



А. Г. Дибир, О. В. Макаров, Н. И. Пекельный,
Г. И. Юдин, М.Н. Гребенников

**ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ
КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Часть I



2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

А. Г. Дибир, О. В. Макаров, Н. И. Пекельный,
Г. И. Юдин, М.Н. Гребенников

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Часть I

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2007

Практические расчеты на прочность конструктивных элементов. Ч. I. / А. Г. Дибир, О. В. Макаров, Н. И. Пекельный, Г. И. Юдин, М. Н. Гребенников. – Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – 102 с.

Представлен расчет на прочность элементов конструкций, представляющих собой толстостенный цилиндр под действием внутреннего, наружного или одновременно внутреннего и наружного давлений. Решена задача Ляме – определение напряжений в толстостенной трубе, в том числе с эксцентричным отверстием. Определены напряжения в толстостенной сфере. Для составных цилиндров решена задача Гадолина. Проведено сравнение прочностей составного и сплошного цилиндров. Даны конструктивно-технологические рекомендации по повышению прочности в технике высоких давлений.

Кроме теоретических выкладок по определению напряженно-деформированного состояния материала цилиндра рассмотрены примеры реальных расчетов элементов конструкций как в упругой, так и в пластической зоне.

Для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей, изучающих механику материалов и конструкций, сопротивление материалов, техническую и прикладную механику. Может быть использовано при самостоятельной работе.

Ил. 57. Библиогр.: 13 назв.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. П.П. Лепихин,
канд. техн. наук, доц. А.Г. Кислов

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании различных конструкций (сооружений, машин, приборов и др.) инженеру необходимо выполнять расчеты на прочность. Неправильный расчет даже второстепенной детали может повлечь за собой тяжелые последствия, привести к разрушению всей конструкции. На стадии эскизного проектирования инженер пользуется достаточно простыми и эффективными схемами расчета, основанными на методах науки о сопротивлении материалов.

Однако расчет не всех элементов конструкций можно свести к простой расчетной схеме. Примером такого конструктивного элемента является толстостенный цилиндр, нагруженный равномерно распределенным давлением. Под действием внутреннего давления находятся, в частности, цилиндры машин и аппаратов химических производств, двигателей, компрессоров, гидравлических прессов, устройств гидроприводов, амортизаторов и др. В качестве примера цилиндра, находящегося одновременно под действием внутреннего и наружного давлений, можно указать промежуточный слой трехслойного цилиндра, собранного с натягом.

В учебном пособии уделено внимание элементам конструкции, которые можно отнести к расчетной схеме толстостенного цилиндра с учетом его особенностей. Выведены уравнения равновесия элемента трубы и условие совместности деформаций выделенного элемента для осесимметричного цилиндрического тела в простейшем случае неизменности нагрузок и напряжений вдоль оси цилиндра. Рассмотрены задачи отклонения от осесимметричности расчетной схемы, а также расчетов составных цилиндров и пластического деформирования стенок цилиндров с учетом зависимостей теории малых упругопластических деформаций.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A, B, C_1, C_2 — константы;
- $a, r_{\text{в}}$ — внутренний радиус цилиндра, трубы, составного цилиндра;
- $b, r_{\text{н}}$ — наружный радиус цилиндра, трубы, составного цилиндра;
- c — радиус контактной поверхности составного цилиндра;
- e — расстояние между осями внутренней и наружной поверхностей цилиндра;
- E — модуль упругости первого рода;
- F — площадь поперечного сечения;
- f — коэффициент трения;
- n — коэффициент запаса прочности;
- P_z — осевое (продольное) усилие;
- p — равномерное давление;
- $p_{\text{пред}}$ — предельное давление;
- $p_1, p_{\text{в}}$ — равномерное давление на внутреннюю поверхность;
- $p_2, p_{\text{н}}$ — равномерное давление на наружную поверхность;
- $p_{\text{к}}$ — давление по контактной поверхности составного цилиндра;
- r — удаление от оси цилиндра;
- t — толщина стенки цилиндра;
- u — линейное перемещение в радиальном направлении;
- z — ось цилиндра, трубы, составного цилиндра;
- α — коэффициент концентрации напряжений;
- γ — объемный вес;
- $\Delta\delta$ — разность между наружным радиусом внутреннего цилиндра и внутренним радиусом наружного цилиндра (натяг);
- δ — разность между наружным диаметром внутреннего цилиндра и внутренним диаметром наружного цилиндра (натяг);
- $\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta}$ — радиальная, продольная, окружная относительные линейные деформации;
- θ — угловая окружная координата;
- μ — коэффициент Пуассона;
- $[\sigma]$ — допускаемое напряжение;
- $\sigma_{0,2}$ — условный предел текучести материала;
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения;
- $\sigma_{\text{пред}}$ — предельное напряжение;
- σ_{T} — предел текучести материала;
- $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}$ — эквивалентное напряжение согласно третьей теории прочности;
- $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$ — эквивалентное напряжение согласно четвертой теории прочности;
- $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\theta}$ — радиальное, продольное, окружное напряжения;
- τ_{max} — максимальное касательное напряжение.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ (ЗАДАЧА ЛАМЕ *)

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние (НДС) толстостенной бесконечно длинной трубы, внутренняя и наружная поверхности которой – концентрические круговые цилиндры:

$$r_{\text{в}} = a; r_{\text{н}} = b; p_{\text{в}} = p_1; p_{\text{н}} = p_2.$$

Ее следует считать толстостенной, если толщина стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра, т. е.

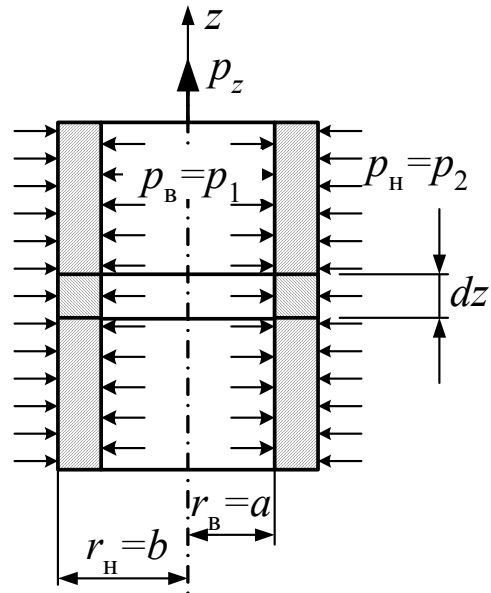


Рис. 1.1

$$\frac{2(b-a)}{b+a} > \frac{1}{10}. \quad (1.1)$$

Давления p_1 и p_2 равномерно распределены на соответствующей внутренней или наружной поверхности (рис. 1.1).

Вследствие неизменности p_1 и p_2 по длине цилиндра, формы и размеров его поперечного сечения все диски толщиной dz находятся в одинаковых условиях, т. е. НДС трубы не зависит от переменной z . Поскольку p_1 и p_2 в окружном направлении также постоянны, а поперечное сечение трубы осесимметрично, ее НДС не зависит от угловой координаты θ . Следовательно, НДС $\cong f(r)$.

* ЛАМЕ **Габриель** (22.7.1795 — 1.3.1870) — французский инженер, математик и физик, член Парижской АН (1843 г.). Окончил политехническую и горную школы. После этого с 1820 г. по 1831 г. работал в России профессором в институте путей сообщения. Возвратившись в Париж (1832 г.), получил должность профессора политехнической школы, с 1848 г. — профессор Сорбонны.

1.2. Вывод уравнения равновесия элемента трубы

Вследствие симметрии конструкции и однородности ее нагружения в осевом направлении координатные оси являются главными направлениями НДС трубы.

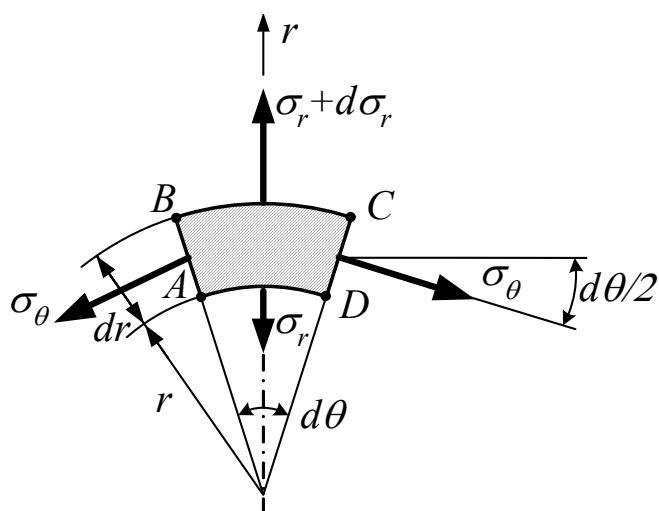
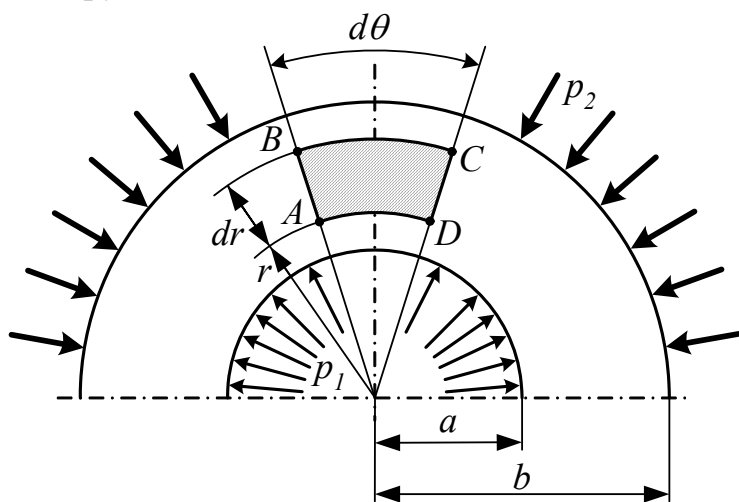


Рис. 1.2

$$\begin{cases} \sum P_{x,i} = 0; \\ \sum P_{y,i} = 0; \\ \sum P_{z,i} = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum P_{r,i} = 0; \\ \sum P_{\theta,i} = 0; \\ \sum P_{z,i} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Рассмотрим последнее уравнение $\sum P_{z,i} = 0$:

$$\sigma_z^{\text{верх}} dF = \sigma_z^{\text{ниж}} dF \rightarrow \sigma_z^{\text{верх}} = \sigma_z^{\text{ниж}} = \sigma_z = \text{const},$$

затем – второе уравнение $\sum P_{\theta,i} = 0$:

$$\sigma_{\theta(AB)} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} = \sigma_{\theta(CD)} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} \rightarrow \sigma_{\theta(AB)} = \sigma_{\theta(CD)} = \sigma_{\theta},$$

На площадках, перпендикулярных оси z , действует напряжение σ_z , зависящее от граничных условий на торцах трубы, и его величина определяется из соотнош. $\sigma_z = \frac{P_z}{F}$, (1.2)

где P_z – осевое усилие, F – площадь поперечного сечения цилиндра. На элемент ABCD толщиной dz действует пространственная система сходящихся сил (равнодействующих), для которой справедливы три

далее – первое уравнение системы (1.3) $\sum P_{r,i} = 0$:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Разделим его на dz и учтем, что $d\theta \rightarrow 0$, а значит $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - \sigma_\theta dr d\theta = 0.$$

Разделив его на $d\theta$, получим

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - \sigma_r r - \sigma_\theta dr = 0.$$

Раскроем скобки

$$\sigma_r r + r d\sigma_r + \sigma_r dr + d\sigma_r dr - \sigma_r r - \sigma_\theta dr = 0.$$

Выполним сокращение и ввиду малости исключим составляющую $d\sigma_r dr$:

$$r d\sigma_r + \sigma_r dr - \sigma_\theta dr = 0.$$

Полученное выражение разделим на $r dr$:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1.4)$$

и получим уравнение равновесия, связывающее напряжения.

Это уравнение содержит две неизвестные функции $\sigma_r = \sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$, т. е. конструкция один раз статически неопределима.

1.3. Условие совместности деформаций выделенного элемента

Рассмотрим элемент ABCD на рис. 1.3.

Необходимо определить

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dr + du) - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (1.5)$$

и

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'D' - AD}{AD},$$

где $A'D' = (r + u)d\theta$; $AD = r d\theta$.

Тогда

$$\varepsilon_\theta = \frac{r d\theta + u d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \quad (1.6)$$

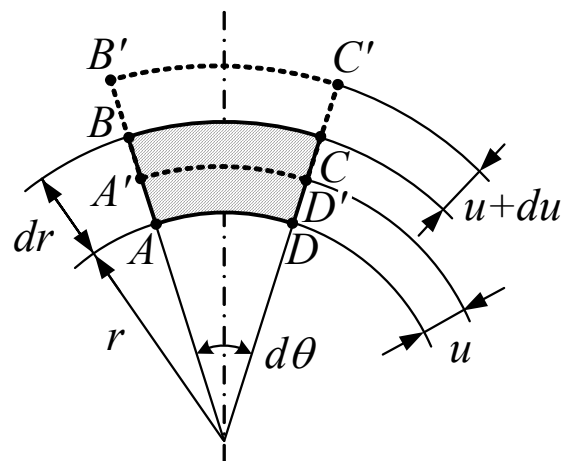


Рис. 1.3

или

$$u = \varepsilon_{\theta} r. \quad (1.7)$$

В этом случае производная

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_{\theta} + r \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr}. \quad (1.8)$$

Окончательно условие совместности деформаций получим в виде

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\theta} + r \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr}. \quad (1.9)$$

1.4. Совместное решение уравнения равновесия и условия совместности деформаций

Используем обобщенный закон Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_{\theta})]; \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_r + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_{\theta})]. \end{cases} \quad (1.10)$$

Подставив в выражение (1.9) ε_r и ε_{θ} из системы уравнений (1.10)

$$\frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_{\theta})] = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] + r \frac{1}{E} \left[\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \mu \left(\frac{d\sigma_z}{dz} \right) \right]$$

и упростив его с учетом, если $\sigma_z = \frac{P_z}{F}$, то $\frac{d\sigma_z}{dz} = 0$, получим

$$\sigma_r - \mu \sigma_z - \mu \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta} - \mu \sigma_r - \mu \sigma_z + r \left(\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \right).$$

Сократим обе части уравнения на $\mu \sigma_z$ и сгруппируем напряжения и их производные

$$\sigma_r (1 + \mu) - \sigma_{\theta} (1 + \mu) = r \left(\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \right).$$

Разделим обе части уравнения на r и окончательно получим

$$\frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} (1 + \mu) = \frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (1.11)$$

Выполним замену в левой части с учетом того, что уравнение (1.4) можно записать так:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{d\sigma_r}{dr} \quad (1.12)$$

и тогда выражение (1.11) примет вид

$$-\frac{d\sigma_r}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \rightarrow \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d(\sigma_\theta + \sigma_r)}{dr} = 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_\theta + \sigma_r = const = 2C_1. \quad (1.13)$$

Константу приняли в виде $2C_1$ для удобства дальнейшего вывода.

Затем преобразуем уравнение равновесия (1.4)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - 2\sigma_r + \sigma_r \quad \text{или} \quad r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2C_1.$$

Умножим обе части последнего равенства на r :

$$r^2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2r\sigma_r = 2C_1 r$$

и свернем левую часть в общую производную

$$\frac{d(r^2 \sigma_r)}{dr} = 2C_1 r. \quad (1.14)$$

Проинтегрировав (1.14), получим

$$r^2 \sigma_r = \int 2C_1 r dr + C_2 = 2C_1 \frac{r^2}{2} + C_2,$$

окончательно запишем

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \quad (1.15)$$

Величины C_1 и C_2 находим из граничных условий.

При $r = a = r_B$ $\sigma_r = -p_1 = -p_B$;

$r = b = r_H$ $\sigma_r = -p_2 = -p_H$; (знак «минус» – сжатие), тогда

уравнение (1.15) примет вид

$$\begin{cases} -p_B = C_1 + \frac{C_2}{r_B^2}; \\ -p_H = C_1 + \frac{C_2}{r_H^2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения вычтем второе, получим

$$-(p_B - p_H) = C_2 \left(\frac{1}{r_B^2} - \frac{1}{r_H^2} \right) = C_2 \left(\frac{r_H^2 - r_B^2}{r_B^2 r_H^2} \right)$$

и определим константу

$$C_2 = - \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}. \quad (1.16)$$

Вернемся к граничным условиям.

Умножим $-p_B = C_1 + \frac{C_2}{r_B^2}$ на $(-r_B^2)$, получим $p_B r_B^2 = -C_1 r_B^2 - C_2$.

Умножим $-p_H = C_1 + \frac{C_2}{r_H^2}$ на (r_H^2) , получим $-p_H r_H^2 = C_1 r_H^2 + C_2$.

Просуммируем получившиеся выражения $p_B r_B^2 - p_H r_H^2 = C_1 (r_H^2 - r_B^2)$

Отсюда получим значение другой константы

$$C_1 = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}. \quad (1.17)$$

Окончательно запишем

$$\sigma_r = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} - \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r^2}. \quad (1.18)$$

Поскольку $\sigma_\theta + \sigma_r = 2C_1$, то

$$\sigma_\theta = 2C_1 - \sigma_r = 2 \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} - \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r^2}.$$

Окончательно запишем

$$\sigma_\theta = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r^2}. \quad (1.19)$$

Для удобства воспользуемся объединенной формулой

$$\sigma_r = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r^2}. \quad (1.20)$$

1.5. Частные случаи

1.5.1. Толстостенный цилиндр под действием внутреннего давления

Дано: $p_B = p$; $p_H = 0$ (рис. 1.4). Определить: НДС трубы.

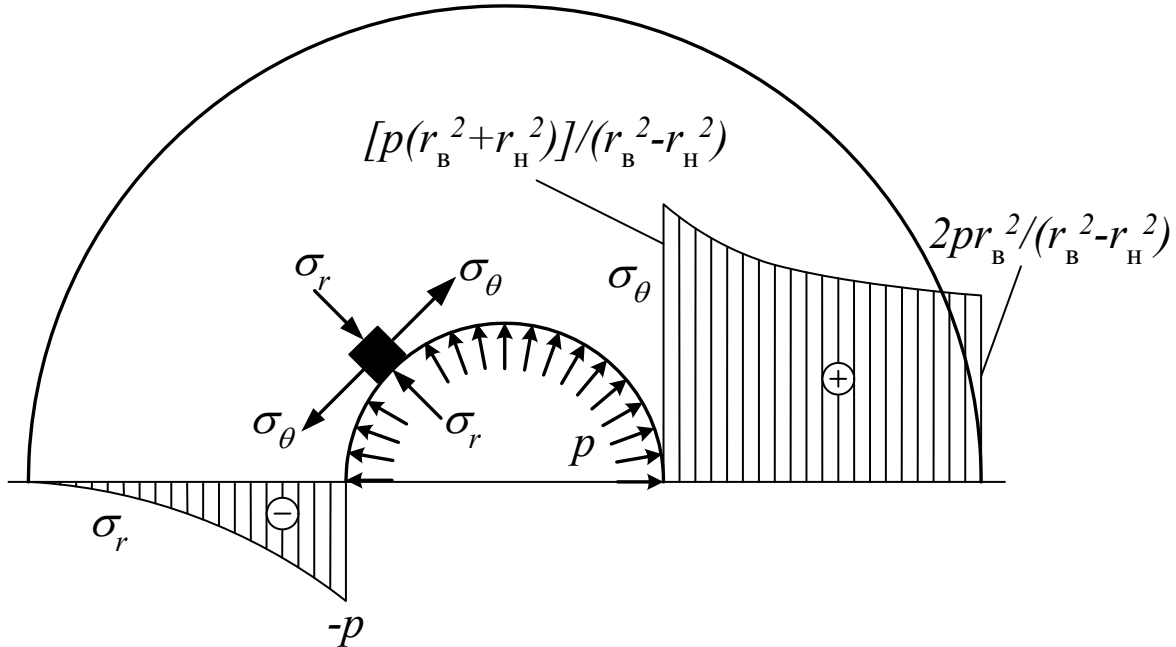


Рис. 1.4

$$\sigma_r = \frac{p_B r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_H^2}{r^2} \right); \quad (1.21)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right).$$

При $r = r_H$ $\sigma_r = 0$, а при $r = r_B$ $\sigma_r = -p$.

$$\sigma_\theta = \frac{p r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right).$$

$$\text{При } r = r_B \quad \sigma_\theta = \frac{p(r_B^2 + r_H^2)}{r_H^2 - r_B^2}, \quad \text{а при } r = r_H \quad \sigma_\theta = \frac{p 2 r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}.$$

Выполним расчет на прочность: $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Опасной является точка на внутренней поверхности.

Если $\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$, то

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = p \frac{r_{\text{В}}^2 + r_{\text{Н}}^2}{r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2} + p = \frac{p(r_{\text{В}}^2 + r_{\text{Н}}^2 + r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2)}{r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2} = p \frac{2r_{\text{Н}}^2}{r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = p \frac{2r_{\text{Н}}^2}{r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2} \leq [\sigma].$$

Определим $p_{\text{пред}}$. Если $[\sigma] = \sigma_{\text{пред}}$ и $r_{\text{Н}} \rightarrow \infty$, то

$$p_{\text{пред}} \lim_{r_{\text{Н}} \rightarrow \infty} \frac{2r_{\text{Н}}^2}{r_{\text{Н}}^2 - r_{\text{В}}^2} = \sigma_{\text{пред}};$$

$$p_{\text{пред}}^2 = \sigma_{\text{пред}};$$

$$p_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{2}.$$

Получен достаточно интересный результат. Внимательно проследим за изменением напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от толщины цилиндра. Примем $b = a + t$, где t – толщина стенки цилиндра.

Тогда

$$\sigma_\theta|_{r=a=r_{\text{В}}} = \frac{p[(a+t)^2 + a^2]}{t(2a+t)}, \quad \sigma_\theta|_{r=b=r_{\text{Н}}} = \frac{p2a^2}{t(2a+t)}.$$

При малом значении t

$$\sigma_\theta(r=a) \approx \sigma_\theta(r=b) \approx p(a/t).$$

Радиальное напряжение σ_r у внутренней поверхности численно равно $-p$, а у наружной – нулю независимо от толщины стенки цилиндра. Следовательно, в цилиндре с малой толщиной стенки окружные напряжения распределены по толщине почти равномерно, а радиальные – малы по сравнению с окружными так же, как толщина t мала по сравнению с радиусом.

Если толщина стенки цилиндра увеличивается, то наибольшие напряжения в нем при неизменном давлении уменьшаются, но не беспречно. Уже рассмотрен случай, когда $b \rightarrow \infty$, т. е. когда цилиндр имеет бесконечно большую толщину стенки. Тогда выражение (1.21) принимает вид

$$\sigma_r = \mp p \frac{a^2}{r^2}.$$

Таким образом, в цилиндре с бесконечно большой толщиной стенки радиальное напряжение в любой точке равно окружному (рис. 1.5) и при отсутствии осевых напряжений весь материал цилиндра находится в состоянии чистого сдвига.

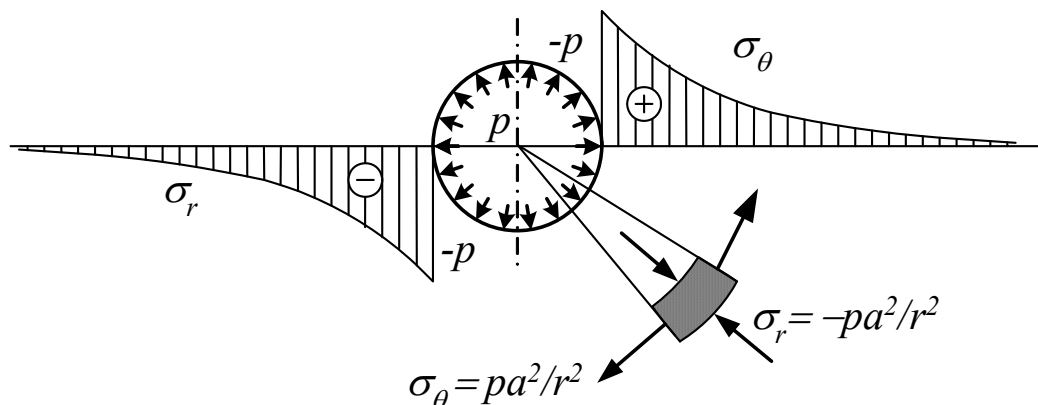


Рис. 1.5

Очевидно, что напряжения находятся в обратно пропорциональной зависимости от квадрата радиуса r , например, в точках, расположенных на расстоянии $r = 4a$ от оси, напряжения составляют всего $1/16$ от максимальных. Поэтому, когда достаточная для расчетов точность находится в пределах $5...6\%$ (практически большая точность недостижима вследствие упругих несовершенств материала), то цилиндр с отношением $b/a > 4$ можно рассчитывать как имеющий бесконечно большую толщину стенки. При этом форма внешнего контура не имеет значения (если все точки внешнего контура удалены от оси внутреннего отверстия на величины, большие, чем $4a$, то форма внешнего контура может быть произвольной). Расчет упругих тел, показанных на рис. 1.6, сводится к расчетной схеме цилиндра с бесконечно толстой стенкой.

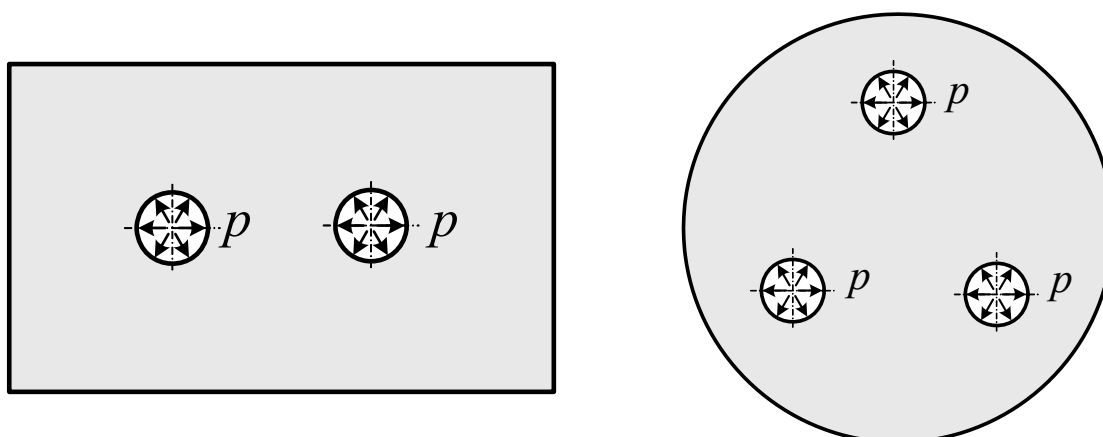


Рис. 1.6

1.5.2. Толстостенный цилиндр под действием наружного давления

Дано: $p_B = 0$; $p_H = p$ (рис. 1.6). Определить: НДС трубы.

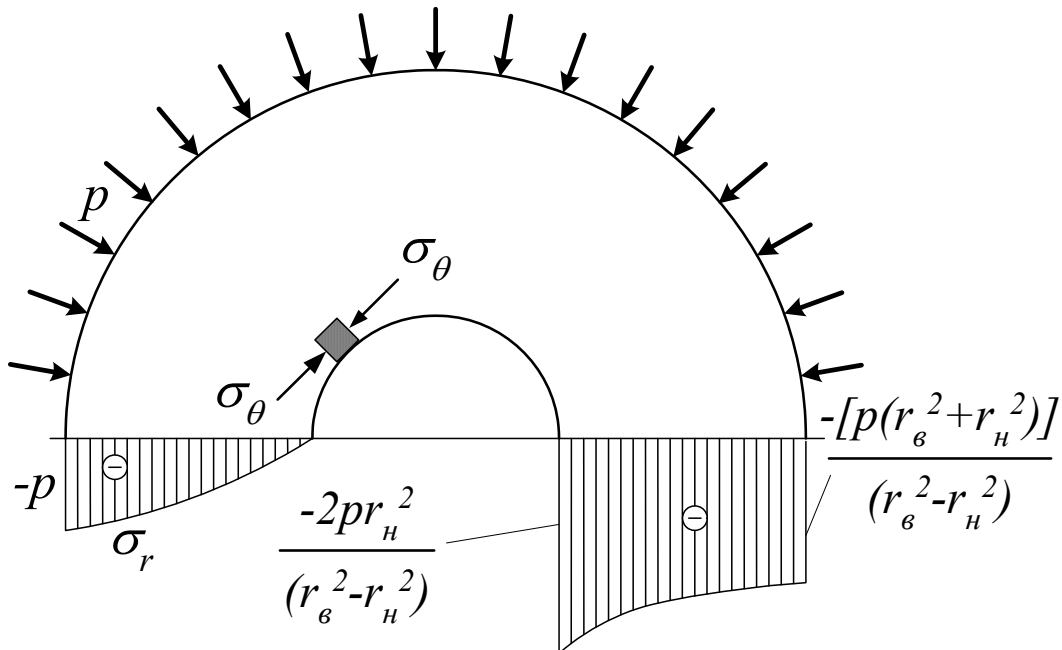


Рис. 1.7

$$\sigma_r = -\frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_B^2}{r^2} \right). \quad (1.22)$$

$$\sigma_r = -\frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_B^2}{r^2} \right).$$

При $r = r_B$ $\sigma_r = 0$, а при $r = r_H$ $\sigma_r = -p$.

$$\sigma_\theta = -\frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_B^2}{r^2} \right).$$

При $r = r_B$ $\sigma_\theta = -\frac{2p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}$, а при $r = r_H$ $\sigma_\theta = -\frac{p(r_H^2 + r_B^2)}{r_H^2 - r_B^2}$.

Выполним расчет на прочность. Для этого с учетом того, что на внутренней поверхности (пусть $P_z = 0$) $\sigma_1 = \sigma_r = 0$; $\sigma_2 = \sigma_z = 0$; $\sigma_3 = \sigma_\theta$, применим третью теорию прочности $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{2p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma],$$

а на внешней поверхности (пусть $P_z = 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0; \quad \sigma_2 = \sigma_r = -p; \quad \sigma_3 = \sigma_\theta = -\frac{p(r_H^2 + r_B^2)}{r_H^2 - r_B^2};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = \frac{p(r_H^2 + r_B^2)}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma].$$

Учтем напряжение σ_2 , применив четвертую теорию прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_3^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[2\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3^2]} = \\ &= \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3} = \sqrt{p^2 + p^2\left(\frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}\right)^2 - p^2\frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}} = \\ &= p\sqrt{1 - \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \left(\frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}\right)^2} = \\ &= p\sqrt{\frac{r_H^4 + r_B^4 - 2r_H^2 r_B^2 - r_H^4 + r_B^4 + r_H^4 + r_B^4 + 2r_H^2 r_B^2}{(r_H^2 - r_B^2)^2}} = \frac{p}{r_H^2 - r_B^2} \sqrt{r_H^4 + 3r_B^4}, \end{aligned}$$

которое меньше, чем на внутренней поверхности, поскольку $r_H > r_B$.

Следует отметить, что при $r_B = 0$ оба напряжения на внешней поверхности отрицательны и по величине равны давлению.

1.6. Определение напряжений в толстостенной трубе с эксцентричным отверстием

Подобная задача решена в начале прошлого века Г. Б. Джеффри. Если радиус отверстия равен a , радиус наружной поверхности цилиндра – b и расстояние между центрами соответствующих окружностей – e , то максимальным напряжением при действии внутреннего давления p_1 (если $e < 1/2a$) будет окружное напряжение на внутренней поверхности в самом тонком месте (рис. 1.8). Величина этого напряжения определяется формулой

$$\sigma_\theta = p_1 \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right]. \quad (1.23)$$

Напряжения, полученные по этому выражению, при нулевом эксцентриситете ($e = 0$) совпадают с напряжениями, определенными по формуле (1.21).

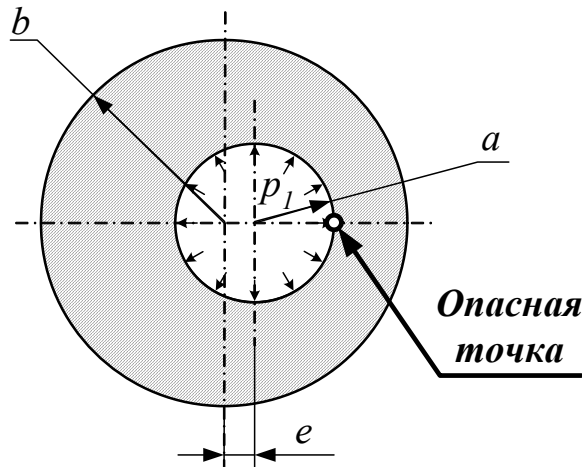


Рис. 1.8

1.7. Определение напряжений в толстостенной сфере

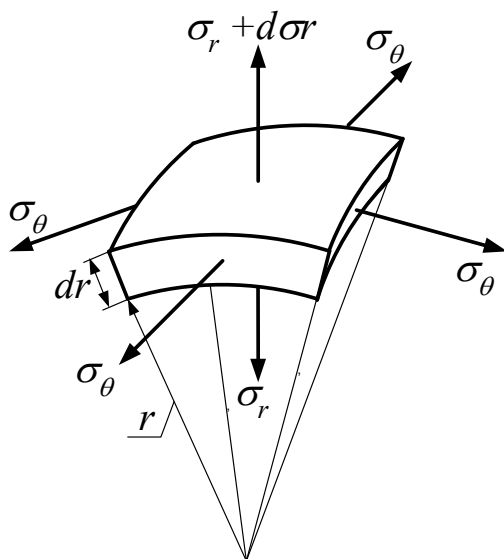


Рис. 1.9

Толстостенной будем считать сферу, отвечающую соотношению (1.1). Считаем, что сфера подвергается действию внутреннего p_1 и внешнего p_2 равномерных давлений. Выделим элемент внутри этой сферы, находящийся на расстоянии r от ее центра на углах $d\theta$ в вертикальной и фронтальной плоскостях и на приращении радиуса dr (рис. 1.9).

Рассмотрев уравнения равновесия и совместности деформирования данного элемента, можно получить выражения для определения радиальных и окружных напряжений

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3}; \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{2r^3}, \quad (1.24)$$

где A и B – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий, т. е. соответствия радиальных напряжений давлениям, действующим на внутренней и внешней поверхностях сферы:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3} = -p_1 \quad - \text{ на внутренней поверхности};$$

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3} = -p_2 \quad - \text{ на внешней.}$$

Отсюда получим постоянные

$$A = \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}; \quad B = -(p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}. \quad (1.25)$$

Подставим (1.25) в формулу (1.24) и запишем выражения для вычисления напряжений

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} - (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)};$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} + (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3 (r_2^3 - r_1^3)}.$$

Если действует только внутреннее давление, то напряжения

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} - p_1 \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)};$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} + p_1 \frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3 (r_2^3 - r_1^3)}.$$

Очевидно, что при $r = r_1$ $\sigma_r = -p_1$; $\sigma_\theta = \frac{p_1 \left(r_1^3 + \frac{1}{2} r_2^3 \right)}{r_2^3 - r_1^3}$,

а при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$; $\sigma_\theta = \frac{3p_1 r_1^3}{2(r_2^3 - r_1^3)}$.

Если действует только внешнее давление, то напряжения

$$\sigma_r = -\frac{p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} + p_2 \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)};$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} - p_2 \frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3 (r_2^3 - r_1^3)}.$$

Очевидно, что при $r = r_1$ $\sigma_r = 0$; $\sigma_\theta = -\frac{3p_2r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)}$,

а при $r = r_2$ $\sigma_r = -p_2$; $\sigma_\theta = -\frac{p_2\left(r_2^3 + \frac{1}{2}r_1^3\right)}{r_2^3 - r_1^3}$.

1.8. Вопросы для самоконтроля

1. Какую трубу считают толстостенной?
2. От чего зависит функция НДС толстостенной трубы в соответствии с постановкой задачи Ламе?
3. Определима ли статически конструкция трубы, подверженной внутреннему и наружному давлениям?
4. Какой вид имеет уравнение равновесия элемента трубы, связывающее окружные и радиальные напряжения?
5. Как выглядит уравнение совместности деформаций для элемента трубы?
6. Какой вид имеют функции окружных и радиальных напряжений в толстостенной трубе?
7. Чему равны радиальные напряжения при действии на трубу только внутреннего давления p ?
8. Какова предельная величина внутреннего давления (в зависимости от $\sigma_{\text{пред}}$), если наружный радиус трубы больше внутреннего в десять раз?
9. Какую расчетную схему следует применять для определения напряжений в плите с отверстиями, в которых действует давление?
10. Какие теории прочности применяют для оценки НДС у внутренней и наружной поверхностей цилиндра, нагруженного давлением извне?
11. Какая особенность расчета толстостенной трубы с эксцентричным отверстием?
12. Где действуют наибольшие по величине окружные напряжения при действии внутреннего давления на толстостенную трубу, имеющую эксцентриситет отверстия?
13. Что можно сказать о соотношении главных напряжений в толстостенной сфере, подверженной действию внутреннего и внешнего давлений?

1.9. Примеры решения задач определения напряжений в толстостенной трубе

Задача № 1.1

Подобрать размер наружного диаметра $2b$ цилиндра (рис. 1.10), предназначенного для удержания внутреннего давления $p = 50$ МПа при условии двукратного запаса. Предел текучести материала $\sigma_T = 500$ МПа. Внутренний диаметр $2a = 10$ см = 0,1 м.

Решение

Наиболее опасными являются точки, расположенные у внутренней поверхности цилиндра. В этих точках получим $\sigma_r = -p$;

$$\sigma_\theta = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2},$$

а с учетом наличия у цилиндра

днищ определим

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F_{\text{стенки}}} = \frac{p \pi a^2}{\pi b^2 - \pi a^2} = \frac{p a^2}{b^2 - a^2}.$$

Для того, чтобы воспользоваться третьей теорией прочности, запишем необходимые главные напряжения, приняв во внимание зависимость $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta; \quad \sigma_3 = \sigma_r.$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + p = \frac{p(b^2 + a^2 + b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = p \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2}.$$

С учетом условия о двукратном запасе можно записать следующее уравнение: $\frac{\sigma_T}{2} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$. Откуда получим $\frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{\sigma_T}{4p} = \frac{500}{4 \cdot 50} = \frac{5}{2}$.

Это значит, что внутренний и внешний (наружный) диаметры цилиндра связаны между собой уравнением $\frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{5}{2}$ или

$$2b^2 = 5b^2 - 5a^2; \quad 3b^2 = 5a^2; \quad b^2 = \frac{5}{3}a^2; \quad b = a\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

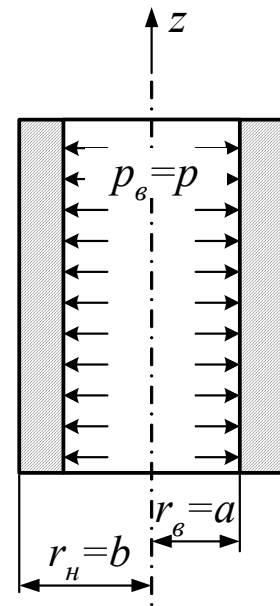


Рис. 1.10

$$\text{Внешний диаметр } 2b = 2a\sqrt{\frac{5}{3}} = 10\sqrt{\frac{5}{3}} = 12,9 \text{ см.}$$

Замечание. Иногда давление измеряют в *атмосферах (атм)*; заданное давление в *атм* будет следующим:
 $50 \text{ МПа} = 50 \text{ МН/м}^2 = 5000 \text{ Н/см}^2 \cong 500 \text{ кгс/см}^2 = 500 \text{ атм.}$

Задача № 1.2

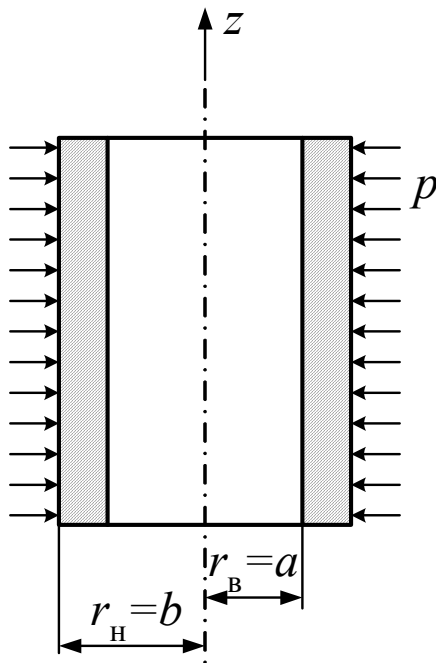


Рис. 1.11

Подобрать размер внутреннего диаметра $2a$ цилиндра, воспринимающего внешнее давление $p = 40 \text{ МПа}$ при условии трехкратного запаса (рис. 1.11). Предел текучести материала $\sigma_T = 600 \text{ МПа}$. Внешний диаметр $2a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$. Осевая сила отсутствует.

Решение

Наиболее опасными являются точки, расположенные у внутренней поверхности цилиндра. В этих точках получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \sigma_\theta = \\ &= 0 - \left(-p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) \leq \frac{\sigma_T}{n}. \end{aligned}$$

Откуда $p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq \frac{\sigma_T}{n}$ или $p 2b^2 \leq \frac{\sigma_T}{n} (b^2 - a^2)$. Тогда

$$\frac{\sigma_T}{n} a^2 \leq \frac{\sigma_T}{n} b^2 - p 2b^2 \text{ или } a^2 \leq b^2 - \frac{p 2b^2 n}{\sigma_T} = b^2 \left(1 - \frac{2pn}{\sigma_T} \right).$$

Окончательно получим

$$2a = 2b \sqrt{1 - \frac{2pn}{\sigma_T}} = 10 \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 40 \cdot 3}{600}} = 10 \sqrt{1 - \frac{4}{10}} = 10 \sqrt{0,6} = 7,75 \text{ см.}$$

Задача № 1.3

Стальная труба с внутренним диаметром $2r_B = 40 \text{ мм}$ и наружным диаметром $2r_H = 120 \text{ мм}$ подвергается внутреннему давлению $p = 250 \text{ МПа}$.

Рассчитать напряжения σ_r и σ_θ в точках, удаленных от оси цилиндра на расстояние 50 мм.

Решение

Вспользуемся формулой

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 \mp \frac{r_H^2}{r^2} \right) = \frac{250 \cdot 10^6 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}}{(6^2 - 2^2)} \times \left(1 \mp \frac{6^2 \cdot 10^{-4}}{5^2 \cdot 10^{-4}} \right) =$$

$$= \frac{250 \cdot 10^6 \cdot 4}{32} \times \left(1 \mp \frac{36}{25} \right) = \frac{250}{8} \times \left(1 \mp \frac{36}{25} \right) \times 10^6 = 31,25 \times (1 \mp 1,44) \times 10^6 \text{ МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_r = -13,75$ МПа и $\sigma_\theta = 76,25$ МПа.

Распределение напряжений в элементарном объеме при удалении на 50 мм от оси цилиндра показано на рис. 1.12.

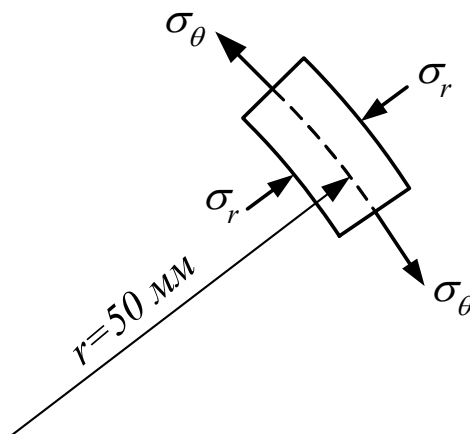


Рис. 1.12

Задача № 1.4

Толстостенный цилиндр подвергается внутреннему давлению $p_1 = 100$ МПа и наружному $p_2 = 60$ МПа (рис. 1.13).

Необходимо исследовать изменение напряжений σ_r и σ_θ при изменении толщины стенки цилиндра в соответствии с $k = \frac{a}{b} = \frac{r_B}{r_H}$.

Решение

Вспользуемся формулой

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r_B^2 p_1 - r_H^2 p_2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{r_B^2 r_H^2 (p_1 - p_2)}{r_H^2 - r_B^2} \frac{1}{r^2}.$$

Запишем соотношения для определения напряжений, введя в них коэффициент k , для чего разделим числители и знаменатели дробей на $r_H^2 = b^2$:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} \mp \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_B^2}{r^2}.$$

При изменении толщины стенки цилиндра напряжение σ_r остается сжимающим и плавно изменяется согласно гиперболическому закону

$$\sigma_r|_{r=r_B} = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_B^2}{r_B^2} = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} = \frac{k^2 p_1 - p_1}{1 - k^2} = -p_1;$$

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=r_H} &= \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_B^2}{r_H^2} = \left| k = \frac{r_B^2}{r_H^2} \right| = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{k^2 p_1 - k^2 p_2}{1 - k^2} = \\ &= \frac{k^2 p_2 - p_2}{1 - k^2} = -p_2, \end{aligned}$$

т.е. от значения $-p_1$ у внутренней поверхности до значения $-p_2$ у наружной.

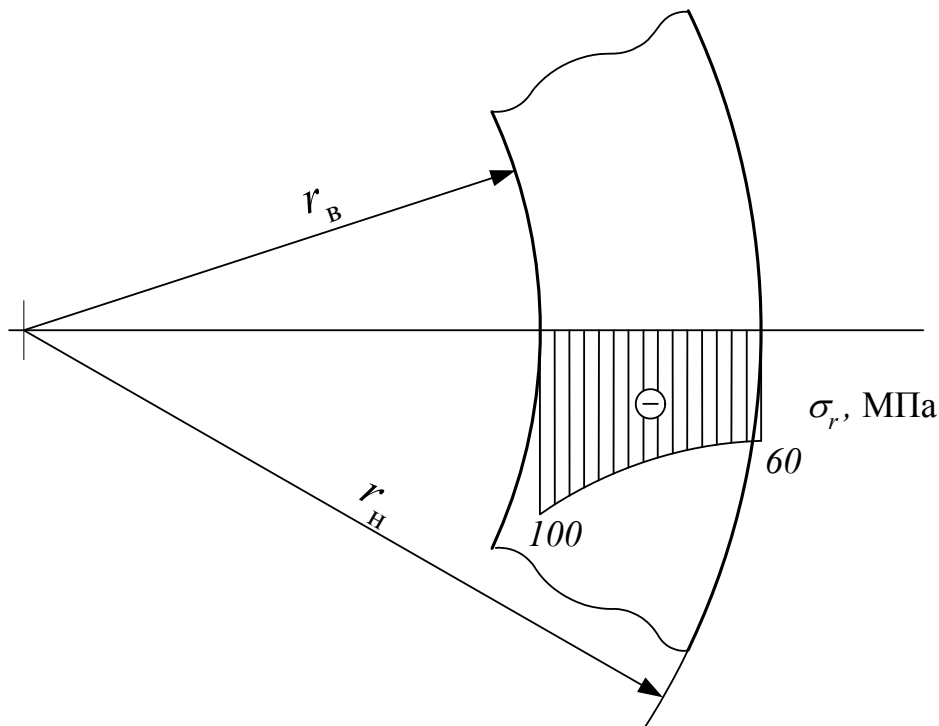


Рис. 1.13

Для вычисления напряжений σ_θ у внутренней и наружной поверхностей цилиндра полученную универсальную формулу для определения σ_r перепишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}|_{r=r_B} &= \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_B^2}{r_B^2} = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} = \\ &= \frac{1}{1 - k^2} [p_1(1 + k^2) - 2p_2], \\ \sigma_{\theta}|_{r=r_H} &= \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_B^2}{r_H^2} = \left| k = \frac{r_B}{r_H} \right| = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{k^2 p_1 - k^2 p_2}{1 - k^2} = \\ &= \frac{1}{1 - k^2} [2k^2 p_1 - (1 + k^2)p_2].\end{aligned}$$

Подставив в эти две формулы различные значения k , вычислим напряжения σ_{θ} у внутренней и наружной поверхностей цилиндра при заданных значениях p_1 и p_2 , но прежде уточним, какие значения может иметь k . Труба считается толстостенной, если толщина ее стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра, т. е.

$$\frac{2(b-a)}{b+a} > \frac{1}{10} \text{ или } 20(b-a) > b+a.$$

Разделив обе части последнего уравнения на b , получим соотношения для определения изменения k :

$$20(1-k) > 1+k; \quad 19 > 21k; \quad k < \frac{19}{21}; \quad k < 0,9048.$$

Понятно, что значение k находится в диапазоне $0 < k < 0,9048$.

Рассмотрим несколько значений, расположенных между $k = 0,1$ и $k = 0,9048$. Промежуточные значения k выбраны соответствующими характерным эпюрам напряжений σ_{θ} . Приведем в таблице значения этих напряжений у внутренней и наружной поверхностей трубы при выбранных значениях k .

k	k^2	σ_{θ} , МПа	
		$r = r_B$	$r = r_H$
0,1	0,01	-19,2	-59,2
0,354	0,125	-8,5	-48,5
0,446	0,2	0	-40
0,578	0,333	20	-20
0,655	0,43	40	0
0,707	0,5	60	20
0,9048	0,8186	341,0	301,0

Покажем для этих значений k эпюры напряжений σ_θ . Понятно, что для более точного построения гиперболы, характеризующей напряжения, в каждом случае были рассчитаны точки, находящиеся в стенке трубы (рис. 1.14).

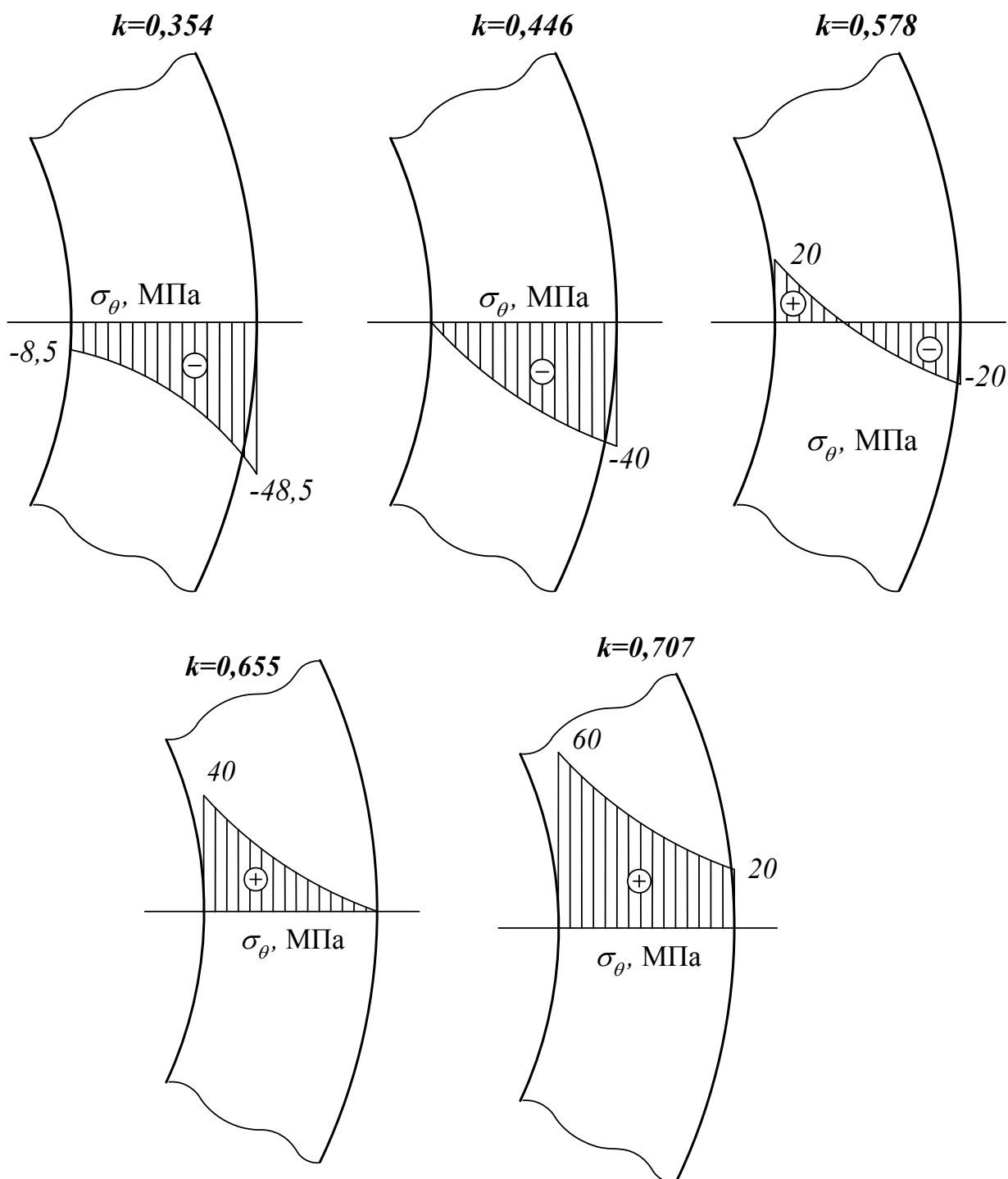


Рис. 1.14

Замечание. Приведенные эпюры свидетельствуют о том, что при k , меньших $0,446$, в трубе действуют только сжимающие напряжения σ_r и σ_θ . Это может оказаться полезным при изготовлении труб из материала, хорошо работающего на сжатие и хуже – на растяжение.

Задача № 1.5

Труба из стали 30ХГСА с внутренним диаметром $2r_B = 100$ мм подвергается внутреннему давлению $p = 200$ МПа.

Определить толщину стенки t трубы согласно четвертой теории прочности, если допусковое напряжение $[\sigma] = 600$ МПа.

Решение

Опасными являются точки трубы у внутренней поверхности, где главные напряжения имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} p = \left| k = \frac{r_B}{r_H} \right| = \frac{1+k^2}{1-k^2} p; \quad \sigma_2 = \sigma_z = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p.$$

Условие прочности в соответствии с четвертой теорией прочности запишем в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma].$$

После подстановки значений главных напряжений получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta \sigma_r + \sigma_r^2} \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} p \right)^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} p^2 + p^2} \leq [\sigma],$$

после этого запишем предельное равенство

$$\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} p \right)^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} p^2 + p^2} = [\sigma].$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} p \right)^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} p^2 + p^2 = [\sigma]^2,$$

избавимся от знаменателя

$$p^2(1+2k^2+k^4+1-k^4+1-2k^2+k^4) = [\sigma]^2(1-2k^2+k^4)$$

и упростим

$$p^2(3+k^4) = [\sigma]^2(1-2k^2+k^4).$$

Окончательно получим уравнение

$$([\sigma]^2 - p^2) k^4 - 2[\sigma]^2 k^2 + ([\sigma]^2 - 3p^2) = 0,$$

решив его относительно k^2 , определим

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{2[\sigma]^2 \pm \sqrt{4[\sigma]^4 - 4([\sigma]^2 - p^2) ([\sigma]^2 - 3p^2)}}{2([\sigma]^2 - p^2)} = \\
 &= \frac{[\sigma]^2 \pm \sqrt{[\sigma]^4 - [\sigma]^4 + 4[\sigma]^2 p^2 - 3p^4}}{[\sigma]^2 - p^2} = \frac{[\sigma]^2 \pm \sqrt{4[\sigma]^2 p^2 - 3p^4}}{[\sigma]^2 - p^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $k^2 < 1$, то перед корнем следует поставить знак «минус».

Тогда

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1} = \frac{\left(\frac{600}{200}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 600}{200}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{600}{200}\right)^2 - 1} = \frac{3^2 - \sqrt{6^2 - 3}}{3^2 - 1} = \\
 &= \frac{9 - \sqrt{36 - 3}}{9 - 1} = \frac{3,225}{8} = 0,4069.
 \end{aligned}$$

Соответственно $k = 0,6379$. Поскольку $r_B = 50$ мм, то

$$r_H = \frac{r_B}{k} = 78,4 \text{ мм. Толщина стенки трубы } t = r_H - r_B = 28,4 \text{ мм.}$$

Задача № 1.6

Определить коэффициенты запаса прочности в опасных точках закрытого и открытого цилиндров при рабочем давлении внутри цилиндров $p = 90$ МПа. Радиусы цилиндров $r_B = 80$ мм; $r_H = 180$ мм. Условный предел текучести материала цилиндров $\sigma_{0,2} = 310$ МПа. Расчет выполнить с использованием гипотез наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) и энергии формоизменения (четвертая теория прочности).

Решение

Замечание. В закрытом цилиндре дополнительно возникают нормальные напряжения в направлении продольной оси z , которые определяют как отношение равнодействующей внутреннего давления на площади поперечного отверстия цилиндра к площади поперечного

Определим величины главных напряжений в точках, лежащих на внутренней поверхности закрытого цилиндра (опасная область – внутренняя поверхность):

$$\sigma_1 = \sigma_\theta|_{r=r_B} = p \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} = 90 \frac{18^2 + 8^2}{18^2 - 8^2} = 134 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = p \frac{\pi r_B^2}{\pi (r_H^2 - r_B^2)} = p \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} = 90 \frac{8^2}{18^2 - 8^2} = 22 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \sigma_r|_{r=r_B} = -p = -90 \text{ МПа}.$$

В соответствии с третьей теорией прочности запишем эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 134 - (-90) = 224 \text{ МПа},$$

соответствующий коэффициент запаса

$$n^{\text{III}} = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}} = \frac{310}{224} = 1,38.$$

Согласно четвертой теории прочности определим эквивалентное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(p \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} - p \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \right)^2 + \left(p \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} - (-p) \right)^2 + \left((-p) - p \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \right)^2} = \\ &= \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \right)^2 + \left(\frac{r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \right)^2 + \left(-\frac{2r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \right)^2} = p\sqrt{3} \frac{r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2)} = \\ &= 90\sqrt{3} \frac{18^2}{18^2 - 8^2} = 194 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Найдем соответствующий коэффициент запаса

$$n^{IV} = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV}} = \frac{310}{194} = 1,60.$$

В точках внутренней поверхности открытого цилиндра значения σ_1 и σ_3 остаются такими же, как и для закрытого, а $\sigma_2 = 0$. В соответствии с третьей теорией прочности σ_2 не влияет на условие прочности и, следовательно, величины $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}$ и n^{III} равны полученным для закрытого цилиндра.

Согласно четвертой теории прочности определим эквивалентное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(134)^2 + (-90)^2 + ((-90) - 134)^2} = 195 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Вычислим соответствующий коэффициент запаса

$$n^{IV} = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV}} = \frac{310}{195} = 1,59.$$

Замечание. Небольшое различие прочностей закрытого и открытого цилиндров наблюдается лишь при использовании четвертой теории прочности, дающей возможность получить по сравнению с третьей больший коэффициент запаса. Следовательно, согласно третьей теории прочности нижняя граница прочности одинакова для открытого и закрытого цилиндров.

Задача № 1.7

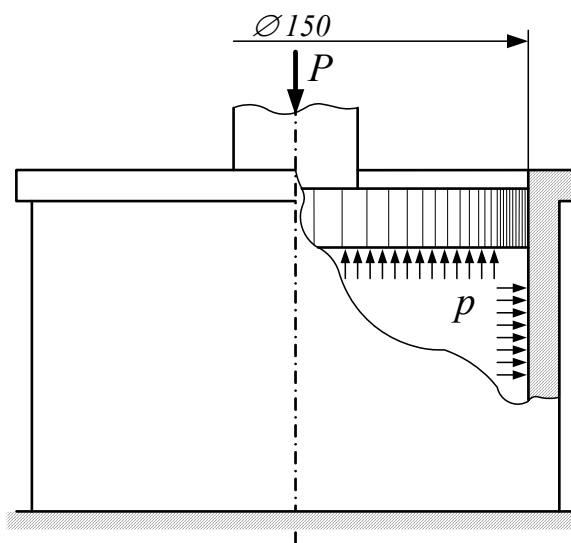


Рис. 1.15

Найти требуемую толщину стенки цилиндра гидравлического пресса при $P = 500$ кН (рис. 1.15). Материал цилиндра – сталь Ст.3 с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Требуемый коэффициент запаса прочности $n = 3$. Расчет выполнить в соответствии с третьей теорией прочности.

Решение

Вычислим рабочее давление в цилиндре

$$p = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4P}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 500 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,15^2} = 28,31 \text{ МПа.}$$

В опасных точках, находящихся у внутренней поверхности цилиндра, условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2p r_{\text{H}}^2}{r_{\text{H}}^2 - r_{\text{В}}^2} \leq [\sigma];$$

допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n} = \frac{240}{3} = 80 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности определяем требуемую величину наружного радиуса цилиндра

$$\begin{aligned} r_{\text{H}} &= r_{\text{В}} \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p}} = 7,5 \sqrt{\frac{80}{80 - 2 \cdot 28,31}} = 7,5 \sqrt{\frac{80}{23,38}} = 7,5 \sqrt{3,4217} = \\ &= 7,5 \cdot 1,8498 = 13,8734 \text{ см.} \end{aligned}$$

Принимаем $r_{\text{H}} = 13,9$ см.

Требуемая толщина стенки цилиндра $t = 13,9 - 7,5 = 6,4$ см.

Задача № 1.8

Исследовать влияние несоосности толстостенной трубы (рис. 1.16), подвергаемой воздействию внутреннего давления p , на величину эквивалентных напряжений в опасной точке.

Принять, что внутренний радиус трубы $a = 10$ см; наружный радиус $b = 15$ см; эксцентриситет e может иметь ряд значений: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 см.

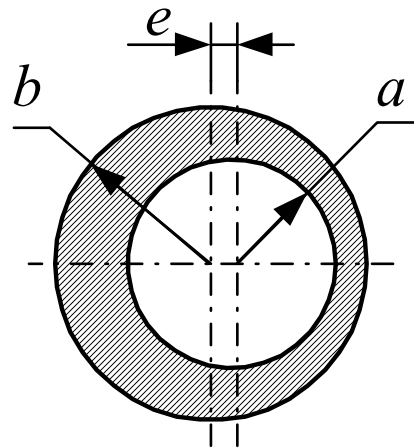


Рис. 1.16

Следует применить третью теорию прочности и получить для указанных значений e величину отношения $k = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{ЭКЦ}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{СООС}}}$, вычисленного в опасной точке.

Решение

Опасной является точка на внутренней поверхности трубы в самом тонком месте. Величина окружного напряжения в этой точке определяется формулой (1.23)

$$\sigma_{\theta} = p \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right],$$

а величина радиального напряжения $\sigma_r = -p$.

В соответствии с третьей теорией прочности величина эквивалентного напряжения в опасной точке

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\theta} - \sigma_r = p \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right] - (-p) = \\ &= p \frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} = \left. \begin{array}{l} \text{Подставим} \\ \text{значения } a \text{ и } b \text{ в см} \end{array} \right| = \\ &= p \frac{2 \cdot 15^2(15^2 + 10^2 - 2 \cdot 10e - e^2)}{(10^2 + 15^2)(15^2 - 10^2 - 2 \cdot 10e - e^2)} = \\ &= p \frac{450(225 + 100 - 20e - e^2)}{(100 + 225)(225 - 100 - 20e - e^2)} = p \frac{450(325 - 20e - e^2)}{325(125 - 20e - e^2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что формула (1.23) применима и при $e = 0$, следовательно,

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{СООС}} = p \frac{450(325 - 20e - e^2)}{325(125 - 20e - e^2)} = p \frac{450 \cdot 325}{325 \cdot 125} = p \frac{450}{125} = p \frac{18}{5} = 3,6p.$$

Тогда искомое отношение

$$k = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{ЭКЦ}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{СООС}}} = p \frac{450(325 - 20e - e^2)}{325(125 - 20e - e^2)} \Big/ 3,6p = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2}.$$

При рассматриваемых величинах эксцентриситетов e приведем в масштабе (для наглядности) сечение трубы (рис. 1.17) и рассчитаем по полученной формуле следующие значения k .

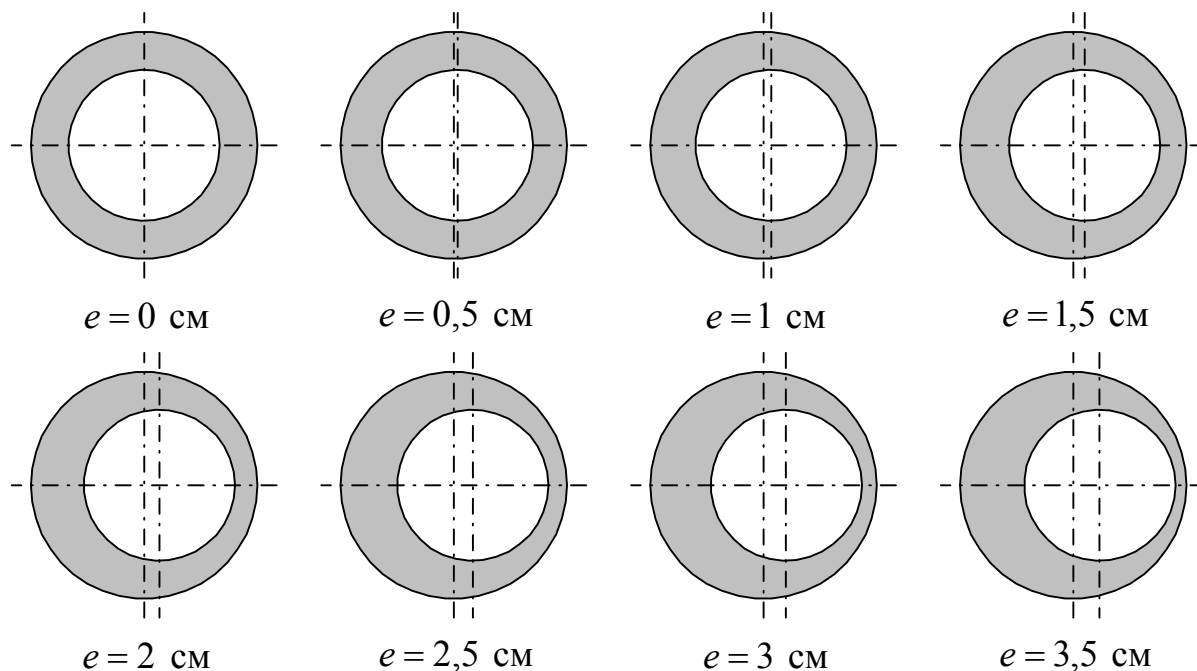


Рис. 1.17

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=0,5 \text{ см}} = 1,053 \text{ при этом отношении } e/a = 0,05;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=1 \text{ см}} = 1,124 \rightarrow e/a = 0,1;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=1,5 \text{ см}} = 1,214 \rightarrow e/a = 0,15;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=2 \text{ см}} = 1,334 \rightarrow e/a = 0,2;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=2,5 \text{ см}} = 1,504 \rightarrow e/a = 0,25;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=3 \text{ см}} = 1,758 \rightarrow e/a = 0,3;$$

$$k = 0,385 \frac{325 - 20e - e^2}{125 - 20e - e^2} \Big|_{e=3,5 \text{ см}} = 2,206 \rightarrow e/a = 0,35.$$

Графически полученные результаты изображены на рис. 1.18.

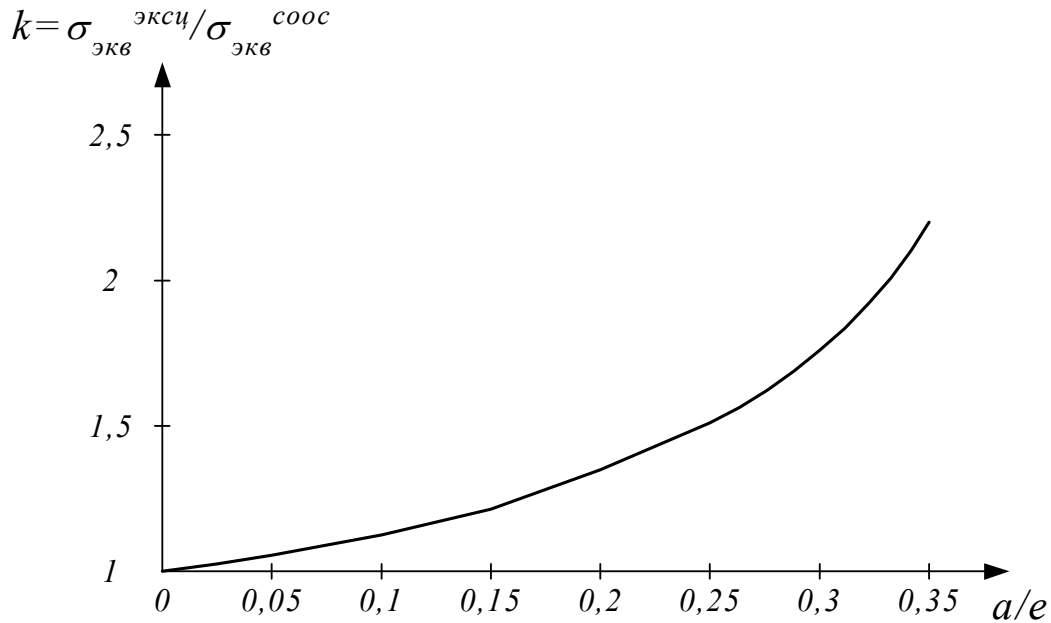


Рис. 1.18

Замечание. Результаты показывают, что при незначительных относительных эксцентриситетах прочность существенно не изменяется, а, следовательно, некоторую небольшую несоосность, которая может быть при изготовлении, в прочностном расчете можно не учитывать.

Задача № 1.9

Подобрать наружный радиус b сферического сосуда, подвергаемого воздействию внутреннего давления p . Заданы: внутренний радиус сферы $a = 10$ см; $p = 300$ МПа; $[\sigma] = 500$ МПа. Воспользоваться зависимостями применительно к толстостенной сфере, а также третьей теорией прочности.

Решение

Напряжения в толстостенной сфере определяются зависимостями (1.27), которые с учетом приведенных обозначений примут вид

$$\sigma_r = \frac{p a^3}{b^3 - a^3} - p \frac{a^3 b^3}{r^3 (b^3 - a^3)} = p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{p a^3}{b^3 - a^3} + p \frac{a^3 b^3}{2r^3 (b^3 - a^3)} = p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right).$$

Из этих зависимостей видно, что величины обоих напряжений максимальны на внутренней поверхности сферы.

Очевидно, что при $r = a - \sigma_r = -p$; $\sigma_\theta = \frac{p\left(a^3 + \frac{1}{2}b^3\right)}{b^3 - a^3}$.

Условие прочности согласно третьей теории прочности имеет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r \leq [\sigma] \text{ или после подстановки } \frac{p\left(a^3 + \frac{1}{2}b^3\right)}{b^3 - a^3} - (-p) \leq [\sigma].$$

Преобразуем выражение

$$\frac{p\left(a^3 + \frac{1}{2}b^3\right)}{b^3 - a^3} + p \leq [\sigma]; \quad \frac{p\left(a^3 + \frac{1}{2}b^3 + b^3 - a^3\right)}{b^3 - a^3} \leq [\sigma]; \quad \frac{3pb^3}{2(b^3 - a^3)} \leq [\sigma].$$

Перейдя в пределе к равенству, выразим b через остальные известные величины: $\frac{3pb^3}{2[\sigma]} = (b^3 - a^3)$; $a^3 = b^3\left(1 - \frac{3p}{2[\sigma]}\right)$.

$$\text{Откуда } b = a \sqrt[3]{\frac{1}{1 - \frac{3p}{2[\sigma]}}} = 10 \sqrt[3]{\frac{1}{1 - \frac{3 \cdot 100}{2 \cdot 500}}} = 12,89 \text{ см.}$$

Задача № 1.10

Длинная бетонная труба, имеющая внутренний диаметр 1 м, заложена на глубине 35 м от поверхности воды. Считая давление воды равномерно распределенным по поверхности трубы, определить необходимую толщину ее стенок, исходя из условий прочности в соответствии с третьей теорией прочности. Для бетона допускаемые напряжения на сжатие $[\sigma] = 1,5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,16$.

Решение

Равномерно распределенное по наружной поверхности трубы наружное давление $p = r_H = \gamma \cdot H = 10 \text{ кН/м}^3 \cdot 35 \text{ м} = 350 \text{ кПа} = 0,35 \text{ МПа}$. Согласно формуле (1.22) нормальные напряжения в радиальном и окружном направлениях

$$\sigma_r = -\frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_B^2}{r^2}\right) \quad \text{и} \quad \sigma_\theta = -\frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_B^2}{r^2}\right),$$

где r_H , r_B – радиусы наружной и внутренней цилиндрических поверхностей трубы; r – расстояние от любой площадки, находящейся в поперечном сечении трубы, до ее оси.

Так как труба длинная, то в сечениях, удаленных от ее концов, деформацию в направлении оси трубы (ε_z) следует считать равной нулю, т. е. воспользовавшись последним выражением системы (1.10), можем записать

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) = -2\mu \frac{p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} = const,$$

постоянство суммы радиальных и окружных напряжений было отображено в уравнении (1.13).

Напряжения σ_r , σ_θ и σ_z по всей толщине трубы – сжимающие. Наибольшее напряжение по абсолютной величине – окружное у внутренней поверхности трубы ($r = r_B = 50$ см)

$$\sigma_\theta = -\frac{2p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2},$$

при этом $\sigma_r = 0$.

Условие прочности в соответствии с третьей теорией прочности имеет вид

$$|\sigma_3| = |\sigma_\theta| = \frac{2p r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma],$$

откуда

$$2p r_H^2 \leq [\sigma] (r_H^2 - r_B^2); \quad -2p r_H^2 + [\sigma] r_H^2 \geq [\sigma] r_B^2; \quad r_H^2 \geq \frac{[\sigma] r_B^2}{[\sigma] - 2p}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части на $[\sigma]$, из обеих частей извлечем квадратный корень и окончательно получим

$$r_H \geq \frac{r_B}{\sqrt{1 - \frac{2p}{[\sigma]}}} \geq \frac{50}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 0,35}{1,5}}} = 68,5 \text{ см.}$$

Следовательно, стенка трубы должна иметь толщину $t = r_H - r_B = 68,5 - 50 = 18,5$ см.

1.10. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1.11

Определить коэффициент запаса прочности латунной трубки маслопровода, находящегося под внутренним давлением $p = 15$ МПа (рис. 1.19).

Условный предел текучести $\sigma_{0,2} = 200$ МПа. Расчет выполнить в соответствии с третьей теорией прочности.

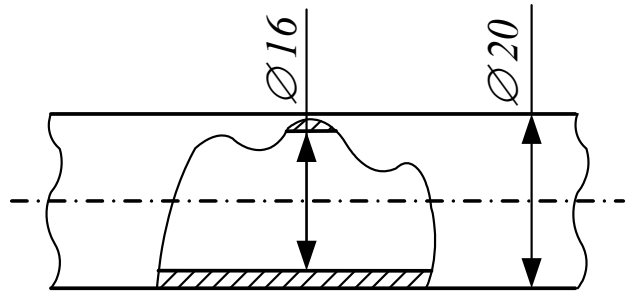


Рис. 1.19

Ответ: 2,40.

Задача № 1.12

Определить коэффициент концентрации напряжений α в окрестности малого отверстия при всестороннем равномерном растяжении пластины (рис. 1.20).

Указание. Под коэффициентом концентрации напряжений в данном случае следует понимать отношение эквивалентного напряжения в зоне концентратора к эквивалентному напряжению в пластине без отверстия.

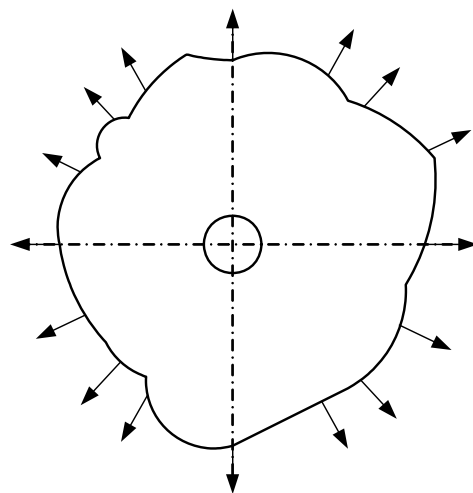


Рис. 1.20

Ответ: $\alpha = 2$.

Задача № 1.13

Согласно третьей теории прочности определить коэффициент запаса прочности толстостенной трубы, нагруженной внутренним p_B и наружным p_H давлениями. Дано: $p_B = 300$ МПа; $p_H = 100$ МПа; $r_B = 30$ мм; $r_H = 60$ мм; материал трубы – легированная сталь ($\sigma_T = 700$ МПа).

Ответ: $n = 1,235$.

Задача № 1.14

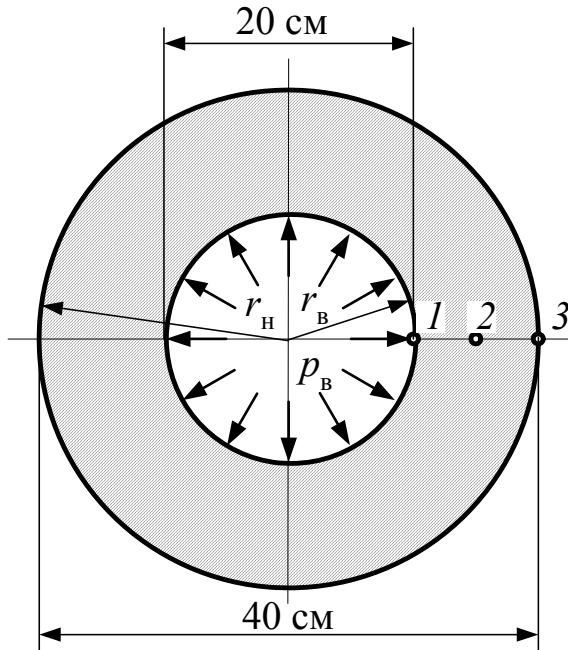


Рис. 1.21

Стальной цилиндр, внутренний радиус которого $r_в = 10$ см и наружный $r_н = 20$ см, подвергается внутреннему давлению $p_в = 40$ МПа (рис. 1.21).

Необходимо построить эпюры напряжений σ_r , σ_θ и проверить прочность цилиндра в соответствии с третьей теорией прочности и при допускаемом напряжении $[\sigma] = 150$ МПа. Определить увеличение внутреннего и наружного радиусов цилиндра. При этом следует принять $E = 200$ ГПа и $\mu = 0,3$.

Ответ: $u_в = 0,000039$ м; $u_н = 0,000027$ м; рис. 1.22

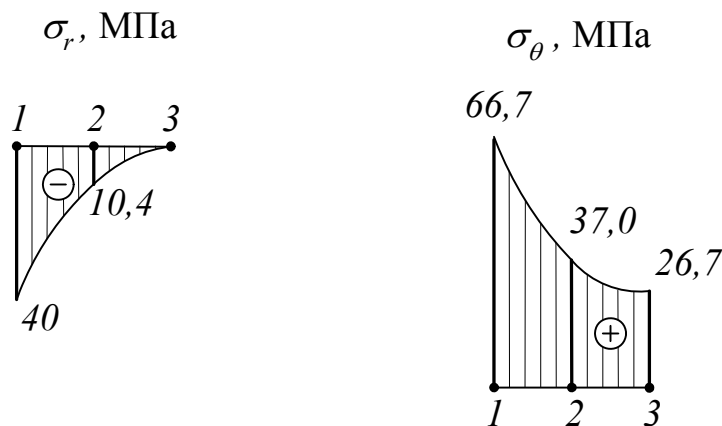


Рис. 1.22

Замечание. Для определения радиального перемещения необходимо воспользоваться вторым уравнением обобщенного закона Гука (1.10) и подставить в него значения напряжений σ_r и σ_θ из выражения

Задача № 1.15

Стальной цилиндр, внутренний радиус которого $r_в = 10$ см, а наружный – $r_н = 14$ см, находится под действием внутреннего давления $p_в = 40$ МПа.

Определить наибольшее и наименьшее значения окружных напряжений τ_{\max} в точке, отстоящей на расстоянии $r = 11,6$ см от оси цилиндра, и радиальное перемещение u этой точки. Принять $E = 200$ ГПа; $\mu = 0,3$.

Ответ: $\sigma_{\theta \max} = 123,3$ МПа; $\sigma_{\theta \min} = 83,3$ МПа;
 $\tau_{\max} = 60,7$ МПа; $u = 0,0000625$.

Замечание. | При решении задачи воспользуйтесь замечанием к задаче 1.14.

Задача № 1.16

Определить окружные напряжения на внутренней и наружной поверхностях, а также в середине толщины стенки цилиндра с внутренним радиусом 10 см и наружным радиусом 20 см, который подвергается внутреннему давлению $p_1 = 200$ МПа.

Ответ: $\sigma_{\theta}|_{r=10 \text{ см}} = 333,3$ МПа; $\sigma_{\theta}|_{r=15 \text{ см}} = 185,1$ МПа;
 $\sigma_{\theta}|_{r=20 \text{ см}} = 133,3$ МПа.

Задача № 1.17

Исследовать влияние несоосности толстостенной трубы (см. рис. 1.16), подвергающейся воздействию внутреннего давления p , на величину эквивалентных напряжений в опасной точке. Принять внутренний радиус трубы $a = 10$ см; наружный – $b = 12,5$ см, а эксцентриситет e имеет ряд значений: 0,25; 0,5; 0,75; 1 см. Применить третью теорию прочности и получить для указанных значений e величину $k = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{ЭКЦ}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{СОС}}}$, вычисленную в опасной точке.

Ответ: $e = 0,25$ см, $a/e = 0,025$, $k = 1,077$;
 $e = 0,5$ см, $a/e = 0,05$, $k = 1,174$;
 $e = 0,75$ см, $a/e = 0,075$, $k = 1,298$;
 $e = 1$ см, $a/e = 0,1$, $k = 1,465$.

Решение графически показано на рис. 1.23.

$$k = \sigma_{\text{экв}}^{\text{эксц}} / \sigma_{\text{экв}}^{\text{соос}}$$

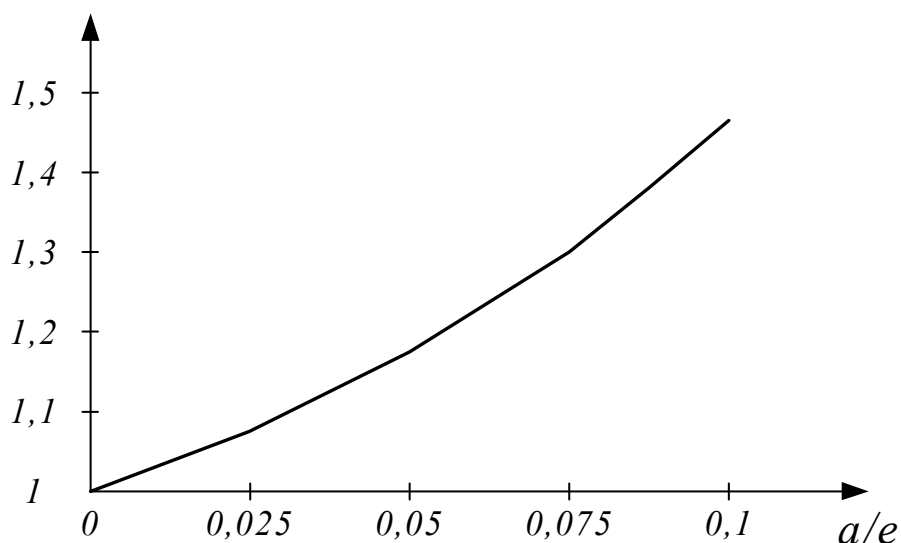


Рис. 1.23

Задача № 1.18

Длинная стальная труба, имеющая внутренний диаметр 4 см и толщину стенки 5 мм, подвергается внутреннему давлению 27 МПа и наружному давлению 9 МПа. Считая деформацию в направлении оси трубы равной нулю, определить главные напряжения и наибольшее расчетное напряжение на основе четвертой теории прочности.

Ответ: $\sigma_1 = 41$ МПа; $\sigma_2 = 9,6$ МПа; $\sigma_3 = -9$ МПа; $\sigma_{\text{экв}} = 43,8$ МПа.

Замечание. Вначале следует установить, где расположена опасная концентрическая поверхность в трубе, на которой действуют опасные напряжения.

Задача № 1.19

Полый стальной сферический сосуд с внутренним диаметром 50 см предназначен для хранения газа, сжатого под давлением 80 МПа. Исходя из условия прочности, определить в соответствии с третьей теорией прочности необходимую толщину стенок сосуда при $[\sigma] = 250$ МПа.

Ответ: 60,99 мм.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ (ЗАДАЧА ГАДОЛИНА*)

2.1. Постановка задачи о расчете составных цилиндров

Прочность цилиндра, работающего при внутреннем давлении, с увеличением толщины стенки возрастает только до определенного предела, поскольку даже при бесконечно большом наружном радиусе внутреннее давление в цилиндре не может превышать определенной величины. Исходя из расчета на прочность по допускаемым напряжениям и в соответствии с третьей теорией прочности очевидно, что любое увеличение толщины стенки цилиндра не позволит ему удерживать давление большее, чем $p = [\sigma]/2$. С увеличением внешнего радиуса напряжения σ_r и σ_θ быстро снижаются, поэтому материал наружных слоев цилиндра используется неэффективно. Разгрузить внутренние слои можно за счет более интенсивной нагрузки наружных слоев. Для этого цилиндр нужно выполнить составным, надев один цилиндр на другой с натягом (обычно с помощью горячей посадки). В таких цилиндрах величина допускаемого внутреннего давления может быть значительно больше, чем в цельном цилиндре. Подобным образом можно изготавливать орудийные стволы. При посадке одного цилиндра на другой с натягом окружные напряжения σ_r во внутреннем цилиндре становятся сжимающими, а в наружном – растягивающими (рис. 2.1, а).

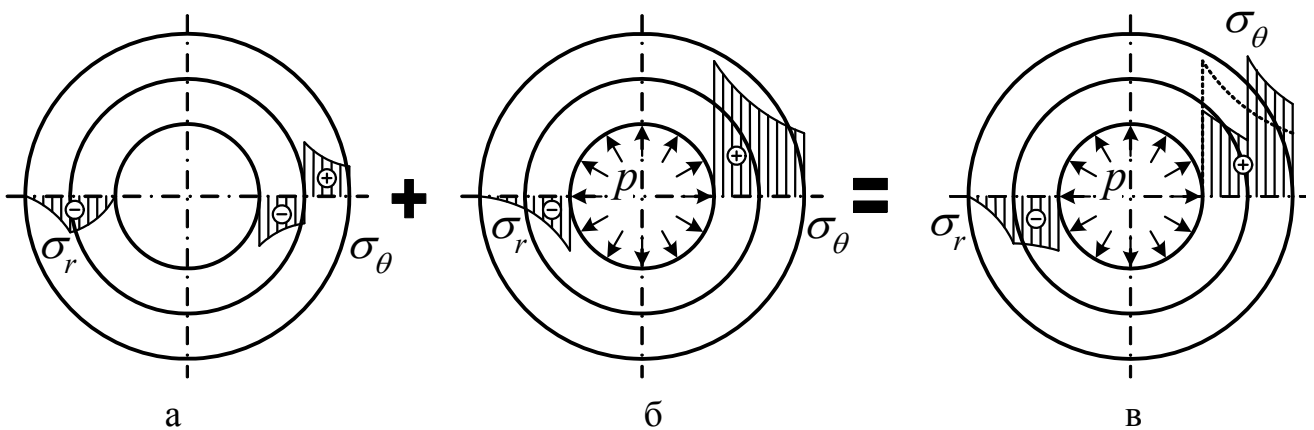


Рис. 2.1

* Гадолин Аксель Вильгельмович (1828 – 1892 г.), рус. ученый, академик (с 1875 г.; член-корреспондент АН России с 1873 г.), генерал от артиллерии, разработал теорию скрепления стволов арт. орудий (1861 г.).

Если такой составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные растягивающие окружные и сжимающие радиальные напряжения (рис. 2.1, б), которые определяются так же, как для цельного цилиндра. Применяв принцип суперпозиции, получим после приложения давления суммарные эпюры напряжений (рис. 2.1, в). Особенностью составного цилиндра является скачок напряжений на эпюре σ_θ и перелом в эпюре σ_r на радиусе сопряжения цилиндров.

2.2. Определение контактного давления

Рассчитаем составные цилиндры. Вначале найдем зависимость давления p_k по контактной поверхности от величины натяга δ между наружным диаметром внутреннего цилиндра и внутренним диаметром наружного цилиндра (рис. 2.2).

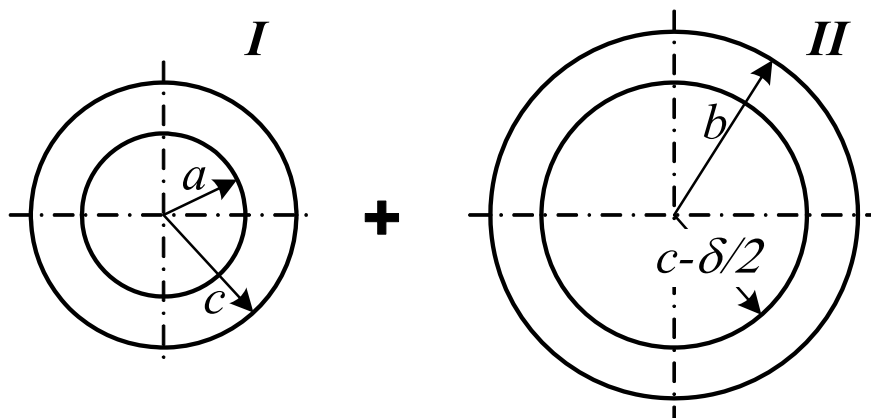


Рис. 2.2

После посадки одного цилиндра на другой наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного становятся одинаковыми, а сумма абсолютных величин радиальных перемещений обоих цилиндров по радиусу поверхности контакта под действием контактного давления должна быть равна половине натяга, т. е.

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \quad (2.1)$$

Поскольку величина натяга δ мала по сравнению с радиусом сопряжения, то при вычислении перемещений будем считать, что $r_{HI} = r_{BII} = c$.

Кроме того, для общности формулы будем считать, что части составных цилиндров выполнены из разных материалов, хотя в большинстве случаев они изготовлены из одного материала.

Контактное давление p_k будет наружным для цилиндра I и внутренним для цилиндра II . Из выражения (1.10) можно получить формулу радиального перемещения

$$u = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)]. \quad (2.2)$$

Считаем, что оба цилиндра открытые, т. е. $\sigma_z = 0$, тогда

$$u = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \mu\sigma_r]. \quad (2.3)$$

С учетом ранее полученных значений напряжений при $r = r_H = c$ $\sigma_r = -p_k$, а $\sigma_\theta = -p_k \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2}$ определим абсолютную величину радиального перемещения цилиндра I (наружное давление)

$$|u_I| = \frac{c}{E_I} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu_I \right) p_k. \quad (2.4)$$

С учетом ранее полученных значений напряжений при $r = r_H = c$ $\sigma_r = -p_k$, а $\sigma_\theta = p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}$ определим абсолютную величину радиального перемещения цилиндра II (внутреннее давление)

$$|u_{II}| = \frac{c}{E_{II}} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu_{II} \right) p_k. \quad (2.5)$$

Подставим значения этих перемещений в уравнение (2.1)

$$\frac{c}{E_I} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu_I \right) p_k + \frac{c}{E_{II}} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu_{II} \right) p_k = \frac{\delta}{2}.$$

Решив это уравнение относительно p_k , получим

$$p_k = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{c}{E_I} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu_I \right) + \frac{c}{E_{II}} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu_{II} \right)}. \quad (2.6)$$

В случае одинаковых материалов сопрягаемых цилиндров эту формулу можно упростить:

$$\begin{aligned}
 p_k &= \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{c}{E} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu \right) + \frac{c}{E} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu \right)} = \\
 &= \frac{\delta E}{2c} \frac{1}{\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}} = \frac{\delta E}{2c} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{(c^2 + a^2)(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)(c^2 - a^2)} = \\
 &= \frac{\delta E}{2c} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2 b^2 + a^2 b^2 - c^4 - a^2 c^2 + b^2 c^2 + c^4 - b^2 a^2 - c^2 a^2} = \\
 &= \frac{\delta E}{2c} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{2c^2 b^2 - 2c^2 a^2} = \frac{\delta E}{4c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}.
 \end{aligned}$$

Окончательно это выражение примет вид

$$p_k = \frac{\delta E}{4c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}. \quad (2.7)$$

Напряжения, вызванные давлением p_k , определим по уже известным формулам (1.21) для внутреннего цилиндра и формулам (1.22) для наружного.

Величину натяга находят, измеряя диаметры сопрягаемых деталей микрометрическими инструментами или другими точными приборами. Однако поверхности деталей никогда не бывают абсолютно гладкими; на них всегда остаются следы обработки – микронеровности, которые сминаются при запрессовке. Поэтому действительная величина натяга несколько меньше измеренной, а действительное контактное давление меньше определяемого по формулам (2.6) или (2.7).

Выражения (2.6) и (2.7) применяют лишь в том случае, когда ни в одной из сопрягаемых деталей напряжения не превышают предела пропорциональности (справедлив закон Гука). С появлением пластических деформаций контактное давление будет меньше, чем определяемое по этим формулам, его вычисляют с использованием методов теории пластичности.

2.3. Прочность составного цилиндра

В результате запрессовки внутренний цилиндр оказывается под действием внешнего давления p_k , а наружный – под действием внутреннего давления, такого же по величине. Распределение напряжений в сопряженных цилиндрах показано на рис. 2.3.

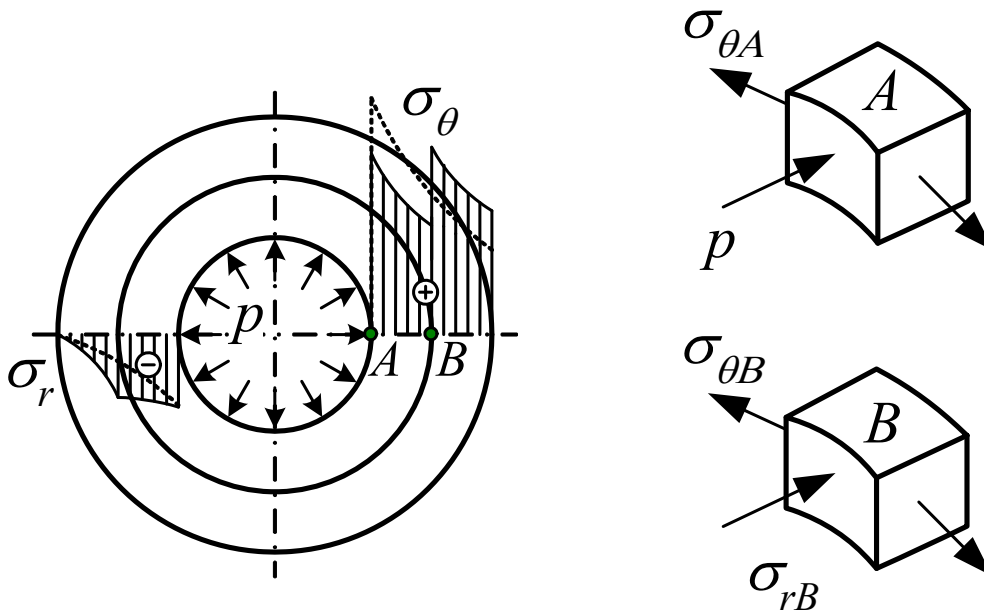


Рис. 2.3

При нагружении составного цилиндра внутренним давлением обе его части будут работать как одно целое и в составном цилиндре возникнут напряжения, определяемые по формуле (1.21). Эти напряжения должны быть алгебраически просуммированы с предварительными напряжениями натяга (см. рис. 2.1). Во внутренних, наиболее напряженных точках (A) рабочие напряжения и напряжения натяга имеют разные знаки, т. е. суммарное напряжение снижается и составной цилиндр способен выдержать большее давление. Однако вследствие натяга увеличиваются напряжения в зоне контакта у наружного цилиндра (B). Поэтому натяг δ должен подбираться для заданного рабочего давления p так, чтобы была обеспечена прочность не только внутреннего, но и наружного цилиндра. Составим условие равнопрочности этих цилиндров (рис. 2.3):

$$\sigma_{\text{экв}A} = \sigma_{\text{экв}B}.$$

Согласно выражениям (1.20 – 1.22) в соответствии с третьей теорией прочности получим в точке A

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_\theta(p) + \sigma_\theta(p_k)) - (\sigma_r(p) + \sigma_r(p_k)) = \\
&= \left(p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right) - (-p + 0) = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p; \quad (2.8)
\end{aligned}$$

в точке B

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_\theta(p) + \sigma_\theta(p_k)) - (\sigma_r(p) + \sigma_r(p_k)) = \\
&= \left(\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} \right) - \left(\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) - p_k \right) = \\
&= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Приравняв выражения (2.8) и (2.9), получим

$$\begin{aligned}
& p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p = \\
&= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k.
\end{aligned}$$

Перенесем в правую часть слагаемые, содержащие множитель p_k , а в левую — p :

$$\begin{aligned}
& p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) + p = \\
&= p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p_k; \\
& p \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{2a^2b^2}{c^2(b^2 - a^2)} + 1 \right) = p_k \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + 1 \right); \\
& p \frac{c^2(b^2 + a^2) - 2a^2b^2 + c^2(b^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)} = p_k \left(\frac{2b^2 - b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + 1 \right); \\
& p \frac{2c^2b^2 - 2a^2b^2}{c^2(b^2 - a^2)} = p_k \left(\frac{2b^2 - (b^2 - c^2)}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + 1 \right); \\
& p \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)} = 2p_k \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} - 1 + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$p \frac{b^2 (c^2 - a^2)}{c^2 (b^2 - a^2)} = p_k \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right). \quad (2.10)$$

Если в эту формулу подставить p_k из выражения (2.7), можно определить величину натяга δ , обеспечивающего условие равнопрочности при заданном рабочем давлении p :

$$p \frac{b^2 (c^2 - a^2)}{c^2 (b^2 - a^2)} = \frac{E\delta}{4c^3} \frac{(c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right),$$

откуда

$$\delta = \frac{4pb^2c (c^2 - a^2)}{E (b^2 - a^2) (b^2 - c^2)} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)};$$

$$\delta = \frac{4pb^2c (c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}{E (b^2 - c^2) [b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)]}.$$

Окончательно запишем

$$\delta = \frac{4pb^2c (c^2 - a^2)}{E [b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)]}. \quad (2.11)$$

Теперь исключим из формулы (2.8) контактное давление p_k , для чего выразим сначала p_k через p из выражения (2.10)

$$p_k = p \frac{b^2 (c^2 - a^2)}{c^2 (b^2 - a^2)} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)}$$

и получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p = p \left(\frac{b^2 + a^2 + b^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} =$$

$$= p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)}.$$

В итоге определим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)} \right]. \quad (2.12)$$

Таким образом, $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ зависит от давления p и радиусов сопрягаемых цилиндров. Величина $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ имеет минимум при определенном значении c – радиусе сопряжения цилиндров. Установим это значение, приравняв производную от $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ по c нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{dc} &= \left| \bar{k} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right| = \frac{d \left(\bar{k} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)} \right] \right)}{dc} = \frac{d(\bar{k}f(c))}{dc} = \\ &= \bar{k} \frac{df(c)}{dc} = 0, \end{aligned}$$

где $f(c) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)}$.

Обозначим $\bar{f}(c) = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)}$, тогда $f(c) = 1 - \bar{f}(c)$. Теперь

вернемся к рассматриваемой производной, исключив коэффициент \bar{k} :

$$\frac{df(c)}{dc} = \frac{d(1 - \bar{f}(c))}{dc} = \frac{d\bar{f}(c)}{dc} = 0.$$

Подставим функцию $\bar{f}(c)$:

$$\frac{d\bar{f}(c)}{dc} = \frac{d \left(\frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right)} \right)}{dc} = \left| u = 1; v = \frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v \frac{du}{dc} - u \frac{dv}{dc}}{v^2} = -\frac{u \frac{dv}{dc}}{v^2} = -\frac{u}{v^2} \frac{d}{dc} \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) = \\
&= -\frac{u}{v^2} \left[\frac{d}{dc} \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} \right) + \frac{d}{dc} \left(\frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \right] = \left| \begin{array}{l} u_1 = b^2; \quad u_2 = c^2 \\ v_1 = b^2 - c^2; \quad v_2 = c^2 - a^2 \end{array} \right| = \\
&= -\frac{u}{v^2} \left[\frac{d}{dc} \left(\frac{u_1}{v_1} \right) + \frac{d}{dc} \left(\frac{u_2}{v_2} \right) \right] = -\frac{u}{v^2} \left[\frac{v_1 \frac{du_1}{dc} - u_1 \frac{dv_1}{dc}}{v_1^2} + \frac{v_2 \frac{du_2}{dc} - u_2 \frac{dv_2}{dc}}{v_2^2} \right] = \\
&= -\frac{u}{v^2} \left[\frac{-u_1 \frac{d(b^2 - c^2)}{dc}}{v_1^2} + \frac{v_2 2c - u_2 \frac{d(c^2 - a^2)}{dc}}{v_2^2} \right] = \\
&= -\frac{u}{v^2} \left[\frac{-u_1 \frac{d(b^2 - c^2)}{dc}}{v_1^2} + \frac{v_2 2c - u_2 \frac{d(c^2 - a^2)}{dc}}{v_2^2} \right] = -\frac{u}{v^2} \left[\frac{u_1 2c}{v_1^2} + \frac{2c(v_2 - u_2)}{v_2^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{u_1}{v_1^2} + \frac{v_2 - u_2}{v_2^2} \right] = -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{b^2}{(b^2 - c^2)^2} + \frac{c^2 - a^2 - c^2}{(c^2 - a^2)^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{b^2}{(b^2 - c^2)^2} - \frac{a^2}{(c^2 - a^2)^2} \right] = -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{b^2(c^2 - a^2)^2 - a^2(b^2 - c^2)^2}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{b^2 c^4 - 2a^2 c^2 b^2 + a^4 b^2 - a^2 b^4 + 2a^2 b^2 c^2 - a^2 c^4}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{b^2(c^4 - 2a^2 c^2 + a^4) - a^2(b^4 - 2b^2 c^2 + c^4)^2}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{a^4 b^2 - a^2 b^4 - a^2 c^4 + b^2 c^4}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} \right] = -\frac{2uc}{v^2} \left[\frac{a^2 b^2(a^2 - b^2) - c^4(a^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} \right] = \\
&= -\frac{2uc(a^2 - b^2)}{v^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2} (a^2 b^2 - c^4) = 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что равенство нулю возможно лишь в случае, когда последний сомножитель в скобках будет равен нулю (первый сомножитель в виде дроби отличен от нуля): $a^2b^2 - c^4 = 0$. Откуда $c^4 = a^2b^2$ и, следовательно, минимальное значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ будет достигнуто при

$$c = \sqrt{ab}. \quad (2.13)$$

Подставив значение (2.13) в выражение (2.12), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} &= p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b^2}{b^2 - ab} + \frac{ab}{ab - a^2} \right)} \right] = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b}{b-a} + \frac{b}{b-a} \right)} \right] = \\ &= p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b}{b-a} + \frac{b}{b-a} \right)} \right] = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b-a}{2b} \right) = \\ &= p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \frac{2b - b + a}{2b} = p \frac{b}{b^2 - a^2} (b + a). \end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = p \frac{b}{b-a}. \quad (2.14)$$

Полученные соотношения называют условиями Гадолина, который впервые получил их.

Приведем значение δ , соответствующее условиям Гадолина. Упростим формулу (2.11), для чего во вторую дробь правой части подставим значение c из условия (2.13):

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{4pb^2c}{E} \frac{(ab - a^2)}{\left[b^2(ab - a^2) + ab(b^2 - ab) \right]} = \\ &= \frac{4pb^2c}{E} \frac{(ab - a^2)}{ab^3 - a^2b^2 + ab^3 - a^2b^2} = \frac{4pb^2c}{E} \frac{(ab - a^2)}{2b^2(ab - a^2)}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\delta = \frac{2pc}{E}. \quad (2.15)$$

2.4. Сравнение прочности составного и сплошного цилиндров

Сравнив полученные в соответствии с третьей теорией прочности значения эквивалентных напряжений в опасных точках у внутренней поверхности сплошного ($\sigma_{\text{ЭКВ}} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$) и составного ($\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = p \frac{b}{b-a}$) цилиндров, найдем

$$\frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} = \frac{p \frac{b}{b-a}}{p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}} = \frac{b+a}{2b}.$$

Изменение этого отношения в зависимости от соотношения наружного и внутреннего радиусов показано на рис. 2.4.

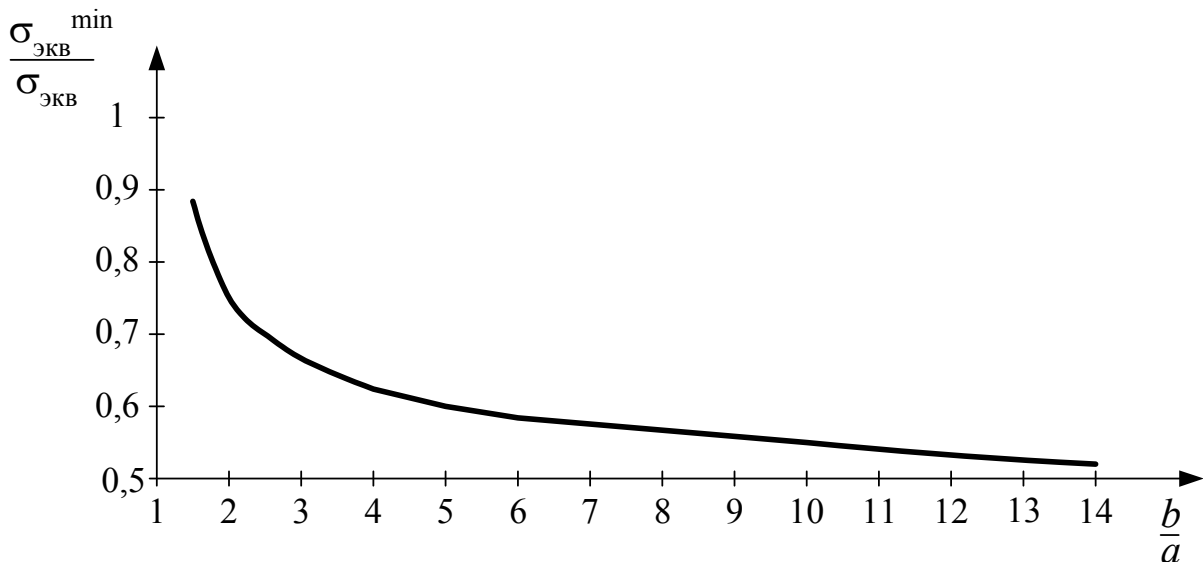


Рис. 2.4

Очевидно, если внутренний радиус цилиндра a будет мал, то посадка труб при соблюдении соотношений Гадолина обеспечит почти двукратное уменьшение эквивалентного напряжения. Для относительно тонкостенных труб, у которых $a \approx b$, составная конструкция с посадкой является неэффективной.

Следует отметить, что с натягом можно соединить не два, а большее количество цилиндров. В этом случае в полученном составном цилиндре величины натягов подбирают такими, чтобы распределение окружных напряжений по толщине составного цилиндра было, по возможности, более равномерным.

2.5. Автофретирование и другие конструктивно-технологические решения повышения прочности в технике высоких давлений

В технике высоких давлений, кроме посадки составных цилиндров, применяется так называемое автофретирование. При этом цилиндр предварительно нагружают внутренним давлением, большим рабочего, причем таким, чтобы в его внутренних слоях возникли пластические деформации. После снятия давления во внешних слоях цилиндра сохраняются упругие деформации растяжения, а во внутренних слоях появляются напряжения сжатия (рис. 2.5).

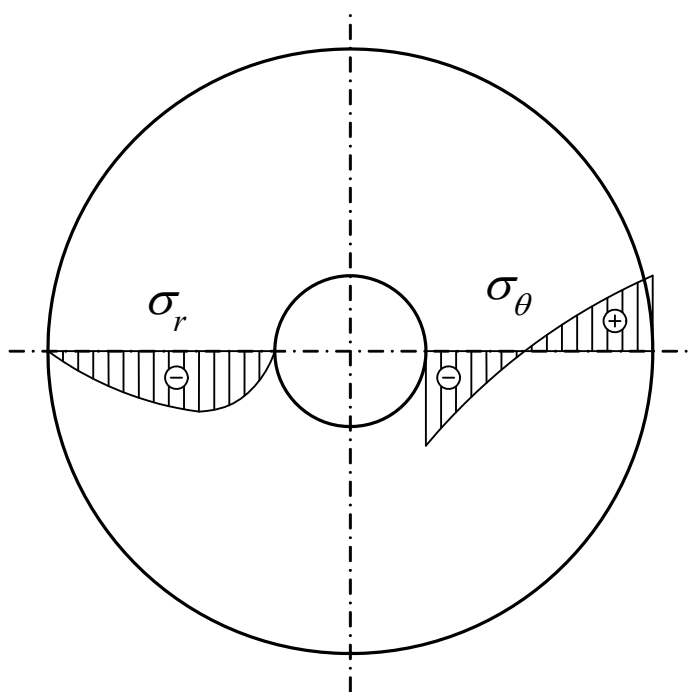


Рис. 2.5

В дальнейшем при нагрузке цилиндра давлением остаточные напряжения суммируются с рабочими так, что во внутренних слоях происходит частичная разгрузка, т.е. наблюдается тот же эффект, что и при посадке двух труб с образованием составного цилиндра. Причем материал цилиндра не испытывает дополнительных пластических деформаций, если только рабочее давление не превышает давления

Остаточные напряжения в цилиндрах можно вызвать не только пластическими деформациями, описанными выше, но также неравномерным охлаждением и изменением объема металла при рекристаллизации в различных процессах термической обработки.

Наружное давление, которое обеспечивает повышение прочности цилиндра, нагруженного внутренним давлением, можно получить и иными способами. Например, для создания такого давления на трубу с натягом наматывают проволоку. Однако при этом цилиндр уже не обязательно будет толстостенным.

Применение последнего конструктивно-технологического решения возможно с использованием не только металлической проволоки, но и

композиционных материалов. На рис. 2.6 изображен металлокомпозитный баллон высокого давления. Металлическая часть такого баллона – лейнер – обеспечивает непроницаемость баллона, а спиральные и кольцевые слои композита – основную прочностную функцию.

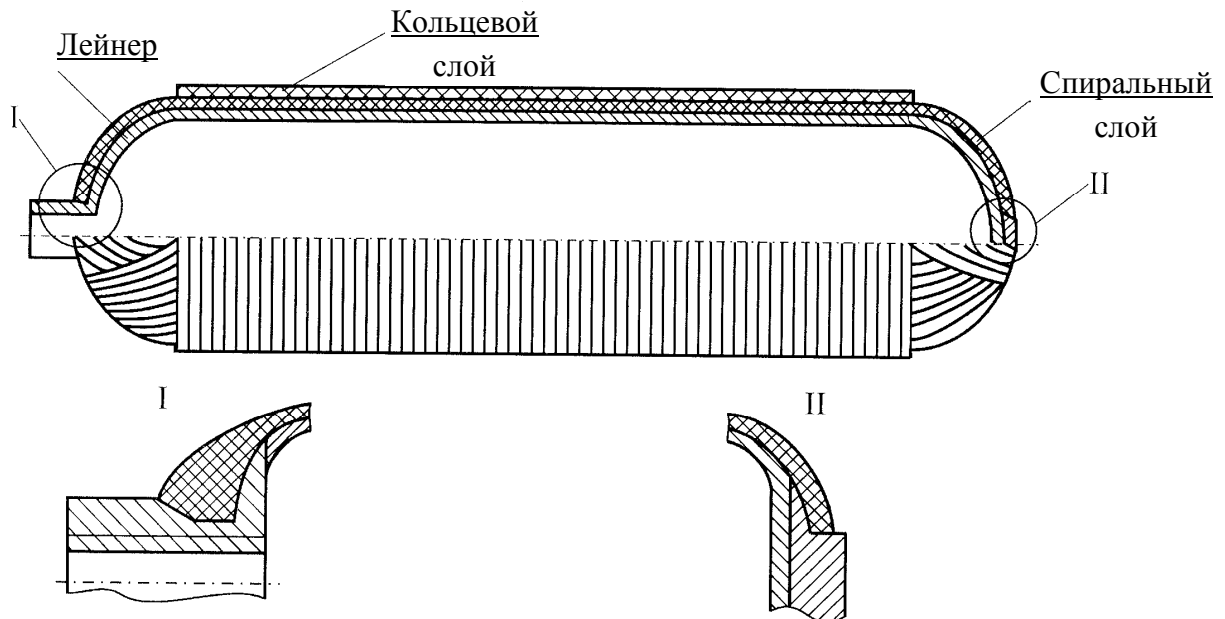


Рис. 2.6

2.6. Составные цилиндры разной длины

Ранее при расчетах предполагали, что в составном цилиндре обе трубы имеют одинаковую длину. Но при рассмотрении соединения ступицы с осью (путем посадки с натягом) оказывается, что выступающие из-под ступицы части оси оказывают сопротивление сжатию.

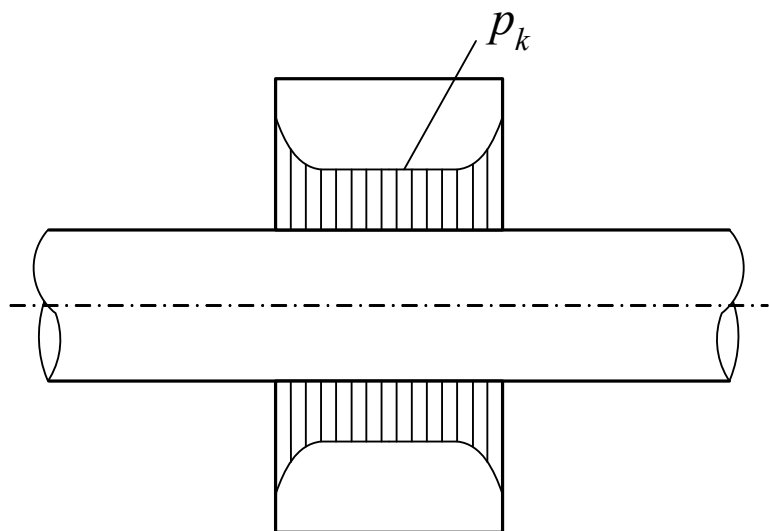


Рис. 2.7

В результате этого давление вблизи боковых поверхностей ступицы увеличивается, что показано на рис. 2.7 соответствующими эпюрами контактных давлений (значениями радиальных напряжений в зоне контакта). Кон-

центрацию напряжений, вызванную посадкой с натягом, учитывают при расчете вала (оси) и ступицы, в особенности на выносливость, а также коэффициентами концентрации напряжений, которые приведены в специальной технической литературе.

2.7. Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях необходимо использовать составные цилиндры, каждый из которых состоит из двух, надетых один на другой с натягом?
2. Какие особенности имеет НДС составного цилиндра до его рабочего нагружения?
3. За счет чего создается контактное давление между внутренним и наружным цилиндрами составной трубы?
4. Какое условие используется для определения величины контактного давления?
5. От чего зависит величина контактного давления в составном цилиндре, при изготовлении которого использованы разные материалы?
6. От чего зависит величина контактного давления в составном цилиндре, если материалы внутреннего и наружного цилиндров одинаковы?
7. Почему действительное контактное давление меньше теоретического?
8. При каком условии справедливы формулы для определения контактного давления?
9. В чем состоит условие прочности составного цилиндра?
10. В чем заключается смысл условий Гадолина?
11. Какова сравнительная прочность составного и цельного цилиндров?
12. В каком случае посадка цилиндров по условиям Гадолина эффективна?
13. Что называют автофретированием?
14. Какое ограничение накладывают на рабочее давление при использовании автофретирования?
15. В чем особенность распределения контактного давления в составном цилиндре в случае, когда внутренняя труба длиннее наружной?

2.8. Примеры решения задач расчета составных цилиндров

Задача № 2.1

Определить оптимальную величину контактного давления p_k составного цилиндра из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров и величину допускаемого внутреннего давления p_1 , если $r_B = 4$ см; $r_H = 12$ см; радиус контакта $c = 8$ см; $[\sigma] = 700$ МПа. Расчет выполнить в соответствии с четвертой теорией прочности.

Решение

Напряжения во внутреннем цилиндре будут наибольшими на внутренней поверхности при $r = r_B$. Их определяем по формулам (1.20 – 1.22) с применением принципа суперпозиции

$$\begin{aligned}\sigma_r^I \Big|_{r=r_B} &= \sigma_r^I(p_1) + \sigma_r^I(p_k) = -p_1 + 0 = -p_1; \\ \sigma_\theta^I \Big|_{r=r_B} &= \sigma_\theta^I(p_1) + \sigma_\theta^I(p_k) = \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} p_1 - \frac{2c^2}{c^2 - r_B^2} p_k = \\ &= \frac{12^2 + 4^2}{12^2 - 4^2} p_1 - \frac{2 \cdot 8^2}{8^2 - 4^2} p_k = \frac{144 + 16}{144 - 16} p_1 - \frac{2 \cdot 64}{64 - 16} p_k = \frac{160}{128} p_1 - \frac{128}{48} p_k = \\ &= \frac{10}{8} p_1 - \frac{8}{3} p_k = 1,25 p_1 - 2,67 p_k.\end{aligned}$$

В наружном цилиндре при $r = c$ наибольшие напряжения на внутренней поверхности

$$\begin{aligned}\sigma_r^{II} \Big|_{r=c} &= \sigma_r^{II}(p_1) + \sigma_r^{II}(p_k) = \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_H^2}{c^2} \right) p_1 - p_k = \\ &= \frac{4^2}{12^2 - 4^2} \left(1 - \frac{12^2}{8^2} \right) p_1 - p_k = \frac{16}{144 - 16} \left(1 - \frac{144}{64} \right) p_1 - p_k = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{9}{4} \right) p_1 - p_k = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{9}{4} \right) p_1 - p_k = -\frac{5}{32} p_1 - p_k = -0,156 p_1 - p_k.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^{II} \Big|_{r=r_B} &= \sigma_\theta^{II}(p_1) + \sigma_\theta^{II}(p_k) = \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{c^2} \right) p_1 + \frac{r_H^2 + c^2}{r_H^2 - c^2} p_k = \\ &= \frac{4^2}{12^2 - 4^2} \left(1 + \frac{12^2}{8^2} \right) p_1 + \frac{12^2 + 8^2}{12^2 - 8^2} p_k = \frac{16}{144 - 16} \left(1 + \frac{144}{64} \right) p_1 + \frac{144 + 64}{144 - 64} p_k =\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{128} \left(1 + \frac{9}{4}\right) p_1 + \frac{208}{80} p_k = \frac{1}{8} \frac{13}{4} p_1 + \frac{13}{5} p_k = \frac{13}{32} p_1 + \frac{13}{5} p_k = 0,406 p_1 + 2,6 p_k.$$

Учтем, что главные напряжения связаны соотношением $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и запишем их значения на внутренней поверхности внутреннего цилиндра: $\sigma_1 = \sigma_\theta^I$; $\sigma_2 = 0$ (предполагаем составной цилиндр открытым); $\sigma_3 = \sigma_r^I$.

Главные напряжения на внутренней поверхности наружного цилиндра $\sigma_1 = \sigma_\theta^{II}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_r^{II}$.

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Условие равнопрочности (равенство эквивалентных напряжений) на двух указанных опасных поверхностях, записанное согласно четвертой теории прочности, имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_\theta^I)^2 + (\sigma_r^I)^2 + (\sigma_r^I - \sigma_\theta^I)^2} = \sqrt{(\sigma_\theta^{II})^2 + (\sigma_r^{II})^2 + (\sigma_r^{II} - \sigma_\theta^{II})^2}.$$

Преобразуем его, избавившись от квадратов разностей и сократив на два запись под обоими радикалами:

$$\sqrt{(\sigma_\theta^I)^2 - (\sigma_\theta^I)(\sigma_r^I) + (\sigma_r^I)^2} = \sqrt{(\sigma_\theta^{II})^2 - (\sigma_\theta^{II})(\sigma_r^{II}) + (\sigma_r^{II})^2}.$$

Подставим сюда выражения для определения напряжений через давления, предварительно избавившись от радикалов:

$$(1,25 p_1 - 2,67 p_k)^2 - (-p_1)(1,25 p_1 - 2,67 p_k) + p_1^2 = (0,406 p_1 + 2,6 p_k)^2 - (0,406 p_1 - 2,6 p_k)(-0,156 p_1 - p_k) + (-0,156 p_1 - p_k)^2.$$

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} & 1,25^2 p_1^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot 2,67 p_1 p_k + 2,67^2 p_k^2 + 1,25 p_1^2 - 2,67 p_1 p_k + p_1^2 = \\ & = 0,406^2 p_1^2 + 2 \cdot 0,406 \cdot 2,6 p_1 p_k + 2,6^2 p_k^2 + 0,406 \cdot 0,156 p_1^2 + \\ & + 2,6 \cdot 0,156 p_1 p_k + 0,406 p_1 p_k + 2,6 p_k^2 + 0,156^2 p_1^2 + 2 \cdot 0,156 p_1 p_k + p_k^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} & 1,563 p_1^2 - 6,675 p_1 p_k + 7,129 p_k^2 + 1,25 p_1^2 - 2,67 p_1 p_k + p_1^2 = \\ & = 0,165 p_1^2 + 2,111 p_1 p_k + 6,76 p_k^2 + 0,0633 p_1^2 + 0,406 p_1 p_k + \\ & + 0,406 p_1 p_k + 2,6 p_k^2 + 0,0243 p_1^2 + 0,312 p_1 p_k + p_k^2. \end{aligned}$$

Приведем подобные:

$$(1,563 + 1,25 + 1 - 0,165 - 0,0633 - 0,0243)p_1^2 + \\ + (-6,675 - 2,67 - 2,111 - 0,406 - 0,406 - 0,312)p_1 p_k + \\ + (7,129 - 6,76 - 2,6 - 1)p_k^2 = 0$$

или

$$3,56p_1^2 - 12,58p_1 p_k - 3,23p_k^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно p_k , получим

$$p_1 = \frac{-(-12,58) \pm \sqrt{(-12,58)^2 - 4 \cdot 3,56 \cdot (-3,23)}}{2 \cdot 3,56} p_k = \\ = \frac{7,24 \pm \sqrt{158,26 + 46,00}}{7,12} p_k = \frac{12,58 \pm \sqrt{204,26}}{7,12} p_k = \frac{12,58 \pm 14,29}{7,12} p_k.$$

В этом случае интерес представляет только положительный корень

$$p_1 = \frac{12,58 + 14,29}{7,12} p_k = \frac{21,53}{7,12} p_k = 3,02 p_k.$$

Оптимальная величина давления p_k определяется условием прочности

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \left[(\sigma_\theta^I)^2 - (\sigma_\theta^I)(\sigma_r^I) + (\sigma_r^I)^2 \right]} = [\sigma]$$

или

$$\sqrt{(\sigma_\theta^I)^2 - (\sigma_\theta^I)(\sigma_r^I) + (\sigma_r^I)^2} = [\sigma].$$

Избавимся от радикала $(\sigma_\theta^I)^2 - (\sigma_\theta^I)(\sigma_r^I) + (\sigma_r^I)^2 = [\sigma]^2$ и подставим значения σ_θ^I и σ_r^I : $(1,25 p_1 - 2,67 p_k)^2 - (-p_1)(1,25 p_1 - 2,67 p_k) + p_1^2 = [\sigma]^2$ и, перемножив, приведем подобные

$$1,563 p_1^2 - 6,675 p_1 p_k + 7,129 p_k^2 + 1,25 p_1^2 - 2,67 p_1 p_k + p_1^2 = [\sigma]^2,$$

$$(1,563 + 1,25 + 1)p_1^2 - (2,67 + 6,675)p_1 p_k + 7,129 p_k^2 = [\sigma]^2,$$

$$3,813 p_1^2 - 9,345 p_1 p_k + 7,129 p_k^2 = [\sigma]^2.$$

Подставим сюда выражение для определения p_1 через p_k :

$$3,813 \cdot (3,02 p_k)^2 - 9,345 \cdot 3,02 p_k^2 + 7,129 p_k^2 = [\sigma]^2,$$

$$(34,776 - 28,222 + 7,129)p_k^2 = [\sigma]^2,$$

$$13,683 p_k^2 = [\sigma]^2.$$

Отсюда найдем

$$p_k = \frac{[\sigma]}{\sqrt{13,683}} = \frac{700}{3,699} = 189,24 \text{ МПа.}$$

Теперь можно определить допускаемое внутреннее давление

$$p_1 = 3,02 p_k = 3,02 \cdot 189,24 = 571,5 \text{ МПа.}$$

Замечание. В этой задаче условия Гадолина не применяли; использовали четвертую теорию прочности, а не третью как ранее, при наличии соответствующих данных можно было бы применить и пятую теорию прочности.

Задача № 2.2

Для составного цилиндра из трех труб со стенками одинаковой толщины, собранных с натягом, подобрать точные размеры радиусов, обеспечивающих натяг. Цилиндр находится под действием внутреннего давления $p = 100$ МПа. Радиусы труб $r_1 = 10$ см; $r_2 = 15$ см; $r_3 = 20$ см; $r_4 = 25$ см (рис. 2.8).

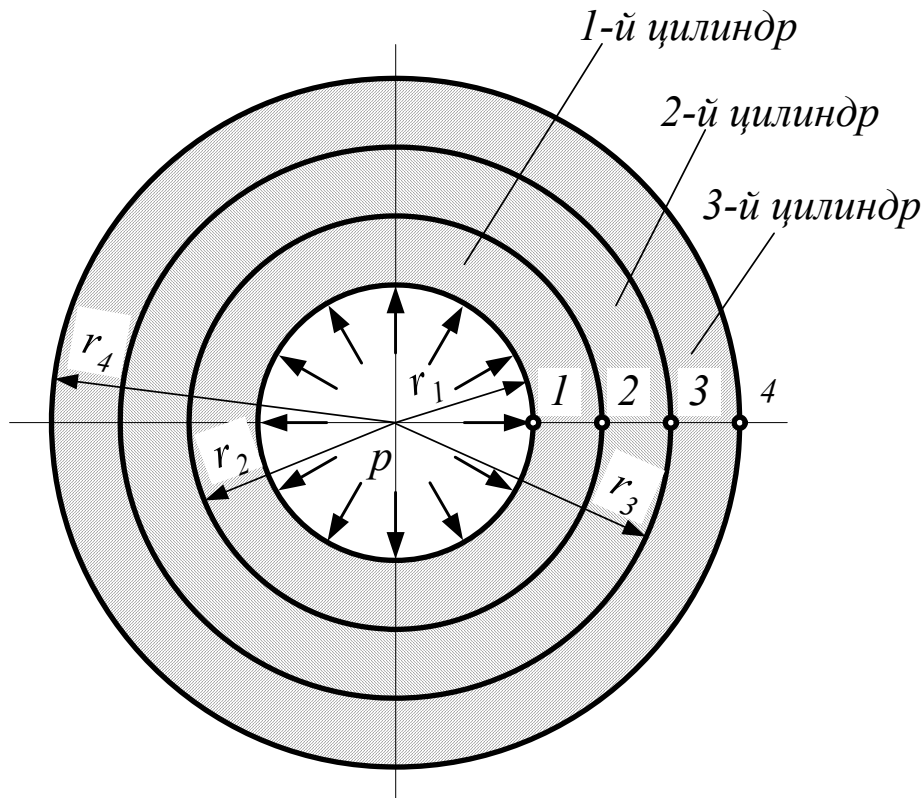


Рис. 2.8

Решение

Если бы данный цилиндр не был составным, а сплошным, то распределение напряжений σ_θ и σ_r вдоль радиуса определяли с помощью выражений (1.21)

$$\sigma_r = -\frac{pr_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(\frac{r_H^2}{r^2} - 1 \right) = -\frac{100 \cdot 10^2}{25^2 - 10^2} \left(\frac{25^2}{r^2} - 1 \right) = -19,4 \left(\frac{25^2}{r^2} - 1 \right) \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta = -\frac{pr_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(\frac{r_H^2}{r^2} + 1 \right) = -\frac{100 \cdot 10^2}{25^2 - 10^2} \left(\frac{25^2}{r^2} + 1 \right) = -19,4 \left(\frac{25^2}{r^2} + 1 \right) \text{ МПа},$$

где r – расстояние от оси цилиндра, см.

Построим эпюры напряжений $\sigma_r(p)$ и $\sigma_\theta(p)$, полученных по этим формулам (рис. 2.9). Такие же напряжения возникают и в составном цилиндре под действием внутреннего давления (если считать отсутствующими начальные напряжения вследствие натяга).

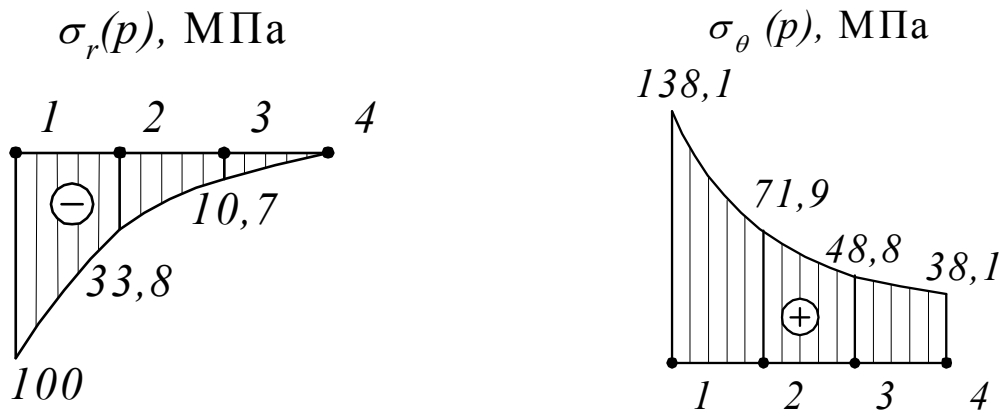


Рис. 2.9

Введем следующие обозначения: p_{1-2} – нормальное давление между наружной поверхностью первого цилиндра и внутренней поверхностью второго цилиндра; p_{2-3} – давление между наружной поверхностью второго цилиндра и внутренней поверхностью третьего цилиндра.

Давления p_{1-2} и p_{2-3} возникают в результате посадки с натягом второго цилиндра на первый и третьего на второй.

Ординаты эпюр напряжений $\sigma_r(p)$ и $\sigma_\theta(p)$ под действием давлений p_{1-2} и p_{2-3} рассчитаны по формулам (1.21) и (1.22), причем отдельно рассмотрено действие давления p_{1-2} на первую и вторую трубы (рис. 2.10) и давления p_{2-3} на вторую и третью трубы (рис. 2.11).

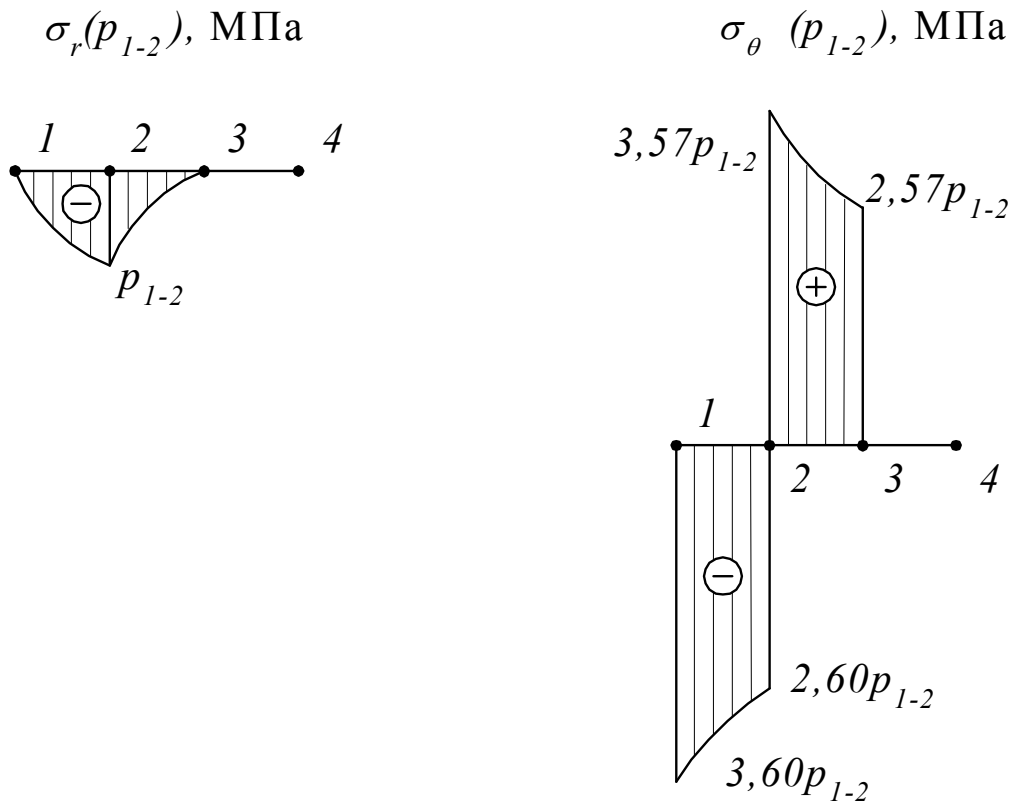


Рис. 2.10

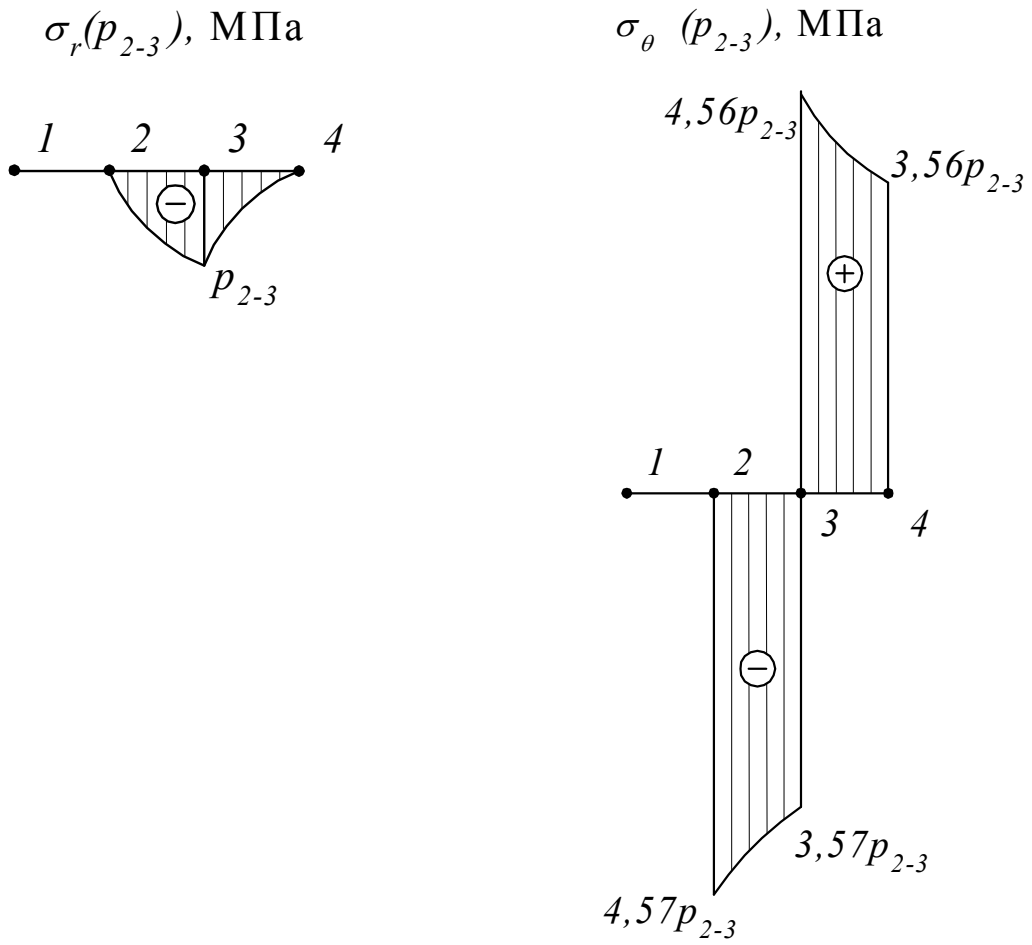


Рис. 2.11

При этом значения полных напряжений σ_{θ}^{Σ} в точках, расположенных в непосредственной близости от точек 1, 2, 3 (справа от них) (см. рис. 2.8), следующие:

$$\text{при } r = r_1 + dr \quad \sigma_{\theta} = 138,1 - 3,60 p_{1-2};$$

$$\text{при } r = r_2 + dr \quad \sigma_{\theta} = 71,9 + 3,37 p_{1-2} - 4,57 p_{2-3};$$

$$\text{при } r = r_3 + dr \quad \sigma_{\theta} = 48,8 + 4,56 p_{2-3}.$$

Величины давлений p_{1-2} и p_{2-3} , вызванных натягом, подбираем с таким расчетом, чтобы распределение напряжений σ_{θ}^{Σ} вдоль радиуса составного цилиндра было, по возможности, более равномерным. Для этого необходимо, чтобы напряжения σ_{θ} в точках, удаленных от оси составного цилиндра на расстояния $r_1 + dr$, $r_2 + dr$, $r_3 + dr$, были одинаковы, т.е.

$$138,1 - 3,60 p_{1-2} = 71,9 + 3,57 p_{1-2} - 4,57 p_{2-3} = 48,8 + 4,56 p_{2-3}.$$

Из равенства $138,1 - 3,60 p_{1-2} = 48,8 + 4,56 p_{2-3}$ находим, что $p_{2-3} = 19,6 - 0,79 p_{1-2}$.

Подставим выражение p_{2-3} в равенство

$$138,1 - 3,60 p_{1-2} = 71,9 + 3,57 p_{1-2} - 4,57 p_{2-3} = 48,8 + 4,56 p_{2-3}$$

и, решив его, получим $p_{1-2} = 14,45$ МПа, следовательно,

$$p_{2-3} = 19,6 - 0,79 p_{1-2} = 8,2 \text{ МПа.}$$

Величины полных напряжений σ_r^{Σ} и σ_{θ}^{Σ} в составном цилиндре можно определить путем суммирования напряжений, возникающих под действием внутреннего давления (см. рис. 2.9), с напряжениями, полученными вследствие натяга (см. рис. 2.10 и 2.11):

при $r = 10$ см

$$\sigma_r^{\Sigma} = -100 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{\theta}^{\Sigma} = 138,1 - 3,60 p_{1-2} = 138,1 - 3,60 \cdot 14,45 = 86,1 \text{ МПа;}$$

при $r = 15$ см

$$\sigma_r^{\Sigma} = -33,8 - p_{1-2} = -33,8 - 14,45 = -48,3 \text{ МПа;}$$

слева от точки 2

$$\sigma_{\theta}^{\Sigma} = 71,9 - 3,60 p_{1-2} = 71,9 - 3,60 \cdot 14,45 = 34,4 \text{ МПа;}$$

справа от точки 2

$$\sigma_{\theta}^{\Sigma} = 71,9 + 3,57 p_{1-2} - 4,57 p_{2-3} = 71,9 + 3,57 \cdot 14,45 - 4,57 \cdot 8,2 = 86,1 \text{ МПа;}$$

при $r = 20$ см

$$\sigma_r^\Sigma = -10,7 - p_{2-3} = -10,7 - 8,2 = -18,9 \text{ МПа};$$

слева от точки 3

$$\sigma_\theta^\Sigma = 48,8 + 2,57 p_{1-2} - 3,57 p_{2-3} = 48,8 + 2,57 \cdot 14,45 - 3,57 \cdot 8,2 = 56,7 \text{ МПа};$$

справа от точки 3

$$\sigma_\theta^\Sigma = 48,8 + 4,56 p_{2-3} = 48,8 + 4,56 \cdot 8,2 = 86,1 \text{ МПа};$$

при $r = 25$ см

$$\sigma_r^\Sigma = 0;$$

$$\sigma_\theta^\Sigma = 38,1 + 3,56 p_{2-3} = 38,1 + 3,56 \cdot 8,2 = 67,2 \text{ МПа}.$$

На основе полученных значений напряжений σ_r^Σ и σ_θ^Σ построим эпюры полных напряжений в составном цилиндре (рис. 2.12).

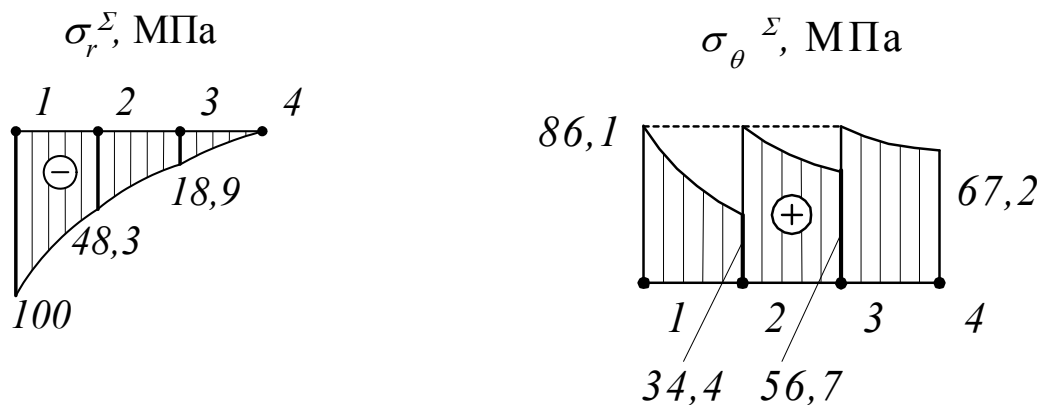


Рис. 2.12

Площадь эпюры σ_θ^Σ на рис. 2.12 равна площади эпюры напряжений σ_θ , обусловленных внутренним давлением p (см. рис. 2.9), однако напряжения σ_θ^Σ распределены более равномерно. В результате этого наибольшее напряжение в материале цилиндра уменьшается от 138,1 МПа до 86,1 МПа.

Для того, чтобы после сборки составного цилиндра по поверхности контакта первой и второй труб (цилиндров) возникло давление p_{1-2} , а второй и третьей труб – давление p_{2-3} , необходимо при изготовлении второй трубы радиус выполнить на величину Δ_2 меньше наружного радиуса первой, а внутренний радиус третьей трубы – на величину Δ_3 меньше наружного радиуса второй (рис. 2.13).

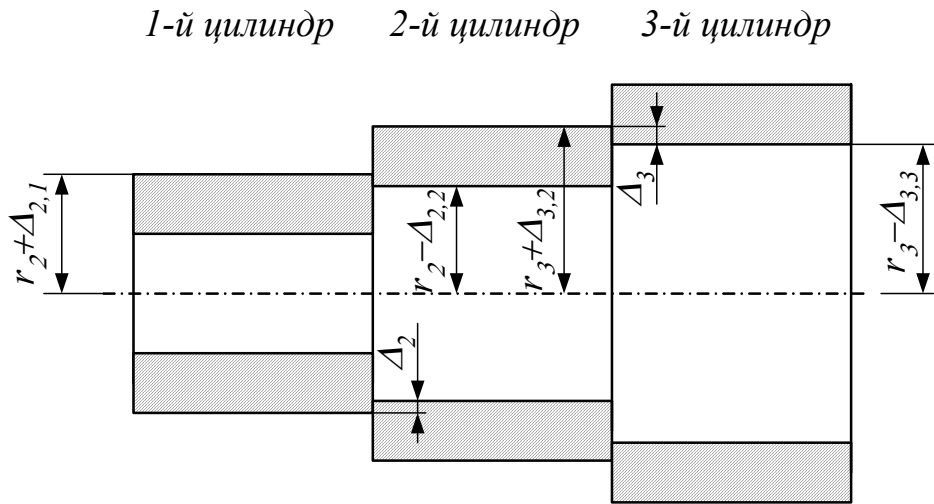


Рис. 2.13

Если к трубам до их сборки приложить давления p_{1-2} и p_{2-3} , то наружный радиус первой трубы станет равным внутреннему радиусу второй, а наружный радиус второй – внутреннему радиусу третьей (рис. 2.14).

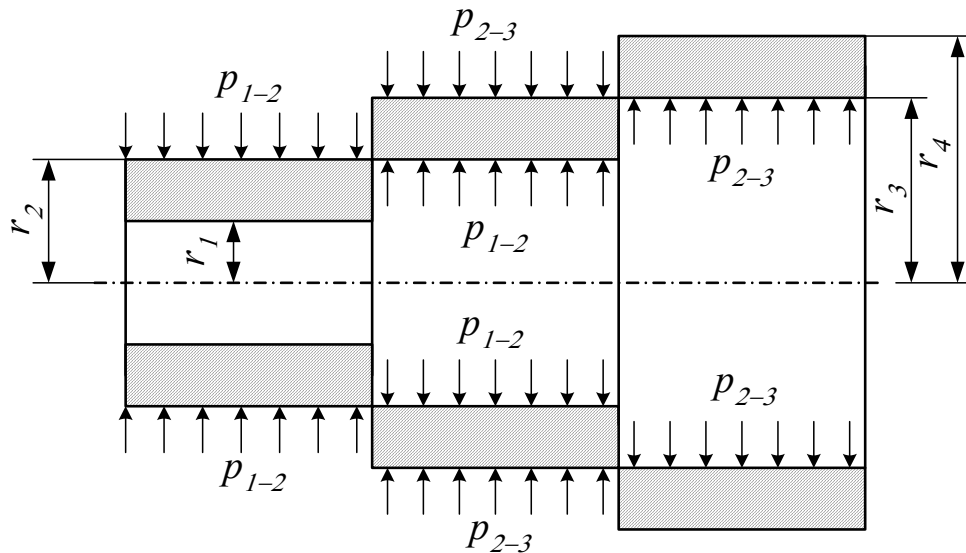


Рис. 2.14

Следовательно,

$$\Delta_2 = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2};$$

$$\Delta_3 = \Delta_{3,2} + \Delta_{3,3};$$

где $\Delta_{2,1}$ – уменьшение наружного радиуса первой трубы под действием давления p_{1-2} ;

$\Delta_{2,2}$ – увеличение внутреннего радиуса второй трубы под действием давлений p_{1-2} и p_{2-3} ;

$\Delta_{3,2}$ – уменьшение наружного радиуса второй трубы под действием давлений p_{1-2} и p_{2-3} ;

$\Delta_{3,3}$ – увеличение внутреннего радиуса третьей трубы под действием давления p_{2-3} .

Далее рассмотрим радиальные перемещения точек цилиндра u .

С учетом $\sigma_z = 0$ приведем второе уравнение обобщенного закона Гука (1.10)

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{\sigma_\theta - \mu\sigma_r}{E}.$$

Подставив в это выражение σ_r и σ_θ из формулы (1.20), определим

$$u = \frac{1}{E(r_H^2 - r_B^2)} \left[(1 - \mu)(p_B r_B^2 - p_H r_H^2)r + (1 + \mu)(p_B - p_H) \frac{r_B^2 r_H^2}{r} \right].$$

Положительное значение u указывает, что точка смещается по радиусу от оси цилиндра. Для решения интерес представляют точки цилиндра, находящиеся на внутренней и наружной поверхностях. Для того, чтобы определить радиальные смещения этих точек, вместо r в последнюю формулу надо подставить соответственно значения r_B и r_H . В результате этого получим

$$u_B = \frac{r_B}{E} \left[p_B \left(\frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \mu \right) - 2p_H \frac{r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \right]; \quad (2.16)$$

$$u_H = \frac{r_H}{E} \left[-p_H \left(\frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} - \mu \right) + 2p_B \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \right].$$

Теперь с помощью этих формул определим $\Delta_{i,j}$ с учетом того, что начальные радиусы труб отличаются от радиусов r_1 , r_2 , r_3 и r_4 на весьма малые величины, которыми при вычислении значений $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{3,2}$ и $\Delta_{3,3}$ можно пренебречь:

$$\delta_{2,1} = \frac{r_2}{E} p_{1-2} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right);$$

$$\delta_{2,2} = \frac{r_2}{E} \left[p_{1-2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu \right) - 2p_{2-3} \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right];$$

$$\delta_{3,2} = \frac{r_3}{E} \left[p_{2-3} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu \right) - 2p_{1-2} \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right];$$

$$\delta_{3,3} = \frac{r_3}{E} p_{2-3} \left(\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \mu \right).$$

Подставив выражения $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{3,2}$ и $\Delta_{3,3}$ в формулы для определения Δ_2 и Δ_3 , после преобразования получим

$$\Delta_2 = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2} = \frac{2r_2}{E(r_3^2 - r_2^2)} \left(p_2 r_2^2 \frac{r_3^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_3 r_3^2 \right);$$

$$\Delta_3 = \Delta_{3,2} + \Delta_{3,3} = \frac{2r_3}{E(r_3^2 - r_2^2)} \left(p_3 r_3^2 \frac{r_4^2 - r_2^2}{r_4^2 - r_3^2} - p_2 r_2^2 \right).$$

Подставив в эти формулы числовые значения величин (приняв $E = 200$ ГПа), запишем

$$\Delta_2 = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \left[(20 \cdot 10^{-2})^2 - (15 \cdot 10^{-2})^2 \right]} \left[14,45 \cdot 10^6 \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2 \frac{20^2 - 10^2}{15^2 - 10^2} - 8,2 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-2})^2 \right] = 0,000039 \text{ м.}$$

$$\Delta_3 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \left[(20 \cdot 10^{-2})^2 - (15 \cdot 10^{-2})^2 \right]} \left[14,45 \cdot 10^6 \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2 + 8,2 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \frac{25^2 - 15^2}{25^2 - 20^2} \right] = 0,000030 \text{ м.}$$

Следовательно, вторая труба (цилиндр) должна иметь внутренний радиус меньше на $\Delta_2 = 0,000039 \text{ м} = 0,039 \text{ мм}$ наружного радиуса первой трубы (цилиндра), а третья труба – внутренний радиус меньше на $\Delta_3 = 0,000030 \text{ м} = 0,030 \text{ мм}$ наружного радиуса второй трубы. При выполнении этих условий в составном цилиндре после сборки возникнут необходимые начальные напряжения, а под действием внутреннего давления полные напряжения будут равны напряжениям, показанным на рис. 2.12.

Задача № 2.3

Составной открытый цилиндр состоит из двух труб, собранных с натягом. Размеры поперечного сечения показаны на рис. 2.15. Наружная (первая) труба изготовлена с внутренним диаметром на 0,02 см меньше наружного диаметра внутренней (второй) трубы.

Построить эпюры полных напряжений в цилиндре при внутреннем давлении $p_B = 80$ МПа. Принять $E = 200$ ГПа и $\mu = 0,3$.

Решение

На рис. 2.15 изображены сечения первой и второй труб и действующие на эти трубы давления. Полное (вызванное натягом и p_B) давление, действующее по поверхности соприкосновения (контакта) первой и второй труб, обозначим p_{2-1} .

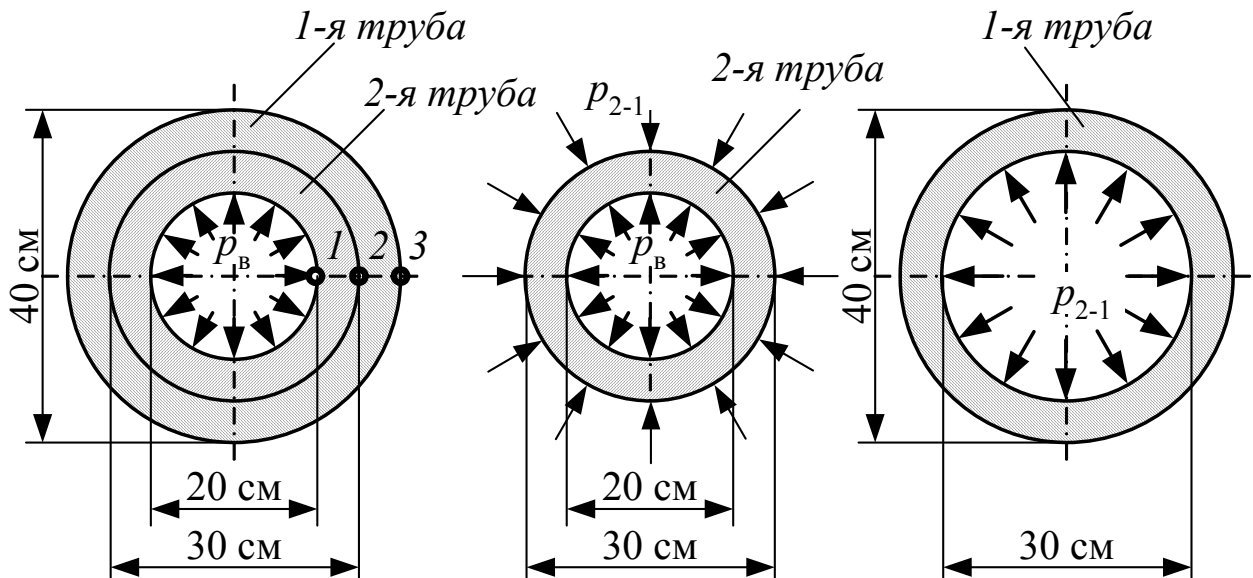


Рис. 2.15

Увеличение $u_{н,2}$ наружного радиуса второй трубы определим по формуле (2.16)

$$u_{н,2} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9} \left[2 \times 80 \cdot 10^6 \times \frac{10^2}{15^2 - 10^2} - p_{2-1} \left(\frac{15^2 + 10^2}{15^2 - 10^2} - 0,3 \right) \right] =$$

$$= (960 - 17,25 \cdot 10^{-6} p_{2-1}) \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Увеличение $u_{в,1}$ внутреннего радиуса первой трубы вычислим по этой же формуле

$$u_{в,1} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9} p_{2-1} \left(\frac{20^2 + 15^2}{20^2 - 15^2} + 0,3 \right) = 29,04 \cdot 10^{-13} p_{2-1} \text{ м.}$$

Внутренний радиус первой трубы на $\delta = 0,01$ см меньше наружного радиуса второй трубы. После сборки составного цилиндра (и, в частности, после создания давления p_{2-1}) оба эти радиуса будут одинаковы. Следовательно,

$$u_{в,1} = u_{н,2} + \delta$$

или $29,04 \cdot 10^{-13} p_{2-1} = (960 - 17,25 \cdot 10^{-6} p_{2-1}) \cdot 10^{-7} + 0,0001$,
откуда

$$29,04 \cdot 10^{-6} p_{2-1} = 960 - 17,25 \cdot 10^{-6} p_{2-1} + 1000;$$

$$46,29 \cdot 10^{-6} p_{2-1} = 1960;$$

$$p_{2-1} = 42,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 42,3 \text{ МПа.}$$

Определим по формуле (1.20) напряжения σ_θ во второй трубе:

при $r = r_{в} = 10$ см

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p_{в} r_{в}^2 - p_{2-1} r_{н}^2}{r_{н}^2 - r_{в}^2} + \frac{(p_{в} - p_{2-1}) r_{в}^2 r_{н}^2}{(r_{н}^2 - r_{в}^2) r_{в}^2} = \\ &= \frac{1}{r_{н}^2 - r_{в}^2} (p_{в} r_{в}^2 - p_{2-1} r_{н}^2 + (p_{в} - p_{2-1}) r_{н}^2) = \\ &= \frac{1}{15^2 - 10^2} [80 \cdot 10^2 - 42,3 \cdot 15^2 + (80 - 42,3) \cdot 15^2] = \\ &= \frac{1}{225 - 100} (80 \cdot 100 - 42,3 \cdot 225 + 37,7 \cdot 225) = \\ &= \frac{1}{125} (8000 - 9517,5 + 8482,5) = \frac{6965}{125} = 55,72 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

при $r = r_{н} = 15$ см

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p_{в} r_{в}^2 - p_{2-1} r_{н}^2}{r_{н}^2 - r_{в}^2} + \frac{(p_{в} - p_{2-1}) r_{в}^2 r_{н}^2}{(r_{н}^2 - r_{в}^2) r_{н}^2} = \\ &= \frac{1}{r_{н}^2 - r_{в}^2} (p_{в} r_{в}^2 - p_{2-1} r_{н}^2 + (p_{в} - p_{2-1}) r_{н}^2) = \\ &= \frac{1}{15^2 - 10^2} [80 \cdot 10^2 - 42,3 \cdot 15^2 + (80 - 42,3) \cdot 10^2] = \\ &= \frac{1}{225 - 100} (80 \cdot 100 - 42,3 \cdot 225 + 37,7 \cdot 100) = \\ &= \frac{1}{125} (8000 - 9517,5 + 3770) = \frac{2252,5}{125} = 18,02 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Определим по формуле (1.20) напряжения σ_θ в первой трубе:

при $r = r_B = 15$ см

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_{2-1} r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{p_{2-1} r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_B^2} = \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_{2-1} r_B^2 + p_{2-1} r_H^2) = \\ &= \frac{1}{20^2 - 15^2} (42,3 \cdot 15^2 + 42,3 \cdot 20^2) = \frac{42,3 \cdot (225 + 400)}{400 - 225} = \frac{42,3 \cdot 625}{175} = \\ &= \frac{26437,5}{175} = 151,1 \text{ МПа};\end{aligned}$$

при $r = r_H = 20$ см

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_{2-1} r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{p_{2-1} r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_H^2} = \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_{2-1} r_B^2 + p_{2-1} r_B^2) = \\ &= \frac{1}{20^2 - 15^2} (42,3 \cdot 15^2 + 42,3 \cdot 15^2) = \frac{42,3 \cdot (225 + 225)}{400 - 225} = \frac{42,3 \cdot 450}{175} = \\ &= \frac{19035}{175} = 108,8 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Напряжения σ_r в точках 1, 2 и 3 равны соответственно p_B , p_{2-1} и нулю.

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ изображены на рис. 2.16.

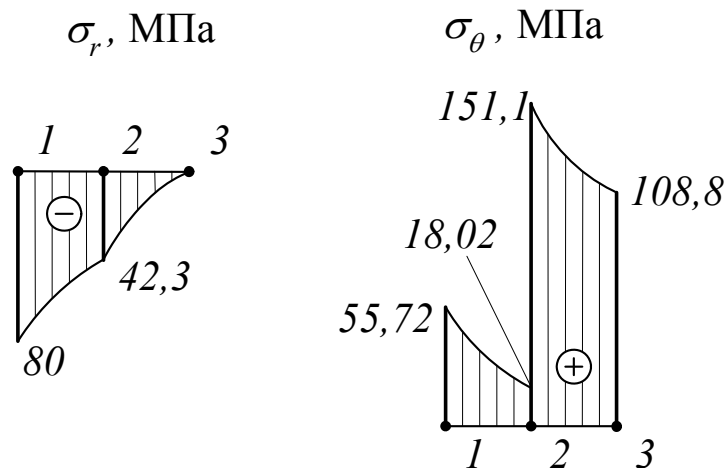


Рис. 2.16

Замечание. Из эпюры напряжений σ_θ (рис. 2.16) видно, что величина натяга при изготовлении труб для составного цилиндра выбрана излишне большой.

Итак, распределение напряжений σ_θ по толщине цилиндра получилось неравномерным. Изменив величину натяга (вместо 0,02 см взяв 0,008 см), получим

$$u_{в,1} = u_{н,2} + \delta$$

или $29,04 \cdot 10^{-13} p_{2-1} = (960 - 17,25 \cdot 10^{-6} p_{2-1}) \cdot 10^{-7} + 0,00004,$

откуда

$$29,04 \cdot 10^{-6} p_{2-1} = 960 - 17,25 \cdot 10^{-6} p_{2-1} + 400;$$

$$46,29 \cdot 10^{-6} p_{2-1} = 1360;$$

$$p_{2-1} = 29,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 29,4 \text{ МПа}.$$

Определим по формуле (1.20) напряжения σ_θ во второй трубе:

при $r = r_B = 10$ см

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p_B r_B^2 - p_{2-1} r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{(p_B - p_{2-1}) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_B^2} = \\ &= \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_B r_B^2 - p_{2-1} r_H^2 + (p_B - p_{2-1}) r_H^2) = \\ &= \frac{1}{15^2 - 10^2} [80 \cdot 10^2 - 29,4 \cdot 15^2 + (80 - 29,4) \cdot 15^2] = \\ &= \frac{1}{225 - 100} (80 \cdot 100 - 29,4 \cdot 225 + 50,6 \cdot 225) = \\ &= \frac{1}{125} (8000 - 6610,5 + 11395) = \frac{12774,5}{125} = 102,2 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

при $r = r_H = 15$ см

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p_B r_B^2 - p_{2-1} r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{(p_B - p_{2-1}) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_H^2} = \\ &= \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_B r_B^2 - p_{2-1} r_H^2 + (p_B - p_{2-1}) r_B^2) = \\ &= \frac{1}{15^2 - 10^2} [80 \cdot 10^2 - 29,4 \cdot 15^2 + (80 - 29,4) \cdot 10^2] = \\ &= \frac{1}{225 - 100} (80 \cdot 100 - 29,4 \cdot 225 + 50,6 \cdot 100) = \\ &= \frac{1}{125} (8000 - 6610,5 + 5060) = \frac{6449,5}{125} = 51,6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Определим по формуле (1.20) напряжения σ_θ в первой трубе:
при $r = r_B = 15$ см

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_{2-1} r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{p_{2-1} r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_B^2} = \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_{2-1} r_B^2 + p_{2-1} r_H^2) = \\ &= \frac{1}{20^2 - 15^2} (29,4 \cdot 15^2 + 29,4 \cdot 20^2) = \frac{29,4 \cdot (225 + 400)}{400 - 225} = \\ &= \frac{29,4 \cdot 625}{175} = \frac{18375}{175} = 105,0 \text{ МПа};\end{aligned}$$

при $r = r_H = 20$ см

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{p_{2-1} r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} + \frac{p_{2-1} r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r_H^2} = \frac{1}{r_H^2 - r_B^2} (p_{2-1} r_B^2 + p_{2-1} r_B^2) = \\ &= \frac{1}{20^2 - 15^2} (29,4 \cdot 15^2 + 29,4 \cdot 15^2) = \frac{29,4 \cdot (225 + 225)}{400 - 225} = \\ &= \frac{29,4 \cdot 450}{175} = \frac{13230}{175} = 75,6 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Построим эпюру напряжений σ_θ (рис. 2.17). При новой величине натяга максимальное значение напряжения σ_θ снизилось примерно в полтора раза. Распределение этого напряжения по толщине составного цилиндра стало более равномерным.

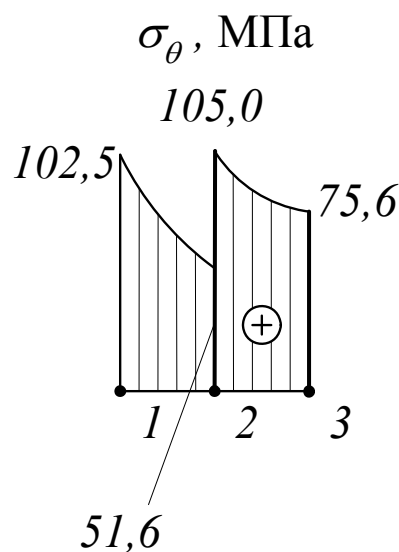


Рис. 2.17

Задача № 2.4

Определить наружный диаметр $2b$, диаметр $2c$ контактной поверхности, величину натяга δ составного орудийного ствола, внутренний диаметр которого $2a = 122$ мм, а также контактное давление между цилиндрами при установленном натяге. В момент выстрела максимальное давление $p = 200$ МПа. Орудийный ствол изготовлен из стали, условный предел текучести которой $\sigma_{0,2} = 600$ МПа и модуль упругости $E = 200$ ГПа. Требуемый коэффициент запаса $n = 2$.

Решение

Вычислим допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{n} = \frac{600}{2} = 300 \text{ МПа.}$$

Используя формулу (2.14), определим внешний диаметр $2b$:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = [\sigma] = p \frac{b}{b-a};$$

$$[\sigma](b-a) = pb;$$

$$[\sigma]a = b([\sigma] - p);$$

$$b = a \frac{[\sigma]}{[\sigma] - p} = 6,1 \frac{300}{300 - 200} = 18,3 \text{ см.}$$

По формуле (2.13) вычислим радиус контактной поверхности

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{6,1 \cdot 18,3} = 10,6 \text{ см.}$$

Следовательно, $2b = 2 \cdot 18,3 = 36,6 \text{ см} = 366 \text{ мм};$

$$2a = 2 \cdot 10,6 = 21,2 \text{ см} = 212 \text{ мм.}$$

По формуле (2.15) вычислим требуемую величину натяга

$$\delta = \frac{2pc}{E} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 10,6 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10,6 \cdot 110^{-5} = 0,212 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,212 \text{ мм.}$$

Воспользуемся формулой (2.7) для определения контактного давления

$$p_k = \frac{\delta E}{4c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2} = \frac{0,212 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^9}{4(10,6 \cdot 10^{-2})^3} \times \\ \times \frac{(10,6^2 - 6,1^2)(18,3^2 - 10,6^2) \cdot 10^{-4}}{18,3^2 - 6,1^2} = 50,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,0 \text{ МПа.}$$

Задача № 2.5

Стальной стержень установлен с натягом в стальной плите (рис. 2.18). Какую силу необходимо приложить к стержню в осевом направлении, чтобы вытянуть его из плиты? Известен натяг $\delta = 0,06$ мм; диаметр стержня $D = 60$ мм; толщина плиты $h = 100$ мм; модуль упругости $E = 200$ ГПа; коэффициент трения между плитой и стержнем $f = 0,25$.

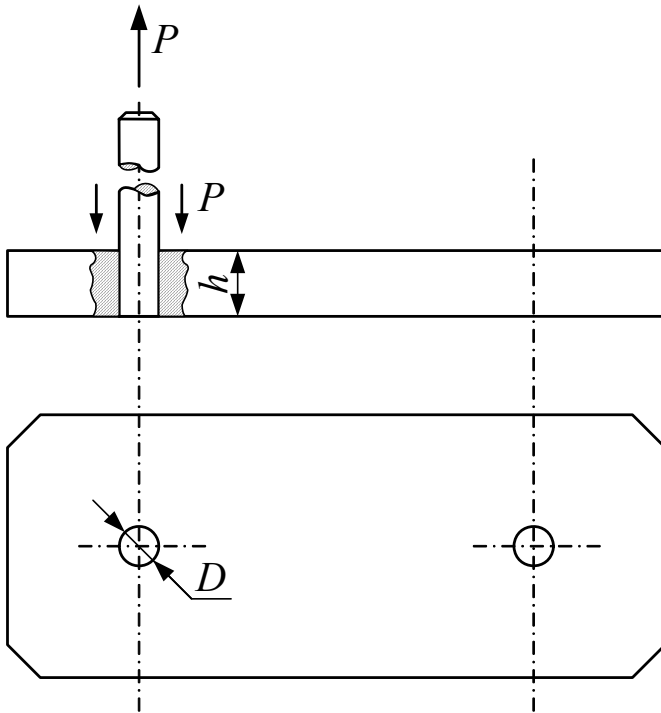


Рис. 2.18

Решение

Пренебрегая особенностями, связанными с неравномерностью натяга по толщине плиты, считаем, что искомая сила является силой трения

$$P = f p_k \pi D h,$$

где p_k – контактное давление; $\pi D h$ – площадь боковой поверхности части стержня, которая находится в плите.

Если принять, что $a = 0$; $b = \infty$; $c = \frac{D}{2}$, по формуле (2.7) можно определить контактное давление

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\delta E (c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}{4c^3 (b^2 - a^2)} = \frac{\delta E (c^2 - 0^2) (\infty^2 - c^2)}{4c^3 (\infty^2 - 0^2)} = \frac{\delta E}{4c^3} c^2 = \frac{\delta E}{4c} = \\ &= \frac{\delta E}{2D} = \frac{0,06 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^9}{2 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = 0,1 \cdot 10^9 = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Искомая сила

$$P = f p_k \pi D h = 0,25 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 471 \cdot 10^3 \text{ Н} = 471 \text{ кН}.$$

Задача № 2.6

Определить максимальное окружное напряжение, возникающее при посадке стальной втулки на стальной вал (рис. 2.19), если внутренний диаметр втулки меньше наружного диаметра вала на $\delta = 0,05$ мм (δ – так называемый натяг).

Модуль упругости $E = 200$ ГПа. Размеры втулки и вала показаны на рис 2.19.

Решение

Для определения окружного напряжения воспользуемся уравнением (1.21), так как наибольшую величину такое напряжение будет иметь, очевидно, на внутренней поверхности втулки. Подставив в данное уравнение $p = p_k$;

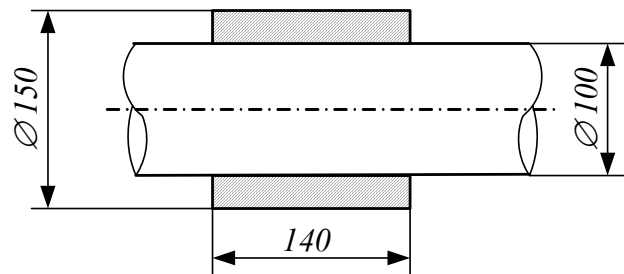


Рис. 2.19

$r_B = c = 5$ см; $r_H = b = 7,5$ см; $r = c = 5$ см, получим

$$\sigma_\theta = \frac{p r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right) = \frac{p_k c^2}{b^2 - c^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) = \frac{p_k 5^2}{7,5^2 - 5^2} \left(1 + \frac{7,5^2}{5^2} \right) = 2,6 p_k.$$

Для определения p_k используем уравнение (2.7), учитывая, что $a = 0$:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\delta E (c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}{4c^3 (b^2 - a^2)} = \frac{\delta E c^2 (b^2 - c^2)}{4c^3 b^2} = \frac{\delta E (b^2 - c^2)}{4c b^2} = \\ &= \frac{0,05 \cdot 210 \cdot 10^9 (7,5^2 - 5^2)}{4 \cdot 5 \cdot 7,5^2} = \frac{0,05 \cdot 210 \cdot 10^9 (56,25 - 25)}{20 \cdot 56,25} = \\ &= 0,02916 \cdot 10^9 \text{ Па} = 29,16 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

При этом окружное напряжение $\sigma_\theta = 2,6 p_k = 2,6 \cdot 29,16 = 75,82$ МПа.

Полученное напряжение будет номинальным, так как в точках, близких к боковым поверхностям втулки, которые перпендикулярны валу, в результате сопротивления сжатию выступающих из-под втулки частей вала возникнут места концентрации напряжений.

Значение коэффициента концентрации следует выбрать из соответствующего справочника, в данном случае (размеры соединения указаны на рис. 2.19) $\alpha = 1,5$. Следовательно, $\sigma_{\theta \max} = \alpha \sigma_\theta = 1,5 \cdot 75,82 = 113,72$ МПа.

Задача № 2.7

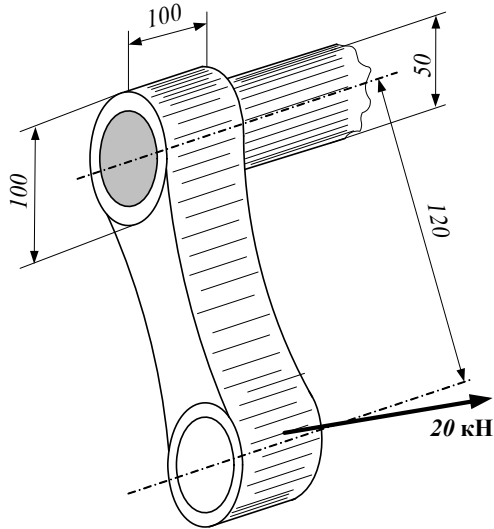


Рис. 2.20

Момент трения, который по условию необходимо создать между валом и втулкой кривошипа: $M_{\text{тр}} = M_{\text{к}} n = 2,4 \cdot 3 = 7,2$ кН. Определим момент трения в зависимости от давления между валом и втулкой кривошипа и их размеров.

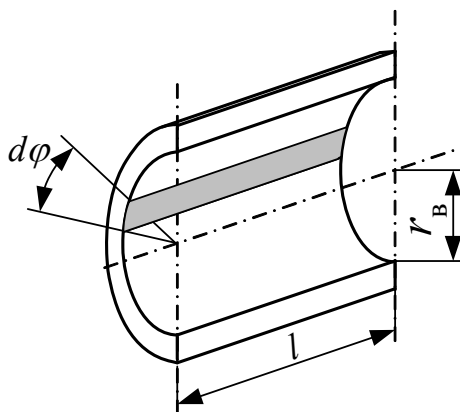


Рис. 2.21

Определить величину натяга δ , с каким надо посадить стальной кривошип на стальной вал (рис. 2.20), чтобы можно было передавать крутящий момент с запасом $n = 3$, если коэффициент трения $f = 0,2$; модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Решение

Передаваемый кривошипом крутящий момент

$$M_{\text{к}} = 20 \cdot 0,12 = 2,4 \text{ кН}.$$

Элементарный момент трения равен произведению силы трения, возникающей на элементарной площадке (рис. 2.21), на внутренний радиус втулки кривошипа.

$$\text{Итак, } dM_{\text{тр}} = f p_k \ell r_B d\varphi,$$

$$r_B = f p_k r_B^2 \ell d\varphi.$$

Тогда

$$M_{\text{тр}} = f \int_0^{2\pi} p_k r_B^2 \ell d\varphi = f 2\pi p_k r_B^2 \ell,$$

откуда

$$p_k = \frac{M_{\text{тр}}}{2\pi r_B^2 \ell f} = \frac{7200}{2 \cdot 3,14 \cdot (0,025)^2 \cdot 0,1 \cdot 0,2} = 91,72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 91,72 \text{ МПа}.$$

С учетом контактного давления, найдем величину натяга, преобразовав формулу (2.15)

$$p_k = \frac{\delta E (c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}{4c^3 (b^2 - a^2)}, \text{ из которой } \delta = \frac{4c^3 p_k (b^2 - a^2)}{E (c^2 - a^2) (b^2 - c^2)}.$$

Подставив в последнее выражение $a = 0$; $c = 2,5$ см; $b = 5$ см, получим

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{4 \cdot 2,5^3 \cdot 91,72}{200000} \frac{5^2}{2,5^2 \cdot (5^2 - 2,5^2)} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 91,72}{200000} \frac{5^2}{(5^2 - 2,5^2)} = \\ &= \frac{10 \cdot 91,72}{200000} \frac{25}{(25 - 6,25)} = \frac{91,72}{20000} \frac{25}{18,75} = 0,00615 \text{ см} = 0,0615 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Задача № 2.8

Бронзовый цилиндр, внешний диаметр которого $d_2 = 400$ мм, а внутренний $d_1 = 200$ мм, находится под действием внутреннего давления $p = 40$ МПа.

Определить коэффициент запаса по текучести, пользуясь третьей теорией прочности, если $\sigma_T = 90$ МПа. Как изменится коэффициент запаса конструкции, если на бронзовый цилиндр надеть плотно без натяга стальной цилиндр, толщина стенки которого $t = 50$ мм? Предел текучести стали $\sigma_T = 300$ МПа. Принять для бронзы $E = 100$ ГПа и $\mu = 0,25$; для стали $E = 200$ ГПа и $\mu = 0,3$.

Решение

Для изолированного бронзового цилиндра, нагруженного внутренним давлением, опасными являются точки внутренней поверхности. Воспользовавшись формулой (1.21) и приняв $p_B = p$, $r = r_B = 10$ см, $r_H = 20$ см, получим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{r_\theta} = \frac{p_B r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 \mp \frac{r_H^2}{r} \right) = \frac{p 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 \mp \frac{20^2}{10^2} \right) = \frac{p}{3} (1 \mp 4);$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{p}{3} 5 - \left(-\frac{p}{3} 3 \right) = \frac{p}{3} 8 = \frac{40}{3} 8 = 106,7 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса n изолированного бронзового цилиндра составит $\frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}} = \frac{90}{106,7} = 0,894$, т.е. прочность нарушается.

В конструкции, состоящей из бронзового цилиндра с надетым на него стальным цилиндром, элементы деформируются совместно. Следовательно, радиальные перемещения точек внешней поверхности бронзового цилиндра и точек внутренней поверхности стального цилиндра одинаковы.

При этом на бронзовый цилиндр действуют внутреннее давление и внешнее (контактное) давления, а стальной цилиндр подвержен только внутреннему (контактному) давлению. Понятно, что внешнее давление на стальной цилиндр и внутреннее давление на бронзовый цилиндр равны.

Используя второе уравнение из (1.10), радиальные перемещения в цилиндрах ввиду отсутствия усилий в их осевом направлении представим так: $u = r \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r)$. Следовательно, уравнение совместности напряжений, действующих на контактной поверхности, можно записать в виде

$$\left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) \right]_{\text{ст}} = \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) \right]_{\text{бр}}.$$

Запишем для левой части этого равенства (стальной цилиндр) значения напряжений, воспользовавшись формулой (1.21), и приняв $p_B = p_k$, $r = r_B = 20$ см, $r_H = 25$ см:

$$\sigma_r = \frac{p_B r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 \mp \frac{r_H^2}{r} \right) = \frac{p_k 20^2}{25^2 - 20^2} \left(1 \mp \frac{25^2}{20^2} \right) = p_k 1,778 (1 \mp 1,563);$$

$$\sigma_r = -p_k \text{ и } \sigma_\theta = 4,557 p_k.$$

Запишем для правой части этого равенства (бронзовый цилиндр) значения напряжений воспользовавшись формулой (1.20) и приняв $p_B = p$, $p_H = p_k$, $r_B = 10$ см, $r = r_H = 20$ см:

$$\sigma_r = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{(p_B - p_H) r_B^2 r_H^2}{(r_H^2 - r_B^2) r^2} =$$

$$= \frac{p \cdot 10^2 - p_k \cdot 20^2}{20^2 - 10^2} \mp \frac{(p - p_k) \cdot 10^2 \cdot 20^2}{(20^2 - 10^2) \cdot 20^2} = \frac{p - 4p_k}{3} \mp \frac{p - p_k}{3};$$

$$\sigma_r = -p_k \text{ и } \sigma_\theta = \frac{2}{3} p - \frac{5}{3} p_k = 0,667 p - 1,667 p_k.$$

Подставим полученные значения напряжения в соответствующие части уравнения совместности

$$\frac{1}{E_{\text{ст}}} (4,557 p_k - \mu_{\text{ст}} p_k) = \frac{1}{E_{\text{бр}}} (0,667 p - 1,667 p_k - \mu_{\text{бр}} p_k).$$

Преобразуем выражение

$$\frac{E_{\text{бр}}}{E_{\text{ст}}} (4,557 p_k - \mu_{\text{ст}} p_k) = 0,667 p - 1,667 p_k - \mu_{\text{бр}} p_k$$

и с учетом $\frac{E_{бр}}{E_{ст}} = \frac{1}{2}$ и значений коэффициентов Пуассона получим

$$\frac{1}{2}(4,557 p_k - 0,3 p_k) = 0,667 p - 1,667 p_k - 0,25 p_k,$$

$$2,429 p_k = 0,667 p - 1,417 p_k,$$

$$3,846 p_k = 0,667 p.$$

Откуда

$$p_k = 0,1734 p = 0,1734 \cdot 40 = 6,94 \text{ МПа.}$$

Для установления запаса прочности конструкции в соответствии с третьей теорией прочности проверим наиболее опасные с точки зрения эквивалентных напряжений места.

В бронзовом цилиндре опасными являются точки, находящиеся на внутренней поверхности. Здесь $\sigma_r = -p = -40$ МПа. Приняв $p_B = p$, $p_H = p_k$, $r = r_B = 10$ см, $r_H = 20$ см, по формуле (1.20) определим

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p \cdot 10^2 - p_k \cdot 20^2}{20^2 - 10^2} + \frac{(p - p_k) \cdot 10^2 \cdot 20^2}{(20^2 - 10^2) \cdot 10^2} = \frac{p - 4p_k}{3} + \frac{(p - p_k)4}{3} = \\ &= \frac{p - 4p_k}{3} + \frac{(p - p_k)4}{3} = \frac{5}{3}p - \frac{8}{3}p_k = \frac{5}{3}40 - \frac{8}{3}6,94 = 48,16 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Тогда $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = 48,16 - (-40) = 88,16$ МПа.

Коэффициент запаса $n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}} = \frac{90}{88,16} = 1,021$, т.е. прочность не на-

рушается.

В стальном цилиндре опасными также являются точки, находящиеся на его внутренней поверхности. Здесь, как ранее было показано, напряжения $\sigma_r = -p_k = -6,94$ МПа, а $\sigma_\theta = 4,557 p_k = 4,557 \cdot 6,94 = 31,63$ МПа.

Тогда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = 31,63 - (-6,94) = 38,57 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса $n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}} = \frac{300}{38,57} = 7,778$, т.е. прочность не на-

рушается.

Меньший коэффициент (1,021 – для бронзового цилиндра) принимаем для всей конструкции.

2.9. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 2.9

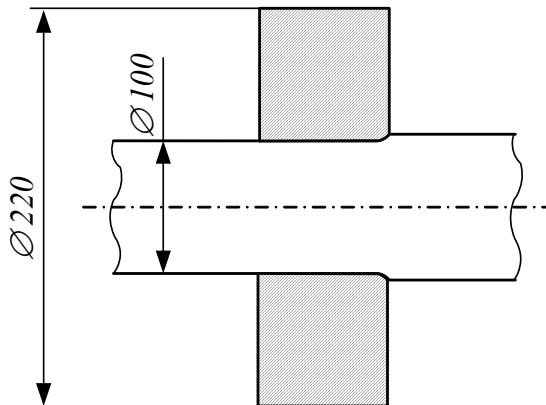


Рис. 2.22

Определить величину контактного давления на поверхностях соприкосновения стальных втулки и вала (рис. 2.22) без учета концентрации напряжений, если натяг $\delta = 0,25$ мм (модуль упругости $E = 200$ ГПа).

Ответ: 198,3 МПа.

Задача № 2.10

Определить наружный диаметр $2b$, диаметр $2c$ контактной поверхности и величину натяга δ составного двухслойного орудийного ствола, внутренний диаметр которого $2a = 100$ мм. Максимальное давление в момент выстрела $p = 200$ МПа. Ствол изготовлен из стали, условный предел текучести которой $\sigma_{0,2} = 600$ МПа и модуль упругости $E = 200$ ГПа. Требуемый коэффициент запаса $n = 2$.

Ответ: $2b = 300$ мм; $2c = 173$ мм; $\delta = 0,173$ мм.

Задача № 2.11

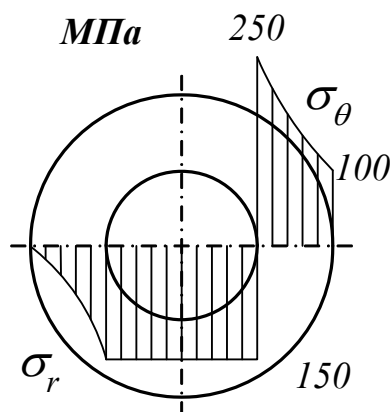


Рис. 2.23

На цилиндр диаметром $d = 100$ мм в горячем состоянии надета втулка, толщина стенки которой $h = 50$ мм. Внутренний диаметр втулки до нагрева был на $0,002d$ меньше диаметра цилиндра. Построить эпюры напряжений, возникающих в цилиндре и втулке после остывания соединения. Указанные детали изготовлены из стали, модуль упругости которой $E = 200$ ГПа.

Ответ: см. рис. 2.23.

Замечание. Радиальные и окружные напряжения постоянны по толщине цилиндра и равны 150 МПа.

Задача № 2.12

Диск, имеющий постоянную толщину, вложен в жесткое отверстие и подвергается воздействию внутреннего давления p (рис. 2.24). Построить эпюры напряжений σ_r и σ_θ , возникающих в диске, и рассчитать наибольшее эквивалентное напряжение в соответствии с третьей теорией

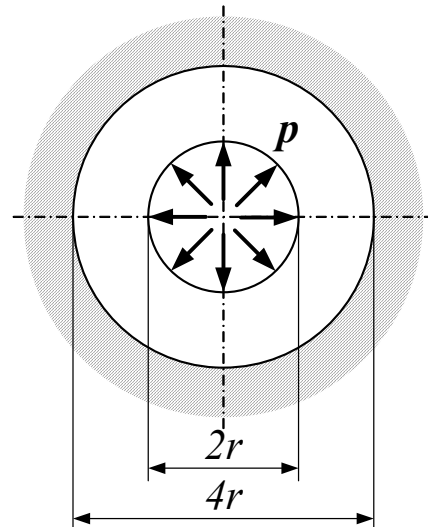


Рис. 2.24

Ответ: эпюры напряжений σ_r и σ_θ показаны на рис. 2.25. Наибольшее эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}} = 1,146p$ возникает в точках внутренней поверхности диска.

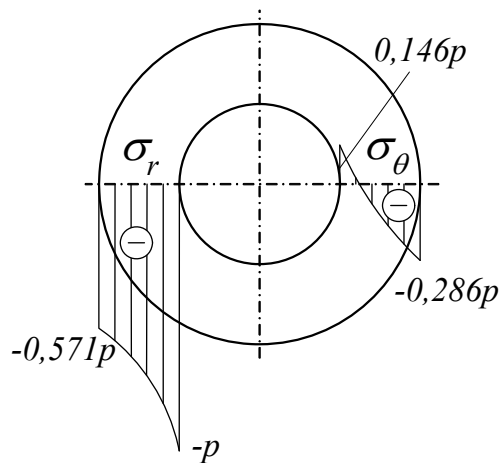


Рис. 2.25

Замечание. Контактное давление p_k необходимо определять из условия равенства нулю радиальных перемещений точек наружной поверхности диска.

Задача № 2.13

Два длинных стальных цилиндра показаны в разрезе на рис. 2.26. Первый цилиндр (см. рис. 2.26, а) имеет наружный диаметр 240 мм и внутренний диаметр 120 мм. Второй цилиндр (см. рис. 2.26, б) образован из двух труб: первая имеет наружный диаметр 180 мм и внутренний – 120 мм; вторая труба имела до нагрева наружный диаметр 240 мм, а внутренний – 170,865 мм. Вторая труба была нагрета и насажена на первую. Воспользовавшись третьей теорией прочности, определить величину допустимого внутреннего давления $[p]$ в каждом цилиндре при допуске

нии $[\sigma] = 300$ МПа. Вычислить величину окружных, радиальных и продольных нормальных напряжений в точках, отстоящих на расстоянии 60, 90 и 120 мм от оси цилиндров; $E = 200$ ГПа.

Ответ: при остывании между трубами второго цилиндра возникает давление 24,3 МПа. Допустимые внутренние давления $[p]_a = 112,5$ МПа и $[p]_б = 145,3$ МПа. Напряжения, вызванные действием этих давлений, показаны на рис. 2.26, а, б.

Замечание. Согласно условию задачи цилиндры – длинные и на удалении от их концов продольные деформации отсутствуют, однако при этом можно определить продольные напряжения (см. задачу № 1.10).

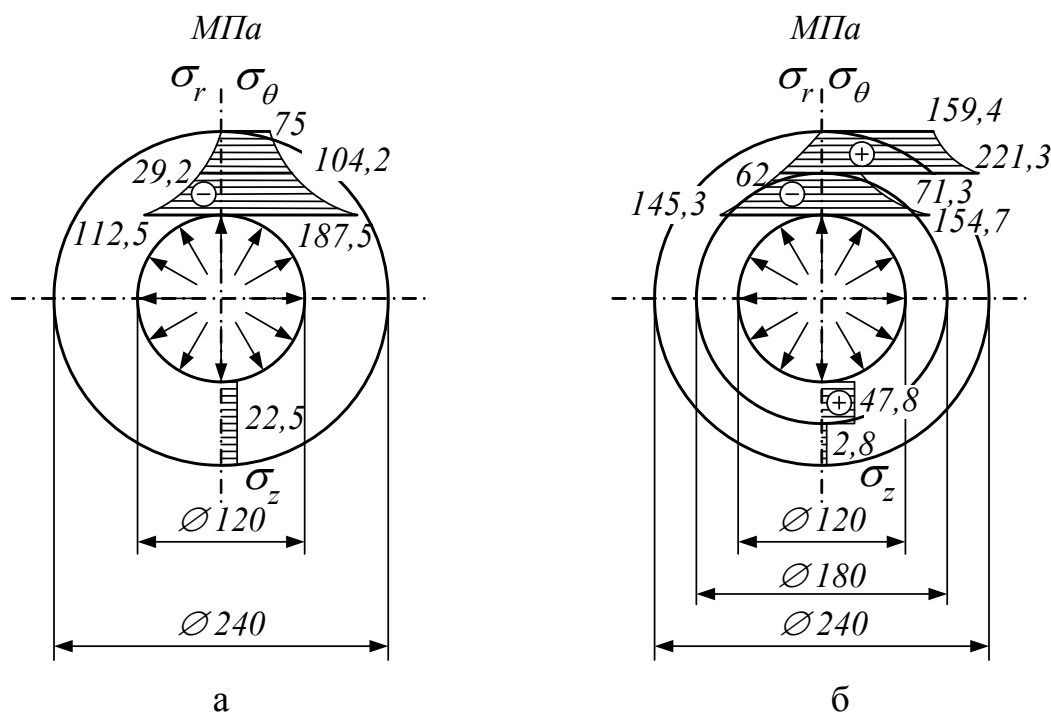


Рис. 2.26

Задача № 2.14

Построить эпюры радиальных и окружных напряжений по толщине стенки двухслойного стального цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления $p = 150$ МПа. Внутренний и внешний радиусы составного цилиндра – 120 и 200 мм соответственно; радиус сопряжения внутреннего и наружного цилиндров – 160 мм; натяг (разность диаметров сопрягаемых поверхностей) – 0,26 мм.

Ответ: см. рис. 2.27

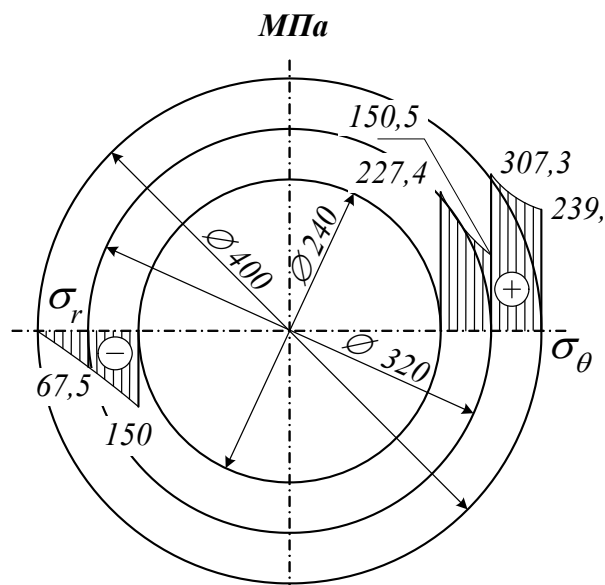


Рис. 2.27

Задача № 2.15

На стальной вал диаметром $d = 40$ мм насажен с натягом стальной шкив диаметром $D = 80$ мм. Найти величину минимального натяга, обеспечивающего передачу момента $M_k = 1$ кНм с помощью силы трения; коэффициент трения $f = 0,15$; ширина шкива $l = 60$ мм; $E = 200$ ГПа.

Ответ: момент сил трения приравниваем к внешнему моменту, согласно которому определяем давление $p_k = 44,3$ МПа от действия натяга (см. задачу № 2.7), с помощью которого вычисляется натяг (разность диаметров) 0,0472 мм.

Задача № 2.16

Во сколько раз можно увеличить внутреннее давление в алюминиевой трубке внутренним диаметром 10 мм и наружным диаметром 20 мм безопасно для ее прочности, если на нее надеть без натяга тонкостенную стальную трубку, толщина стенки которой $t = 2$ мм? Коэффициент Пуассона алюминия $\mu = 0,34$; модули упругости $E_{ал} = 70$ ГПа, $E_{ст} = 200$ ГПа. Расчет выполнить в соответствии с третьей теорией прочности.

Ответ: внутреннее давление можно увеличить в 1,285 раза. Эта задача сходна с задачей № 2.8, но внешняя трубка – тонкостенная. Поэтому радиальное смещение точек контактной поверхности стальной трубки рав-

$$\text{но } \frac{p_k r_{нст}^2}{E_{ст} t}.$$

3. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим подробнее вопросы, связанные с автофретированием (см. подразд. 2.5). Впервые эта проблема была исследована в 1874 г. французским ученым в области механики Барре де Сен-Венаном*.

3.1. Два способа автофретирования

Автофретирование (автоскрепление) толстостенных труб выполняется либо в упругопластической стадии нагружения, когда в трубе существуют упругая и пластическая области, либо в пластической стадии, когда упругая область исчезает и интенсивность напряжений σ_i во всех точках трубы выше предела текучести σ_T .

Существует два способа автофретирования.

Первый способ. Автофретирование с продольным растяжением. Труба закрывается пробками (рис. 3.1, а) и давление, действующее на них, вызывает растягивающую силу

$$N = p\pi a^2.$$

Второй способ. Автофретирование без продольного растяжения. В этом случае пробки, снабженные обтюрирующими** замками, не ввинчиваются в трубу, а соединяются между собой посредством одного центрального стержня (рис. 3.1, б) или нескольких нецентральных стержней (рис. 3.1, в). При таком способе автофретирования в трубе отсутствует растягивающая сила.

* Барре де Сен-Венану (23.08.1797 – 6.01.1886) принадлежат труды по теории упругости (т. н. принцип Сен-Венана), сопротивлению материалов и др. Заложил основы теории пластичности.

** обтюратор (от лат. obturo – закрываю) – заслонка, затвор

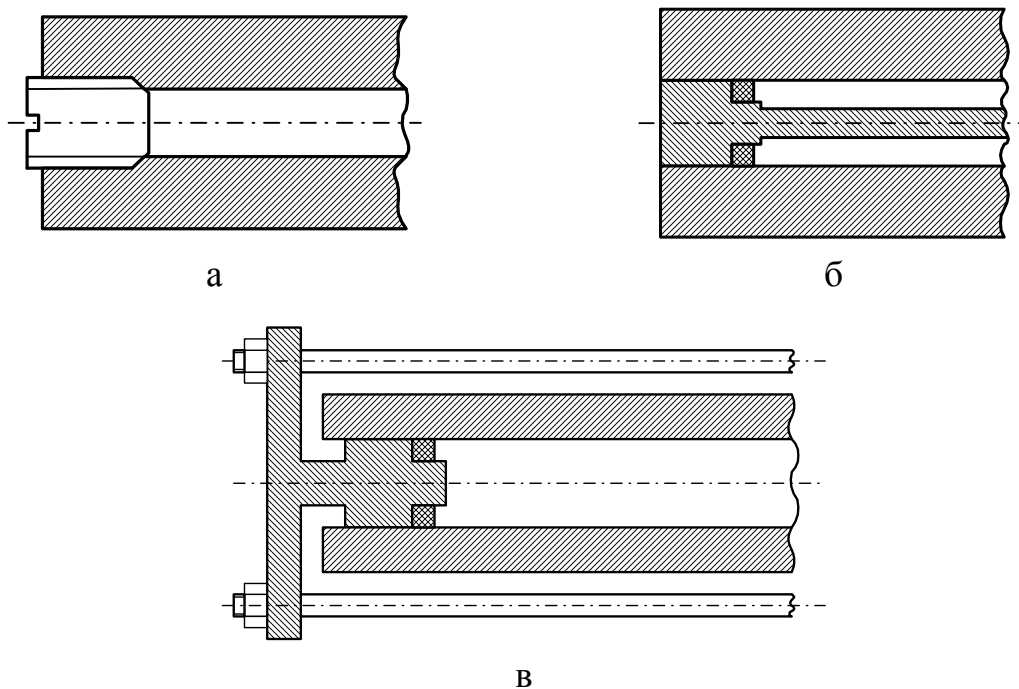


Рис. 3.1

3.2. Идеальный упругопластический материал

Предположим, что материал из которого изготовлен цилиндр является идеальным упругопластическим, т.е. соответствует диаграмме Прандтля* (рис. 3.2). Зависимость между напряжениями и деформациями в этом материале имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= E\varepsilon_i & \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T, \\ \sigma_i &= \sigma_T & \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \end{aligned} \quad (3.1)$$

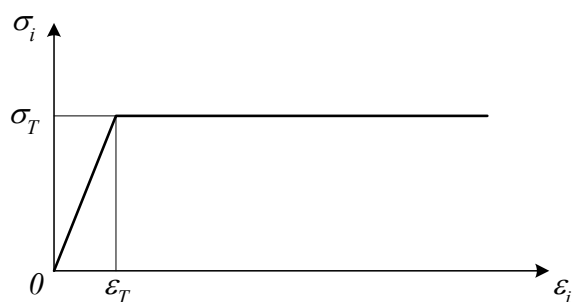


Рис. 3.2

* Людвиг Прандтль (4.02.1875 – 15.08.1953) – немецкий ученый, один из основателей аэродинамики, создатель научной школы по прикладной гидроаэромеханике. Ввел представление о пограничном слое и отрывном течении, выполнил фундаментальные исследования турбулентности (в том числе свободной атмосферы), сверхзвукового истечения, теплопередачи в потоке.

Ранее при анализе упругой деформации толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления были получены зависимости $\sigma_r(r)$ (1.21).

Наибольшие величины окружного растяжения и радиального сжатия наблюдаются у внутренней поверхности цилиндра. Здесь же действует наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{2} \right) \Big|_{x=a} = \frac{pb^2}{b^2 - a^2}. \quad (3.2)$$

Постепенно увеличивая внутреннее давление, можно достигнуть предела, когда материал внутренней поверхности цилиндра начнет течь. Это произойдет, когда наибольшее касательное напряжение (3.2) станет равным напряжению τ_T – пределу текучести. Подставив это значение в формулу (3.2), определим давление, при котором начинается течение материала:

$$p_T = \tau_T \frac{b^2 - a^2}{b^2}. \quad (3.3)$$

Приняв, например, $b = 2a$, получим в частном случае $p_T = 0,75\tau_T$.

При дальнейшем увеличении давления возрастает проникновение пластической деформации по толщине стенки цилиндра, и, наконец, при давлении $p_{вр}$ вся стенка будет вовлечена в состояние текучести.

Распределение напряжений в стенке цилиндра можно исследовать, предположив, что материал имеет резко выраженный предел текучести (площадку текучести), а при этом течение происходит при постоянном касательном напряжении, равном τ_T . В данном случае для каждой точки распространения пластической деформации

$$\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{2} = \tau_T. \quad (3.4)$$

Другое уравнение для установления главных напряжений σ_r и σ_{θ} получим, рассмотрев равновесие элемента стенки, показанного на рис. 1.2. Ранее получено уравнение равновесия (1.4), которое легко представить в следующем виде:

$$\sigma_r - \sigma_{\theta} - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (3.5)$$

Подставив вместо разности главных напряжений ее значение из уравнения (3.4), запишем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\tau_T}{r}. \quad (3.6)$$

Проинтегрировав это уравнение, определим

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln r + C. \quad (3.7)$$

Произвольную постоянную интегрирования C получим из условия, что на наружной поверхности цилиндра при $r = b$ радиальное напряжение $\sigma_r = 0$, поэтому

$$0 = 2\tau_T \ln b + C; \quad C = -2\tau_T \ln b.$$

Подставив полученное значение C в уравнение (3.7), запишем

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{b}. \quad (3.8)$$

Это позволяет установить, что на внутренней поверхности цилиндра

$$\sigma_r|_{r=a} = 2\tau_T \ln \frac{a}{b}, \quad (3.9)$$

а давление, которое потребуется, чтобы вся стенка цилиндра находилась в состоянии пластической деформации, запишем в виде

$$p_{\text{вр}} = \sigma_r|_{r=a} = -2\tau_T \ln \frac{a}{b}.$$

Например, приняв $b = 2a$, получим $p_{\text{вр}} = 2\tau_T \ln 2 = 0,693(2\tau_T)$.

С учетом выражения (3.8) для описания радиальных напряжений из уравнения (3.4) получим окружное напряжение

$$\sigma_\theta = 2\tau_T \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right). \quad (3.10)$$

Если $b = 2a$, то из этого выражения находим

$$\sigma_\theta|_{r=a} = 2\tau_T \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right) = 0,307(2\tau_T);$$

$$\sigma_\theta|_{r=b} = 2\tau_T.$$

Распределение напряжений σ_r и σ_θ по толщине стенки для частного случая $b = 2a$ показано на рис. 3.3 кривыми mln и st соответственно.

Если после вовлечения материала цилиндра в состояние текучести устранить внутреннее давление, то некоторые остаточные деформации сохранятся в стенке цилиндра. Эти деформации можно определить, предположив, что при разгрузке материал следует закону Гука. В данном случае

напряжения, которые необходимо вычесть при разгрузке цилиндра (снятии давления), определим из выражением (1.21), если подставим в него $p_{вр}$ вместо p .

Остаточные напряжения σ_r и σ_θ показаны на рис. 3.3 внизу отдельно. Как видно из этого рисунка, в части стенки цилиндра вследствие пластической деформации возникают значительные сжимающие напряжения. Однако при этом предполагаем, что это сжимающее напряжение меньше напряжения предела текучести и при разгрузке не происходит течение материала.

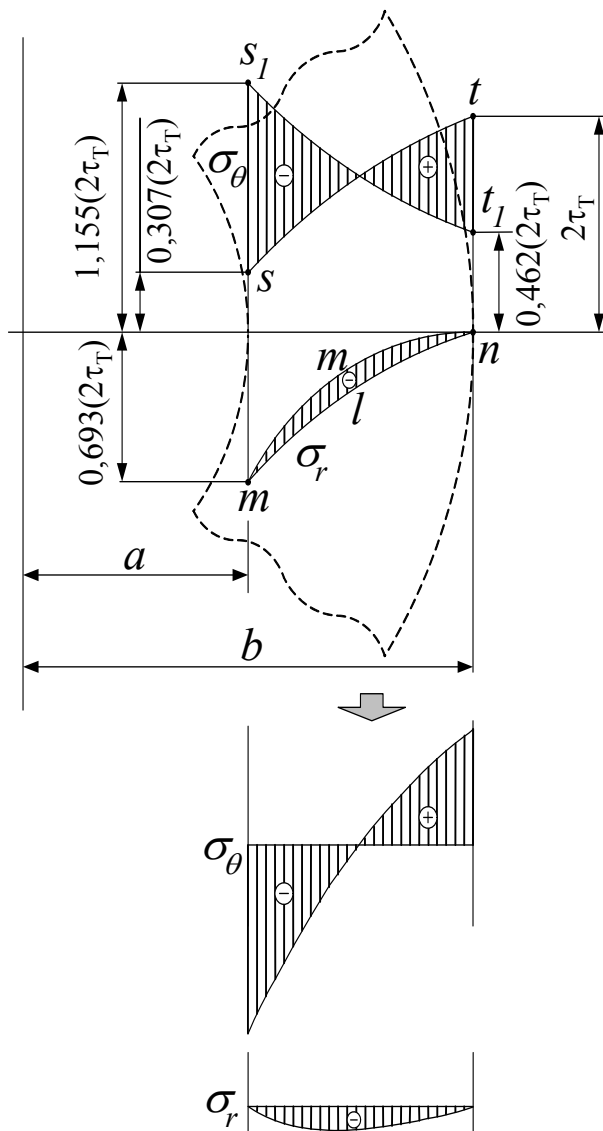


Рис. 3.3

Если цилиндр с такими остаточными напряжениями снова нагрузить внутренним давлением $p_{вр}$, окружные напряжения под действием этого давления, описанные кривой s_1t_1 , наложатся на остаточные напряжения, изображенные в виде заштрихованных площадок, и суммарное распределение напряжений можно представить кривой st . Полученное наибольшее напряжение равно $2\tau_T$, но при повторном нагружении никакого течения материала не произойдет. Следовательно, остаточные напряжения, возникающие при пластическом расширении цилиндра, обеспечивают увеличение давления, которое может выдержать цилиндр в пределах упругости.

В описанном случае предполагали, что приложено такое внутреннее давление, которое вовлекло весь цилиндр в состояние текучести, но дан-

ный способ может быть также применен в случаях, когда лишь внутренняя часть стенки находится в состоянии текучести, а наружная часть остается в упругом состоянии.

Допустим, что приложено внутреннее давление p' такое, что $p_T < p' < p_{вр}$, и пусть c – радиус цилиндрической поверхности, которая разделяет области пластических и упругих деформаций. На этой границе радиальное давление, действующее между двумя указанными областями, обозначим X . Величину этого давления можно найти при рассмотрении внешней упругой части стенки.

Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} в этой части получим из уравнения (3.2) в результате подстановки c вместо a и X вместо p

$$\tau_{\max} = \frac{X b^2}{b^2 - c^2}.$$

Так как цилиндрическая поверхность $r = c$ разделяет упругую и пластическую зоны, материал на этой поверхности и достигает предела текучести. Следовательно,

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Таким образом, для определения давления X запишем уравнение

$$\tau_T = \frac{X b^2}{b^2 - c^2}, \quad (3.11)$$

из которого получим

$$X = \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (3.12)$$

Зная это давление, можно рассчитать напряжение в любой точке упругой области стенки, воспользовавшись выражением (1.21), в которое необходимо подставить значение радиуса c вместо a и X вместо p .

Для определения напряжений в пластической области стенки необходимо применить уравнение (3.7). Произвольную постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $r = c$ $\sigma_r = -X$, следовательно,

$$-X = 2\tau_T \ln c + C \quad \text{и} \quad C = -X - 2\tau_T \ln c.$$

Подставив полученное значение C в уравнение (3.7) и воспользовавшись выражением (3.12), запишем

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{c} - \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (3.13)$$

Приравняв r к внутреннему радиусу a цилиндра, найдем давление p' , которое следует создать, чтобы вызвать пластическую деформацию в стенке вплоть до толщины, соответствующей радиусу $r = c$. Это давление следующее:

$$p' = -2\tau_T \ln \frac{a}{c} + \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (3.14)$$

Возвратившись к примеру, где $b = 2a$, приняв $c = 1,5a$, по формуле (3.14) получим $p' = 0,624(2\tau_T)$.

Из уравнения (3.4) получим распределение окружных напряжений

$$\sigma_\theta = 2\tau_T + \sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{c} + \frac{\tau_T (b^2 + c^2)}{b^2}. \quad (3.15)$$

При $r = c$ первый член правой части обращается в нуль, и значение σ_θ становится равным значению окружного напряжения, возникающего под действием давления X в смежной упругой зоне стенки.

Выражения (3.13) и (3.15) описывают напряжения во внутренней части стенки цилиндра, которая испытывает пластические деформации.

Для определения напряжений во внешней части, которая остается упругой, необходимо пользоваться формулами, сходными с выражением (1.21).

Таким образом, задача распределения напряжений в цилиндре, который частично испытывает пластические деформации, решена.

Если после частичного течения материала стенки цилиндра, внутреннее давление p' убрать, то в стенке цилиндра останутся некоторые остаточные напряжения. Внутренняя часть стенки, в которой происходили пластические деформации, не возвратится к своему первоначальному диаметру и подвергнется давлению со стороны внешней упругой части стенки. Распределение напряжений, возникающих вследствие этого, подобно распределению напряжений, появляющихся под действием давлений при насаживании с натягом в составных цилиндрах (см. разд. 2). Эти напряжения определяют так же, как и напряжения, изображенные на рис. 3.3.

Все приведенные расчеты основаны на предположении, что достигнув предела текучести, материал далее течет без нарастания напряжений. Если этого не происходит, то остаточные напряжения нельзя определить, как было сказано выше, и следует использовать экспериментальный путь их установления. Например, можно применить способ, согласно которому

на токарном станке, начиная с внутренней поверхности цилиндра снимают тонкие слои материала один за другим, и после каждого среза измеряют деформацию, возникающую в осевом и окружном направлениях на внешней поверхности цилиндра. В результате таких измерений получают достаточно точную информацию для расчета остаточных напряжений.

Полученные решения удобны. Они хорошо иллюстрируют сущность вопроса. Однако использование третьей теории прочности, обеспечивая простоту решения, не позволяет получить достаточно точного совпадения расчетных и экспериментальных данных. Поэтому в расчетной практике, как правило, применяют иные зависимости.

3.3. Использование зависимостей теории малых упругопластических деформаций *

Рассмотрим упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Как уже отмечалось, точное решение этой задачи представляет большие трудности и осуществляется численными методами.

На примере длинной трубы приведем приближенное решение, достаточно хорошо согласующееся с точным. Труба находится в условиях плоской деформации, следовательно, в цилиндрической системе координат r , θ , z касательные напряжения

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (3.16)$$

* В основе теории малых упругопластических деформаций лежат следующие законы, вытекающие из обобщения экспериментальных материалов:

первый закон – закон изменения объема. *При упругопластическом деформировании объемная деформация твердого тела всегда является упругой и подчиняется закону Гука.*

второй закон – закон изменения формы. *При активном упругопластическом деформировании (текущие напряжения превышают по модулю значения предшествующих по времени) в процессе простого деформирования направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают.*

третий закон – *интенсивность напряжения σ_i при активном деформировании данного материала является вполне определенной функцией интенсивности деформаций ε_i независимо от вида напряженного состояния.*

При работе материала в упругой зоне нормальные и окружные напряжения определяются формулой (1.21). Осевые нормальные напряжения σ_z при плоской деформации определяют так:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (3.17)$$

Для упрощения задачи материал трубы считаем несжимаемым, т. е. коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$; материал не упрочняется, т. е. диаграмма деформирования такая же, как на рис. 3.2. Тогда формула (3.17) принимает такой вид:

$$\sigma_z = 0,5(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (3.18)$$

В силу осевой симметрии касательные напряжения

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (3.19)$$

В упругопластической стадии сечение трубы можно считать состоящим из двух кольцевых зон: внутренней пластической, где $a \leq r \leq c$, и наружной упругой, где $c \leq r \leq b$ (рис. 3.4).

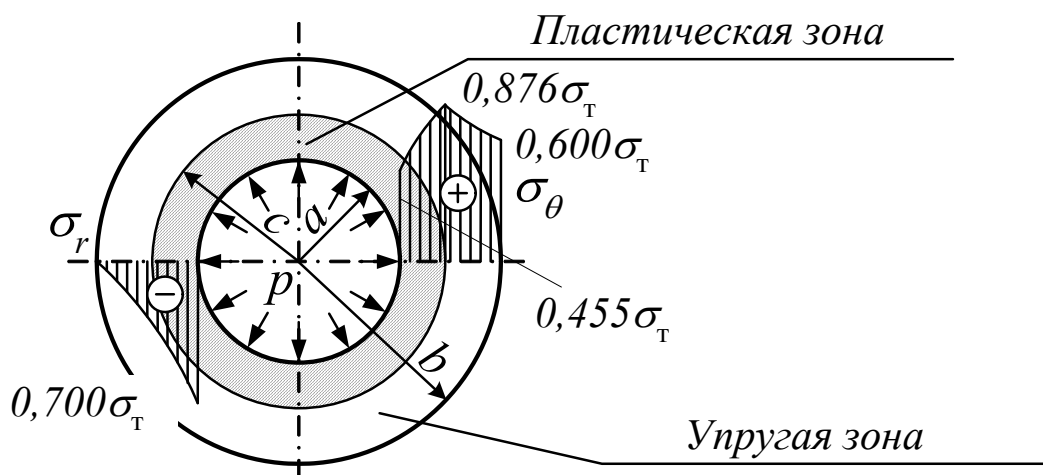


Рис. 3.4

Для упругой зоны действительна формула (1.21), которая принимает вид

$$\sigma_r = \frac{p_k c^2}{b^2 - c^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (3.20)$$

где p_k – радиальное давление на границе между упругой и пластической зонами (при $r = c$).

Определим напряжения в пластической зоне.

Материал трубы, как было принято, не обладает упрочнением. Согласно рассматриваемой теории принимаем условие пластичности Губерта-Мизеса-Генки: $\sigma_i = \sigma_T$, где σ_i – величина, пропорциональная кас-

тельному напряжению на октаэдрических площадках, т. е. на площадках, равнонаклоненных ко всем трем главным напряжениям. Значение σ_i в цилиндрической системе координат выглядит следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{zr}^2)}. \quad (3.21)$$

Подставляя значения напряжений (3.16) – (3.19), находим

$$\sigma_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (3.22)$$

В рассматриваемой задаче напряжение σ_θ всегда больше напряжения σ_r , поэтому в условие пластичности подставляем положительное значение интенсивности напряжений (3.22)

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \quad (3.23)$$

Решив совместно уравнение равновесия плоской задачи в полярной системе координат (1.4) и (3.23), получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T}{r}. \quad (3.24)$$

Проинтегрировав это уравнение с разделенными переменными, найдем

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln r + C. \quad (3.25)$$

Используя граничное условие на внутренней поверхности трубы, где при $r = a$, $\sigma_r = -p$, получим уравнение

$$-p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln a + C. \quad (3.26)$$

Отсюда определим постоянную интегрирования

$$C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln a - p. \quad (3.27)$$

Теперь выражение (3.25) примет вид

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{a}. \quad (3.28)$$

Воспользовавшись уравнением (3.23) можно рассчитать напряжение σ_θ .

Таким образом, напряженное состояние в пластической зоне трубы характеризуется следующими напряжениями:

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \quad (3.29)$$

На границе между упругой и пластической зонами напряжения σ_r и σ_θ должны быть непрерывными. Приравняв правые части соответствующих выражений (3.20) и (3.29), при $r = c$ получим два уравнения для определения p_k и c :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{p_k c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} - 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a}; \\ \frac{p_k c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} + 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Из первого уравнения (3.30) найдем

$$p_k = p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a} \quad (3.31)$$

и, подставив во второе уравнение (3.30), получим

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{p\sqrt{3}}{2\sigma_T}. \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) служит для определения радиуса c окружности, разграничивающей упругую и пластическую зоны трубы как функции внутреннего давления p . Его решим численно или графически.

Теперь можно в общем виде получить решение для двух предельных случаев деформирования трубы.

1. Предел упругого деформирования. Это состояние соответствует значению радиуса $c = a$. Из уравнения (3.32) найдем давление

$$p_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (3.33)$$

Внеся это значение в формулу (1.21), получим соответствующие напряжения

$$\sigma_r = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (3.34)$$

Эпюры напряжений в трубе с отношением наружного и внутреннего радиусов $b/a = 2$ показаны на рис. 3.5. В этом случае $p_T = 0,433\sigma_T$.

2. Предел пластического деформирования. Это состояние соответствует значению радиуса $c = b$ и снова из уравнения (3.32) найдем давление

$$p_{\text{вр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (3.35)$$

После подстановки полученного значения давления в формулы (3.29) определим напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{r}; \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 - \ln \frac{b}{r}\right). \quad (3.36)$$

Эпюры напряжений при указанном выше отношении наружного и внутреннего радиусов показаны на рис. 3.6. В этом случае предельное давление $p_{\text{вр}} = 0,800 \sigma_T$.

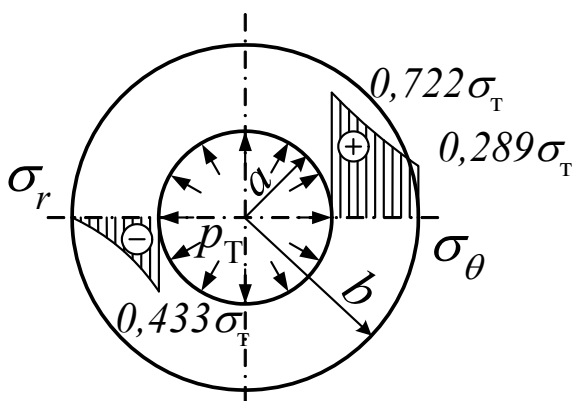


Рис. 3.5

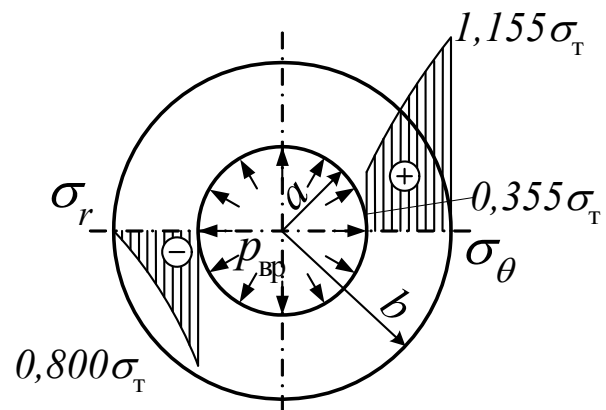


Рис. 3.6

Если $p_T < p < p_{\text{вр}}$, то материал трубы будет находиться в упруго-пластическом состоянии. На рис. 3.4 изображены эпюры напряжений σ_r и σ_θ , соответствующие давлению $p = 0,700 \sigma_T$. В данном случае при $b/a = 2$ радиус границы c между упругой и пластической зонами, определенный из уравнения (3.32), равен $1,44a$.

Радиальное давление $p_k = 0,279 \sigma_T$ согласно выражению (3.31).

Подставив значение p_k в формулы (3.29), получим напряжения в пластической зоне трубы (в пределах $a \leq r \leq 1,44a$)

$$\sigma_r = \sigma_T \left(1,155 \ln \frac{r}{a} - 0,700\right); \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 1,155 \sigma_T. \quad (3.37)$$

Подставив значения радиуса $c = 1,44a$, отношения радиусов $b/a = 2$ и давления $p_k = 0,279 \sigma_T$ в формулу (3.20), найдем напряжения в упругой зоне (в пределах $1,44a \leq r \leq 2a$)

$$\sigma_{r\theta} = 0,300\sigma_T \left(1 \mp 4 \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (3.38)$$

В точках на внутренней поверхности трубы (при $r = a$) из формул (3.37) получаем

$$\sigma_r = -0,700\sigma_T; \quad \sigma_\theta = 0,455\sigma_T,$$

а в точках на границе упругой и пластической зон (при $r = 1,44a$) из формул (3.37) или (3.38) определяем

$$\sigma_r = -0,279\sigma_T; \quad \sigma_\theta = 0,876\sigma_T$$

и, наконец, в точках наружной поверхности трубы (при $r = 2a$) из выражения (3.38) находим

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = 0,600\sigma_T.$$

Из эпюр, изображенных на рис. 3.4 – 3.6, видно, что нормальные радиальные напряжения при переходе материала трубы из упругого состояния в пластическое не изменяют характера распределения, а лишь возрастают пропорционально росту давления. Поведение нормальных окружных напряжений в пластической стадии резко отличается от их распределения в упругой стадии работы материала. В упругой стадии в наиболее тяжелых условиях находится материал внутренних слоев трубы, а в пластической – наружных. Последнее подтверждается опытами, проведенными со стальными трубами, разрушение которых начинается с поверхности.

В заключение приведем формулы для определения напряжений, полученные на основе выражений (3.18), (3.20), (3.29) и (3.30):

в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c}{b} \right)^2; \end{aligned} \quad (3.39)$$

в пластической области

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{c} + \left(\frac{c}{b} \right)^2 - 1 \right]; \\
\sigma_\theta &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{c} + \left(\frac{c}{b} \right)^2 + 1 \right]; \\
\sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{c} + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{3.40}$$

где напряжения зависят от a , b , c и σ_T .

Ранее (в подразд. 3.3) было принято, что осевая деформация

$$\varepsilon_z = 0. \tag{3.41}$$

Согласно теории малых упругопластических деформаций зависимости компонентов деформации от компонентов напряжений в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_r - \sigma_0); \\
\varepsilon_\theta &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_\theta - \sigma_0); \\
\varepsilon_z &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

где σ_i было приведено ранее (см. формулу 3.21), а

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}. \tag{3.43}$$

Рассмотрим радиальные перемещения.

Радиальная ε_r и окружная ε_θ деформации связаны с радиальным перемещением u и радиусом r соотношениями (1.5) и (1.6): $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$;

$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$, откуда согласно (1.7) $u = \varepsilon_r r$.

Принятая величина коэффициента Пуассона обеспечивает условие несжимаемости

$$\varepsilon_0 = 0, \tag{3.44}$$

из которого с учетом выражений (3.41), (1.5) и (1.6) может быть получено дифференциальное уравнение для описания радиального перемещения, которое справедливо как в упругой, так и в пластической областях. Поэтому

зависимость радиального перемещения от радиуса может быть установлена по формуле (1.7) с использованием закона Гука и величин напряжений в упругой области:

$$u = \frac{r}{E} \left[\sigma_{\theta} - \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_r) \right]. \quad (3.45)$$

Подставив в это выражение значения напряжений из формул (3.39), получим зависимость радиального перемещения от радиуса, справедливую как в упругой, так и пластической областях:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_T}{E} \frac{r_T^2}{r}. \quad (3.46)$$

Определим теперь величину осевой (продольной) силы в поперечном сечении трубы, которая связана с напряжениями σ_z соотношением

$$P_z = N = 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr. \quad (3.47)$$

Подставим в это выражение значение напряжения σ_z из формул (3.39), (3.40) и получим

$$P_z = N = 2\pi \int_a^c \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{c} + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right] r dr + 2\pi \int_c^b \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c}{b} \right)^2 r dr. \quad (3.48)$$

Из выражений (3.31) и (3.32) выведем уравнение, связывающее радиус границы c , отделяющей упругую область от пластической, и приложенное давление

$$p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \frac{c}{a} - \frac{c^2}{b^2} + 1 \right), \quad (3.49)$$

а, используя его в соотношении (3.48) после вычисления интегралов, получим

$$P_z = N = p \pi a^2. \quad (3.50)$$

Очевидно, что именно такая осевая сила возникает в толстостенной трубе с днищами под действием внутреннего давления. Таким образом, осевая деформация равна нулю, если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если труба изготовлена из несжимаемого материала и величину осевой силы, возникающей только в результате давления на днище, в этом случае определяют по формуле (3.50).

3.4. Упругопластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой при линейном упрочнении

Рассмотрим случай, когда диаграмма деформирования может быть схематизирована в виде диаграммы без площадки текучести с линейным упрочнением (рис. 3.7).

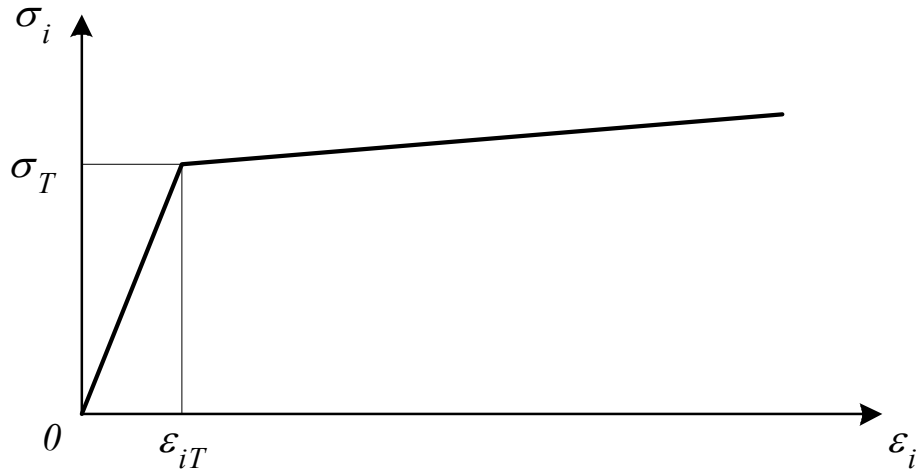


Рис. 3.7

Считаем (как и в подразд. 3.3), что материал трубы несжимаемый ($\varepsilon_0 = 0$) и осевая деформация трубы равна нулю ($\varepsilon_z = 0$). При этом напряжения в упругой области определяем по-прежнему по формуле (3.20). В дальнейшем для упрощения вместо этой формулы примем, что радиальное и окружное напряжения в упругой области

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(A \mp \frac{B}{r^2} \right). \quad (3.51)$$

Коэффициент $\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T$ в формуле (3.51) введен для удобства последующих выкладок и влияет только на величины постоянных интегрирования. Так же, как и ранее соотношения (3.18) и (3.23) остаются справедливыми.

Установим напряжения в пластической области.

Дифференциальное уравнение (1.4) с использованием соотношения (3.23) принимает вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_i}{r}. \quad (3.52)$$

При отсутствии площадки текучести для несжимаемого материала при $\varepsilon > \varepsilon_{iT}$ запишем

$$\sigma_i = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_i, \quad (3.53)$$

где $\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}$ – параметр упрочнения;

E_T – модуль упрочнения при растяжении.

Подставив выражение (3.53) в уравнение (3.52), получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\lambda \sigma_T}{r} + \frac{E_T \varepsilon_i}{r} \right). \quad (3.54)$$

Определим закон изменения интенсивности деформаций. Из условия несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$), отсутствия осевой деформации ($\varepsilon_z = 0$) и выражений (1.5) и (1.6) получим дифференциальное уравнение радиального перемещения

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0, \quad (3.55)$$

которое справедливо как в упругой, так и пластической областях.

Его интеграл имеет вид

$$u = \frac{C_2}{r}, \quad (3.56)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

В соответствии с формулами (1.5) и (1.6) запишем

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = \frac{C_2}{r^2}. \quad (3.57)$$

С учетом того, что зависимость интенсивности деформаций от главных линейных деформаций имеет вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (3.58)$$

использовав $\varepsilon_z = 0$ и соотношение (3.57), получим

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_2}{r^2}. \quad (3.59)$$

Подставив выражение (3.59) в уравнение (3.54), установим, что

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{E_T C_2}{\sigma_T r^3} \right). \quad (3.60)$$

После интегрирования этого соотношения получим

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{c} + C_1 - \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r^2} \right), \quad (3.61)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

С учетом соотношений (3.18), (3.22), (3.53), (3.59), (3.61) определим

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{c} + \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r^2} + C_1 + \lambda \right); \quad (3.62)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{c} + C_1 + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (3.63)$$

Краевые условия такие же, как и в подразд. 3.3.

Из первого краевого условия ($\sigma_r|_{r=a} = -p$), используя выражение (3.61), получим

$$\lambda \ln \frac{r_1}{c} + C_1 - \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T a^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\sigma_T}. \quad (3.64)$$

Применив второе краевое условие ($\sigma_r|_{r=b} = 0$), с помощью формулы (3.51) установим

$$A - \frac{B}{b^2} = 0. \quad (3.65)$$

Из третьего и четвертого краевых условий (непрерывность радиальных и окружных напряжений σ_r и σ_θ на границе упругой и пластической областей) с использованием соотношений (3.51), (3.61), (3.62) запишем уравнения

$$C_1 - \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T c^2} = A - \frac{B}{c^2}; \quad (3.66)$$

$$C_1 + \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T c^2} + \lambda = A + \frac{B}{c^2}. \quad (3.67)$$

Решим уравнения (3.64) - (3.67) относительно A , B , C_1 и C_2 с учетом того, что при $r = c$ $\varepsilon_i = \varepsilon_T$ и, следовательно, согласно формуле (3.59) получим

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_2}{c^2} = \frac{\sigma_T}{E}. \quad (3.68)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A &= \frac{c^2}{2b^2}; & B &= \frac{c^2}{2}; \\
C_2 &= \frac{c^2 - \lambda b^2}{2b^2}; & C_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_T}{E} c^2.
\end{aligned}
\tag{3.69}$$

Подставим величины C_1 и C_2 в соотношение первого краевого условия (3.64) и получим уравнение, связывающее радиус c границы, разделяющей упругую и пластическую области, и приложенное давление p , аналогично уравнению (3.49):

$$p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{c}{a} + (1-\lambda) \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} + \lambda \right].
\tag{3.70}$$

Как и уравнение (3.49), это выражение может быть решено численно или графически.

Подставив постоянные C_1 и C_2 , определенные по формулам (3.69), в соотношения (3.61) – (3.63), получим выражения для вычисления напряжений в пластической области:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{r}{c} - (1-\lambda) \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{b^2} - \lambda \right]; \\
\sigma_\theta &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{r}{c} + (1-\lambda) \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{b^2} + \lambda \right]; \\
\sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2\lambda \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} \right).
\end{aligned}
\tag{3.71}$$

Если в этих соотношениях предположить $\lambda = 1$ ($E_T = 0$), получим формулы (3.40), приведенные в подразд. 3.3 при отсутствии упрочнения.

Приведенные выше выражения позволяют получить приемлемые величины напряжений в точках, удаленных от торцов цилиндра.

Библиографический список

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – Изд. 15-е. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
2. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. – Изд. 3-е. – М.: Высш. шк., 1969. – 734 с.
3. Лихарев К. К., Сухова Н. А. Сборник задач по курсу «Сопротивления материалов». – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
4. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
5. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин. – М.: Машиностроение, 1962. – 292 с.
6. Никифоров С. Н. Сопротивление материалов. – Изд. 4-е. – М.: Высш. шк., 1966. – 584 с.
7. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. – Изд. 2-е. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
8. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В. К. Качурина. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
9. Сопротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко – Изд. 5-е. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.
10. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов: В 2 т. – Изд. 2-е. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. Элементарная теория и задачи. – 364 с.
11. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов: В 2 т. – Изд. 2-е. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946. – Т. 2: Более сложные вопросы теории и задачи. – 456 с.
12. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 591 с.
13. Шапиро Д. М., Подорванова А. И., Миронов А. Н. Сборник задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие. – Изд. 3-е. – М.: Высш. школа, 1970. – 335 с.

ВВЕДЕНИЕ	3
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	4
1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ (ЗАДАЧА ЛАМЕ).....	5
1.1. Постановка задачи	5
1.2. Вывод уравнения равновесия элемента трубы	6
1.3. Условие совместности деформаций выделенного элемента	7
1.4. Совместное решение уравнения равновесия и условия совместности деформаций	8
1.5. Частные случаи	11
1.5.1. Толстостенный цилиндр под действием внутреннего давления	11
1.5.2. Толстостенный цилиндр под действием наружного давления.....	14
1.6. Определение напряжений в толстостенной трубе с эксцентричным отверстием.....	15
1.7. Определение напряжений в толстостенной сфере	16
1.8. Вопросы для самоконтроля.....	18
1.9. Примеры решения задач определения напряжений в толстостенной трубе	19
1.10. Задачи для самостоятельного решения.....	35
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ (ЗАДАЧА ГАДОЛИНА).....	39
2.1. Постановка задачи о расчете составных цилиндров	39
2.2. Определение контактного давления	40
2.3. Прочность составного цилиндра	43
2.4. Сравнение прочности составного и сплошного цилиндров	49
2.5. Автофретирование и другие конструктивно- технологические решения повышения прочности в технике высоких давлений.....	50
2.6. Составные цилиндры разной длины	51
2.7. Вопросы для самоконтроля.....	52
2.8. Примеры решения задач расчета составных цилиндров	53
2.9. Задачи для самостоятельного решения.....	76

3. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ	80
3.1. Два способа автофретирования	80
3.2. Идеальный упругопластический материал	81
3.3. Использование зависимостей теории малых упругопластических деформаций	87
3.4. Упругопластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой при линейном упрочнении	95
Библиографический список.....	99

Дибир Александр Геннадиевич
Макаров Олег Владимирович
Пекельный Николай Иванович
Юдин Геннадий Иванович
Гребенников Михаил Николаевич

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Часть 1

Редактор В. М. Коваль

Св. план, 2007

Подписано в печать 22.03.2007

Формат 60×84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 5,7. Уч.-изд. л. 6,38. Т. 200 экз. Заказ 126. Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Издательский центр "ХАИ"
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

