazení obecného řešení (3.102) do okrajových podmínek (3.96) a (3.98)–(3.100) dostaneme čtyři lineární algebraické rovnice pro neznámé C_1 až C_4 . Aby byl postup zcela jasný, připravíme si nejprve první tři derivace kubického polynomu (3.102):

$$w'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3 \quad (3.103)$$

$$w''(x) = 6C_1x + 2C_2 \quad (3.104)$$

$$w'''(x) = 6C_1 \quad (3.105)$$

Po dosazení do zmíněných okrajových podmínek dostaneme

$$w(L) = 0 \quad \dots \quad C_1L^3 + C_2L^2 + C_3L + C_4 = 0 \quad (3.106)$$

$$w'''(0) = \frac{\bar{F}}{EI} \quad \dots \quad 6C_1 = \frac{\bar{F}}{EI} \quad (3.107)$$

$$w''(0) = \frac{\bar{M}}{EI} \quad \dots \quad 2C_2 = \frac{\bar{M}}{EI} \quad (3.108)$$

$$w'(L) = 0 \quad \dots \quad 3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 = 0 \quad (3.109)$$

Vzniklou soustavu rovnic lze naštěstí řešit snadno, protože druhá a třetí rovnice obsahují jen po jedné neznámé. Snadno tedy určíme integrační konstanty

$$C_1 = \frac{\bar{F}}{6EI} \quad (3.110)$$

$$C_2 = \frac{\bar{M}}{2EI} \quad (3.111)$$

a po dosazení do (3.109) a (3.106) dopočítáme

$$C_3 = -3C_1L^2 - 2C_2L = -3\frac{\bar{F}}{6EI}L^2 - 2\frac{\bar{M}}{2EI}L = -\frac{\bar{F}L^2}{2EI} - \frac{\bar{M}L}{EI} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_1L^3 - C_2L^2 - C_3L = -\frac{\bar{F}}{6EI}L^3 - \frac{\bar{M}}{2EI}L^2 - \left(-\frac{\bar{F}L^2}{2EI} - \frac{\bar{M}L}{EI}\right)L = \\ &= \frac{\bar{F}L^3}{3EI} + \frac{\bar{M}L^2}{2EI} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Teď už jen zbývá dosadit vypočtené integrační konstanty do obecného řešení (3.102) a zapsat výslednou průhybovou funkci

$$w(x) = \frac{\bar{F}}{6EI}x^3 + \frac{\bar{M}}{2EI}x^2 - \left(\frac{\bar{F}L^2}{2EI} + \frac{\bar{M}L}{EI}\right)x + \frac{\bar{F}L^3}{3EI} + \frac{\bar{M}L^2}{2EI} \quad (3.114)$$

Abychom se ve výsledku lépe vyznali, shromáždíme zvlášť členy závislé na osamělé síle \bar{F} a zvlášť členy závislé na osamělém momentu \bar{M} :

$$w(x) = \frac{\bar{F}}{6EI} (x^3 - 3L^2x + 2L^3) + \frac{\bar{M}}{2EI} (x^2 - 2Lx + L^2) \quad (3.115)$$

První část výrazu na pravé straně (3.115) odpovídá průhybu od osamělé síly a druhá část průhybu od osamělého momentu. Vyřešili jsme tedy vlastně dvě úlohy najednou. Průhyb volného konce

$$w(0) = \frac{\bar{F}L^3}{3EI} + \frac{\bar{M}L^2}{2EI} \quad (3.116)$$

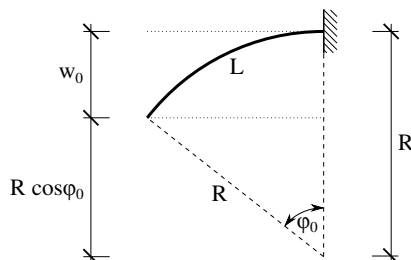
získáme pouhým vyhodnocením funkce $w(x)$ v bodě $x = 0$. Výsledek pochopitelně odpovídá integrační konstantě C_4 . Kladná hodnota odpovídá tomu, že se volný konec posouvá směrem dolů. Při výpočtu pootočení volného konce využijeme vztahu (3.61) mezi průhybem a pootočením:

$$\varphi(0) = -w'(0) = \frac{\bar{F}L^2}{2EI} + \frac{\bar{M}L}{EI} \quad (3.117)$$

Kladná hodnota odpovídá tomu, že se volný konec otáčí v kladném smyslu, tedy proti hodinovým ručičkám.

Všimněte si, že podle (3.115) zatížení osamělou silou na konci konzoly vede ke kubickému průběhu průhybové funkce, zatímco osamělý moment vede ke kvadratickému průběhu. To je logické, protože při zatížení konce konzoly osamělou silou vznikne konstantní posouvající síla a lineárně proměnný ohybový moment, tedy i lineárně proměnná křivost. Jelikož křivost je záporně vzatá druhá derivace průhybu, musí být při lineární křivosti průhyb kubický. Podobně při zatížení konce konzoly osamělým momentem vzniká nulová posouvající síla a konstantní ohybový moment, tedy i konstantní křivost. Aby byla druhá derivace průhybu konstantní, musí být průhyb kvadratický.

Zde se ale pozorný čtenář může zarazit. Při konstantním ohybovém momentu na prutu s konstantní ohybovou tuhostí průřezu by mělo dojít k rovnoměrnému ohybu, kterým jsme se zabývali v článku 3.1. Tam jsme ale vycházeli z představy, že při rovnoměrném ohybu leží deformovaná střednice na kružnici. Pak ovšem nemůže být průhyb kvadratický, protože tomu by odpovídal parabolický tvar ohybové čáry. Tento zdánlivý paradox je způsoben předpokladem, že úhly pootočení jsou velmi malé (ten byl zapotřebí při odvození vztahu mezi průhybem a pootočením v jednoduchém tvaru (3.61)). Takový předpoklad vnáší do výpočtu určitou chybu a mimo jiné vede k tomu, že křivkou o konstantní křivosti v našem zjednodušeném smyslu je parabola místo kružnice. Kdybychom použili přesnější teorii s nelineárním vztahem mezi průhybem a křivostí, vyšla by kružnice, ale za cenu komplikovaného výpočtu. V následujícím příkladu ukážeme, že chyba vzniklá použitím zjednodušeného lineárního vztahu je zpravidla velmi malá.



Obrázek 3.18: Konzola při rovnoměrném ohybu.

PŘÍKLAD 3.11 Určete přesné hodnoty průhybu a pootočení volného konce konzoly při rovnoměrném ohybu a porovnejte s přibližnými hodnotami z předchozího příkladu.

Řešení: Pokud je levý konec konzoly zatížen osamělým momentem \bar{M} , je ohybový moment $M(x) = -\bar{M}$ konstantní po délce prutu a deformovaná střednice leží na kružnici o poloměru

$$R = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{EI}{\bar{M}} \quad (3.118)$$

Pootočení volného konce odpovídá podle obr. 3.18 středovému úhlu

$$\varphi_0 = \frac{L}{R} = \frac{\bar{M}L}{EI} \quad (3.119)$$

Tato hodnota přesně souhlasí s výsledkem předchozího příkladu, viz (3.117) pro $\bar{F} = 0$. Je to tím, že ve vztahu (3.37) mezi křivostí a pootočením jsme žádné zjednodušení neprováděli. Přesnou hodnotu průhybu volného konce lze na základě jednoduchých geometrických úvah podle obr. 3.12 vyjádřit jako

$$w_0 = R - R \cos \varphi_0 = R(1 - \cos \varphi_0) = \frac{EI}{\bar{M}} \left(1 - \cos \frac{\bar{M}L}{EI} \right) \quad (3.120)$$

V předchozím příkladu vyšlo $w(0) = \bar{M}L^2/2EI$, viz (3.116) pro $\bar{F} = 0$. Zdánlivě jde o zcela odlišný výsledek, ale pro malé hodnoty úhlu φ_0 je možné provést porovnání na základě rozvoje funkce cosinus do Taylorovy řady:

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} + \frac{\varphi_0^4}{24} - O(\varphi_0^6) \quad (3.121)$$

kde $O(\varphi_0^6)$ označuje členy řádu φ_0^6 a vyššího. Pokud uplatníme pouze kvadratickou část tohoto rozvoje, tedy použijeme aproximaci $\cos \varphi_0 \approx 1 - \varphi_0^2/2$, dostaneme po dosazení do (3.120)

$$w_0 = \frac{EI}{\bar{M}} \left(1 - \cos \frac{\bar{M}L}{EI} \right) \approx \frac{EI}{\bar{M}} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}L}{EI} \right)^2 \right] = \frac{\bar{M}L^2}{2EI} = w(0) \quad (3.122)$$

Odtud je zřejmé, že výpočet s využitím zjednodušeného lineárního vztahu mezi pootočením a průhybem vede ke stejnému výsledku, jako přesný výpočet s následnou aproximací $1 - \cos \varphi_0 \approx \varphi_0^2/2$.

Relativní chyba ϵ , které se zjednodušeným výpočtem dopouštíme, je pro malé φ_0 zhruba stejná jako poměr nejvýznamnějšího zanedbaného členu v Taylorově rozvoji ku členu předchozímu (uváženému), tedy

$$\epsilon \approx \frac{\varphi_0^4/24}{\varphi_0^2/2} = \frac{\varphi_0^2}{12} \quad (3.123)$$

Jestliže je podle našeho předpokladu $\varphi_0 \ll 1$, je tato chyba skutečně nepatrná. Abychom to doložili konkrétním příkladem, uvažujme konzolu z příkladu 3.1 (vyhlídková plošina pana Kutila). Pro dané hodnoty $L = 3$ m, $\bar{M} = 0,6$ kNm a $EI = 24,33$ kNm² vyšlo pootočení

$$\varphi_0 = \frac{\bar{M}L}{EI} = 73,983 \text{ mrad} \quad (3.124)$$

a podle vzorce (3.116) založeného na zjednodušeném lineárním vztahu vyjde průhyb

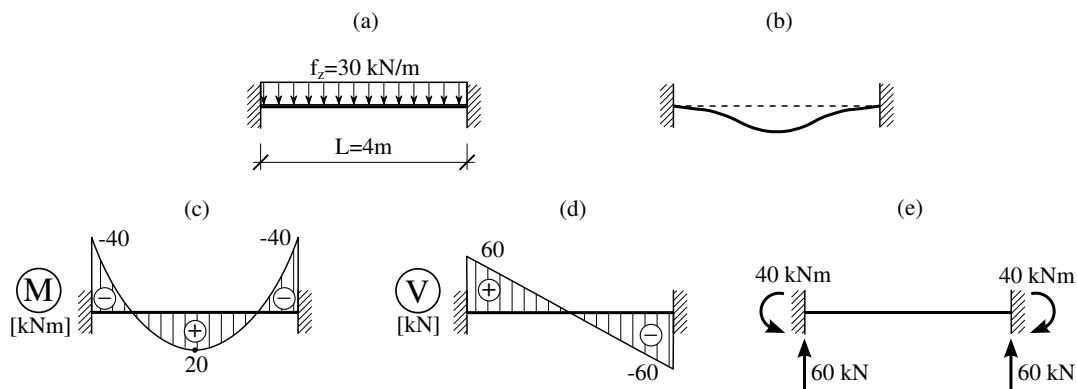
$$w(0) = \frac{\bar{M}L^2}{2EI} = 110,97 \text{ mm} \quad (3.125)$$

zatímco podle “přesného” vzorce (3.120) by vyšlo

$$w_0 = \frac{EI}{\bar{M}} \left(1 - \cos \frac{\bar{M}L}{EI} \right) = 110,92 \text{ mm} \quad (3.126)$$

Relativní chyba je asi půl promile, což je z praktického hlediska zcela zanedbatelné. Obvykle bývá ještě menší, protože správně navržené stavební konstrukce se zpravidla deformují méně dramaticky než plošina pana Kutila.

PŘÍKLAD 3.12 Oboustranně vetknutý nosník konstantního průřezu je vystaven rovnoměrnému svislému zatížení (obr. 3.13a). Vypočtete vnitřní síly, reakce a průhyby. Řešte nejprve obecně a poté pro konkrétní zadání: Rozpětí nosníku $L = 4$ m, vyroben z oceli, válcovaný průřez IPE 300, zatížení $f_z = 30$ kN/m.



Obrázek 3.19: Oboustranně vetknutý nosník: (a) statické schéma a zatížení, (b) ohybová čára (deformovaná střednice), (c) průběh ohybového momentu, (d) průběh posouvající síly, (e) reakce.

Řešení: Pro oboustranně vetknutý nosník je na obou koncích zabráněno posunu i otočení, takže diferenciální rovnici (3.92) řešíme s okrajovými podmínkami $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(L) = 0$ a $w'(L) = 0$. Při rovnoměrném zatížení je pravá strana f_z konstantní a po čtyřnásobné integraci dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$w(x) = \frac{f_z}{EI} \frac{x^4}{24} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (3.127)$$

Dosazením tohoto obecného řešení do okrajových podmínek získáme čtyři lineární rovnice pro integrační konstanty:

$$w(0) = 0 \quad \dots \quad C_4 = 0 \quad (3.128)$$

$$w'(0) = 0 \quad \dots \quad C_3 = 0 \quad (3.129)$$

$$w(L) = 0 \quad \dots \quad \frac{f_z}{EI} \frac{L^4}{24} + C_1 L^3 + C_2 L^2 + C_3 L + C_4 = 0 \quad (3.130)$$

$$w'(L) = 0 \quad \dots \quad \frac{f_z}{EI} \frac{L^3}{6} + 3C_1 L^2 + 2C_2 L + C_3 = 0 \quad (3.131)$$

Z prvních dvou podmínek přímo plyne, že integrační konstanty C_3 a C_4 jsou nulové. Zbývající dvě podmínky pak upravíme na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$C_1 L^3 + C_2 L^2 = -\frac{f_z L^4}{24EI} \quad (3.132)$$

$$3C_1 L^2 + 2C_2 L = -\frac{f_z L^3}{6EI} \quad (3.133)$$

Při řešení eliminační metodou vynásobíme rovnici (3.132) konstantou $3/L$ a pak ji odečteme od (3.133). Tím vyloučíme neznámou C_1 a ze vzniklé rovnice

$$-C_2L = -\frac{f_zL^3}{24EI} \quad (3.134)$$

určíme konstantu

$$C_2 = \frac{f_zL^2}{24EI} \quad (3.135)$$

Podle (3.132) pak dopočítáme

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \left(-\frac{f_zL^4}{24EI} - \frac{f_zL^2}{24EI}L^2 \right) = -\frac{f_zL}{12EI} \quad (3.136)$$

Po dosazení integračních konstant do obecného řešení (3.127) získáme průhybovou funkci

$$w(x) = \frac{f_z}{EI} \frac{x^4}{24} - \frac{f_zL}{12EI} x^3 + \frac{f_zL^2}{24EI} x^2 = \frac{f_z}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2) \quad (3.137)$$

jejíž průběh je vynesena na obr. 3.13b. Z ní pak snadno odvodíme funkce popisující průběh ohybového momentu

$$M(x) = -EIw''(x) = -\frac{f_z}{24} (12x^2 - 12Lx + 2L^2) = -\frac{f_z}{12} (6x^2 - 6Lx + L^2) \quad (3.138)$$

a posouvající síly

$$Q(x) = M'(x) = \frac{f_z}{12} (-12x + 6L) = \frac{f_z}{2} (L - 2x) \quad (3.139)$$

V koncových průřezech $x = 0$ a $x = L$ nabývá ohybový moment záporné hodnoty $M(0) = M(L) = -f_zL^2/12$. To znamená, že v okolí podpor jsou tažena horní vlákna. Naopak uprostřed rozpětí je moment $M(L/2) = f_zL^2/24$ kladný a tažena jsou spodní vlákna. Průběh ohybového momentu je kvadratický a je vykreslen na obr. 3.13c. Hodnoty ohybového momentu v krajních průřezích zároveň odpovídají momentovým reakcím. Průběh posouvající síly je lineární (obr. 3.13d), přičemž na levém konci je posouvající síla $Q(0) = f_zL/2$ kladná, zatímco na pravém konci je $Q(L) = -f_zL/2$ záporná. Užitečné je také odvodit vzorec pro maximální průhyb, kterého je dosaženo uprostřed rozpětí. Po dosazení $x = L/2$ do (3.137) dostaneme

$$w_{\max} = w(L/2) = \frac{f_z}{24EI} \left[\left(\frac{L}{2}\right)^4 - 2L \left(\frac{L}{2}\right)^3 + L^2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] = \frac{f_zL^4}{384EI} \quad (3.140)$$

Pro ocelový válcovaný profil IPE 300 byla ohybová tuhost průřezu $EI = 17,556 \text{ MNm}^2$ vypočtena v příkladu 3.6, viz (3.58). Po dosazení hodnot ze zadání do (3.140) získáme konkrétní hodnotu průhybu

$$w_{\max} = \frac{f_zL^4}{384EI} = \frac{30 \cdot 10^3 \times 4^4}{384 \times 17,556 \cdot 10^6} \text{ m} = 1,139 \text{ mm} \quad (3.141)$$

Snadno také vypočteme extrémní hodnoty vnitřních sil:

$$M(0) = M(L) = -\frac{f_z L^2}{12} = -\frac{30 \cdot 10^3 \times 4^2}{12} \text{ Nm} = -40 \text{ kNm} \quad (3.142)$$

$$M(L/2) = \frac{f_z L^2}{24} = \frac{30 \cdot 10^3 \times 4^2}{24} \text{ Nm} = 20 \text{ kNm} \quad (3.143)$$

$$Q(0) = \frac{f_z L}{2} = \frac{30 \cdot 10^3 \times 4}{2} \text{ N} = 60 \text{ kN} \quad (3.144)$$

$$Q(L) = -\frac{f_z L}{2} = -\frac{30 \cdot 10^3 \times 4}{2} \text{ N} = -60 \text{ kN} \quad (3.145)$$

V obou podporách vzniknou svislé silové reakce o velikosti 60 kN, orientované nahoru, a momentové reakce o velikosti 40 kNm. V levé podpoře působí momentová reakce proti ručičkám, v pravé podpoře po ručičkách, viz obr. 3.13e.
